



Introducción a la Óptica de Fourier

Neil C. Bruce

20 de mayo del 2021

Introducción a la Óptica de Fourier

Neil C. Bruce

ICAT-UNAM

Resumen

Estas notas de curso presentan el material requerido para un curso de “Óptica de Fourier” a nivel licenciatura o maestría. Da una introducción al uso de la transformada de Fourier en diferentes ramos de la óptica. Se presentan claramente las ecuaciones involucrados, para que se puedan aplicar, a través de simulaciones numéricas, a problemas reales. También se presentan resultados numéricos y experimentales para entender los fenómenos y efectos que se producen. Estas notas son el resultado de impartir la clase de “Óptica de Fourier” a nivel licenciatura y maestría en la UNAM durante 10 años.

Prefacio

Estas notas de curso son el resultado de la experiencia adquirida en impartir la materia de “Introducción a la Óptica de Fourier” a nivel maestría en la UNAM durante 10 años. El estudiante y persona interesada en el tema encontrará una guía, con capítulos alrededor de la aplicación de la transformada de Fourier en diferentes áreas de la óptica. En difracción, formación de imágenes, filtraje espacial y reconocimiento de patrones, el uso de la transformada de Fourier ayuda a entender el funcionamiento de la naturaleza y de los sistemas ópticos. Por tal motivo se encuentra incluido en todos los programas de estudio en las universidades y colegios más prestigiados del mundo en temas de la óptica. Pensar en términos de la frecuencia espacial, particularmente en sistemas ópticos para formar imágenes, en muchos casos simplifica la matemática y da una perspectiva novedosa a los problemas. Además, permite hacer cálculos numéricos rápidos y sencillos, con la Transformada de Fourier Rápida, FFT (por sus siglas en inglés, Fast Fourier Transform). Por esta razón se incluyen programas computacionales escritos en MatLab, con ejemplos de los cálculos en varios de los capítulos de estas notas de curso. Los programas forman una biblioteca de métodos numéricos asociada a la óptica de Fourier. Muestran lo poderoso de esta técnica, y da una base para el cálculo de otros problemas. Además, en mi opinión, ver como programar usando las técnicas incluidas en este libro da otra visión de las ecuaciones usadas y un mejor entendimiento de los problemas y sus soluciones.

Muchas personas me han otorgado su apoyo en el desarrollo de estas notas y el software. En particular a Martha Rosete, Citlali Bruce y a todos los estudiantes de mis cursos de Introducción a la Óptica de Fourier, muchas gracias a todos y a todas.

Contenido

1. La Transformada de Fourier	1
1.1 La Serie de Fourier	1
1.2 La Transformada de Fourier	13
1.2.1 Definición	13
1.2.2 Ejemplos de la Transformada de Fourier	14
1.2.2.1 La función <i>rect</i> ()	14
1.2.2.2 La función gaussiana	16
1.2.2.3 La función <i>circ</i> ()	17
1.2.2.1 La función δ ()	20
1.2.3 Teoremas de la Transformada de Fourier	21
1.2.3.1 Teorema de Linealidad	21
1.2.3.2 Teorema de Escala	21
1.2.3.3 Teorema de Corrimiento	22
1.2.3.4 Teorema de Parseval	22
1.2.3.5 Teorema de la Transformada de Fourier	23
 2. Sistemas Lineales y Convolución	 25
2.1 Sistemas Lineales	25
2.2 Sistemas Lineales e Isoplanáticos	26
2.3 El Significado de Convolución	28
2.4 Transformada de Fourier de la Convolución	28
2.5 Ejemplos usando convolución	35
2.6 El Teorema de Muestreo	40
2.7 Convolución de objetos perpendiculares	42
2.8 Correlación	44

