



Informe Técnico: **II-INME-2020-570**

MODELADO Y SIMULACIÓN DE PELÍCULAS DELGADAS CON SIMETRÍA PARIDAD TIEMPO

Estudio de la reflectancia y transmitancia en estructuras periódicas

Autores

Alejandro Padrón Godínez
Rafael Prieto Meléndez
Alberto Herrera Becerra
Venancio Gerardo Calva Olmos

Grupo Académico de Modelado y Simulación de Procesos

Fecha:

Diciembre - 2020

Tipo de Proyecto Interno

Financiamiento interno

MODELADO Y SIMULACIÓN DE PELÍCULAS DELGADAS CON SIMETRÍA PARIDAD TIEMPO

Alejandro Padrón Godínez
Rafael Prieto Meléndez
Alberto Herrera Becerra
Venancio Gerardo Calva Olmos

Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología - UNAM

Grupo Académico de Modelado y Simulación de Procesos

Resumen

Hace aproximadamente 20 años materiales con simetría paridad-tiempo que surgen de la óptica cuántica y de sistemas no-Hermitianos atraen la atención por la posibilidad de realizar la no reciprocidad, reflectividad o invisibilidad unidireccional. El comportamiento anómalo de los materiales cuando se emplean o se usan para construir películas delgadas se ha establecido como un fenómeno físico moderno. Una vez que las anomalías están bajo control esto se ha venido explotando en investigaciones básicas para el estudio de las propiedades físico-químicas de los materiales para aplicaciones industriales. Una opción tradicional para construir dispositivos con reflexión y transmisión controladas son las películas delgadas. En este trabajo se muestra como dos técnicas para el diseño óptico nos pueden ayudar a realizar un análisis del comportamiento de los coeficientes de Fresnel de la transmisión y reflexión de películas delgadas dieléctricas dopadas que presentan simetría tipo Paridad Tiempo (*Simetría- $\mathcal{PT}$*). En particular hacemos una comparación entre los métodos de múltiples reflexiones y transmisiones al estilo del Etalón de Fabry-Perot, contra el método de matrices de transferencia que se usan para diseño de dispositivos ópticos. La dinámica de variables con los parámetros complejos y constantes propios del sistema óptico, fueron obtenidas mediante el modelado y simulado numérico de las ecuaciones analíticas en Mathematica y comparadas con COMSOL de simulación por elemento finito, de la Reflectancia y la Transmitancia de películas delgadas dopadas en estudio. Donde la principal interpretación de los resultados, además de la coincidencia de simulaciones numéricas, es la unidireccionalidad en la reflectancia de las películas delgadas.

Índice

Nomenclatura.....	4
Introducción.....	5
1 Propagación de ondas planas.....	7
1.1 Ecuaciones de propagación.....	11
2 Modelado Teórico de los coeficientes de reflexión y transmisión.....	14
2.1 Coeficientes de Fresnel.....	15
2.2 Ecuaciones a la frontera.....	20
2.3 Método de múltiples reflexiones y transmisiones.....	29
3 Matrices de Transferencia.....	32
3.1 Interfaces del medio con ganancias y pérdidas.....	35
3.2 Caso de estudio una película delgada.....	39
4 Sistemas con Simetría Paridad Tiempo.....	41
4.1 Sistemas no-Hermitianos.....	42
4.2 Semiconductor y películas delgadas.....	42
4.3 Películas delgadas.....	44
4.4 Diseño y construcción de los materiales de estudio.....	45
4.5 Coeficientes de Fresnel en función de los ángulos de incidencia y refractado	46

5	Reflectancia y Transmitancia de un Dimer.....	47
5.1	Simulaciones de un Dimer con capas idénticas.....	47
5.2	Simulación de un Dimer con simetría $\mathcal{PT}$	51
6	Resultados.....	55
6.1	Optimización del espesor de las películas delgadas dieléctricas.....	55
6.2	Simulaciones numéricas de la Reflectancia Transmitancia.....	58
6.3	Comentario Final.....	61
	Conclusiones.....	61
	Anexo A	63
	Anexo B	66
	Referencias Bibliográficas.....	72

Nomenclatura

Símbolo	Significado
E	<i>Campo Eléctrico</i>
$E(z)$	<i>Propagación del campo en la dirección de “z”</i>
ε	<i>Constante dieléctrica del medio</i>
H	<i>Campo Magnético</i>
K_0	<i>Número de onda</i>
λ	<i>Longitud de onda</i>
n_C	<i>Índice de refracción complejo</i>
n_i	<i>Índice de refracción</i>
n_R	<i>Índice de refracción real</i>
$\mathcal{PT}$	<i>Paridad Tiempo</i>
r_d	<i>Coeficiente de reflexión derecha</i>
r_i	<i>Coeficiente de reflexión izquierda</i>
R_i	<i>Reflectancia derecha</i>
R_d	<i>Reflectancia izquierda</i>
S_e	<i>Matriz de dispersión efectiva</i>
SEF	<i>Simulación por Elemento Finito</i>
SMM	<i>Simulación Modelo Matemático</i>
$\hat{\sigma}$	<i>matrices de Pauli</i>
θ_i	<i>Ángulo de incidencia</i>
θ_r	<i>Ángulo de reflexión</i>
θ_t	<i>Ángulo de transmisión</i>
t_d	<i>Coeficiente de transmisión derecha</i>
t_i	<i>Coeficiente de transmisión izquierda</i>
T_d	<i>Transmitancia derecha</i>
T_i	<i>Transmitancia izquierda</i>
ω	<i>Frecuencia angular</i>

Introducción

Históricamente la óptica apareció de forma natural como una primera brecha, que confronta a la física con anomalías de películas delgadas que se mostraban en el reflejo de pompas de jabón, aire atrapado entre dos superficies de vidrio o gotas de aceite en el agua. Las películas delgadas son capas de materiales delgados con espesores que van desde algunos cuantos nanómetros hasta algunos cientos de micrómetros, las cuales son creadas por condensación una a una de materia, como átomos o moléculas. Existen películas delgadas que se forman de elementos naturales, sin embargo en los últimos años se ha trabajado en el desarrollo de películas delgadas de materiales compuestos de uno o dos elementos, (Knittl, 1998). Una opción tradicional para construir dispositivos con reflexión y transmisión controladas son las películas delgadas. En la literatura existen estructuras $\mathcal{PT}$ diseñadas para rectificar la propagación de ondas planas, usadas para producir invisibilidad en varias aplicaciones militares. Una de las más efectivas es absorber las ondas electromagnéticas emitidas por un radar para minimizar la reflexión correspondiente y minimizar la dispersión de tal forma que ninguna señal rebote de regreso al emisor (Hodgson & Olsen, 1976). Las estructuras $\mathcal{PT}$ originalmente se propusieron dentro del marco de trabajo de la Teoría de la Mecánica Cuántica y recientemente se han reconocido como un lenguaje natural matemático necesario para describir el fenómeno de propagación y transporte de ondas en estructuras sintetizadas donde mecanismos balanceados de ganancia y pérdidas puedan coexistir, es decir, sistemas que amplifican o suprimen señales. Otros ejemplos de su implementación exitosa pueden ser encontrados en áreas que oscilan entre la fotónica integrada y circuitos electrónicos a teoría de antenas y metamateriales (Feng *et al.*, 2013, Ramezani & Kottos, 2010). En mecánica cuántica la simetría- $\mathcal{PT}$, que se refiere a invariancia ante reflexión espacial y temporal provista por potenciales complejos que cumplen la propiedad $V(x) = V^*(-x)$ (Bender & Boettcher, 1998), propiedad que muestran los sistemas no-Hermitianos y que rompen la bidireccionalidad de sistemas cuánticos por considerar fuentes y sumideros.

Muchos estudios de sistemas no-Hermitianos pueden tener ventajas en la construcción de nuevos materiales para el campo de la óptica no lineal. En la literatura, hemos

encontrado procesos no-Hermitianos para la generación de fuentes de luz coherentes con la mezcla de ondas sin restricciones de coincidencia de fase como en el caso de fotones entrelazados y la conservación del momento, lo que representa una necesidad para la creación de radiación eficiente en óptica no lineal estándar, (El-Ganainy, *et al.*, 2019). En este trabajo se presenta el estudio de un diodo rectificador óptico a partir de una estructura compuesta por películas delgadas dieléctricas dopadas, de tal forma que presenten pérdida o ganancia lineal efectiva, que rompan la simetría bidireccional tradicional de los sistemas ópticos pasivos induciendo una simetría de tipo $\mathcal{PT}$. En una fuente generadora de fotones entrelazados, los diodos ópticos son elementos fundamentales altamente sensibles a retroalimentación óptica; la cual puede causar daño físico, pérdida de potencia, pérdida de estabilidad y características espectrales, entre otras, lo que reduce la vida útil de la fuente. En aplicaciones mono-bloque para operación remota, la vida útil de los componentes y su estabilidad es fundamental.

En esta clase de dispositivos a base de películas delgadas dopadas queremos diseñar un filtro con alta transmitancia a una longitud de onda de 1550 nm y que tenga baja reflectancia para que forme parte de una fuente donde ocurre una conversión paramétrica descendente espontánea (SPDC). Por lo general el fenómeno físico SPDC suele producirse mediante la incidencia de un láser pulsado en materiales birrefringentes, (Vashahri-Ghamsari *et al.*, 2017, Procopio *et al.*, 2010).

Para llevar a cabo el modelado y simulación de películas delgadas emplearemos desde las técnicas tradicionales como múltiples reflexiones y transmisiones sobre las capas. Se empleará la metodología de la matrices de transferencia que se usan en el diseño de instrumentación óptica aplicada a las capas de películas delgadas y se comparan los modelos analíticos obtenidos para los coeficientes de Fresnel y con ellos obtener la reflectancia y transmitancia. Con estos modelos y una serie de parámetros requeridos para obtener resultados en valores de longitud de onda deseados para comunicaciones ópticas, se realizarán las simulaciones numéricas. Para ello se hace una optimización sobre las dimensiones de las películas delgadas con parámetros fijos. Luego se hace un estudio comparativo de los resultados cuando se implementan los mismos parámetros dentro de un simulador por elemento finito de la reflectancia y la

transmitancia sobre arreglos de películas delgadas. En particular, se muestran las propagaciones de los campos eléctricos sobre una periodicidad de celdas base con ganancias y pérdidas efectivas en capas de películas delgadas dieléctricas. La manufactura de estos dispositivos ópticos con base en películas delgadas semiconductoras, principalmente compuestas de SiO₂ dopado, mediante el depósito de un cañón de iones o bien con técnicas de esparcimiento (*sputtering*) pueden construirse cuidando el espesor de las capas del orden de $0.6 \mu\text{m} \pm 0.25 \mu\text{m}$. El material para el dopado puede ser erbio como el de las fibras ópticas o sensores de fluorescencia, ya que este material presenta ganancias o amplificaciones ópticas; que son deseadas para una alta transmitancia. Estos materiales están relacionados con los factores de decaimiento k negativos de los índices de refracción en los materiales empleados. Para las pérdidas en las capas de las películas se pueden utilizar partículas de metal, estos materiales están relacionados con los factores de decaimiento k positivos de los índices de refracción. Cuando se tengan las muestras experimentales de estos dispositivos ópticos habrá que caracterizarlos, es decir medir sus propiedades eléctrico-ópticas.

1. Propagación de ondas planas

Para poder obtener los modelos matemáticos de las variables físicas en el estudio de películas delgadas dieléctricas, se analiza la teoría electromagnética de propagación de ondas en un medio. Se utilizará la superposición de campos electromagnéticos monocromáticos con frente de onda plano, que podemos describir como

$$E = E_0 e^{i(k\vec{n}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad H = \frac{k}{\omega\mu} \vec{n} \times E \quad (1)$$

esta es la forma más simple de describir propagación temporal en un medio isotrópico y lineal descrito por la dirección de propagación del campo $\vec{n}$, el vector de posición $\vec{r}$, frecuencia de oscilación de la onda ω y permeabilidad del medio μ .

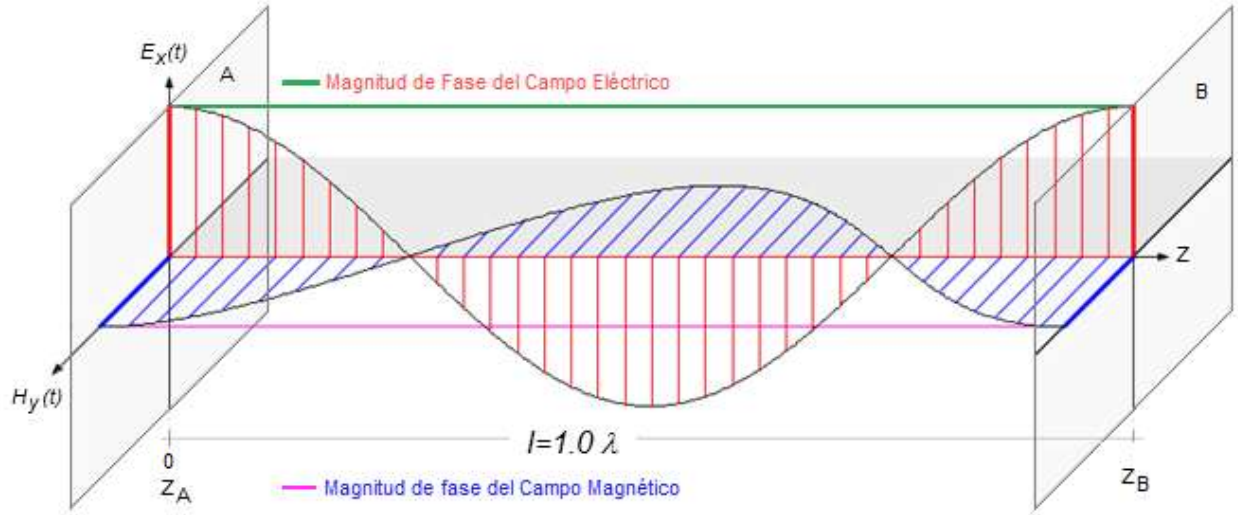


Figura 1. Propagación de Ondas electromagnéticas.

Estos campos son solución a las ecuaciones de Maxwell, donde E_0 es la amplitud compleja de la onda incidente y $\mathbf{n}$ es un vector unitario el cual fija la dirección de propagación. Las ondas que estudiaremos tienen un campo eléctrico armónico en tiempo de frecuencia ω que obedece a la ecuación de Helmholtz dada por:

$$\nabla^2 E + |k|^2 E = 0, \quad (2)$$

tomando a $k = n_c \omega / v_p$ que representa el número de onda, donde n_c es el índice de refracción del medio de propagación y v_p es la velocidad de propagación de la onda en el medio.

Como nos interesa describir la acción de una caja negra, figura (2), vamos a expresar a los campos en las caras izquierda y derecha de dicha caja por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} E(z_1) &= E_1^{(+)} + E_1^{(-)} \\ E(z_2) &= E_2^{(+)} + E_2^{(-)} \end{aligned} \quad (3)$$

donde hemos obviado la parte transversal de los vectores de posición, $\mathbf{r}_i$, y solo hemos utilizado su componente axial para definir la posición de las caras, z_i .

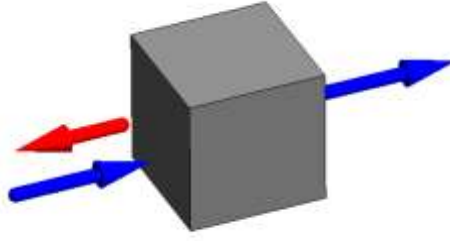


Figura 2. Propagación en una Caja Negra.

Además estamos introduciendo la notación,

$$E(z_j) = E_j^{(\pm)}, \quad (4)$$

para campos electromagnéticos con frente plano propagándose de izquierda a derecha, $E^{(+)}(z)$, y de derecha a izquierda, $E^{(-)}(z)$. Podemos dividir el campo electromagnético en campo de entrada, E_{in} , cuya propagación es en dirección hacia el dispositivo, y campos de salida, E_{out} , aquellos cuya propagación los aleja del dispositivo,

$$\begin{aligned} E_{in} &= E_1^{(+)} + E_2^{(-)} \\ E_{out} &= E_2^{(+)} + E_1^{(-)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Suponiendo un sistema ideal en el cual no hay disipación de energía, solo reflexión y transmisión, se debe cumplir que la potencia de entrada debe ser igual a la potencia de salida

$$\begin{aligned} |E_{in}|^2 &= |E_{out}|^2 \\ |E_1^{(+)} + E_2^{(-)}|^2 &= |E_2^{(+)} + E_1^{(-)}|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

hay que hacer notar que las componentes del campo no se superponen espacialmente, entonces no hay interferencia y se cumple

$$|E_1^{(+)}|^2 + |E_2^{(-)}|^2 = |E_2^{(+)}|^2 + |E_1^{(-)}|^2. \quad (7)$$

Por razones que serán evidentes en la siguiente sección, vamos a hacer una división más de nuestros campos en dos componentes ortogonales, una normal y otra paralela al plano de incidencia

$$E_j^{(\pm)} = E_{j,\perp}^{(\pm)} \bar{E}_{j,\perp}^{(\pm)} + E_{j,\parallel}^{(\pm)} \bar{E}_{j,\parallel}^{(\pm)}, \quad (8)$$

donde hemos definido ondas planas con amplitud unitaria

$$|\bar{E}_{j,\parallel}^{(\pm)}|^2 = |\bar{E}_{j,\perp}^{(\pm)}|^2 = 1. \quad (9)$$

En nuestro dispositivo ideal, donde solo están presentes fenómenos de transmisión y reflexión, toda la información de los campos de entrada y salida estará almacenada en las amplitudes que son una función de las propiedades del elemento óptico y el ángulo de incidencia con respecto a la normal.

Entonces, podemos considerar un campo que entra al dispositivo solo por la izquierda, podemos escribir para cada una de las componentes

$$E_{2,j}^{(+)} = t_{12}^{(j)} E_1^{(+)}, \quad E_{1,j}^{(-)} = r_{12}^{(j)} E_1^{(+)}, \quad j = \perp, \parallel, \quad (10)$$

de tal forma que, utilizando la ley de conservación de energía y la ortogonalidad de las componentes normales y paralelas, recuperamos

$$|t_{12}^{(j)}|^2 + |r_{12}^{(j)}|^2 = 1. \quad (11)$$

Esto lo podemos resumir en una ecuación matricial,

$$\begin{pmatrix} E_{2,j}^{(+)} \\ E_{1,j}^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{j,\parallel}^{(j)} & s_{12}^{(j)} \\ r_{12}^{(j)} & s_{22}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1,j}^{(+)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

donde aún no poseemos información para determinar los elementos de matriz s_{12} y s_{22} .

Ahora, podemos hacer lo mismo considerando una sola entrada por la derecha,

$$\begin{pmatrix} E_{2,j}^{(+)} \\ E_{1,j}^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{12}^{(j)} & r_{21}^{(j)} \\ s_{21}^{(j)} & t_{21}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_{2,j}^{(-)} \end{pmatrix}, \quad |t_{21}^{(j)}|^2 + |r_{21}^{(j)}|^2 = 1. \quad (13)$$

Los campos electromagnéticos responden a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, por lo tanto podemos superponer los resultados vectoriales y darnos cuenta que podemos escribir las amplitudes escalares como

$$\begin{pmatrix} E_{2,j}^{(+)} \\ E_{1,j}^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12}^{(j)} & r_{21}^{(j)} \\ r_{12}^{(j)} & t_{21}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1,j}^{(+)} \\ E_{2,j}^{(-)} \end{pmatrix}, \quad j = \perp, \parallel, \quad (14)$$

que podemos escribir en una forma más compacta como,

$$E_{out,j} = S_j E_{in,j} \quad j = \perp, \parallel, \quad (15)$$

donde la matriz S recibe el nombre de matriz de transición y para sistemas sin pérdidas, contiene toda la información de reflexión y transmisión del elemento óptico.

El ejemplo más simple de una caja negra es tomar un medio continuo, isotrópico y lineal en donde un pedazo del medio tomará el papel de caja negra. Esto es propagación libre, no habrá reflexión en las caras de la caja, $r_{12} = r_{21} = 0$, el vector de propagación no se modificará, $n_1^{(z)} = n_2^{(z)} = n$, y la única diferencia entre el campo de entrada y de salida es la fase que se gana en la distancia de propagación, de tal forma que la matriz de transición en la caja se puede escribir como

$$S_j = \begin{pmatrix} e^{i|k_j \cdot r|} & 0 \\ 0 & e^{-i|k_j \cdot r|} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

1.1 Ecuaciones de Propagación

Los conjuntos de estructuras o arreglos que estudiaremos tienen un campo eléctrico armónico en tiempo de frecuencia ω que obedece a la ecuación de Helmholtz dada por:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0$$

Con ∇^2 el laplaciano, k un número real positivo y Ψ un campo escalar, que podemos expresar también como

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2 E(z) = 0 \quad (17)$$

Tomando a la constante $k = \frac{\omega}{c} n_c$, que representa el número de onda, donde ω es la frecuencia angular de oscilación de la onda, n_c es el índice de refracción complejo del medio de propagación y c es la velocidad de la onda en el medio; además la onda se mueve paralela al eje z , (Lin et al., 2011).

Para $|z| \geq L/2$; la ecuación (17) admite una solución que tiene la forma:

$$E_0^-(z) = E_f^- e^{ikz} + E_b^- e^{-ikz}, \quad \text{para } z < -L/2$$

$$E_0^+(z) = E_f^+ e^{ikz} + E_b^+ e^{-ikz}, \quad \text{para } z > L/2$$

donde el vector de propagación de onda es $k = n_0 \omega / c$.

Para analizar esta estructura se descompone el campo eléctrico dentro del dominio de dispersión $E(z)$, en términos de las componentes $E_f(z)$ hacia adelante y en términos de las componentes $E_b(z)$ hacia atrás viajando y envolviendo como:

$$E(z) = E_f(z) e^{ikz} + E_b(z) e^{-ikz} \quad (18)$$

Ahora se empleará una variante para el campo; i.e.

$$\begin{aligned} E_f(z) &= \varepsilon_f(z) e^{i\hat{c}z} \\ E_b(z) &= \varepsilon_b(z) e^{-i\hat{c}z} \end{aligned}$$

donde $\delta = \beta - k$ que es la modulación.

Con lo cual se llega a obtener lo siguiente:

$$E(z) = \varepsilon_f(z) e^{i\hat{c}z} e^{ikz} + \varepsilon_b(z) e^{-i\hat{c}z} e^{-ikz}.$$

O bien escrita como:

$$E(z) = \varepsilon_f(z) e^{i(\hat{c}+k)z} + \varepsilon_b(z) e^{-i(\hat{c}+k)z}.$$

Si se toma en cuenta que $\delta = \beta - k$, con esto se tendrá

$$E(z) = \varepsilon_f(z) e^{i(\beta)z} + \varepsilon_b(z) e^{-i(\beta)z} \quad (19)$$

Ahora si se sustituye esto en la ecuación (17) y conservando solamente los términos de sincronía mientras que se eliminan las correcciones a segundo orden en n_1 y n_2 , entonces se puede expresar el campo en un punto z dentro de un solo término del campo en $z = -L/2$.

Para $k \approx \beta$ cerca del punto de Bragg, se tiene:

$$\begin{pmatrix} E_f(z) \\ E_b(z) \end{pmatrix} = e^{iz\hat{\partial}_m\sigma_3} U e^{iL\delta_m\sigma_3/2} \begin{pmatrix} E_f(-L/2) \\ E_b(-L/2) \end{pmatrix} \quad (20)$$

y donde:

σ : matrices de Pauli, $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$; $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; (sólo se usa esta última)

U : la matriz pérdida-ganancia, ganancia-pérdida

Donde desarrollando se puede obtener:

$$\begin{pmatrix} E_f(z) \\ E_b(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\partial_m z} & 0 \\ 0 & e^{-i\partial_m z} \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} e^{i\delta_m L/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_m L/2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_f(-\frac{L}{2}) \\ E_b(-\frac{L}{2}) \end{pmatrix} \quad (21)$$

δ_m : factor de atenuación o amplificación (pérdida o ganancia).

Por otro lado, las estructuras que analizaremos tienen índice de refracción complejo con una distribución,

$$n_c = n_1 + i n_2 \quad \text{para } |z| < L/2. \quad (22)$$

Luego con la constante dieléctrica $\varepsilon = n_c^2$, se tiene que el índice de refracción complejo será:

$$n_c^2 = n_1^2 - n_2^2 + i 2n_1 n_2. \quad (23)$$

La estructura esta embebida en un medio homogéneo n_0 :

n_0 : representa la parte del índice de refracción donde esta embebida la muestra

n_1 : representa la parte real del índice de refracción (“el índice de refracción pico de contraste”)

n_2 : constante de extinción, parte imaginaria

β : número de onda de difracción relacionado con su periodicidad

Λ : periodicidad de la onda $\beta=\pi/\Lambda$

En ausencia de ganancia modulada ($n_2=0$) el índice de modulación periódico lleva a reflexiones cercanas de Bragg a frecuencias angulares de Bragg $\omega_B=c\beta/n_0$; c : velocidad de la luz en el vacío.

Luego para la solución a la ecuación de Helmholtz, usando la ecuación (19), con índice de refracción complejo, ecuación (22), se tiene que

$$E_0^-(z) = E_f^- e^{i[\frac{\omega^2}{c^2}(n_1^2 - n_2^2 + i2n_1n_2)]z} + E_b^- e^{-i[\frac{\omega^2}{c^2}(n_1^2 - n_2^2 + i2n_1n_2)]z} \quad \text{para } z < -L/2 \quad (24)$$

y tiene la forma de:

$$E_0^+(z) = E_f^+ e^{i[\frac{\omega^2}{c^2}(n_1^2 - n_2^2 + i2n_1n_2)]z} + E_b^+ e^{-i[\frac{\omega^2}{c^2}(n_1^2 - n_2^2 + i2n_1n_2)]z} \quad \text{para } z > L/2 \quad (25)$$

donde

$$e^{i[\frac{\omega^2}{c^2}(n_1^2 - n_2^2)]z} = e^{i\delta_m z} \quad (26)$$

es la parte de modulación de fase, y

$$e^{i[\frac{\omega^2}{c^2}(i2n_1n_2)]z} = e^{i\Delta_m z} \quad (27)$$

con $\partial_m = \frac{\omega^2}{c^2}(n_1^2 - n_2^2)$ y $\Delta_m = \frac{\omega^2}{c^2}(i2n_1n_2)$, la parte de atenuación (pérdida) se da cuando $n_2 > 0$ y la parte de amplificación (ganancia) cuando $n_2 < 0$, para $n_1 = n_2$ se rompe la simetría de la estructura $\mathcal{PT}$.

2. Modelado Teórico de los coeficientes de reflexión y transmisión

En esta sección se presenta el modelado teórico de las variables de estudio, usando dos técnicas para obtener los coeficientes de Fresnel y determinar la reflectancia y la transmitancia sobre las películas delgadas dieléctricas con simetría- $\mathcal{PT}$.

2.1 Coeficientes de Fresnel

Al incidir una onda plana sobre un sistema de películas delgadas, el primer proceso físico que ocurre es la reflexión/transmisión de la onda en la interface entre los medios.

Por lo tanto, iniciaremos repasando el problema de valores a la frontera en teoría electromagnética siguiendo el formalismo de J. Adams Stratton, (Adams, 1996).

Si tenemos dos medios homogéneos e isotrópicos en contacto a través de un plano S como frontera de extensión infinita, podemos describir al plano a través de un vector unitario normal, $\mathbf{n}$, y dirigido desde la región (1) con $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ a la región (2) con $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$. Donde los parámetros ϵ , μ , σ son la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética, y conductividad del medio, en ese orden, figura (3).

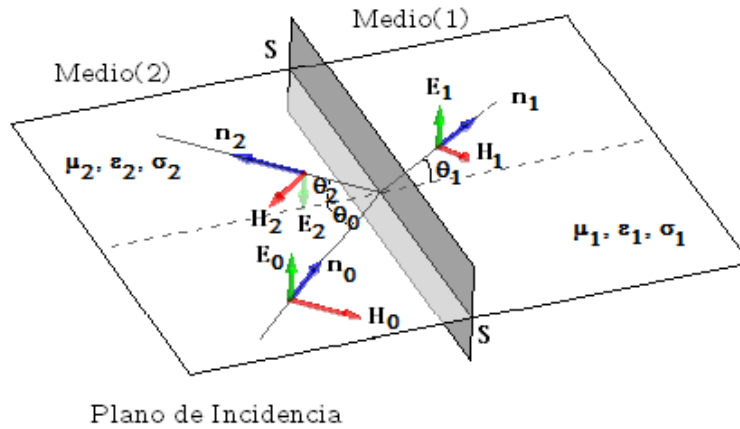


Figura 3. Polarización normal al plano de incidencia.

Una onda electromagnética plana que viaja a través del medio (2) e incide sobre el plano S , puede ser descrita por los campos eléctrico y magnético,

$$E_i = E_0 e^{ik_2 n_0 \cdot r - i\omega t}, \quad H_i = \frac{k_2}{\omega \mu_2} n_0 \times E_i, \quad (28)$$

donde E_0 es la amplitud compleja de la onda incidente y $\mathbf{n}_0$ es un vector unitario el cual fija la dirección de propagación, figura (3). El plano definido por el par de vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}_0$ es llamado el plano de incidencia. De igual manera, podemos describir a los campos transmitidos y reflejados como ondas planas,

$$\begin{aligned}
E_t &= E_1 e^{ik_1 n_1 \cdot r - i\omega t}, & H_t &= \frac{k_1}{\omega \mu_1} n_1 \times E_t, \\
E_r &= E_0 e^{ik_2 n_0 \cdot r - i\omega t}, & H_r &= \frac{k_2}{\omega \mu_2} n_2 \times E_r,
\end{aligned} \tag{29}$$

donde los vectores unitarios n_1 y n_2 , están en la dirección de propagación de las ondas reflejadas y transmitidas respectivamente y con E_1 y E_2 amplitudes complejas, sin determinar. Con ellos por hipótesis E_0 , E_1 y E_2 , son independientes de las coordenadas y los vectores del campo resultante serán continuos a través de S , será necesario que los argumentos de los factores exponenciales de las ecuaciones (29) sean idénticos sobre la superficie. Un resultado inmediato de esto es que los vectores n , n_0 , n_1 y n_2 son coplanares. Los planos de fase constante de ambas ondas reflejadas y transmitidas son normales al plano de incidencia. Bajo estas condiciones presentamos entonces las ecuaciones que simbolizan la Ley de Snell y que nos son útiles para deducir los coeficientes de Fresnel,

$$\sin(\theta_2) = \sin(\pi - \theta_0) = \sin(\theta_0), \tag{30}$$

de aquí que el ángulo de incidencia θ_0 sea igual al ángulo de reflexión θ_2 . Y otro resultado de esto es que

$$k_2 \sin(\theta_0) = k_1 \sin(\theta_1). \tag{31}$$

Las ecuaciones (30) y (31), constituyen la Ley de Snell para la reflexión y la refracción. Ahora bien para las ecuaciones de Fresnel con condiciones a la frontera, se necesitan para determinar la relación entre las amplitudes de E_0 , E_1 y E_2 , en todos los puntos del plano S , usando

$$n \times (E_0 + E_2) = n \times E_1, \quad n \times (H_0 + H_2) = n \times H_1 \tag{32}$$

Empleando las ecuaciones (28) y (29), la segunda de estas puede expresarse en términos de los vectores del campo eléctrico.

$$n \times (n \times (E_0 + n_2 \times E_2) \frac{k_2}{\mu_2}) = n \times (n \times E_1) \frac{k_1}{\mu_1}. \tag{33}$$

Expandiendo los términos de la ecuación (33) se obtiene

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{n}_0 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) \mathbf{E}_0. \quad (34)$$

La orientación del vector $\mathbf{E}_0$ es arbitraria pero puede resolverse dentro de una componente normal al plano de incidencia, tangente a S y una segunda componente reposa en el plano de incidencia.

Caso I. $\mathbf{E}_0$ normal al plano de incidencia.- entonces $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0 - \mathbf{E}_0 = 0$, como los medios son isotrópicos, los vectores eléctricos inducidos de las ondas reflejadas y transmitidas deben ser paralelas a $\mathbf{E}_0$ y de aquí también normal al plano de incidencia, por lo que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 = 0$.

Observando la figura (3) se tiene

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0 &= \cos(\pi - \theta_0) = -\cos \theta_0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 &= \cos(\pi - \theta_1) = -\cos \theta_1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2 &= \cos \theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Multiplicando la ecuación (30) vectorialmente por $\mathbf{n}$ y haciendo uso de (23) y (24), se obtiene que las amplitudes deben satisfacer

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_1 \\ \cos \theta_0 \mathbf{E}_0 + \cos \theta_2 \mathbf{E}_2 &= \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \cos \theta_1 \mathbf{E}_1. \end{aligned} \quad (36)$$

Resolviendo (36) para $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en términos de la amplitud $\mathbf{E}_0$ se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{\mu_1 k_2 (\cos \theta_2 + \cos \theta_0)}{\mu_1 k_2 \cos \theta_2 + \mu_2 k_1 \cos \theta_1} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 - \mu_2 k_1 \cos \theta_1}{\mu_1 k_2 \cos \theta_2 + \mu_2 k_1 \cos \theta_1} \mathbf{E}_0 \end{aligned} \right\} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 = 0. \quad (37)$$

Por lo tanto, usando para la reflexión $\theta_0 = \theta_2$ podemos escribir la matriz de transición como

$$S_{\perp}(n_1, n_2, \theta^{(+)}, \theta^{(-)}) = \begin{pmatrix} \frac{2\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(+)}}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_2 k_1 \cos \theta_1^{(+)}} & \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)} - \mu_1 k_2 \cos \theta_1^{(-)}}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_2 k_1 \cos \theta_1^{(+)}} \\ \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(+)} - \mu_2 k_1 \cos \theta_1^{(+)}}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_2 k_1 \cos \theta_1^{(+)}} & \frac{2\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)}}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_2 k_1 \cos \theta_1^{(+)}} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

del arreglo matricial anterior, ecuación (38), las posiciones $s_{11}=t_{\perp}$ y $s_{21}=r_{\perp}$, son los coeficientes de Fresnel de la transmisión y de la reflexión respectivamente para este caso.

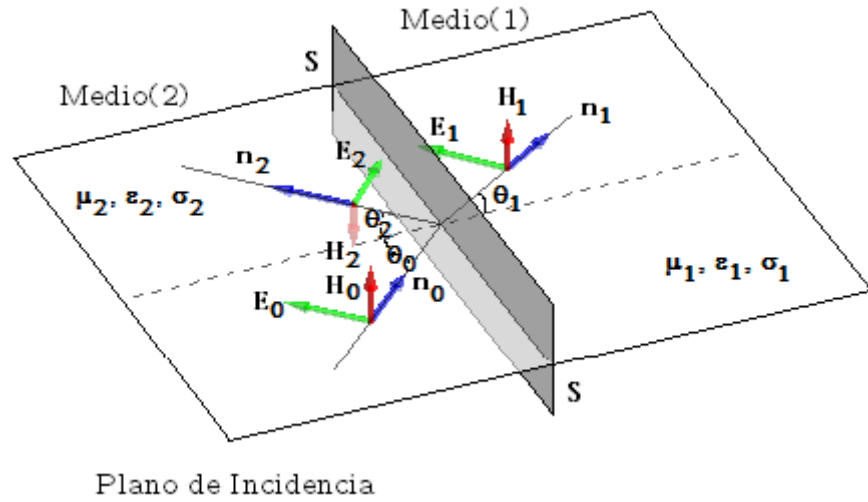


Figura 4. Direcciones de los campos eléctrico y magnético.

Caso II. E_0 en el Plano de incidencia.- Los vectores del campo magnético son normales al plano de incidencia y paralelos a S, figura (4), esto es

$$n \cdot H_0 = n \cdot H_1 = n \cdot H_2.$$

Luego a partir de las ecuaciones (28) y (29) se tiene

$$E_0 = -\frac{\omega\mu_2}{k_2} n_0 \times H_0$$

$$E_1 = -\frac{\omega\mu_1}{k_1} n_1 \times H_1$$

$$E_2 = -\frac{\omega\mu_2}{k_2} n_0 \times H_2.$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (29), se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 H_0 - \cos \theta_2 H_2 &= \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \cos \theta_1 H_1 \\ H_0 + H_2 &= H_1, \end{aligned} \tag{39}$$

como en el caso de las condiciones a la frontera. La solución de la ecuación (29) da como resultado,

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{\mu_2 k_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_0)}{\mu_2 k_1 \cos \theta_2 + \mu_1 k_2 \cos \theta_1} H_0 \\ H_2 &= \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 - \mu_1 k_2 \cos \theta_1}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 + \mu_1 k_2 \cos \theta_1} H_0 \end{aligned} \right\} n \cdot H_0 = 0. \quad (40)$$

En este punto podemos hacer nuevamente la sustitución en componentes, usando que $\theta_0 = \theta_2$ para la reflexión

$$S_{\parallel}(n_1, n_2, \theta^{(+)}, \theta^{(-)}) = \begin{pmatrix} \frac{2\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)}}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_1 k_2 \cos \theta_1^{(+)}} & \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(-)} - \mu_2 k_1 \cos \theta_1^{(-)}}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_1 k_2 \cos \theta_1^{(+)}} \\ \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(+)} - \mu_1 k_2 \cos \theta_1^{(+)}}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_1 k_2 \cos \theta_1^{(+)}} & \frac{2\mu_1 k_2 \cos \theta_0^{(-)}}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0^{(-)} + \mu_1 k_2 \cos \theta_1^{(+)}} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

con el arreglo matricial anterior obtenemos directamente que $S_{11} = t_{\parallel}$ y $S_{21} = r_{\parallel}$.

Cuando la incidencia es normal, $\theta_0 = 0$, los dos casos no pueden ser distinguidos y las amplitudes de las ondas transmitidas y reflejadas se reducen a

$$E_1 = \frac{2\mu_1 k_2}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} E_0, \quad E_2 = \frac{\mu_1 k_2 - \mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} E_0. \quad (42)$$

Una manera alternativa de expresar a los coeficientes de transmisión y reflexión, cuando las permeabilidades pueden diferir por una cantidad despreciable con respecto a μ_0 y usando que el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado $\theta_0 = \theta_2$, a partir de las ecuaciones (37) y (40), son:

$$\left. \begin{aligned} t_{\perp} &= \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \\ r_{\perp} &= \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \end{aligned} \right\} n \cdot E_0 = 0 \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{\parallel} &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \\ r_{\parallel} &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \end{aligned} \right\} n \cdot H_0 = 0. \quad (44)$$

Las ecuaciones que encontramos comúnmente en los libros para los coeficientes de Fresnel para la reflexión y la transmisión de ondas con dependencia del ángulo de incidencia e índices de refracción de los medios son, (Hecht, págs. 114-115, 4th Ed.).

$$\left. \begin{aligned} t_{\perp} &= \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \\ r_{\perp} &= \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \end{aligned} \right\} n \cdot E_0 = 0 \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{\parallel} &= \frac{2n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \\ r_{\parallel} &= \frac{n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \end{aligned} \right\} n \cdot H_0 = 0 \quad (46)$$

La reflectancia y la transmitancia están definidos por los cocientes de las amplitudes al cuadrado de los campos de incidencia, reflejados y transmitidos, de acuerdo con las ecuaciones (28 y 29).

$$r^2 = R \quad y \quad t^2 = T \quad (47)$$

$$R + T = 1$$

2.2 Ecuaciones a la frontera

Para el estudio de esta sección se hará un tratamiento general del equivalente a la “Ley de Snell” en fronteras de medios lineales.

Primero iniciemos con algunas propiedades ópticas de los materiales y su interacción con ondas electromagnéticas describiéndolas desde un punto de vista macroscópico, a través de los parámetros ópticos que están relacionados con la función dieléctrica del material. Hagamos este análisis haciendo incidir una onda electromagnética sobre la superficie de un material Semi-infinito, figura (5).

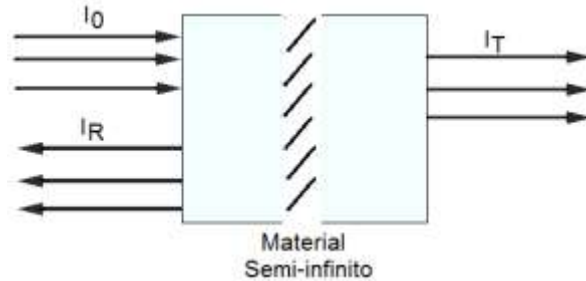


Figura 5. Ondas EM incidiendo en un material, se reflejan y se transmiten.

Si I_0 es el flujo luminoso incidente e I_R es el flujo luminoso reflejado, se define la reflectividad del material como:

$$R = \frac{I_R}{I_0} \quad (48)$$

Si I_T es el flujo transmitido y α es el coeficiente de absorción del material entonces tendremos:

$$I_T = I_0(1-R)e^{-\alpha x} \quad (49)$$

Los parámetros están relacionados con la constante dieléctrica del material, que en general será una cantidad compleja $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Sabiendo que el índice de refracción es $n^2 = \varepsilon$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = (n + ik)^2 = n^2 - k^2 + i2nk \\ \varepsilon_1 &= n^2 - k^2 \\ \varepsilon_2 &= 2nk \end{aligned} \quad (50)$$

donde n es el índice de refracción y k el índice de extinción, Si el campo eléctrico de la onda EM en el medio material está dado por:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{i(n - iK)k_0 x - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-Kk_0 x} e^{i(nk_0 x - \omega t)} \quad (51)$$

Por otro lado como el flujo luminoso es proporcional al cuadrado del módulo del campo eléctrico, se tiene:

$$I(x, t) = I(0)e^{-2Kk_0 x} = I(0)e^{-\frac{4\pi Kk_0}{\lambda_0} x} \quad (52)$$

Si esta ecuación se compara con la del flujo transmitido (49), se obtiene que: $\alpha = 4\pi K/\lambda_0$ donde λ_0 es la longitud de la onda EM en el vacío. Mientras que para la reflectividad R , las ecuaciones de Fresnel para ondas con incidencia normal permiten obtener:

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} \quad (53)$$

Luego para un medio metálico la función dieléctrica y el índice de refracción son funciones complejas valuadas. Esto sucede también en el caso de los materiales semiconductores y aislantes a ciertos intervalos de frecuencias cercanas a la banda de absorción. Las ecuaciones de Fresnel son válidas pero los ángulos en las ecuaciones tendrán valores complejos y no tienen una interpretación geométrica obvia.