3. Fundamentos de Difracción	46
3.1 La Teoría de Huygens-Fresnel	47
3.2 Teorema de Difracción de Kirchhoff	52
3.3 Teorema de Reciprocidad de Helmholtz	61
3.4 Principio de Babinet	62
3.5 La Ecuación de Rayleigh-Sommerfeld	63
3.6 Espectro de Ondas Planas	65
4. Difracción de Fraunhofer	70
4.1 La condición de Fresnel	70
4.2 Difracción de Fraunhofer	73
4.3 Ejemplos de la difracción de Fraunhofer	74
4.3.1 Abertura Rectangular	74
4.3.2 Abertura Rectangular con Incidencia Oblicua	76
4.3.3 Rendija Doble	79
4.3.4 Rendijas Múltiples	81
4.3.5 Abertura Circular	84
4.3.6 Rejilla de Amplitud	87
4.3.7 Rejilla de Fase Senusoidal	90
4.3.8 Rejilla de Fase Cuadrada	91
4.3.9 Difracción en aberturas bidimensionales	94
5. Difracción de Fresnel	102
5.1 Difracción de Fresnel en una rendija	103
5.1.1 La Espiral de Cornu	106
5.2 Difracción de Fresnel con un haz enfocado	108
5.3 Propagación por pasos	110
5.4 Escalamiento en difracción de Fresnel	111
5.5 Difracción de Fresnel en una abertura circular	119
5.6 Transformada fraccional de Fourier	122
5.7 Efecto Talbot	126

6. Formación de Imágenes	132
6.1 Función de transmisión de lentes delgadas	132
6.2 Transformada de Fourier con lentes delgadas	137
6.2.1 Objeto pegado a la lente	137
6.2.2 Objeto antes de la lente	140
6.2.3 Objeto después de la lente	143
6.3 Formación de Imágenes por Lentes Delgadas	146
 7. Sistemas Ópticos	 151
7.1 Sistemas ópticos en General: Pupilas	151
7.2 Luz Coherente e Incoherente	151
7.3 Formación de Imágenes con Luz Coherente	154
7.3.1 Teoría de Formación de Imágenes de Abbe	157
7.4 Formación de Imágenes con Luz Incoherente	158
7.4.1 La OTF unidimensional	161
7.5 Comparación Entre Sistemas Coherentes e Incoherentes	162
7.5.1 Resolución de Objetos Puntuales	162
7.5.2 La Imagen de un Objeto Periódico	168
7.5.3 La Imagen de un Borde	169
7.5.3.1 Luz Incoherente	169
7.5.3.2 Luz Coherente	172
7.5.3.3 Comparación de los Dos Casos	173
 8. Apodización	 174
8.1 Teoría de Apodización	174
8.2 Ejemplos de Apodización	176
8.2.1 Apodización de Amplitud	176
8.2.2 Apodización de Fase	182

9. El efecto de Aberraciones en una Imagen	186
9.1 El Ejemplo de Defoco	186
9.2 Cálculo numérico de la imagen de un objeto puntual con aberración	189
9.2.1 Aberraciones isoplanáticas	189
9.2.2 Aberraciones no-isoplanáticas	194
9.3 Imágenes con aberraciones	203
 10. Detectores Pixelados	 214
10.1 Isoplanicidad en detectores pixelados	214
10.2 PSF y MTF para un detector pixelado	217
 11. Filtraje Espacial	 231
11.1 El Sistema $4f$	231
11.2 Filtraje de Amplitud	232
11.3 Filtraje de Fase	241
 12. Holografía	 247
12.1 Holografía	247
12.2 Hologramas de luz blanca	252
12.3 Interferometría Holográfica	254
12.4 Hologramas de la Transformada de Fourier	259
12.5 Reconocimiento de patrones	261
12.5.1 Método de Van der Lugt	268
12.6 La resolución del medio grabador	271

13. Teoría de Coherencia	275
13.1 El experimento de Young	275
13.2 El teorema de Van Cittert-Zernike	285
13.3 Interferómetro estelar de Michelson	287
13.4 El interferómetro de Intensidad	293
13.5 Interferometría de Speckle estelar	294
14. Temas Selectos	296
14.1 La Transformada de Fourier Discreta	296
14.1.1 Escalamiento en la transformada de Fourier	300
14.1.2 Escalamiento en difracción de Fraunhofer	300
14.1.3 Convolución discreta	301
14.1.4 Correlación discreta	302
14.1.5 La transformada de Fourier de Cosenos y Senos	303
14.2 Transformada de Fourier Rápida (FFT)	309
14.3 Wavelets	311
14.4 Deconvolución	319
14.4.1 Deconvolución a ciegas	320
14.4.2 Recuperación de fase	322
14.4.3 Compuerta Óptica Resuelta en Frecuencia	322
14.5 Óptica Difractiva	324
14.6 Función de Wigner	328