Para incidencia normal se tendrá:

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \rightarrow \left| \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1} \right|^2 = \frac{(n_2 - n_1)^2 + (\kappa_2 - \kappa_1)^2}{(n_2 + n_1)^2 + (\kappa_2 + \kappa_1)^2} \quad (54)$$

donde

$$\tilde{n} = n + i\kappa = n(1 + \kappa) \quad (55)$$

con κ : coeficiente de extinción.

Para sistemas metálicos $\tilde{n} = \sqrt{\epsilon + 4\pi i \sigma / \omega}$, para incidencia normal la refracción, o la transmisión, la onda variará como

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{0t} e^{i(\tilde{n}k_0 z - \omega t)} = e^{-Kk_0 z} e^{i(\tilde{n}k_0 z - \omega t)} \quad (56)$$

Otro de los análisis que se tienen que realizar es la refracción dentro de un medio conductor, se pensaría que la onda plana dentro del metal variaría como en el análisis precedente pero en una dirección nueva. El amortiguamiento estaría a lo largo de la dirección de la propagación. Sin embargo esto no es así, el amortiguamiento está todavía en la dirección de z solamente. Lo que significa que la superficie de amplitud constante no está en la misma superficie de la fase constante. Las superficies de amplitud constante son paralelas a la interface y a las superficies de fase constante son perpendiculares a la dirección de propagación. En este caso el problema se complica un poco, el ángulo de refracción y la longitud de onda son determinadas mediante la

parte real del índice de refracción y el amortiguamiento en la dirección z mediante la parte imaginaria del índice de refracción, lo cual es sólo una aproximación.

La expresión correcta para el caso en cuestión está dada por:

$$\vec{E}_2 \sim e^{i(k_0 \text{sen} \theta_0 (-x) + k_0 \sqrt{\tilde{n}^2 - \text{sen}^2 \theta_0} z - \omega t)} = e^{-k_0 \text{Im} \sqrt{\tilde{n}^2 - \text{sen}^2 \theta_0} z} e^{i(k_0 \text{sen} \theta_0 (-x) + k_0 \text{Re} \sqrt{\tilde{n}^2 - \text{sen}^2 \theta_0} z - \omega t)} \quad (57)$$

y el ángulo de transmisión real es

$$\theta_2^{\text{real}} = \arctan \left[\frac{\text{sen} \theta_0}{\text{Re} \sqrt{\tilde{n}^2 - \text{sen}^2 \theta_0}} \right] \quad (58)$$

Note que los coeficientes de Fresnel son todavía válidos para valores del índice de refracción complejo pero con valores de los ángulos complejos.

Ahora hay que analizar que sucede en una reflexión y transmisión en tres medios y dos interfaces, hay que encontrar la solución para demostrar que el problema puede ser resuelto de diferentes formas y también mostrar que la solución puede ser extendida al caso de múltiples capas.

En este caso se tiene que en el primer medio hay una onda incidente y una reflejada, en la capa de en medio se tiene dos ondas, una en la dirección positiva de z y una en la dirección negativa de z. En el tercer medio solamente se tiene una onda viajando en la dirección positiva de z. Se usan el mismo tipo de condiciones a la frontera como cuando se tenía una simple geometría en ambas fronteras y encontrar las amplitudes y ángulos de las ondas. Se desea como dijimos extender los resultados a otras geometrías con más interfaces, sin embargo la solución se puede volver difícil de manejar. Dentro de la primera interface se puede analizar como una superposición de ondas con múltiples reflexiones y rebotando un sin número de veces entre las interfaces. Las amplitudes de estas ondas, toman las fases dentro y son sumadas juntas lo cual podría producir efectos de interferencia.

Con los coeficientes de Fresnel se obtienen las amplitudes relativas de las ondas reflejadas y transmitidas en la interface entre los dos medios. Usaremos el método

planteado por (Mata-Méndez, 1992) para encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión.

Un campo electromagnético arbitrario puede en dos polarizaciones independientes, T.E. y T.M. paralelas a la dirección z. Después se define a U como el campo independiente de la coordenada z, donde U es una onda cilíndrica, la cual cumple con la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0 \quad (59)$$

con $k^2 = k_0^2 \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$, y $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Como se quiere encontrar la solución general de la ecuación (59), se utilizará la transformada de Fourier del campo U en x:

$$U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha, \quad (60)$$

y su transformada inversa dada por

$$\hat{U}(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y) e^{-i\alpha x} dx. \quad (61)$$

Sustituyendo la ecuación (59) en la (60), se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial y^2} + (k^2 - \alpha^2) \hat{U} = 0, \quad (62)$$

Cuya solución es de la forma

$$\hat{U}(\alpha, y) = a(\alpha) e^{-i\beta y} + b(\alpha) e^{-i\beta y}, \quad (63)$$

donde β es alguna raíz de $\beta^2 + \alpha^2 = k^2$, tomando los valores para $\beta > 0$ para los valores real e imaginario. Para obtener la solución general se sustituye la ecuación (63) en la (59) para un medio homogéneo con conductividad:

$$U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b(\alpha) e^{-i(\alpha x - \beta y)} d\alpha. \quad (64)$$

Por lo que el campo U esta expresado mediante un desarrollo de ondas planas, esta solución no es única.

Ahora bien si se tienen dos medios semi-infinitos de permitividades $\varepsilon_1(\omega)$ y $\varepsilon_2(\omega)$, normalizadas a ε_0 , están en contacto mediante una interfase plana, figura (6).

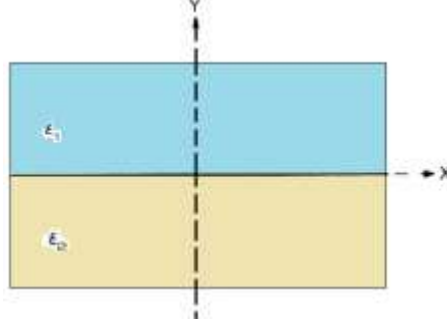


Figura 6. La interfase de dos medios.

Se tiene un sistema de referencia donde el origen de la interfase coincide con el plano O_{xz} , supongamos que $\varepsilon_1(\omega)$ es real y positiva, mientras que $\varepsilon_2(\omega)$ puede ser real (positiva o negativa) o compleja. Debemos determinar el campo total U en todo el plano O_{xy} , producido por una onda cilíndrica arbitraria que incide sobre la interfase. Entonces suponemos que la onda incidente proviene de $y=+\infty$, es decir, de la parte superior de la región $\varepsilon_1(\omega)$.

De la solución general (64), es posible obtener una solución en cada región semi-infinita:

Para $y>0$:

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha. \quad (65)$$

Para $y<0$:

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_2 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} D(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_2 y)} d\alpha. \quad (66)$$

con los valores para las funciones β_i ($i=1,2$). Además con las condiciones a la frontera, en la interfase ($y=0$) y en infinito ($y=\pm\infty$) y la onda incidente nos permitirán encontrar las

relaciones de Fresnel. Usando los valores apropiados para $\beta_1 > 0$ podemos acotar y con ellos restringir a $A(\alpha)$ de acuerdo a:

$$A(\alpha) \begin{cases} \neq 0, & \text{si } \alpha \in [-k_1, k_1] \\ = 0, & \text{si } \alpha \notin [-k_1, k_1] \end{cases} \quad (67)$$

El vector de onda $(\alpha, -\beta_1)$ de las ondas planas asociadas a $A(\alpha)$ apuntan hacia la interfase, el campo incidente será:

$$U_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha. \quad (68)$$

Si se toma a $\beta_2 > 0$, real, las ondas de la ecuación (66) son acotadas cuando $y \rightarrow \pm\infty$. Si es complejo $\text{Im}(\beta_2) > 0$ las ondas planas de la ecuación (66) divergen. Para cualquier caso de los valores de β_2 (real o complejo), $D(\alpha)$ debe ser una función nula. Cuando esta condición se satisface, se dice que el campo generado por la onda incidente cumple la condición de radiación de Sommerfeld, es decir, el campo producido en la interfase debe alejarse de ella. Haciendo estas consideraciones, las soluciones admisibles en las dos regiones semi-infinitas serán:

Para $y > 0$:

$$U_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_1}^{k_1} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_1 y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha; \quad (69)$$

Para $y < 0$:

$$U_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_2 y)} d\alpha. \quad (70)$$

Las funciones $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ y $C(\alpha)$ no son independientes, están relacionadas por las condiciones de frontera en la interfase. Usando estas condiciones en términos de la transformada de Fourier de U de acuerdo a:

$$U_1 = U_2 \quad (71)$$

$$\frac{1}{v_1} \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial y} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial y}, \quad (72)$$

donde

$$v = \begin{cases} 1, & \text{caso } T.E. \\ \epsilon, & \text{caso } T.M. \end{cases} \quad (73)$$

Aplicando estas condiciones a las ecuaciones (60) y (61) se obtiene

$$A(\alpha) + B(\alpha) = C(\alpha), \quad (74)$$

$$\frac{1}{v_1} [-i\beta_1 A(\alpha) + i\beta_1 B(\alpha)] = \frac{1}{v_2} [-i\beta_2 C(\alpha)]. \quad (75)$$

En $y=0$ que es la transformada de Fourier del campo incidente, $A(\alpha)$ es conocida, resolviendo el sistema anterior en términos de $A(\alpha)$, resulta lo siguiente

$$B(\alpha) = r(\alpha)A(\alpha), \quad (76)$$

$$C(\alpha) = t(\alpha)A(\alpha); \quad (77)$$

$B(\alpha)$ y $C(\alpha)$ son lineales en $A(\alpha)$, es decir, en el campo incidente, dado que las ecuaciones de Maxwell son lineales. Aquí aparecen las funciones $r(\alpha)$ y $t(\alpha)$, se les conoce con el nombre de amplitudes de reflexión y transmisión, respectivamente. Con esto las amplitudes están relacionadas con los coeficientes de Fresnel de acuerdo a:

$$r(\alpha) = \frac{\beta_1/v_1 - \beta_2/v_2}{\beta_1/v_1 + \beta_2/v_2} \quad (78)$$

$$t(\alpha) = \frac{2\beta_1/v_1}{\beta_1/v_1 + \beta_2/v_2}. \quad (79)$$

Estos coeficientes dependen exclusivamente de las propiedades del medio y además pueden ser complejas. Si ahora se escriben con respecto a cada polarización se tiene:

Campo Eléctrico paralelo a la dirección del eje z:

$$r(\alpha) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (80)$$

$$t(\alpha) = \frac{2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (81)$$

Campo Magnético paralelo a la dirección del eje z:

$$r(\alpha) = \frac{\beta_1 / \varepsilon_1 - \beta_2 / \varepsilon_2}{\beta_1 / \varepsilon_1 + \beta_2 / \varepsilon_2} \quad (82)$$

$$t(\alpha) = \frac{2\beta_1 / \varepsilon_1}{\beta_1 / \varepsilon_1 + \beta_2 / \varepsilon_2}. \quad (83)$$

Estas ecuaciones (80-83) son equivalentes a las que aparecen comúnmente en la literatura como:

$$r_{ij}^S = -\frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_j)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_j)} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_j \cos \theta_j}{n_i \cos \theta_i + n_j \cos \theta_j} \quad (84)$$

$$t_{ij}^S = \frac{2\text{sen}\theta_j \text{sen}\theta_i}{\text{sen}(\theta_i + \theta_j)} = \frac{2n_i \text{sen}\theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_j \cos \theta_j} \quad (85)$$

$$r_{ij}^P = \frac{\tan(\theta_i - \theta_j)}{\tan(\theta_i + \theta_j)} = \frac{n_j \cos \theta_i - n_i \cos \theta_j}{n_j \cos \theta_i + n_i \cos \theta_j} \quad (86)$$

$$t_{ij}^P = \frac{2\text{sen}\theta_j \cos \theta_i}{\text{sen}(\theta_i + \theta_j) \cos(\theta_i - \theta_j)} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_j \cos \theta_i + n_i \cos \theta_j}. \quad (87)$$

Donde los superíndices S y P representan la polarización-S (perpendicular al campo) y la polarización-P (paralela al campo) de las ondas respectivamente, los ángulos θ_i y θ_j son los ángulos de incidencia y de transmisión respectivamente (Hecht, 2003). Las propiedades ópticas de cada material se dan en forma del índice de refracción, n .

Estos coeficientes son válidos para índices de refracción complejos, en este caso los ángulos no pueden ser interpretados geoméricamente. Los ángulos son complejamente evaluados y el seno y coseno de los ángulos también se evalúan complejamente. Además son obtenidos a partir de la ley de Snell.

$$n_j \sin \theta_j = n_i \sin \theta_i \quad (88)$$

Y las funciones coseno se obtienen de acuerdo a:

$$\cos \theta_i = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} \quad (89)$$

Esto es el tratamiento general del equivalente a la ley de Snell en fronteras de medios lineales.

Tomando en cuenta que los coeficientes de Fresnel dependen de las propiedades de los índices de refracción de los medios donde se propagan las ondas electromagnéticas para el caso de los sistemas de estructura $\mathcal{PT}$ simétricas se consideran los siguientes parámetros.

Para los índices de refracción:

$$\begin{aligned} n_i &= n_i, & \text{índice de refracción del medio incidente} \\ n_r &= n_r, & \text{índice de refracción reflejado} \\ n_t &= n_1 + in_2, & \text{índice de refracción del medio de transmisión} \end{aligned} \quad (90)$$

Para los ángulos involucrados:

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta_j - i\beta_j, \\ \text{con } \beta &= i, r, t \end{aligned} \quad (91)$$

2.3 Método de múltiples reflexiones y transmisiones

En la Sección 1 analizamos la propagación de ondas planas en una caja negra, tomando como referencia las interfaces de entrada y salida, además de su propagación dentro de la misma. En base a sus representaciones matriciales de la propagación y condiciones a la frontera, construimos sus matrices de transición a través de los fenómenos de reflexión y transmisión. Pues bien ese estudio lo emplearemos más adelante cuando apilemos múltiples interfaces, es decir muchas capas en forma de películas delgadas.

Las películas delgadas como dispositivos ópticos tienen muchas aplicaciones, ya que con ellas podemos modificar las propiedades de reflexión sobre superficies entre las cuales están los revestimientos antirreflejantes, alta reflectividad como para cavidades laser, anteojos, cámaras, proyectores, polarizadores, etc. Iniciaremos el estudio con el tratamiento de una sola capa delgada al estilo de la cavidad Fabry-Perot y derivaremos en la construcción de las matrices de transferencia efectivas para obtener las amplitudes de los campos mediante los coeficientes de transmisión, reflexión de Fresnel y también la transmitancia y la reflectancia (Steck, 2006). Para llevar a cabo este análisis asumimos películas delgadas dieléctricas y sembraremos el camino para el estudio de películas conductoras de sistemas con índices de refracción complejos.

Para el análisis de una película delgada como elemento óptico aplicaremos el modelo suma de transmisiones y reflexiones cuando tenemos incidencia de izquierda a derecha, donde se toman sucesivas transmisiones por un lado y las sucesivas reflexiones por otro lado, figura (7), como la suma de todos los campos de transmisión y la suma de todos los campos de reflexión, con lo cual obtendremos

$$E_{2t}^{(+)} = t_{23}t_{12}E_1^{(+)}e^{i\phi} + t_{23}r_{21}r_{23}t_{12}E_1^{(+)}e^{i2\phi} + t_{23}r_{21}r_{23}r_{21}t_{12}E_1^{(+)}e^{i4\phi} + \dots \quad (92)$$

$$E_{1r}^{(+)} = r_{12}E_1^{(+)} + t_{21}r_{23}t_{12}E_1^{(+)}e^{i\phi} + t_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{12}E_1^{(+)}e^{i2\phi} + \dots \quad (93)$$

con ϕ la fase de propagación acumulada para las sucesivas transmisiones y reflexiones bajo el mismo frente de onda.

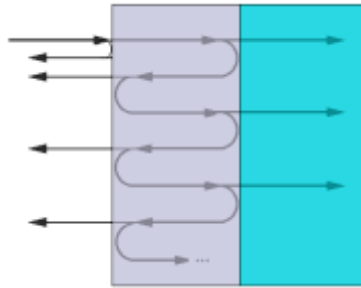


Figura 7. Reflexiones y transmisiones sucesivas.

De manera general podemos escribir, usando una sumatoria, para todas las transmisiones y todas las reflexiones como

$$E_2^{(+)} = E_1^{(+)} e^{i\phi} t_{23} t_{12} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (r_{23} r_{21} e^{i\phi})^n \right] \quad (94)$$

$$E_1^{(-)} = E_1^{(+)} \left[r_{12} + t_{21} r_{23} t_{12} e^{i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_{23} r_{21} e^{i\phi})^n \right]. \quad (95)$$

Sabiendo que la siguiente serie converge a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x)^n = \frac{1}{1-x}, \quad (96)$$

la cual es válida para $|x| < 1$, con lo cual obtenemos los siguientes resultados

$$t_{13} = \frac{t_{23} t_{12} e^{i\phi}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i\phi}} \quad (97)$$

$$r_{13} = r_{12} + \frac{t_{21} r_{23} t_{12} e^{i\phi}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i\phi}}. \quad (98)$$

Siguiendo el mismo análisis obtenemos los coeficientes de transmisión y reflexión, pero ahora cuando se tiene incidencia de derecha a izquierda, obteniendo

$$t_{31} = \frac{t_{32} t_{21} e^{i\phi}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i\phi}} \quad (99)$$

$$r_{31} = r_{21} + \frac{t_{12} r_{32} t_{21} e^{i\phi}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i\phi}}, \quad (100)$$

usando las relaciones de Stokes $t_{21} t_{12} = 1 - r_{12}^2$ y $r_{12} = -r_{21}$ se tendrá otra forma de escribir los coeficientes eliminando los coeficientes de transmisión (Pedrotti & Pedrotti, 1993). Con estos resultados se puede construir una representación matricial con toda la información de los fenómenos de transmisión y reflexión, la cual escribiremos como

$$\begin{pmatrix} E_2^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{13} & r_{31} \\ r_{13} & t_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(-)} \end{pmatrix} \quad (101)$$

que de una manera reducida escribiremos como

$$E_{out} = S_e E_{in}, \quad (102)$$

en este caso denominaremos a la matriz S_e como matriz de transición efectiva.

El procedimiento parece tener muchos cálculos pero al final logramos hacer una representación matricial compacta con toda la información de los fenómenos ocurridos en el dispositivo óptico.

Como conocemos las características de cómo se propagan las ondas en las interfaces y en los medios físicamente, vamos a usar otro método por medio de la generación de matrices que contienen toda la información del elemento óptico que nos puede ayudar a simplificar el estudio de multicapas de películas.

Regresemos a nuestro caso de estudio de una sola película delgada dieléctrica pero ahora con la construcción de matrices de transición, sus respectivas matrices de transferencia, luego calculando la matriz de transferencia efectiva y por último la matriz de transición efectiva del dispositivo.

3. Matrices de Transferencia

El procedimiento que se usará para analizar la propagación dentro de las estructuras con simetría- $\mathcal{PT}$, es mediante el uso de la Matriz de Transferencia (TM, por sus siglas en inglés, “*Transfer Matrix*”), también conocido como el análisis de la matriz ABCD. En óptica geométrica esta técnica usa la aproximación paraxial de haces de luz, en la cual supone ángulos pequeños para distancias pequeñas relativas a los ejes ópticos del sistema, un ejemplo de esto es la ecuación (103)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (104)$$

Esta expresión relaciona los rayos vector en el plano de incidencia y el plano de salida mediante una matriz M, la cual representa al sistema óptico entre los dos planos (Kalvo, 2015 y Sandino, 2014).

Para el caso en estudio, estructuras con simetría- $\mathcal{PT}$, donde se analizan los campos electromagnéticos se tiene que las amplitudes de las ondas de propagación hacia

adelante (izquierda-derecha) y hacia atrás (derecha-izquierda) fuera del dominio de la difracción se pueden obtener a través de los siguientes casos y construir su matriz de transferencia.

Primer caso, una onda incide desde la izquierda sobre un medio, figura (8).



Figura 8. Onda incidente izquierda-derecha, hay ondas reflejada y transmitida.

La cual en forma de una ecuación matricial produce las amplitudes de la onda reflejada y transmitida, ecuación (93).

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (105)$$

Un segundo caso se da si ahora se toma una onda incidente desde la derecha, figura (9).



Figura 9. Onda incidente derecha-izquierda, hay ondas reflejada y transmitida.

Producen las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, ecuación (106).

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_{21} \\ 0 & t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_2^- \end{pmatrix} \quad (106)$$

Para un caso general, es decir combinando ambos casos, incidencia izquierda-derecha derecha-izquierda, figura (10).



Figura 10. Combinando las dos incidencias, onda reflejada y transmitida.

Se produce el siguiente sistema matricial, ecuación (107), cuando se tienen dos ondas incidentes por ambos lados del medio.

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} \quad (107)$$

Formando una matriz de transición S formada por los coeficientes r_{ij} , r_{ji} , t_{ij} y t_{ji} de reflexión y transmisión en un medio dieléctrico, ecuación (108).

$$S = \begin{pmatrix} t_{ij} & r_{ji} \\ r_{ij} & t_{ji} \end{pmatrix} \quad (108)$$

La generación de esta matriz S ayuda a resolver un sistema de múltiples capas dieléctricas para sus campos reflejados y transmitidos, figura (11), si se obtiene una matriz de transferencia que permita obtener todas las transmisiones multiplicando las n matrices para cada frontera o interface, ecuación (109).

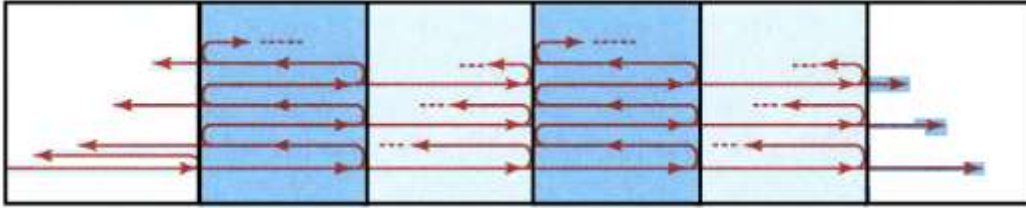


Figura 11. Sistema con varias capas dieléctricas con base en un dimer.

$$M = M_n \bullet \dots \bullet M_3 \bullet M_2 \bullet M_1 \quad (109)$$

Obteniendo un sistema matricial del sistema a estudiar dado por la expresión de la ecuación (110).

$$\begin{pmatrix} E_2^{(+)} \\ E_2^{(-)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix} \quad (110)$$

La matriz de transferencia M se puede obtener a partir de la matriz S usando las expresiones de las ecuaciones (110) y (111), que son conocidas como las relaciones de conversión.

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{ji}} \begin{bmatrix} t_{ij}t_{ji} - r_{ij}r_{ji} & r_{ji} \\ -r_{ij} & 1 \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$S = \begin{pmatrix} t_{ij} & r_{ji} \\ r_{ij} & t_{ji} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} AD - BC & B \\ -C & 1 \end{bmatrix} . \quad (112)$$

Para obtener todas las amplitudes de las ondas planas de las reflexiones y transmisiones cuando incide un campo electromagnético sobre un arreglo de películas dieléctricas apiladas el algoritmo, ofrece un procedimiento sistemático para determinar las amplitudes de la reflectancia y la transmitancia con espesores e índices de refracción conocidos. Los pasos para describir esta metodología son los siguientes:

- El conjunto de películas apiladas se divide en una cascada de elementos que abarca las fronteras con capas homogéneas entre ellas.
- La matriz M es determinada por cada elemento, esto puede ser producido mediante el uso de las fórmulas de Fresnel para la reflexión y la transmisión para determinar la matriz de transición S . Luego mediante la ecuación (112) de conversión calcular la matriz M correspondiente.
- La matriz M para la pila completa de elementos se obtiene multiplicando las Matrices M para cada elemento individual de acuerdo a la matriz de transferencia proporcionada en la ecuación (110).
- Finalmente, la matriz S para la pila completa se determina mediante la conversión de la matriz M usando la ecuación (111). Los elementos de la matriz S entonces producen directamente las amplitudes de los coeficientes de reflexión y transmisión para el sistema apilado de capas dieléctricas.

3.1 Interfaces del medio con ganancias y pérdidas

Para aplicar la técnica de la TM es necesario analizar la propagación de la radiación electromagnética en un medio con pérdidas/ganancias y sus componentes de reflexión y transmisión en varias interfaces que enseguida se presentan, (Poladian, 1996).

❖ **Interfaz aire-perdida:** para este caso se tiene una onda Electro Magnética (EM), que empieza a propagarse desde el aire y entra a la estructura $\mathcal{PT}$ que se denota por

$$E_m(z) = \begin{pmatrix} E_f(z) \\ E_b(z) \end{pmatrix} \quad (113)$$

Si se tiene un parámetro modulador de fase correspondiente Δ_m entonces el campo debe obedecer condiciones a la frontera

$$E_f^-(0) = E_b^-(L/2) = 0 \quad (114)$$

La figura (12) muestra un esquema de cómo se da la propagación para esta interfaz.

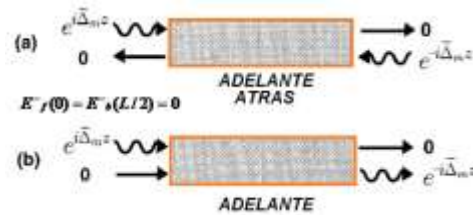


Figura 12. Interfaz aire-pérdida a) para una propagación hacia adelante y hacia atrás, b) para una propagación hacia adelante, es decir en la misma dirección.

❖ **Interfaz ganancia-aire:** para este caso se tiene una onda Electro Magnética (EM), que empieza a propagarse desde el medio y sale de la estructura $\mathcal{PT}$ hacia el aire, si se tiene un parámetro modulador de fase correspondiente Δ_m entonces el campo debe obedecer condiciones a la frontera

$$E_f^+(L/2) = E_b^+(L) = 0 \quad (115)$$

La figura (13) muestra un esquema de cómo se da la propagación para esta interfaz.

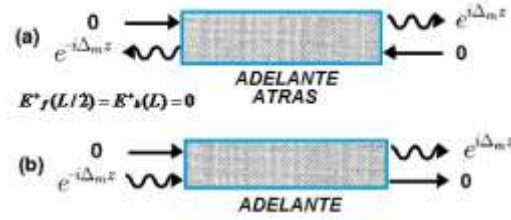


Figura 13. Interfaz ganancia-aire en una difracción lineal a) hay una ganancia para una propagación hacia adelante y hacia atrás, b) hay una ganancia para la propagación hacia adelante en la misma dirección.

- ❖ **Interfaz ganancia-perdida:** este caso se tiene una onda Electro Magnética (EM), que empieza a propagarse desde el medio y sigue dentro de la estructura $\mathcal{PT}$, si se tiene un parámetro modulador de fase correspondiente Δ_m entonces el campo debe obedecer condiciones a la frontera

$$E^+_f(L/2) = E^-_b(L) = 0 \quad (116)$$

La figura (14) muestra un esquema de cómo se da la propagación para esta interfaz.

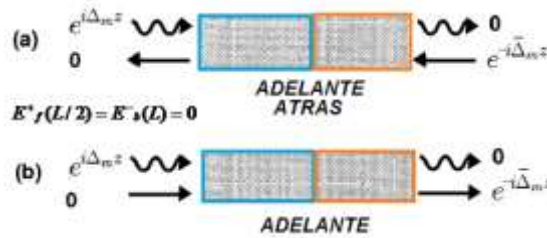


Figura 14. Interfaz ganancia-perdida en una difracción lineal a) hay una ganancia para una contrapropagación, b) hay una ganancia para la propagación en la misma dirección.

- ❖ **Interfaz perdida-ganancia:** este caso se tiene una onda Electro Magnética (EM), que empieza a propagarse desde el medio y sigue dentro de la estructura

$\mathcal{PT}$, si se tiene un parámetro modulador de fase correspondiente Δ_m entonces el campo debe obedecer condiciones a la frontera

$$E_f^-(L/2) = E_b^+(L) = 0 \quad (117)$$

La figura (15) muestra un esquema de cómo se da la propagación para esta interfaz.

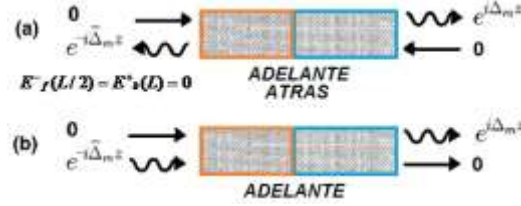


Figura 15. Interfaz ganancia-perdida en una difracción lineal, a) hay una ganancia para una contrapropagación, b) hay una ganancia para la propagación en la misma dirección.

Las amplitudes de transmisión y reflexión para ondas incidentes (L) izquierda y (R) derecha, pueden ser obtenidas por las condiciones de frontera $E_b^+ = 0$, $(E_f^- = 0)$ respectivamente y están definidas como:

$$t_L = \frac{E_f^-}{E_f^-}; \quad r_L = \frac{E_b^-}{E_f^-} \quad (118)$$

$$t_R = \frac{E_b^-}{E_b^-}; \quad r_R = \frac{E_f^-}{E_b^-} \quad (119)$$

Estas pueden ser expresadas en términos de los elementos de la matriz de transferencia como sigue:

$$t_L = t_R = t = \frac{1}{M_{22}}; \quad r_L = -\frac{M_{21}}{M_{22}}; \quad r_R = \frac{M_{12}}{M_{22}} \quad (120)$$

Mientras que la transmisión por la izquierda y la derecha son iguales, no es lo mismo para el caso de la reflexión.

3.2 Caso de estudio una película delgada

Entonces vamos a construir las matrices de transición y de transferencia de una película delgada tomando en cuenta sus condiciones a la frontera en cada interfase y veremos cómo se calcula la matriz de propagación dentro de la película, asumiendo que su espesor es d y que tiene un índice de refracción lineal n_i , figura (16).

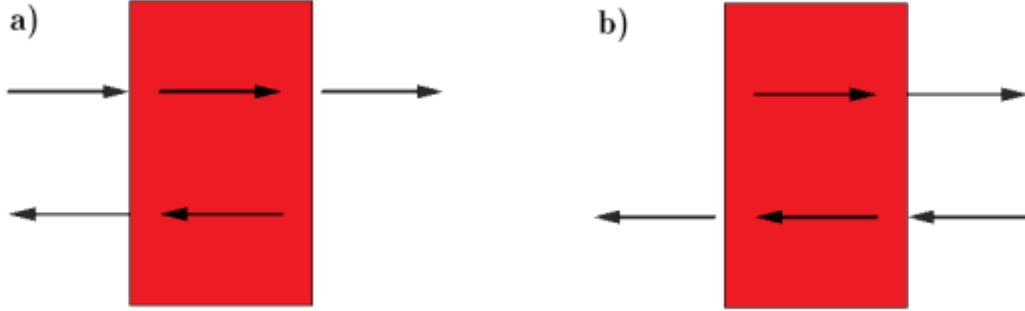


Figura 16. Interfaces en una película delgada a) incidencia por la izquierda, b) incidencia por la derecha.

Para la interface de entrada a la película, se tiene

$$\begin{pmatrix} E_2^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_2^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (121)$$

su matriz de transición y su matriz de transferencia asociada son:

$$S_{12} = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} \rightarrow M_{12} = \begin{pmatrix} t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} & r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{pmatrix}. \quad (122)$$

Para la propagación en la película con espesor d_2 , su índice de refracción n_2 y número de onda k_2 sus matrices correspondientes son

$$S_{22} = \begin{pmatrix} e^{ik_2 n_2 d_2} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 n_2 d_2} \end{pmatrix} \rightarrow M_{22} = \begin{pmatrix} e^{ik_2 n_2 d_2} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 n_2 d_2} \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Para la interfase de salida se obtiene que

$$\begin{pmatrix} E_3^{(+)} \\ E_2^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{23} & r_{32} \\ r_{23} & t_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^{(+)} \\ E_3^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (124)$$

su matriz de transición y matriz de transferencia están dadas por

$$S_{23} = \begin{pmatrix} t_{23} & r_{32} \\ r_{23} & t_{32} \end{pmatrix} \rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} t_{23}t_{32} - r_{23}r_{32} & r_{32} \\ -r_{23} & 1 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Luego si calculamos la matriz de transferencia efectiva de acuerdo a

$$M_{net} = M_{23} \cdot M_{22} \cdot M_{12} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (126)$$

o bien

$$M_{net} = M_{23} \cdot M_{22} \cdot M_{12} = \begin{pmatrix} t_{23}t_{32} - r_{23}r_{32} & r_{32} \\ -r_{23} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{ik_2 n_2 d_2} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 n_2 d_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} & r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad (127)$$

Así obtenemos

$$M_{net} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ik_2 n_2 d_2} (e^{2ik_0 n_2 d_2} (r_{12}r_{21} - t_{12}t_{21})(r_{23}r_{32} - t_{23}t_{32}) - r_{12}r_{32})}{t_{21}t_{32}} & \frac{e^{-ik_2 n_2 d_2} (r_{32} - e^{2ik_0 n_2 d_2} r_{21}(r_{23}r_{32} - t_{23}t_{32}))}{t_{21}t_{32}} \\ \frac{e^{-ik_0 n_2 d_2} (e^{2ik_0 n_2 d_2} r_{23}(r_{12}r_{21} - t_{12}t_{21}) - r_{12})}{t_{21}t_{32}} & \frac{e^{-ik_0 n_2 d_2} - e^{ik_0 n_2 d_2} r_{21}r_{23}}{t_{21}t_{32}} \end{pmatrix}. \quad (128)$$

Una vez obtenida la matriz efectiva M_{net} vamos a calcular la matriz efectiva auxiliar que denominamos S_e como

$$S_e = \begin{pmatrix} t_{13} & r_{31} \\ r_{13} & t_{31} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_{22}} \begin{pmatrix} Det(M_{net}) & m_{12} \\ -m_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad (129)$$

con la cual podemos obtener los coeficientes de transmisión y reflexión directamente como

$$\begin{aligned} t_{13} &= \frac{e^{ik_2 n_2 d_2} t_{12} t_{23}}{1 - r_{21} r_{23} e^{ik_2 n_2 d_2}} \\ r_{13} &= r_{12} + \frac{t_{12} t_{23} r_{23} e^{ik_2 n_2 d_2}}{1 - r_{21} r_{23} e^{ik_2 n_2 d_2}} \\ t_{31} &= \frac{e^{ik_2 n_2 d_2} t_{32} t_{21}}{1 - r_{23} r_{21} e^{ik_2 n_2 d_2}} \\ r_{31} &= r_{21} + \frac{t_{12} r_{32} t_{21} e^{ik_2 n_2 d_2}}{1 - r_{23} r_{21} e^{ik_2 n_2 d_2}}, \end{aligned} \quad (130)$$

el resultado de la ecuación (130), (Hecht, 2003), es el mismo que encontramos en las ecuaciones (97) a (100) para los coeficientes de transmisión y reflexión. Esto implica que si queremos estudiar sistemas multicapa mediante el algoritmo de matrices de

transferencia, podemos realizarlo ya que en estas matrices esta toda la información de las transiciones en las interfaces y de los medios de propagación.

Otra forma de obtener los coeficientes es usando la ecuación (128) de la matriz efectiva y con ella

$$\begin{aligned}
 t_{13} &= \frac{Det(M_{net})}{m_{22}} \\
 r_{13} &= -\frac{m_{21}}{m_{22}} \\
 t_{31} &= \frac{1}{m_{22}} \\
 r_{31} &= \frac{m_{12}}{m_{22}}.
 \end{aligned} \tag{131}$$

4. Sistemas con Simetría Paridad Tiempo

El sistema que se va analizar tiene simetría- $\mathcal{PT}$ y consiste de un pequeño acoplamiento de materiales que se usarán como medio de propagación óptico. Este medio con índice de refracción complejo, embebido en un medio de refracción homogéneo puede hacer que la radiación electromagnética incidente en una dirección pueda sólo transmitirse, sin que el sistema afecte su propagación. En la dirección contraria de incidencia la radiación puede transmitirse y reflejarse en el material, haciendo entonces que la propagación experimente una reflectividad entrelazada. La dinámica de este fenómeno presenta un balance entre pérdidas y ganancias en ciertas regiones debido a la naturaleza de estas estructuras $\mathcal{PT}$ artificiales. La propagación de ondas en este sistema de estructuras $\mathcal{PT}$, hace que su comportamiento sea como el de un dispositivo rectificador de ondas electromagnéticas. Este tipo de materiales sintetizados en estructuras $\mathcal{PT}$ ópticas, como películas delgadas, con propiedades de pérdidas y ganancias permiten explorar la posibilidad de convertirse en un sistema de propagación inducida invisible unidireccional en puntos localizados.

4.1 Sistemas no-Hermitianos

A continuación mostramos como las estructuras mediante películas delgadas con simetría $\mathcal{PT}$ se comportan como sistemas no-Hermitianos. Desde hace algunos años la teoría y las implementaciones experimentales mediante fotones de este tipo de sistemas, incluyendo dispositivos ópticos con pérdida total, así como los sistemas simétricos de paridad-tiempo que consisten en pérdidas y ganancias ópticas balanceados, han dado lugar a interacciones luz-materia con posibles diversas aplicaciones en las ciencias y las ingenierías. En este sentido, presentamos un estudio teórico no-Hermitiano mediante películas delgadas dieléctricas dopadas. La figura (17) muestra la denominación de los sistemas no-Hermitianos desde el punto de vista de la fotónica acuerdo a los materiales y sus variables físicas, (El-Ganainy, 2019).

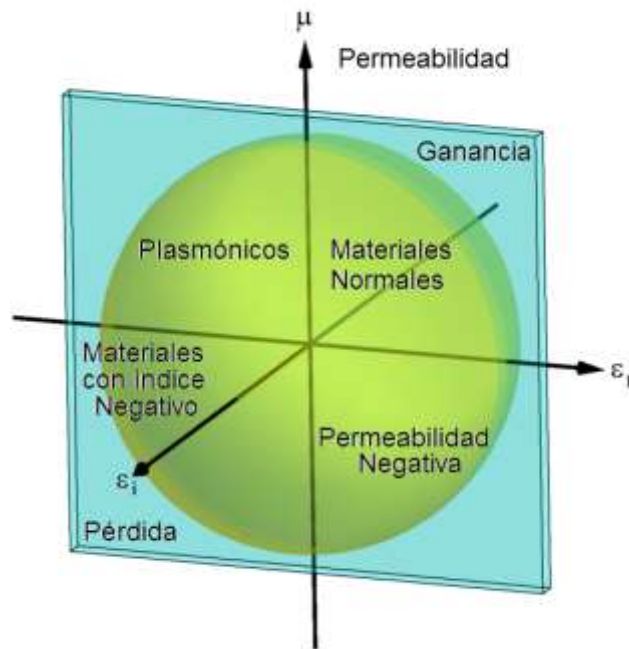


Figura 17. Fotónica no-Hermitiana contemplando el dominio real y complejo de la constante dieléctrica (ϵ_r , ϵ_i), y la permitividad μ de los materiales.

4.2 Semiconductor y películas delgadas

El material básico usado en la construcción de la mayoría de los diodos y transistores es el Silicio (Si), el silicio es un semiconductor a temperatura ambiente muy pocos electrones existen en la banda de conducción del cristal de silicio. Cuando se

aplica una corriente proporcional a un grupo de electrones en movimiento, la corriente es pequeña, el material tiene una gran resistencia. Las bandas de conducción y valencia del silicio puro se muestran en la Figura (18).

A 0 Kelvin (cero absoluto), todos los electrones están a su más bajo nivel de energía, a temperatura ambiente ocasionalmente un electrón tiene mucha energía para escapar de la banda de valencia y moverse hacia la banda de conducción. La falta de electrones se muestra como un círculo o hueco, si un campo eléctrico es aplicado al material el electrón se mueve hacia la terminal positiva de la batería. Un electrón en la banda de valencia puede moverse también hacia la terminal positiva de la batería si tiene suficiente energía para ir desde su nivel de energía hasta el nivel de energía del hueco. Cuando este electrón escapa desde un hueco lo deja oculto. Parecería que los huecos se mueven hacia la derecha, hacia la terminal negativa de la batería. La red de corriente es por lo tanto la suma de la corriente debido al movimiento de los electrones en la banda de conducción y de la corriente debido al movimiento de los huecos en la banda de valencia (Schilling & Belove, 1989 y Padrón et al., 2019).

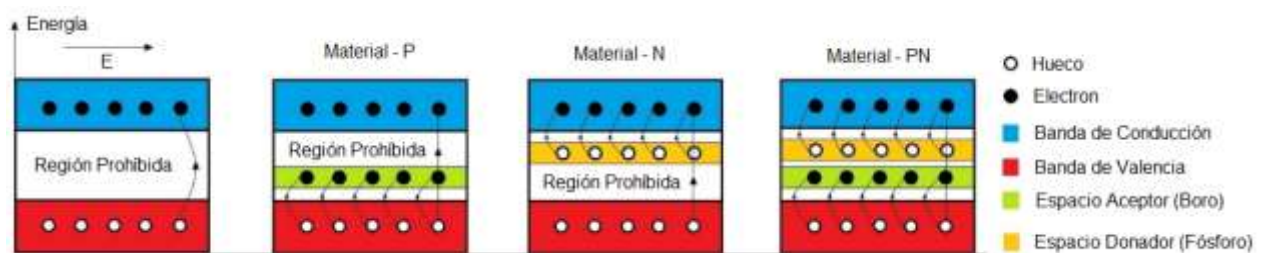


Figura 18. Bandas de energía del Silicio a temperatura ambiente.