Apéndice: Problemas y Proyectos	332
A.1 La Serie de Fourier y la Transformada de Fourier	332
A.2 Convolución	333
A.3 Difracción de Fraunhofer	334
A.4 Difracción de Fresnel	337
A.5 Formación de Imágenes	339
A.6 Apodización	343
A.7 Proyecto de programación sobre resolución de dos objetos puntuales en sistemas con aberraciones	343
A.8 Proyecto de programación sobre el efecto de aberraciones en una imagen	348
A.9 Filtraje Espacial	349
A.10 Holografía	353
A.11 Coherencia	356
 Referencias	 357

Capítulo 1

La Transformada de Fourier

En este capítulo introducimos el teorema de Fourier, primero con las series de Fourier para funciones periódicas, y posteriormente con la transformada de Fourier para funciones no-periódicas, con ejemplos. Finalmente, presentamos algunos de los teoremas de Fourier, para simplificar el cálculo de la transformada de Fourier en casos particulares.

1.1 La Serie de Fourier

Si tenemos una función de posición x , $f(x)$, que es periódica con periodo L , el teorema de Fourier nos dice que esta función se puede escribir como una suma de funciones de seno y coseno (Arfken, 1985):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(2\pi m \frac{x}{L}\right). \quad (1.1)$$

Esta ecuación significa que la función se puede escribir en términos de una suma de ondas espaciales (las funciones $\cos(\quad)$ y $\sin(\quad)$) de frecuencias espaciales $2\pi n/L$ o $2\pi m/L$, es decir, como una serie de ondas armónicas, las frecuencias de las ondas son múltiplos enteros de la frecuencia de la función original.

Ahora, para calcular los coeficientes a_n y b_m , primero multiplicamos la ecuación (1.1) por $\cos(2\pi n' x/L)$ e integramos con respecto a x sobre un periodo de la función:

$$\int_L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx = \int_L \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right\} \cos\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx. \quad (1.2)$$

Usando las relaciones:

$$\int_L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n, \\ L/2, & \text{si } n' = n \neq 0, \\ L, & \text{si } n' = n = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\int_L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx = 0, \quad \text{todos los valores de } m \text{ y } n', \quad (1.4)$$

la ecuación (1.2) se reduce a:

$$\int_L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx = \begin{cases} La_0/2, & n' = 0, \\ La_{n'}/2, & n' \neq 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Los dos casos de esta ecuación se pueden tomar juntos para darnos una expresión para el coeficiente $a_{n'}$:

$$a_{n'} = \frac{2}{L} \int_L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx. \quad (1.6)$$

Para los coeficientes b_m multiplicamos la ecuación (1.1) por $\operatorname{sen}(2\pi n' x/L)$ e integramos con respecto a x sobre un periodo de la función:

$$\int_L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx = \int_L \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n' x}{L}\right) dx, \quad (1.7)$$

y usando la ecuación (1.4) y la relación:

$$\int_L \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n'x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n' \neq n, \\ L/2, & \text{si } n' = n \neq 0, \\ 0, & \text{si } n' = n = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

obtenemos la relación:

$$b_{n'} = \frac{2}{L} \int_L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n'x}{L}\right) dx. \quad (1.9)$$