Los huecos se refieren a cargas positivas en movimiento para evitar confusión con el movimiento de los electrones en la banda de conducción. La corriente convencional debida al flujo de electrones y la corriente de huecos están en la dirección del campo eléctrico. Debe notarse que los electrones deberían moverse más rápido hacia la terminal positiva que el movimiento de los huecos hacia la terminal negativa con esto la probabilidad de que un electrón tenga la energía requerida para moverse hacia un estado vacío en la banda de conducción (que está casi vacía) es más grande que la probabilidad de un electrón tenga la energía requerida para moverse hacia un estado

vacío en la banda de valencia (que está casi llena). Así la corriente debida al flujo de electrones en la banda de conducción es más grande que la corriente de huecos en el silicio. Sin embargo, la red de corriente es pequeña de aquí que el material sea un semiconductor.

En la construcción de un diodo, usamos al silicio y le colocamos átomos de otro elemento, como el boro, a esto le llamamos dopaje. El boro se conoce como un material aceptor debido a su capacidad de aceptar electrones desde la banda de valencia del silicio. A temperatura ambiente, los electrones desde la banda de valencia del silicio llena el espacio del aceptor del boro. Luego la probabilidad de que la banda de valencia de los electrones tenga suficiente energía a temperatura ambiente para puentear un pequeño circuito es muy alta, el resultado de esto es que existe un gran número de huecos. Cuando un campo eléctrico se aplica a través del silicio dopado, la corriente de huecos es muy alta y el material es ahora un buen conductor. Este procedimiento se le conoce como un material tipo-p. Aclarando que un material de conducción tipo-p se debe principalmente a movimiento de huecos.

Tomando otra pieza de silicio y le colocamos átomos de otro elemento como el fósforo, a lo cual llamamos un material donador debido a la capacidad de donar electrones a la banda de conducción del silicio. Por lo que dona (a temperatura ambiente) todos sus electrones a la banda de conducción del silicio, ahora el flujo de corriente cuando un campo eléctrico es aplicado es debido principalmente al flujo de electrones, a lo cual a este tipo de material se le conoce como tipo-n.

4.3 Películas delgadas

Análogamente el uso y procedimiento que hacemos para la construcción de un diodo eléctrico lo empleamos para crear películas delgadas que nos servirán para crear en este caso un diodo óptico y realizar sobre ese dispositivo el estudio y análisis cuando se aplica radiación electromagnética por dos direcciones normales paralelamente opuestas. Estudios avanzados que se realizan con estos dispositivos son con una serie de capas dieléctricas periódicas, tomando como base un par de ellas o una terna de capas. En las películas delgadas buscamos primero que tengan una simetría paridad

tiempo ($\mathcal{PT}$), después de dopar con otros materiales. Lo cual logramos con un par de capas dieléctricas semiconductoras (dimer) con ganancia y pérdida balanceada. Sin embargo para lograr una simetría del dispositivo debemos optimizar su grosor usando parámetros sobre los cuales se desean obtener los resultados, como longitud de onda, índices de refracción complejos, por mencionar algunos. Empleando capas de películas delgadas podemos usar varias combinaciones de pasivo-dopado como ganancia-ganancia en el dimer, o bien pérdida-pérdida, hasta llegar a capas como ganancia-pérdida, real-pérdida, real-ganancia.

4.4 Diseño y construcción de los materiales de estudio

Para el análisis de este trabajo, buscamos materiales basados en películas delgadas dieléctricas semiconductoras, que tengan un comportamiento similar al de un diodo rectificador de señal, (Boylestad 1989). La base de estos materiales fueron originalmente capas delgadas de silicio y germanio. El material estudiado parte de SiO_2 que tiene las siguientes propiedades cuando se depositan películas delgadas sobre un sustrato con índice de refracción $n_r = 1.4574$, un coeficiente de extinción $\kappa = 0.000687$, a una longitud de onda de 1510 nm, (Rodríguez-de et al., 2016).

Este material se construye mediante un haz de electrones reactivos, evaporado sobre diversos sustratos a 300 °C, como se hace en la fabricación de transistores CMOS (Hodgson, 2003). Construimos un primer material similar al que se muestra en la figura (18d), que tiene un aceptor y un donante en las bandas de valencia como un diodo rectificador polarizado en corriente continua (Schilling, 1989). La generación de un material PN con Boro y Fósforo, que corresponde a un material con ganancia y pérdida equilibrada basado en un par de películas delgadas, conocido como dimer con simetría de tiempo de paridad ($\mathcal{PT}$).

También requerimos un segundo material construido con bandas de valenciaceptoras como la de la figura (18b), dopado con boro como material N. Creando así un material puro en su primera capa y con absorción en la segunda capa, que corresponde a un dímero con una capa pasiva y una capa con pérdida. Estos materiales que han sido probados a nivel de sistema eléctrico, ahora los estudiamos para crear rectificadores

ópticos que son importantes en la construcción de fuentes generadoras de fotones entrelazados. Las propiedades de estos dímeros basados en películas delgadas dieléctricas de SiO₂ dopadas tienen constantes dieléctricas iguales a

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \pm i \varepsilon_i, \quad (132)$$

donde $\varepsilon_0 = 2.3963$ y $\varepsilon_i = 0.3003$. Entonces, usaremos para un dímero balanceado $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\varepsilon_i$ en la primera capa y $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\varepsilon_i$ en la segunda capa, ganancia-pérdida. Entonces, para un dímero pasivo con pérdida, tenemos $\varepsilon = \varepsilon_0$ en la primera capa y $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\varepsilon_i$ para la segunda capa, pérdida real (Shramkova & Tsironis, 2014). Luego cambiamos estos valores a índice de refracción y coeficiente de extinción respectivamente ($n_i = 1.548$, $\kappa_i = 0.548$).

4.5 Coeficientes de Fresnel en función de los ángulos de incidencia y refractado

Dadas las ecuaciones (97-100) o el conjunto de ecuaciones (130), podemos escribirlas en función de los ángulos de incidencia θ_i y refractado θ_t . Usando las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned} r_{mn} &= \frac{k_m \cos(\theta_i) - k_n \cos(\theta_t)}{k_m \cos(\theta_i) + k_n \cos(\theta_t)}, \\ r_{nm} &= \frac{k_m \cos(\theta_i) - k_n \cos(\theta_t)}{k_m \cos(\theta_i) + k_n \cos(\theta_t)}, \\ t_{mn} &= 1 + r_{mn}, \\ t_{nm} &= 1 + r_{nm}. \end{aligned} \quad (133)$$

con $m=0,1,2$ y $n=0,1,2$; $k_{m,n}$ es la constante de propagación, θ_i , θ_t son ángulos de incidencia y refractado respectivamente. Con las cuales, sustituyendo y simplificando obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} t_{02} &= \frac{4e^{i\phi_1} n_0 n_1 \cos^2 \theta_i (n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)}{(n_0 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)[(n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t) - e^{2i\phi_1} (n_1 \cos \theta_i - n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t)]} \\ r_{02} &= \frac{(n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)(n_0 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t) + e^{i2\phi_1} (n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t)(3n_0 n_1 \cos^2 \theta_i + (n_0^2 + n_1^2) \cos \theta_i \cos \theta_t - n_0 n_1 \cos^2 \theta_t)}{(n_0 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)[(n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t) - e^{i2\phi_1} (n_1 \cos \theta_i - n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t)]} \end{aligned}$$

$$t_{20} = \frac{4e^{i\phi_1} n_1 n_2 \cos^2 \theta_i (n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t)}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t) [(e^{i2\phi_1} (n_1 \cos \theta_i - n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t) - (n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t))]$$

$$r_{20} = \frac{(n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)(n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t) + e^{i2\phi_1} (n_1 \cos \theta_i - n_0 \cos \theta_t)(3n_1 n_2 \cos^2 \theta_i + (n_1^2 + n_2^2) \cos \theta_i \cos \theta_t - n_1 n_2 \cos^2 \theta_t)}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t) - e^{i2\phi_1} (n_1 \cos \theta_i - n_0 \cos \theta_t)(n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t)}], \quad (134)$$

donde $n_0=n_2$: aire, n_1 =índice de refracción del medio de propagación para una capa. Así r_{02} , t_{02} son los coeficientes de Fresnel incidencia por la izquierda y r_{20} , t_{20} por la derecha. Con estos coeficientes podemos encontrar la reflectancia y transmitancia que formalmente son los cuadrados de cada coeficiente, donde: $R+T=1$, cuando tenemos condiciones de conservación, es decir sin absorción de radiación por los materiales. Seguimos el mismo análisis para dos capas y obtendremos los coeficientes r_{03} , t_{03} por la izquierda y r_{30} , t_{30} por la derecha. Que simularemos en forma numérica partiendo de sus expresiones analíticas y simulaciones por elemento finito.

5. Reflectancia y Transmitancia de un Dimer

Hace aproximadamente 20 años materiales con simetría paridad-tiempo $\mathcal{PT}$ que surgen de la óptica cuántica y de sistemas no-Hermitianos atraen la atención por la posibilidad de realizar la no reciprocidad de la propagación de la luz, invisibilidad unidireccional, perfecta absorción coherente y usarla en diversas aplicaciones (Shramkova et al., 2016). En este capítulo iniciamos con las simulaciones de la reflectancia transmitancia a partir de los coeficientes de Fresnel, para un dimer con capas idénticas mediante el conjunto de ecuaciones (130), del modelo analítico y al mismo tiempo mostramos las simulaciones por elemento finito. Luego mostramos simulaciones de la reflectancia y transmitancia de un dimer con simetría $\mathcal{PT}$.

5.1 Simulaciones de un Dimer con capas idénticas

El análisis se inicia con el modelado de dos capas delgadas iguales al estilo de una cavidad Fabry-Perot y se deriva en la construcción de la matriz de dispersión efectiva para obtener los coeficientes de Fresnel para transmisión y la reflexión. Con ellos se

obtienen la reflectancia y la transmitancia sobre el dimer, que son las amplitudes de los campos en la dirección de propagación en función de la incidencia angular de radiación electromagnética. La figura (19) muestra la configuración que se hace de la estructura del dimer para la simulación por elemento finito.

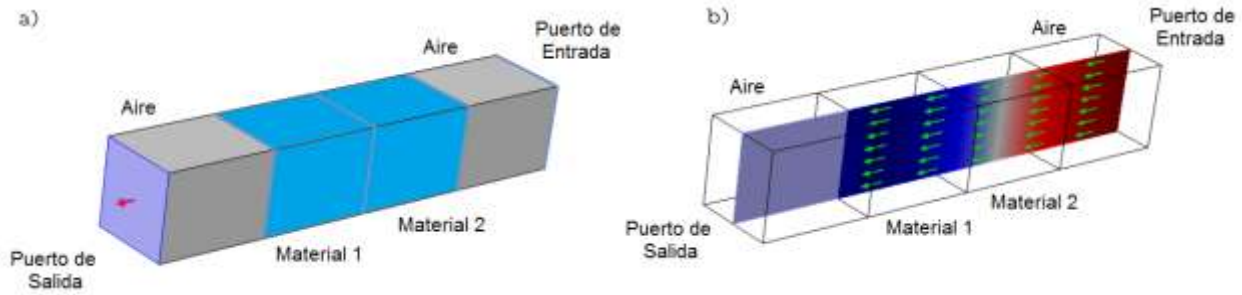


Figura (19). Un dimer de capas idénticas. a) Codificación de puertos en un dimer con capas idénticas, y la b) propagación del campo sobre las capas del dimer.

La figura (20) nos muestra un ejemplo donde se supone la propagación de un haz en aire, que incide angularmente sobre SiO_2 una capa dieléctrica con índice 1.548 de tamaño infinito. Se presentan las reflectancias y transmitancias y se observa que cuando la reflectancia es mínima la transmitancia es máxima, esto es una relación lógica puesto que $R+T=1$. Como sabemos en este punto coincide con el ángulo de Brewster, (57.13° en este caso), o sea el punto donde se anula la componente del campo paralela al plano de incidencia. Las simulaciones son mediante el modelo matemático (SMM) de las ecuaciones de Fresnel, conjunto de ecuaciones (134) y se comparan con las simulaciones por elemento finito (SEF), los resultados son similares.

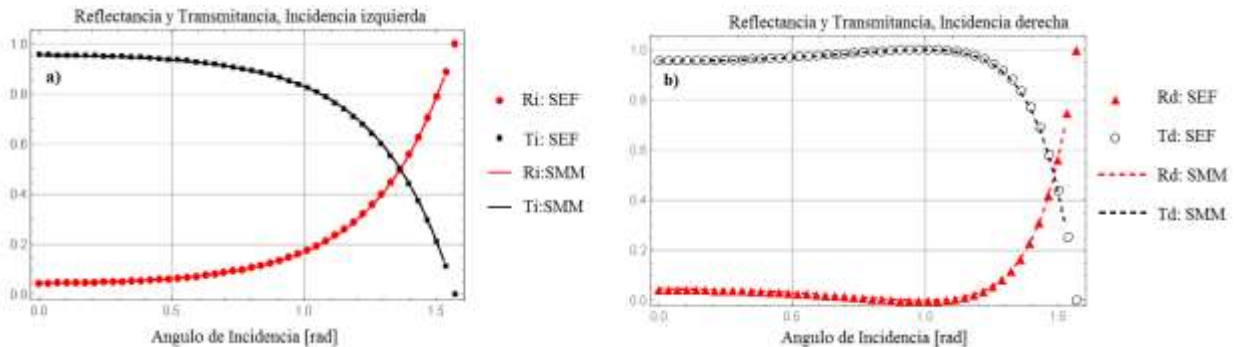


Figura 20. Reflectancia y Transmitancia sobre una superficie de SiO_2 en función del ángulo de incidencia, a) incidencia izquierda y b) incidencia derecha.

Luego haciendo el mismo procedimiento para obtener la matriz de dispersión efectiva para las dos capas idénticas con incidencia angular, es decir tomando en cuenta los ángulos de incidencia y ángulos refractados sobre las interfaces de incidencia. Estas expresiones analíticas se muestran en los apéndices al final del trabajo. Las primeras diferencias que se encontraron en las soluciones numéricas para un dimer, es al propagar angularmente en medios absorbentes, donde hay un ángulo de compensación que se multiplica en la transmisión de las simulaciones. Esto es de la expresión

$$t_{02comp} = t_{02} \cdot \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \quad (135)$$

La diferencia provocada por esta compensación en la transmisión se ilustra en la figura (21).

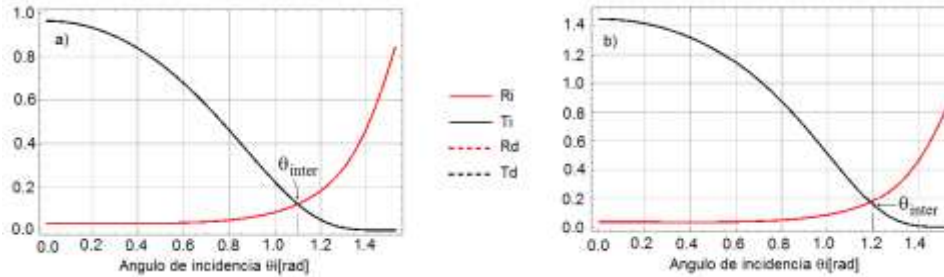


Figura 21. Dimer idéntico a) sin compensación, b) con compensación en la transmitancia. (R_i , T_i): incidencia izquierda, (R_d , T_d): incidencia derecha.

Claramente los ángulos de la intersección de la reflectancia y transmitancia para ambas gráficas es diferente, de $\theta_{inter}=1.1$ rad y de $\theta_{inter}=1.2$ rad, (63° y 68°) en la figura (21a) y (21b) respectivamente. Este ángulo es el ángulo cuando cambia la polarización del campo, que para valores reales es el ángulo de Brewster.

En la figura (22) se presentan las gráficas de la reflectancia y transmitancia sobre una capa de SiO_2 compuesta por aire-material-aire en función del ángulo de incidencia, la longitud de onda, el número de onda y de la frecuencia. En esta capa notamos un poco de absorción debido al material dieléctrico de la capa.

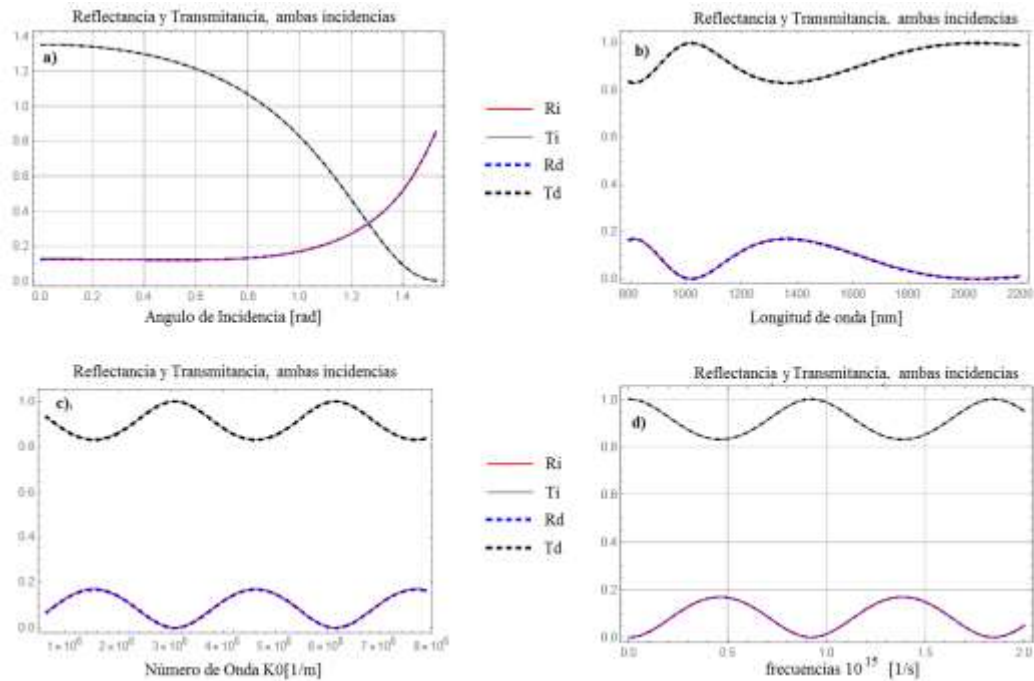


Figura 22. Reflectancia y transmitancia a) en función del ángulo de incidencia, b) en función de la longitud de onda, c) en función del número de onda y d) en función de la frecuencia.

Entonces veremos la respuesta de la capa con pequeñas partículas metálicas mezcladas en el material provocando ganancia y pérdida según sea el caso con incidencia normal por la izquierda y por la derecha, lo cual se refleja también en un índice de refracción complejo y veremos que resulta, figura (23).

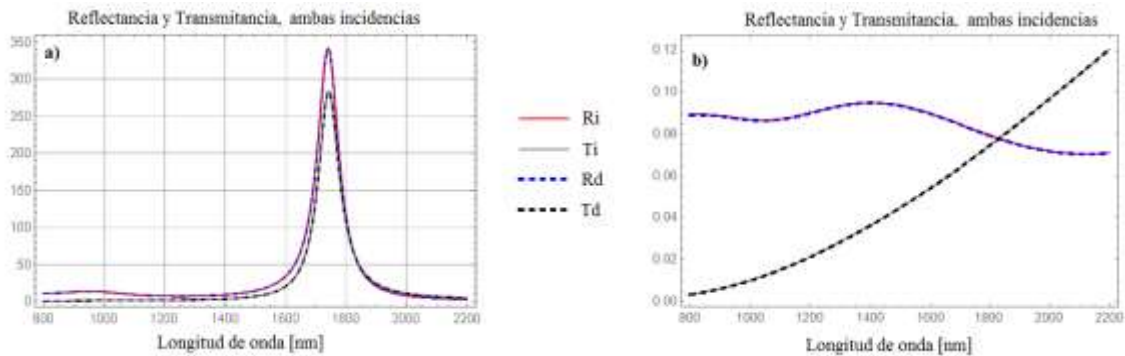


Figura 23. Reflectancia y transmitancia de una capa de SiO_2 , a) con ganancia $k_1 = -0.5458$ y b) con pérdida $k_1 = 0.548$.

En la figura (23) hay una resonancia en la reflectividad y en la transmitancia en una longitud de onda de 1550 nm en función al grosor de la capa de 660 nm, lo cual era lo esperado después de un procedimiento de optimización sobre el grosor de la capa.

5.2 Simulación de un Dimer con simetría $\mathcal{PT}$.

En esta sección, se realiza el estudio de la dependencia angular en un dimer utilizando estructuras con simetría- $\mathcal{PT}$ basadas en películas delgadas dopadas que rompen la simetría de reflexión estándar de los dispositivos ópticos pasivos utilizando la metodología de matrices de transferencia, (Kottos 2016). Esto se muestra a través de la simulación numérica de los modelos analíticos de la reflectancia y transmitancia y se verifica con simulación por elemento finito. En la búsqueda de un diodo óptico con las características de un diodo eléctrico, analizamos un dispositivo óptico a base de películas delgadas de dos capas o una serie de ellas. Para las simulaciones numéricas tomaremos dos casos de estudio sobre simetrías- $\mathcal{PT}$ con ganancia-pérdida (balanceadas) y el otro con capas real-pérdida (pasivo con pérdida). Para un dimer con capas de Sílice Industrial SiO_2 con un índice de refracción de $n_1=1.548$ y un factor de extinción de $\kappa_1=-0.548$, con un grosor de 660 nm, la otra capa y $n_2=1.548$ y $\kappa_2=0.540$, sabiendo que para $\kappa_i>0$ hay pérdidas y $\kappa_i<0$ hay ganancias. La figura (24) muestra la configuración que se hace de la estructura del dimer para la simulación por elemento finito con dos capas diferentes.

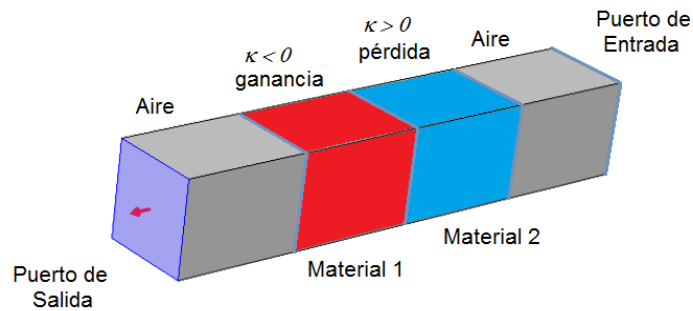


Figura (24). Un dimer con simetría $\mathcal{PT}$, configuración de puertos en un dimer con capas diferentes para la simulación por elemento finito.

De acuerdo a la figura (24), se tienen que los índices de refracción de los medios de propagación están dados por n_0 , n_{c1} , n_{c2} y n_3 respectivamente, en la cual podemos

identificar que $n_0=n_3=1$. Lo que enseña la óptica geométrica es que el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de salida, pero con cristales birrefringentes esta aseveración no es cierta porque tenemos desviación o división de haces.

Así los resultados obtenidos muestran la reflectancia y transmitancia, ambas incidencias angulares (izquierda y derecha) para una muestra de SiO_2 usando simulación del modelo analítico (Math) y la simulación por elemento finito (COMSOL) con ganancia-pérdida, para $d_1=d_2=660$ nm de grosor en cada capa, ver figuras (25) y (26), ángulo refractado real y ángulo refractado complejo respectivamente.

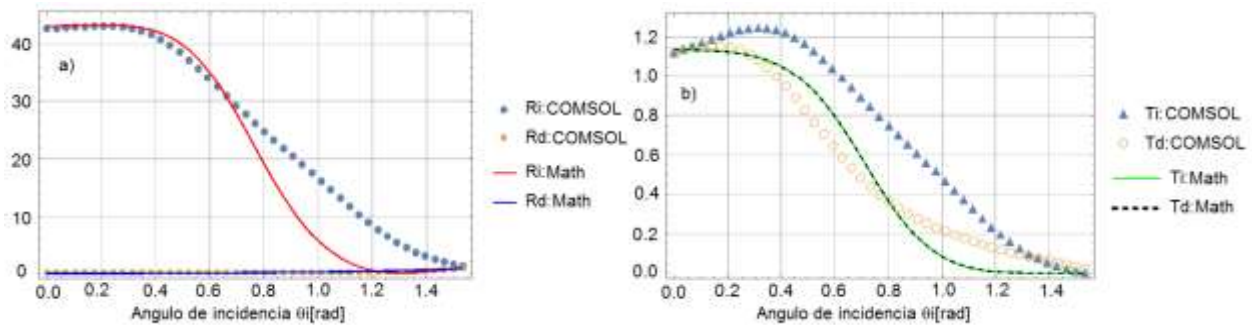


Figura 25. Dimer Ideal. a) Reflectividad por ambos lados, b) Transmitancia por ambos lados. (R_i , T_i): incidencia izquierda, (R_d , T_d): incidencia derecha, Math: modelo analítico, COMSOL: simulación por elemento finito.

Se observan ahora notorias diferencias entre los dos métodos de simulación numérica, que se explicarán más adelante.

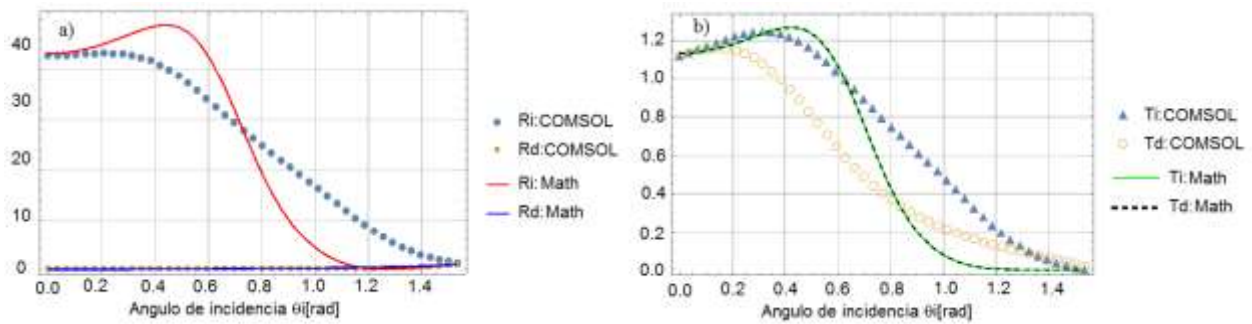


Figura 26. {Dimer Ideal. a) Reflectividad por ambos lados, b) Transmitancia por ambos lados. (R_i , T_i): incidencia izquierda, (R_d , T_d): incidencia derecha, Math: modelo analítico, COMSOL: simulación por elemento finito.

Siguen habiendo diferencias entre ambos métodos no importando si el ángulo de refracción propagado sea real o imaginario. Ya que se encuentran estas diferencias

entre los métodos, se opta lo siguiente: uno por cambiar el grosor y restringirnos a dos capas solamente para hacer los cálculos correspondientes al modelo analítico. Cuando se cambia el grosor de las películas a dimensiones más pequeñas $d=220$ nm, lo cual significa que el grosor fue optimizado a la misma longitud de onda $\lambda=1550$ nm, en el modelo analítico las simulaciones para un dimer ideal y uno pasivo muestran que la reflectancia por izquierda al inicio es muy grande, incluso mayor a la unidad debida a la ganancia disminuye hasta 0.2 en 1.15 rad y crece hasta 1. Por la derecha la reflectancia inicia menor a la unidad tiene un mínimo alrededor de 1.0 rad y crece hasta la unidad, la transmitancia es igual en ambos sentidos decrece hasta 0 para el caso ideal, figura (27a). La reflectancia por la izquierda y derecha crecen hasta la unidad, una desde 0 y la otra desde 0.14. La transmitancia decrece desde 0.4 a 0 para ambos sentidos para el caso pasivo-pérdida, figura (27b).

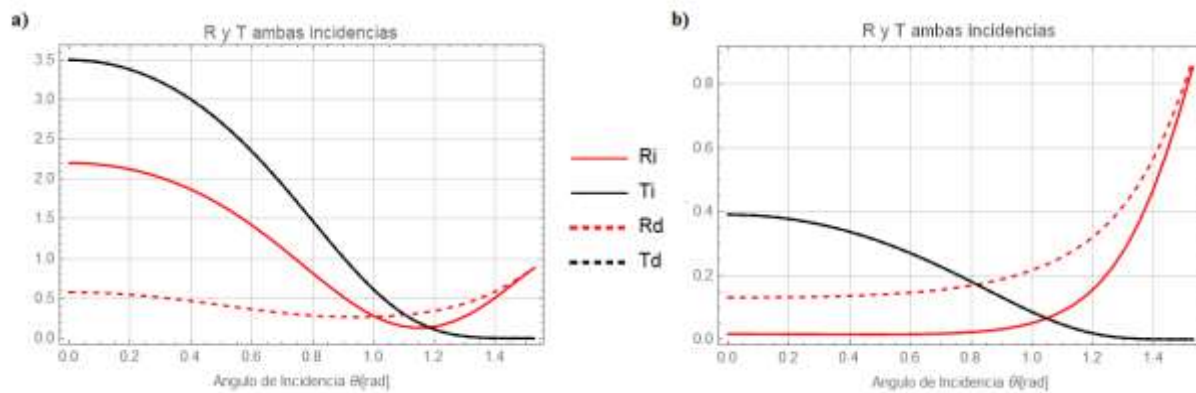


Figura 27. a) Dimer ideal balanceado, b) dimer pasivo-pérdida, reflectancia y transmitancia por ambos lados con incidencia angular. (R_i , T_i): incidencia izquierda, (R_d , T_d): incidencia derecha.

Como consecuencia de este análisis se puede mencionar que para ángulos menores al ángulo de intersección de $\theta_{\text{inter}}=1.1$ rad se puede trabajar con una reflectancia unilateral, figura (27).

Vayamos entonces a los resultados obtenidos para un par de capas de las mismas características cuando se tiene un caso de simetría- $\mathcal{PT}$, esto es ganancia-pérdida balanceada con incidencia normal.

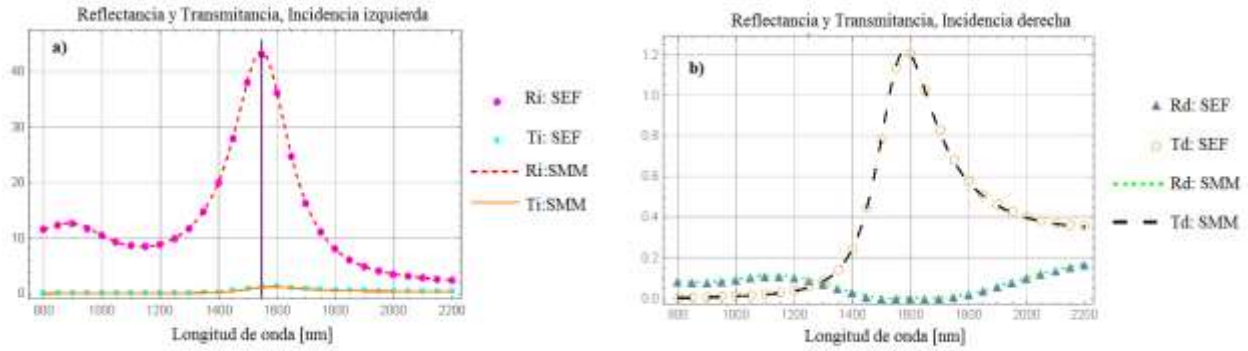


Figura 28. Reflectancia y transmitancia de dos capas con ganancia-pérdida balanceada a) incidencia izquierda y b) incidencia derecha. SEF: Simulación por Elemento Finito, SMM: Simulación Modelo Matemático.

La figura (28) nos muestra como el dispositivo a base de películas delgadas presenta unidireccionalidad en la reflectancia, donde la reflectancia por la derecha tiene valores muy cercanos a cero. Esto es lo esperado en un caso ideal, sin embargo los dispositivos en su mayoría presentan pérdidas, figura (29).

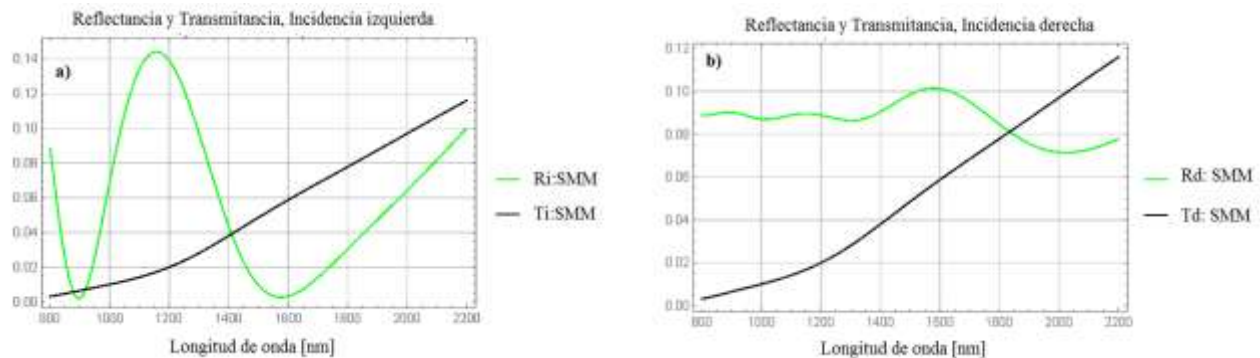


Figura 29. Reflectancia y transmitancia de dos capas con una capa real y otra con pérdida a) incidencia por la izquierda y b) incidencia por la derecha. SMM: Simulación Modelo Matemático.

Aunque los valores de la Reflectancia son pequeños se puede apreciar en la figura (29) que seguimos teniendo unidireccionalidad en la reflectancia en $\lambda=1550$ nm que es el comportamiento que deseábamos encontrar. Luego en resumen de esta subsección, la equivalencia que se encontró para ambos métodos, la simulación del modelo analítico y

la simulación por elemento finito, de una capa o dos capas idénticas no se puede extender a los resultados obtenidos para dos capas con simetría balanceada y/o dos capas real-pérdida. Porque aunque la simulación por elemento finito da soporte o verificación de algunos resultados, en principio son aproximaciones a la teoría. Entre las consideraciones que hace el simulador por elemento finito es tomar un ancho de haz de iluminación finito, como el de un haz gaussiano además de limitarse a analizar superficies acotadas. Así la naturaleza numérica (aproximada) de ambos métodos justifica la discrepancia en los resultados.

6. Resultados

Una vez que se obtuvieron los modelos analíticos con los métodos mostrados y los parámetros requeridos, vamos a mostrar las simulaciones numéricas de los modelos matemáticos y las correspondientes simulaciones por elemento finito. La base de los dimer de SiO_2 serán capas de películas delgadas dieléctricas dopadas con simetría $\mathcal{PT}$, es decir, ganancia y pérdida balanceada, luego mostramos las simulaciones de un caso donde una capa será real y la otra con pérdida. Antes realizamos una optimización sobre los espesores de las películas para una resonancia en la longitud de onda de 1550 nm, usando los coeficientes de Fresnel obtenidos de la matriz de dispersión efectiva por el método de la matriz de transferencia.

6.1 Optimización del espesor de las películas delgadas dieléctricas

Primero veremos el filtro antireflejante o diodo óptico para un par de películas dieléctricas y después una periodicidad de ellas, figura (30). En él se verá la resonancia a $\lambda=1550$ nm con la optimización del grosor de las películas delgadas.

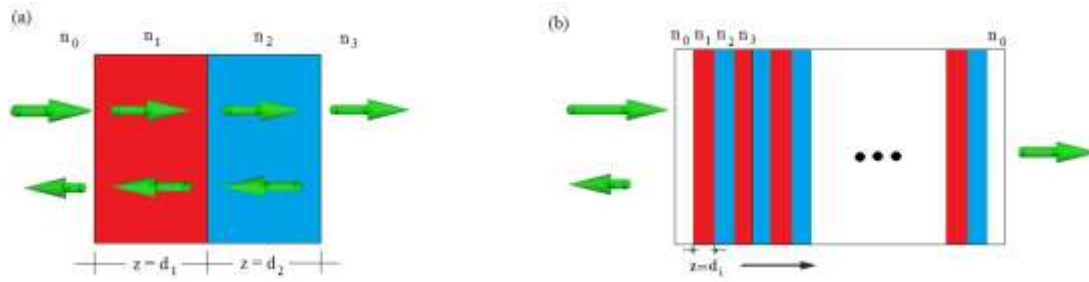


Figura 30. Dimer a) Celda unitaria $N=1$. b) Celdas unitarias acumuladas $N=1, 2, 3, \dots$

Estamos buscando propagación unidireccional sin reflexión (Shramkova et al., 2016; Yang et al., 2016; Novitsky et al., 2017 y 2018; Yuang et al., 2019), que es una reflexión que es nula en una dirección pero no en la otra. Para índices de refracción fijos y longitudes de onda incidentes, podemos optimizar el grosor del dimer para reflexión o transmisión utilizando la primera y segunda derivadas numéricas de sus matrices de transferencia. La figura (31) muestra derivadas numéricas para los coeficientes de reflexión y transmisión de una celda de doble capa con ganancia y pérdida balanceada, una celda de doble capa con materiales de pérdida pasiva a $\lambda = 1550$ nm e incidencia normal, $\theta_i = 0$.

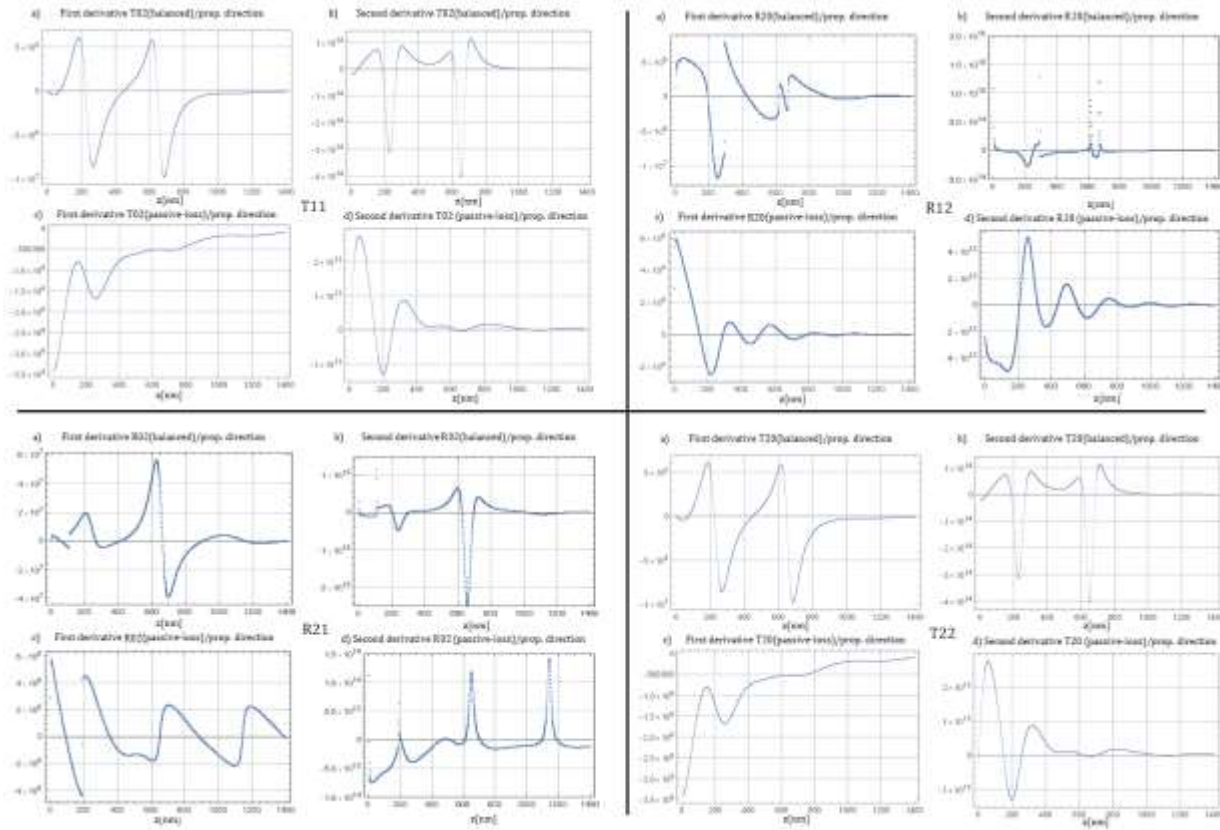


Figura 31. Primeras y segundas derivadas numéricas, de los coeficientes de reflexión y transmisión para un dimer balanceado a), b); un dimer pasivo-pérdida de celda unitaria c), d), con incidencia normal.

Los parámetros utilizados para la celda ideal fueron $n_1=n_2 = 1.548$, de dióxido de silicio (SiO_2), $k_1 = -k_2 = -0.548$, y para la celda de pérdida pasiva $n_1 = n_2 = 1.548$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0.548$, en ambos casos $n_0 = n_3 = 1$. El grosor de las capas es igual, $d_1 = d_2 = d$.

Tomamos los ceros de la primera derivada que producen valores positivos de la segunda derivada para encontrar el grosor de la capa que produce mínimos de reflectividad.

Cuando las ondas electromagnéticas se propagan dentro de un medio dieléctrico, las fases ϕ son acumulativas y dependen del índice de refracción n_{ci} , el número de onda k_0 y el ancho de la capa que a su vez depende de la longitud de onda $d_i(\lambda)$.

Por ejemplo, el espesor optimizado para dos mínimos de reflectividad son $d=240$ nm y $d=660$ nm para la bicapa balanceada a la longitud de onda deseada de $\lambda=1550$ nm. El

espesor optimizado para dos mínimos de transmisión en la celda con pérdida pasiva son de $d=200$ nm y $d=660$ nm en la misma longitud de onda deseada.

A continuación, simularemos la propagación del campo electromagnético polarizado linealmente utilizando estos espesores optimizados y compararemos nuestros resultados numéricos con la simulación de elemento finito para verificar ambos resultados.

6.2 Simulaciones numéricas de la Reflectancia y la transmitancia

La figura (32) muestra los coeficientes de reflectividad y transmitividad para estructuras ideales de pérdidas y ganancias. La figura (32a) muestra estos valores para un grosor de bicapa optimizado de $d=240$ nm donde podemos ver que la reflectividad del lado izquierdo, R_L , domina sobre la del derecho, R_R , en $\lambda=1550$ nm, que se muestra como una línea vertical. Si quisiéramos usar esta bicapa y repetirla como celda unitaria en una pila, digamos $N=3$, el espesor muestra una diferencia en la resonancia máxima de la reflexión $d=248$ nm, figura (32b). Por lo tanto, tenemos que optimizar para cada tamaño de celda unitaria para recuperar resultados similares al caso $N=1$, por ejemplo para cinco celdas esta sin optimizar, figura (32c).

De manera similar, la figura (32d) muestra valores de reflectividad y transmitividad para un espesor de bicapa optimizado de $d=660$ nm donde nuevamente podemos ver que la reflectividad del lado izquierdo domina sobre la del lado derecho. En $d=630$ nm con $N=3$ se tiene el mismo con celdas optimizadas. Luego nuevamente, se produce un cambio de espesor si aumentamos el número de celdas unitarias sin más optimización por ejemplo cuando $N=5$ y la longitud de onda de resonancia aumenta, figura (32f).

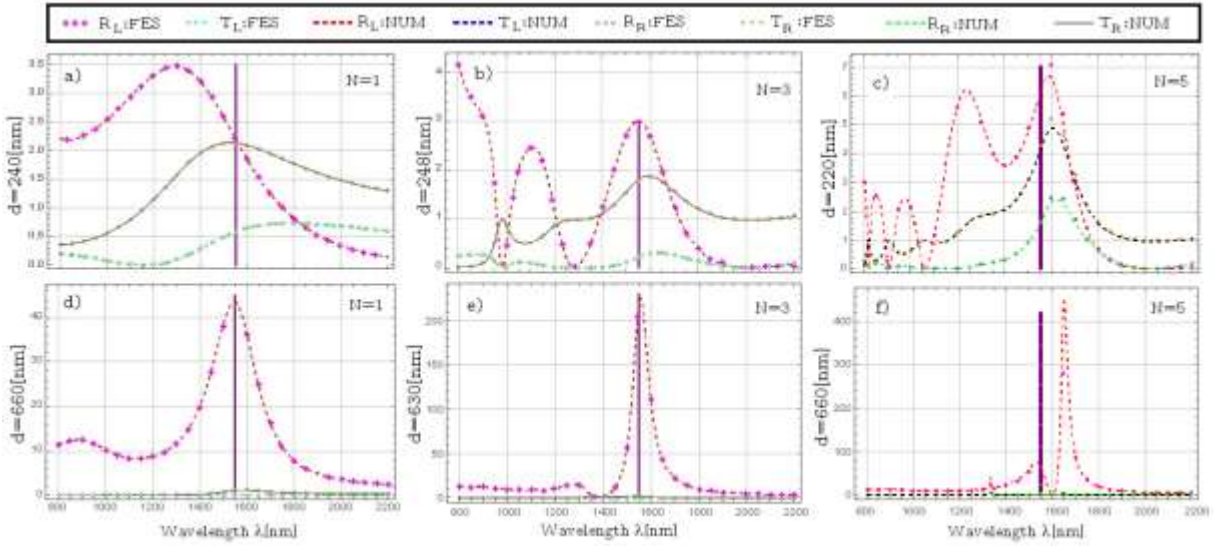


Fig. 32. Reflectividad y transmitividad en una bicapa ideal balanceada, simulación numérica del modelo analítico (NUM) y simulación por elemento finito (FES) con $N=1$ y $N=3$, a incidencia normal. Los grosores para a), b) son $d=240$ nm y $d=248$ nm, para d), e) fue $d=660$ nm y $d=630$ nm. Para cinco celdas unitarias no optimizadas fue $d=220$ nm c) y de $d=660$ nm para f).

Ahora, pasamos a una estructura de pérdida pasiva más realista. La figura (33a) muestra los valores de reflectividad y transmitividad para un espesor de la bicapa optimizado de $d=240$ nm donde podemos ver que, nuevamente, la reflectividad desde la derecha domina sobre la de la izquierda en $\lambda = 1550$ nm. Se induce un desplazamiento de longitud de onda equivalente cuando apilamos la celda unitaria sin más optimización, pero esto se puede corregir fácilmente con la optimización para la nueva pila, figura (33b).

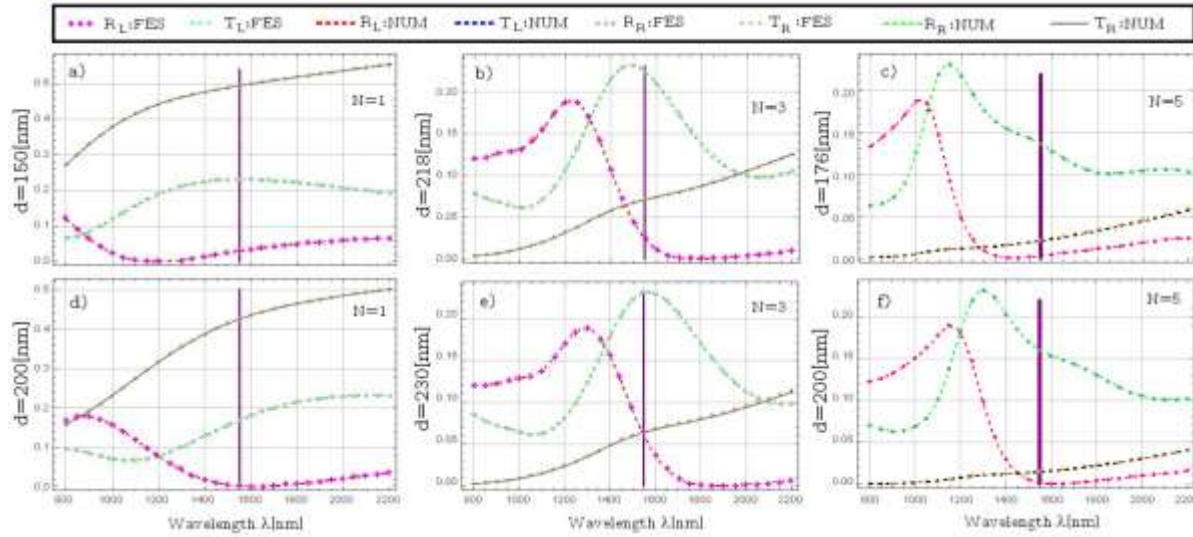


Fig. 33. Reflectividad y transmitividad en una celda bicapa real y pérdida, simulación numérica del modelo analítico (NUM) y simulación por elemento finito (FES) con $N=1$ y $N=3$, a incidencia normal. Los grosores para a), b) fue de $d=150$ nm y $d=218$ nm, d), e) fue $d=200$ nm y $d=230$ nm. Para una pila de cinco celdas unitarias se tiene que fue de $d=176$ nm en c) y de $d=200$ nm en f).

Ahora, la figura (33) muestra los coeficientes de reflectividad y transmitividad para estructuras de pérdida pasiva (capas real-pérdida). La figura (33d) muestra estos valores para un grosor de bicapa optimizada de $d = 200$ nm donde podemos ver que la reflectividad R_L domina sobre R_R en $\lambda=1550$ nm (línea vertical). Si quisiéramos usar esta bicapa y repetirla como celda unitaria en una pila, digamos $N=3$, la longitud de onda que muestra una diferencia máxima en la reflexión cambiará, figura (33e). Por lo tanto, tenemos que optimizar para cada tamaño de pila para recuperar resultados similares al caso $N=1$. Cuando tenemos una pila de celdas unitarias $N=5$ no optimizadas, se induce un cambio de longitud de onda, Fig. (33f). En ambos estudios, ganancia-perdida y real-perdida, cuando se realiza la periodicidad de celdas unitarias, hay que optimizar los espesores de las películas en función de la dirección de

propagación. Para obtener una resonancia de la amplitud de la reflectancia para $\lambda=1550$ nm, debido a la absorción de las capas, (Longhi, 2010).

6.3 Comentario Final

Muchos estudios de sistemas no Hermitianos o sistemas con Simetría Paridad Tiempo pueden tener ventajas en la construcción de nuevos materiales para el campo de la óptica no lineal. En la literatura, hemos encontrado procesos no Hermitianos para la generación de fuentes de luz coherentes con la mezcla de ondas sin restricciones de coincidencia de fase como en el caso de fotones entrelazados y la conservación del momento, lo que representa una necesidad para la creación de radiación eficiente en óptica no lineal estándar para muchas aplicaciones.

Conclusiones

En este reporte presentamos el estudio de la propagación de radiación electromagnética a partir de la ecuación de Helmholtz sobre películas delgadas, obteniendo mediante el método de múltiples reflexiones y transmisiones, además de matrices de transferencia los coeficientes de Fresnel. Con los coeficientes de Fresnel obtuvimos las amplitudes de la reflectancia y transmitancia a través de películas delgadas dieléctricas con simetría $\mathcal{PT}$ para incidencia angular e incidencia normal en una y varias capas. Después de haber analizado por un lado la teoría de propagación de ondas electromagnéticas en películas delgadas, logramos desarrollar el procedimiento para la generación de matrices que nos ayudaron a estudiar sistemas multicapas y aplicarlo a estructuras con simetría $\mathcal{PT}$. Mostramos un algoritmo para optimizar sistemas multicapa mediante las derivadas de los términos de la matriz de

dispersión efectiva en función de la dirección de propagación. Aunque en este trabajo se presenta el diseño y optimización de un dimer de óxido de silicio (SiO_2) que presenta una ganancia y pérdida balanceada, lo que consideramos como simetría $\mathcal{PT}$, el estudio se puede generalizar a otros materiales. Donde en particular el índice de refracción presenta parte real e imaginaria, cuando la parte imaginaria es mayor que cero se tiene pérdida y cuando es menor que cero se tiene ganancia. El algoritmo nos sirve para modelar y simular las amplitudes de las ondas planas de las reflexiones y transmisiones cuando incide un campo electromagnético sobre un arreglo de películas dieléctricas apiladas. Esto ofrece un procedimiento sistemático para determinar las amplitudes de la reflectancia y la transmitancia con espesores e índices de refracción conocidos. Hemos demostrado también que la optimización de estructuras de películas delgadas, utilizando análisis de matriz de transferencia, puede producir parámetros óptimos para estructuras con transmisión bidireccional pero reflexión unidireccional. Presentamos dos casos para varios valores óptimos diferentes de espesor de película delgada. Uno es la celda unitaria bipartita (dimer) con una ganancia-pérdida equilibrada y el otro una estructura de pasiva con pérdida o bien capas real-pérdida. Finalmente, queremos enfatizar que el ancho de la celda unitaria debe optimizarse para el tamaño de pila deseado; de lo contrario, la reflectividad unidireccional se producirá en una longitud de onda diferente. Por supuesto, en la celda unitaria de pasiva con pérdida que es más realista, la transmitividad disminuirá con el tamaño de la pila como resultado de las pérdidas por absorción del material.

Anexo A

Parámetros de referencia del Oxido de Silicio para películas delgadas, obtenidos desde la url: <https://refractiveindex.info/>

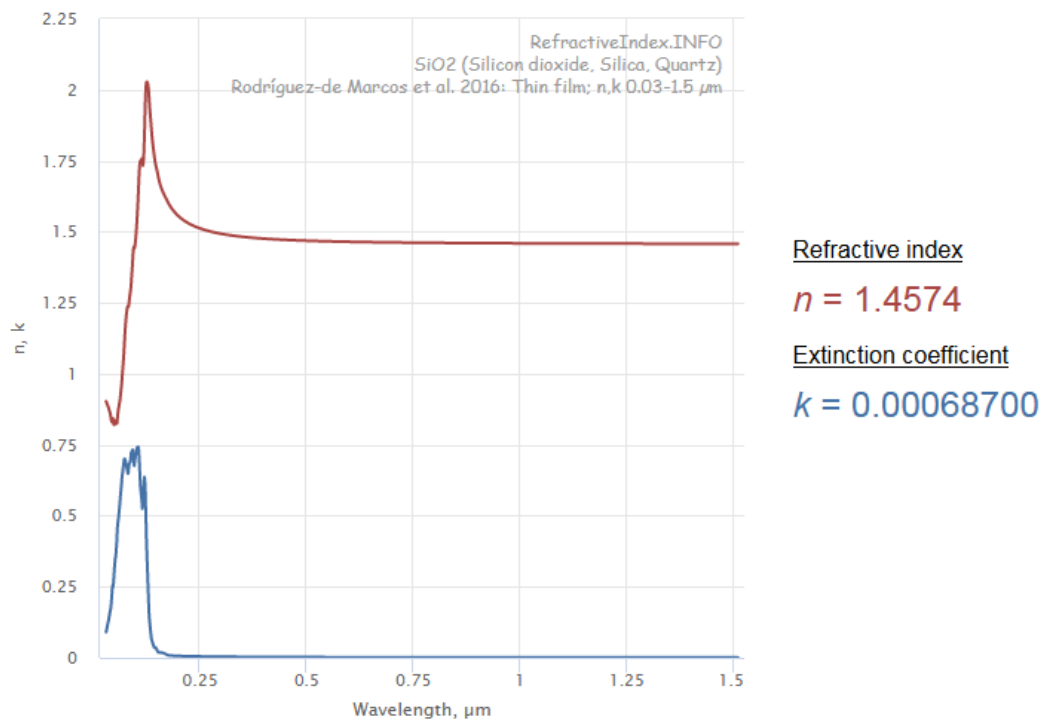
Estante: ORGANIC – materiales orgánicos

Libro: SiO₂ (Silicon dioxide, Silica, Quartz)

Página: Rodríguez-de Marcos et al., 2016: thin film, n, k, 0.03 – 1.5 μm

Optical constants of SiO ₂ (Silicon dioxide, Silica, Quartz)	
Rodríguez-de Marcos et al. 2016: Thin film; n,k 0.03-1.5 μm	
Wave length:	1.51066 μm (2.99714E-02 – 1.51066E+00)

Complex refractive index ($n+ik$)



Índice de Refracción Complejo ($n + ik$)

$n = 1.4574$

Factor de extinción

$k=0.00068700$

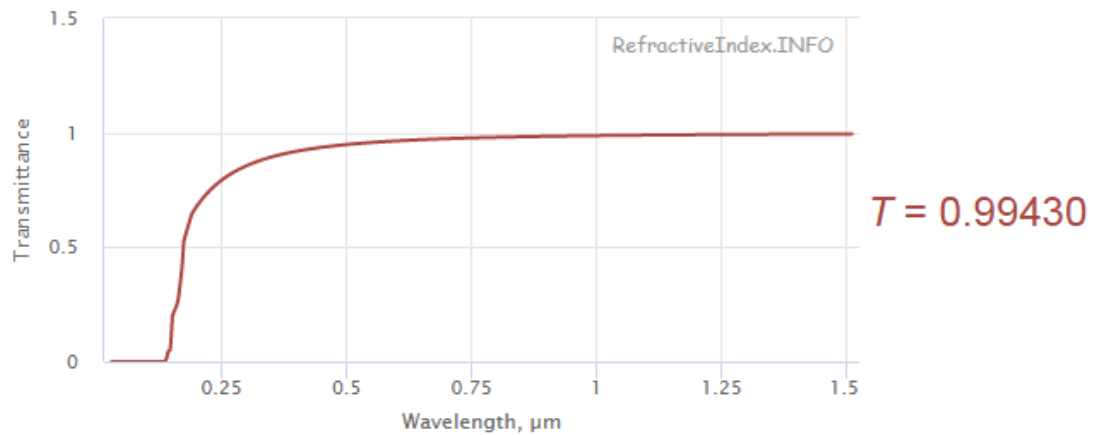
Optical transmission calculator

Wavelength: 1.51066 μm

Thickness: 1 μm

Calculation method: Internal transmission only

Transmittance



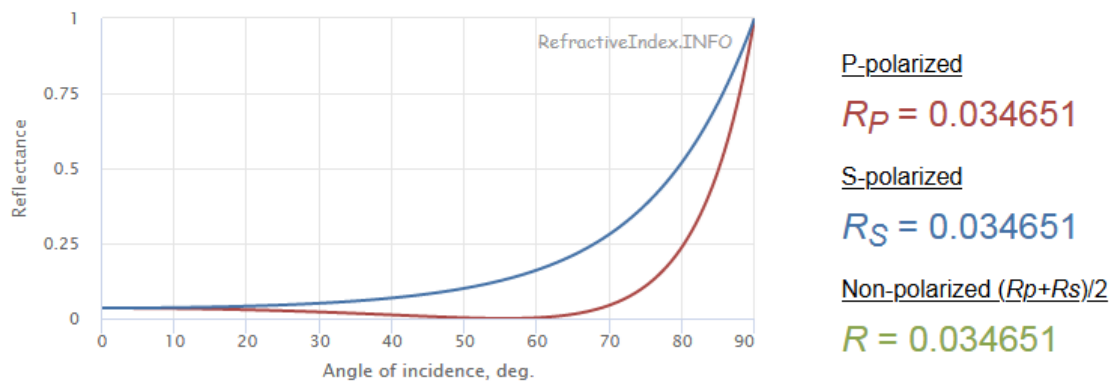
Reflection calculator

Wavelength: 1.51066 μm

Angle of incidence (0~90°): 0

Direction: ☒ in ☐ out

Reflectance



Fase de la Reflexión

$$\phi_P = 0.070^\circ$$
$$\phi_S = -179.930^\circ$$

Angulo de Brewster

$$\theta_B = 55.545^\circ$$

Constantes ópticas derivadas

Permeabilidad Relativa (constants dieléctricas)

$$\epsilon_1 = 2.1242$$
$$\epsilon_2 = 0.0020025$$

Coeficiente Absorción

$$\alpha = 57.148 \text{ cm}^{-1}$$

Dispersión Cromática

$$dn/d\lambda = -0.0016711 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$$

Grupo de índices

$$n_g = 1.4600$$

Condiciones & Hoja de especificaciones

n_absoluto: verdadero
Longitud de onda_vacio: verdadero
Temperatura de deposición: 300 °C

Comentarios

Las películas de óxido se depositaron mediante evaporación reactiva por haz de electrones sobre varios tipos de sustratos a 300 °C.

Anexo B

Calculo de coeficientes de Fresnel mediante matrices de transferencia.

Para una capa:

$$S_e = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\phi_1} t_{01} t_{12}}{1 - e^{2i\phi_1} r_{10} r_{12}} & \frac{e^{2i\phi_1} r_{10} (r_{12} r_{21} - t_{12} t_{21}) - r_{21}}{e^{2i\phi_1} r_{10} r_{12} - 1} \\ \frac{e^{2i\phi_1} r_{12} (r_{01} r_{10} - t_{01} t_{10}) - r_{01}}{e^{2i\phi_1} r_{10} r_{12} - 1} & \frac{e^{i\phi_1} t_{10} t_{21}}{1 - e^{2i\phi_1} r_{10} r_{12}} \end{pmatrix}$$

Matriz de dispersión efectiva con las constantes dieléctricas de los materiales con incidencia angular:

$$S_e = \begin{pmatrix} \frac{2e^{i\phi_1} k_0 (\cos \theta_i)}{(\cos \theta_i) k_0 + k_1 (\cos \theta_t)} & \frac{e^{2i\phi_1} (k_1 - k_0 (\cos \theta_t) (\sec \theta_i))}{(\sec \theta_i) (\cos \theta_t) k_0 + k_1} \\ \frac{2k_0 (\cos \theta_i)}{(\cos \theta_i) k_0 + k_1 (\cos \theta_t)} - 1 & \frac{2e^{i\phi_1} k_1}{(\sec \theta_i) (\cos \theta_t) k_0 + k_1} \end{pmatrix}$$

Matriz de dispersión efectiva con los índices de refracción de los materiales con incidencia angular.

$$S_e = \begin{pmatrix} \frac{2e^{i d_1 n_1 \kappa_0 (\csc \theta_i)} n_0 (\cos \theta_i)}{n_0 (\cos \theta_i) + n_1 (\csc^2 \theta_i) (\cos \theta_t)} & \frac{e^{2i d_1 n_1 \kappa_0 (\csc \theta_i)} (n_1 (\csc \theta_i) - n_0 (\cos \theta_t) (\tan \theta_i))}{(\tan \theta_i) (\cos \theta_t) n_0 + n_1 (\csc \theta_i)} \\ 1 - \frac{2n_1 (\cos \theta_t)}{n_0 (\cos \theta_i) (\sin^2 \theta_i) + n_1 (\cos \theta_t)} & \frac{2e^{i d_1 n_1 \kappa_0 (\csc \theta_i)} n_1}{(\sin \theta_i) (\tan \theta_i) (\cos \theta_t) n_0 + n_1} \end{pmatrix}$$

Entradas de la matriz de dispersión efectiva con los coeficientes de Fresnel, los índices de refracción de los medios, el grosor de la película delgada y el número de onda con incidencia normal.

$$t_{02} = - \frac{t_{01} t_{12} t_{23} e^{i \kappa_0 (d_1 n_1 + d_2 n_2)}}{-r_{10} r_{23} (r_{12} r_{21} - t_{12} t_{21}) e^{2i \kappa_0 (d_1 n_1 + d_2 n_2)} + r_{10} r_{12} e^{2i d_1 \kappa_0 n_1} + r_{21} r_{23} e^{2i d_2 \kappa_0 n_2} - 1}$$

$$r_{02} = \frac{\frac{t_{01} t_{10} (-1 + r_{21} r_{23} e^{2i d_2 \kappa_0 n_2})}{-r_{10} r_{23} (r_{12} r_{21} - t_{12} t_{21}) e^{2i \kappa_0 (d_1 n_1 + d_2 n_2)} + r_{10} r_{12} e^{2i d_1 \kappa_0 n_1} + r_{21} r_{23} e^{2i d_2 \kappa_0 n_2} - 1} + r_{01} r_{10} - t_{01} t_{10}}{r_{10}}$$

$$t_{20} = -\frac{t_{10}t_{21}t_{32}e^{i\kappa_0(d_1n_1+d_2n_2)}}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{2i\kappa_0(d_1n_1+d_2n_2)}+r_{10}r_{12}e^{2id_1\kappa_0n_1}+r_{21}r_{23}e^{2id_2\kappa_0n_2}-1}$$

$$r_{20} = \frac{\frac{t_{23}t_{32}(-1+r_{10}r_{12}e^{2id_1\kappa_0n_1})}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{2i\kappa_0(d_1n_1+d_2n_2)}+r_{10}r_{12}e^{2id_1\kappa_0n_1}+r_{21}r_{23}e^{2id_2\kappa_0n_2}-1}+r_{23}r_{32}-t_{23}t_{32}}{r_{23}}$$

Entradas de la matriz de dispersión efectiva con los coeficientes de Fresnel y los índices de refracción de los medios.

$$t_{02} = -4n_0n_1\cos^2(\theta_i)e^{id_1\kappa_0n_1}(n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))/$$

$$(n_0\cos(\theta_i)+n_1\cos(\theta_t))(-(n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))+$$

$$e^{2id_1\kappa_0n_1}(n_1\cos(\theta_i)-n_0\cos(\theta_t))(n_1\cos(\theta_i)-n_2\cos(\theta_t)))$$

$$r_{02} = (n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))(n_0\cos(\theta_i)-n_1\cos(\theta_t))(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))+$$

$$e^{2id_1\kappa_0n_1}(\cos(\theta_i)\cos(\theta_t)(n_0^2+n_1^2)+$$

$$3n_0n_1\cos^2(\theta_i)-n_0n_1\cos^2(\theta_t))(n_1\cos(\theta_i)-n_2\cos(\theta_t))/$$

$$(n_0\cos(\theta_i)+n_1\cos(\theta_t))((n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))-$$

$$e^{2id_1\kappa_0n_1}(n_1\cos(\theta_i)-n_0\cos(\theta_t))(n_1\cos(\theta_i)-n_2\cos(\theta_t)))$$

$$t_{20} = -4n_1n_2\cos^2(\theta_i)e^{id_1\kappa_0n_1}(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))/$$

$$(n_1\cos(\theta_t)+n_2\cos(\theta_i))(-(n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))+$$

$$e^{2id_1\kappa_0n_1}(n_1\cos(\theta_i)-n_0\cos(\theta_t))(n_1\cos(\theta_i)-n_2\cos(\theta_t)))$$

$$r_{20} = (n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))(n_2\cos(\theta_i)-n_1\cos(\theta_t))+$$

$$e^{2id_1\kappa_0n_1}(n_1\cos(\theta_i)-n_0\cos(\theta_t))(\cos(\theta_i)\cos(\theta_t)(n_1^2+n_2^2)+$$

$$3n_1n_2\cos^2(\theta_i)-n_1n_2\cos^2(\theta_t))/$$

$$(n_1\cos(\theta_t)+n_2\cos(\theta_i))((n_0\cos(\theta_t)+n_1\cos(\theta_i))(n_1\cos(\theta_i)+n_2\cos(\theta_t))-$$

$$e^{2id_1\kappa_0n_1}(n_1\cos(\theta_i)-n_0\cos(\theta_t))(n_1\cos(\theta_i)-n_2\cos(\theta_t)))$$

Matriz de dispersión efectiva de los coeficientes de Fresnel en función de la longitud de onda, los índices de refracción y el grosor de la película.

$$S_e = \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{2id_1 n_1 \pi}{\lambda}} t_{01} t_{12}}{1 - e^{\frac{4id_1 n_1 \pi}{\lambda}} r_{10} r_{12}} & r_{21} + \left(\frac{1}{r_{12} - e^{\frac{4id_1 n_1 \pi}{\lambda}} r_{10} r_{12}^2} - \frac{1}{r_{12}} \right) t_{12} t_{21} \\ r_{01} + \left(\frac{1}{r_{10} - e^{\frac{4id_1 n_1 \pi}{\lambda}} r_{10}^2} - \frac{1}{r_{10}} \right) t_{01} t_{10} & \frac{e^{\frac{2id_1 n_1 \pi}{\lambda}} t_{10} t_{21}}{1 - e^{\frac{4id_1 n_1 \pi}{\lambda}} r_{10} r_{12}} \end{pmatrix}$$

Entradas de la matriz de dispersión efectiva de los coeficientes de Fresnel en función de la longitud de onda, los índices de refracción y el grosor de la película con incidencia angular.

$$t_{02} = -4n_0 n_1 \cos^2(\theta_i) e^{\frac{2i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_0 \cos(\theta_t) + n_1 \cos(\theta_i)) / \\ (n_0 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)) (- (n_0 \cos(\theta_t) + n_1 \cos(\theta_i)) (n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)) + \\ e^{\frac{4i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_1 \cos(\theta_i) - n_0 \cos(\theta_t)) (n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)))$$

$$r_{02} = (n_0 \cos(\theta_t) + n_1 \cos(\theta_i)) (n_0 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)) (n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)) + \\ e^{\frac{4i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (\cos(\theta_i) \cos(\theta_t) (n_0^2 + n_1^2) + 3n_0 n_1 \cos(\theta_i) - \\ n_0 n_1 \cos^2(\theta_t)) (n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)) / \\ (n_0 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)) ((n_0 \cos(\theta_t) + n_1 \cos(\theta_i)) (n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)) - \\ e^{\frac{4i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_1 \cos(\theta_i) - n_0 \cos(\theta_t)) (n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)))$$

$$t_{20} = -4n_1 n_2 \cos^2(\theta_i) e^{\frac{2i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)) / \\ (n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)) (- (n_0 \cos(\theta_t) + n_1 \cos(\theta_i)) (n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)) + \\ e^{\frac{4i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_1 \cos(\theta_i) - n_0 \cos(\theta_t)) (n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)))$$

$$r_{20} = (n_0 \cos(\theta_t) + n_1 \cos(\theta_i)) (n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)) (n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)) + \\ e^{\frac{4i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_1 \cos(\theta_i) - n_0 \cos(\theta_t)) (\cos(\theta_i) \cos(\theta_t) (n_1^2 + n_2^2) + \\ 3n_1 n_2 \cos^2(\theta_i) - n_1 n_2 \cos^2(\theta_t)) / \\ (n_1 (\theta_t \cos) + n_2 (\theta_i \cos)) ((n_0 (\theta_t \cos) + n_1 (\theta_i \cos)) (n_1 (\theta_i \cos) + n_2 (\theta_t \cos)) - \\ e^{\frac{4i\pi d_1 n_1}{\lambda}} (n_1 \cos(\theta_i) - n_0 \cos(\theta_t)) (n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)))$$

Coeficientes de Fresnel para dos capas

Entradas de la matriz de dispersión efectiva con los coeficientes de Fresnel para la reflexión y transmisión en ambos sentidos.

$$t_{03} = -\frac{t_{01}t_{12}t_{23}e^{i(\phi_1+\phi_2)}}{r_{23}e^{2i\phi_2}(r_{21}-r_{10}e^{2i\phi_1}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21}))+r_{10}r_{12}e^{2i\phi_1}-1}$$

$$r_{03} = r_{01} + \frac{t_{01}t_{10}e^{2i\phi_1}(r_{12}-r_{23}e^{2i\phi_2}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21}))}{r_{23}e^{2i\phi_2}(-r_{21}+r_{10}e^{2i\phi_1}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21}))+r_{10}r_{12}(-e^{2i\phi_1})+1}$$

$$t_{30} = -\frac{t_{10}t_{21}t_{32}e^{i(\phi_1+\phi_2)}}{r_{23}e^{2i\phi_2}(r_{21}-r_{10}e^{2i\phi_1}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21}))+r_{10}r_{12}e^{2i\phi_1}-1}$$

$$r_{30} = r_{32} + \frac{t_{23}t_{32}e^{2i\phi_2}(r_{21}-r_{10}e^{2i\phi_1}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21}))}{r_{23}e^{2i\phi_2}(-r_{21}+r_{10}e^{2i\phi_1}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21}))+r_{10}r_{12}(-e^{2i\phi_1})+1}$$

Entradas de la matriz de dispersión efectiva con los coeficientes de Fresnel y los índices de refracción de los medios.

$$t_{03} = -\frac{t_{01}t_{12}t_{23}e^{i\kappa_0(d_{1n1}+d_{2n2})}}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{2i\kappa_0(d_{1n1}+d_{2n2})}+r_{10}r_{12}e^{2id_{1\kappa_0n1}}+r_{21}r_{23}e^{2id_{2\kappa_0n2}}-1}$$

$$r_{03} = \frac{\frac{t_{01}t_{10}(-1+r_{21}r_{23}e^{2id_{2\kappa_0n2}})}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{2i\kappa_0(d_{1n1}+d_{2n2})}+r_{10}r_{12}e^{2id_{1\kappa_0n1}}+r_{21}r_{23}e^{2id_{2\kappa_0n2}}-1}+r_{01}r_{10}-t_{01}t_{10}}{r_{10}}$$

$$t_{30} = \frac{t_{10}t_{21}t_{32}e^{i\kappa_0(d_{1n1}+d_{2n2})}}{r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{2i\kappa_0(d_{1n1}+d_{2n2})}+r_{10}r_{12}(-e^{2id_{1\kappa_0n1}})-r_{21}r_{23}e^{2id_{2\kappa_0n2}}+1}$$

$$r_{30} = \frac{\frac{t_{23}t_{32}(-1+r_{10}r_{12}e^{2id_{1\kappa_0n1}})}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{2i\kappa_0(d_{1n1}+d_{2n2})}+r_{10}r_{12}e^{2id_{1\kappa_0n1}}+r_{21}r_{23}e^{2id_{2\kappa_0n2}}-1}+r_{23}r_{32}-t_{23}t_{32}}{r_{23}}$$

Entradas de la matriz de dispersión efectiva de los coeficientes de Fresnel en función de la longitud de onda, los índices de refracción y los grosores d_1 y d_2 de las películas para dos capas.

$$t_{03} = -\frac{t_{01}t_{12}t_{23}e^{\frac{2i\pi(d_{1n1}+d_{2n2})}{\lambda}}}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21}-t_{12}t_{21})e^{\frac{4i\pi(d_{1n1}+d_{2n2})}{\lambda}}+r_{10}r_{12}e^{\frac{4i\pi d_{1n1}}{\lambda}}+r_{21}r_{23}e^{\frac{4i\pi d_{2n2}}{\lambda}}-1}$$

$$r_{03} = \frac{\frac{t_{01}t_{10} \left(-1 + r_{21}r_{23} e^{\frac{4i\pi d_{2n2}}{\lambda}} \right)}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21} - t_{12}t_{21})e^{\frac{4i\pi(d_{1n1} + d_{2n2})}{\lambda}} + r_{10}r_{12}e^{\frac{4i\pi d_{1n1}}{\lambda}} + r_{21}r_{23}e^{\frac{4i\pi d_{2n2}}{\lambda}} - 1} + r_{01}r_{10} - t_{01}t_{10}}{r_{10}}$$

$$t_{30} = -\frac{t_{10}t_{21}t_{32}e^{\frac{2i\pi(d_{1n1} + d_{2n2})}{\lambda}}}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21} - t_{12}t_{21})e^{\frac{4i\pi(d_{1n1} + d_{2n2})}{\lambda}} + r_{10}r_{12}e^{\frac{4i\pi d_{1n1}}{\lambda}} + r_{21}r_{23}e^{\frac{4i\pi d_{2n2}}{\lambda}} - 1}$$

$$t_{30} = \frac{\frac{t_{23}t_{32} \left(-1 + r_{10}r_{12} e^{\frac{4i\pi d_{1n1}}{\lambda}} \right)}{-r_{10}r_{23}(r_{12}r_{21} - t_{12}t_{21})e^{\frac{4i\pi(d_{1n1} + d_{2n2})}{\lambda}} + r_{10}r_{12}e^{\frac{4i\pi d_{1n1}}{\lambda}} + r_{21}r_{23}e^{\frac{4i\pi d_{2n2}}{\lambda}} - 1} + r_{23}r_{32} - t_{23}t_{32}}{r_{23}}$$

Código en Mathematica para calcular los coeficientes de Fresnel:

Celda de inicialización

(* Matrix for boundary between two materials with refractive indices \

nn, n before, and na, n after, for normal incidence*)

(*Snell's Law from Born and Wolf 2001 page 40

ni -- refractiv index of the incident side

nt -- refractiv index of the transmitted side

\[Theta]i -- angle of incidence

\[Theta]t -- angle of transmission*)

\[Theta]t[ni_,\[Theta]i_,nt_] := ArcSin[ni Sin[\[Theta]i]/nt]

(*Function to change formalism from M to S matrices*)

MtoS[s_] :=

ExpandAll[(1/s[[2, 2]])*{{Det[s], s[[1, 2]]}, {-s[[2, 1]], 1}}];

(*Modulo para obtener las matrices de la transición de los medios*)

SurfaceMatrix[k0_, k1_, r01_, r10_, t01_, t10_] := Module[{m},

r01 = (k0 Cos[\[Theta]i] - k1 Cos[\[Theta]t])/ (k0 Cos[\[Theta]i] +

k1 Cos[\[Theta]t]);

r10 = (k1 Cos[\[Theta]i] - k0 Cos[\[Theta]t])/ (k1 Cos[\[Theta]i] +

k0 Cos[\[Theta]t]);

t01 = 1 + r01;

```

t10 = 1 + r10;
m = {{t01, r10}, {r01, t10}};
MtoS[m]
(*ExpandAll[(1/s01[[2,2]])*{{Det[s01],s01[[1,2]]},{-s01[[2,1]],
1}}}*)
]
(*Modulo para obtener las matrices en los medios, d en nanómetros*)
PropagationMatrix[\[Phi]1_] := Module[{k0, k1, r01, r10, t01, t10, m},
m = {{Exp[I \[Phi]1], 0}, {0, Exp[I \[Phi]1]}};
MtoS[m]
(*ExpandAll[(1/s11[[2,2]])*{{Det[s11],s11[[1,2]]},{-s11[[2,1]],
1}}}*)
]

```

Calculo para los Coef. de Fresnel de 1-capa a N-capas

```

M01 = FullSimplify[SurfaceMatrix[k0, k1, r01, r10, t01, t10]];
TraditionalForm[M01]
M11 = FullSimplify[PropagationMatrix[\[Phi]1]];
TraditionalForm[M11]
M12 = FullSimplify[SurfaceMatrix[k1, k2, r12, r21, t12, t21]];
TraditionalForm[M12]
Mnet = FullSimplify[Mmn, ..., .M12.M11.M01]; (Numero de capas a simular)
Snet=FullSimplify[MtoS[Mnet]];
t02 = FullSimplify[Snet[[1, 1]]]
r02 = FullSimplify[Snet[[2, 1]]]
t20 = FullSimplify[Snet[[2, 2]]]
r20 = FullSimplify[Snet[[1, 2]]].

```

Ese código se extiende para calcular una periodicidad de celdas unitarias de películas delgadas. Para las simulaciones numéricas definimos los parámetros, cuantas capas queremos simular y graficamos los resultados. Esas simulaciones pueden tardar varias horas dependiendo el número de capas a simular.

Referencias Bibliográficas

- Bender, C. M.; Boettcher, S.; (1998). “ $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics”. Phys. Rev. Lett. 80, 5243, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.5243>
- Boylestad R. & Nashelsky L.; (1989). "Electrónica Teoría de Circuitos". 4a. Ed. P.Hall.
- El-Ganainy R.; Khajavikhan M.; Christodoulides D. N.; Ozdemir S. K.; (2019). “The dawn of non-Hermitian optics”. Communications Physics. 2: 37, <https://doi.org/10.1038/s42005-019-0130-z>, www.nature.com/commsphys.
- Feng L.; Xu Y. L.; Fegadolli W. S.; Lu M.; Oliveira J.; Almeida V. R.; Chen Y.; Scherer A.; (2013). “Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless $\mathcal{PT}$ metamaterial at optical frequencies”. Nat. Mat. 12, 108-113. DOI: 10.1038/NMAT3495
- Hodgson D. & Olsen B.; (1976). “Protecting Your Laser Diode”, ILX Lightwave Corporation, 2003.
- Kalvo Vega H. O.; (2015), “Propuesta metodológica para el diseño de instrumentos ópticos sencillos partiendo de un planteamiento matricial”. Tesis. FC-UNC.
- Knittl, Z.; (1998). “Optics of Thin Films”, Ed. John Wiley and Sons.
- Kottos T.; Aceves A. B.; (2016). “Contemporary Optoelectronics”. Springer Series in Optical Sciences 199, DOI: 10:1007=978 / 94 / 017 / 7315 / 7 / 9
- Lin Z.; Ramezani H.; Eichelkraut T.; Kottos, T.; Cao H.; Christodoulides D. N.; (2011). “Unidirectional Invisibility Induced by $\mathcal{PT}$ -Symmetric Periodic Structures”. Phys. Rev. Lett. PRL 106, 213901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.213901>
- Longhi S.; (2010). “ $\mathcal{PT}$ -symmetric laser absorber”. Phys. Rev. A-82, 031801(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.031801>

- Mata – Méndez O.; (1992). “Relaciones de Fresnel y teorema de conservación de la energía para un haz electromagnético”, Revista Mexicana de Física 38, No. 5.
- Novitsky D.; Karabchevsky A.; Lavrinenko A. V.; Shalin A. S.; Novitsky A.; (2018). “ $\mathcal{PT}$ symmetry breaking in multilayers with resonant loss and gain locks light propagation direction”. Physical Review B 98(12):125102. DOI: 10.1103
- Novitsky D.; Novitsky A.; Shalin A. S.; (2019). “ $\mathcal{PT}$ -symmetric multilayer systems: homogenization and beam propagation”. Conference: 2019 Thirteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials).
- Padrón-Godínez A.; Prieto Meléndez R.; Calva Olmos G.; Treviño-Palacios C. G.; (2019). “Sistemas Rectificadores de Señales mediante Diodos Ópticos y Electrónicos”. SOMI XXXIV, Congreso de instrumentación, Morelia, Michoacán-México. Volumen: No. 1, Año 6, ISSN 2395-8499.
- Pedrotti F. L. & Pedrotti L. S.; (1993). “Introductions to Optics”, Ed. Prentice-Hall International, Inc.
- Poladian L.; (1996). “Resonance mode expansions and exact solutions for nonuniform gratings,” Phys. Rev. E. 54, 2963.
DOI: 10.1109/MetaMaterials.2019.8900885
- Procopio L. M.; Rosas-Ortiz O. and Velázquez V. M.; (2010). “Spatial correlation of photon pairs produced in spontaneous parametric down-conversion”. Frontiers in Contemporary Physics, 5th Ed.-EAV09.
- Ramezani H.; Kottos T.; (2010). “Unidirectional nonlinear $\mathcal{PT}$ -Symmetric optical structures”. Phys. Rev. A-82, 043803. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.043803>

- Rodríguez-de Marcos L. V.; Larruquert J. I.; Méndez Aznárez J. A.; (2016). "Self-consistent optical constants of SiO₂ and Ta₂O₅ films", Opt. Mater. Express 6, 3622-3637. (Numerical data kindly provided by Juan Larruquert).
- Sandino Hernández A. F.; (2014). "Matrices ABCD en óptica", Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 2, Depto. Física-UAM.
- Schilling D. L.; Belove, C.; (1989)."Electronic Circuits". 3rd ed. McGraw Hill.
- Shramkova O. V. & Tsironis G. P.; (2016). "Scattering properties of $\mathcal{PT}$ - symmetric layered periodic structures". J. Opt. 18, 105101, (9pp).
DOI:10.1088/2040-8978/18/10/105101
- Steck A. D.; (2006). "Classical and Modern Optics". University of Oregon.
- Stratton J. A.; (2007). "Theory Electromagnetic", Ed. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Vashahri-Ghamsari S.; Bing He; Xiao M.; (2017). "Continuous-variable entanglement generation using a hybrid $\mathcal{PT}$ -symmetric system". Phys. Rev. 96, 033806.
- Yang E.; Lu Y.; Wang Y.; Dai Y.; Wang P. (2016). "Unidirectional reflectionless phenomenon in periodic ternary layered material". OSA.
DOI:10.1364/OE.24.014311, OPTICS EXPRESS 14311.
- Yuan L.; Lu Y. Y.; (2019). "Unidirectional reflectionless transmission for two-dimensional $\mathcal{PT}$ -symmetric periodic structures". Phys. Rev. A., 100.053805.
DOI: 10.1103