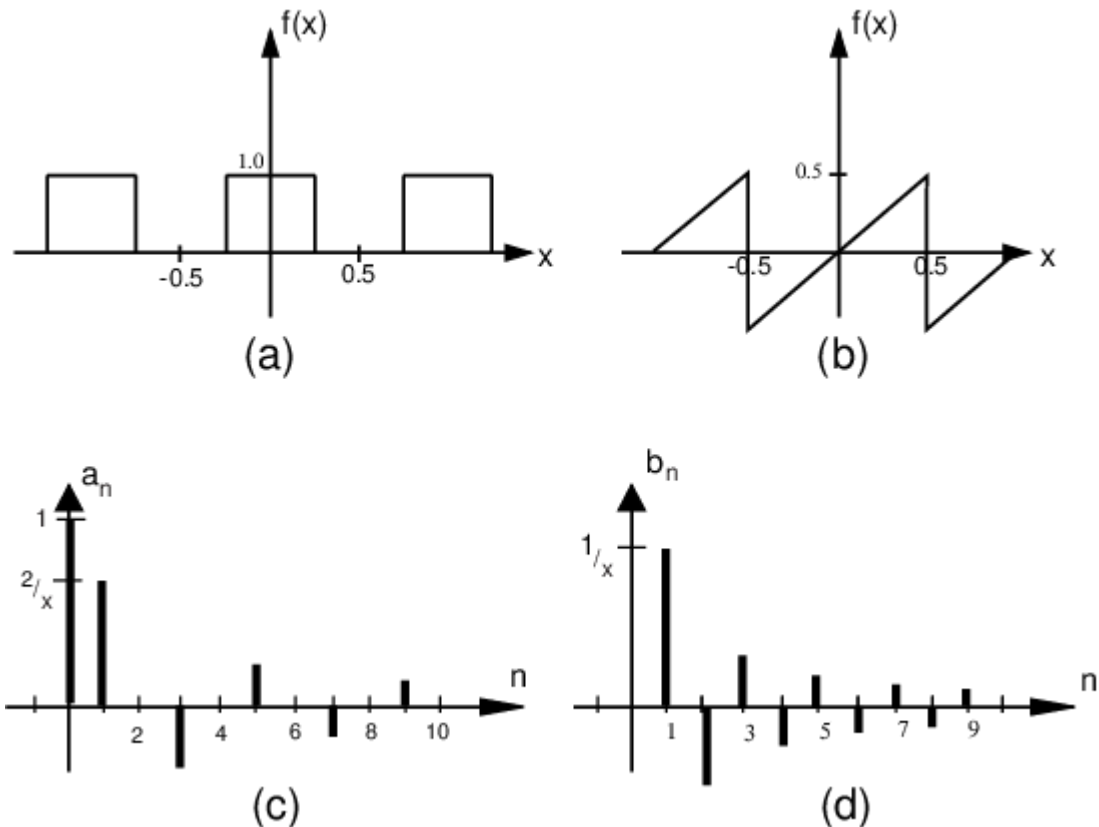


Figura 1.1: Dos funciones periódicas (a) y (b), y sus coeficientes de expansión en una serie de Fourier (c) y (d), respectivamente. Nota que la función (a) es par, entonces sólo tiene los coeficientes a diferente a cero, y la función (b) es impar y sólo los coeficientes b no son cero.

En muchos casos las fórmulas se simplifican: si la función $f(x)$ es par, no tiene componentes nones, $b_m = 0$ para todos los valores de m y:

$$f(x)_{par} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right), \quad (1.10)$$

y para funciones nones, $a_n = 0$ para todos los valores de n y:

$$f(x)_{non} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right). \quad (1.11)$$

Por ejemplo, para el caso de $L = 1$, consideramos la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}, \\ 0, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}, \end{cases} \quad (1.12)$$

que es una función de escalón (ver la Figura 1.1(a)) y es una función par. Calculando los coeficientes usando las ecuaciones (1.6) y (1.9), obtenemos para $n \neq 0$:

$$a_n = 2 \int_{-1/4}^{1/4} \cos(2\pi n x) dx = 2 \left[\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n x) \right]_{-1/4}^{1/4} = -\frac{2}{n\pi} (-1)^{\frac{n+1}{2}}. \quad (1.13)$$

Cuando n es impar y 0 cuando n es par. Para el caso especial de $n = 0$:

$$a_0 = 2 \int_{-1/4}^{1/4} 1 dx = 2[x]_{-1/4}^{1/4} = 1, \quad (1.14)$$

(recuerda que en la expansión de la función (la ecuación (1.1)) dividimos este coeficiente entre 2 para encontrar su contribución a la función) y los coeficientes $b_m = 0$ para todos los valores de m . Las amplitudes de estos coeficientes están graficadas en la Figura 1.1(c) y la suma de diferentes números de términos en la expansión de Fourier se muestra en la Figura 1.2

Ahora consideramos la función non que se muestra en la Figura 1.1(b):

$$f(x) = x \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}. \quad (1.15)$$

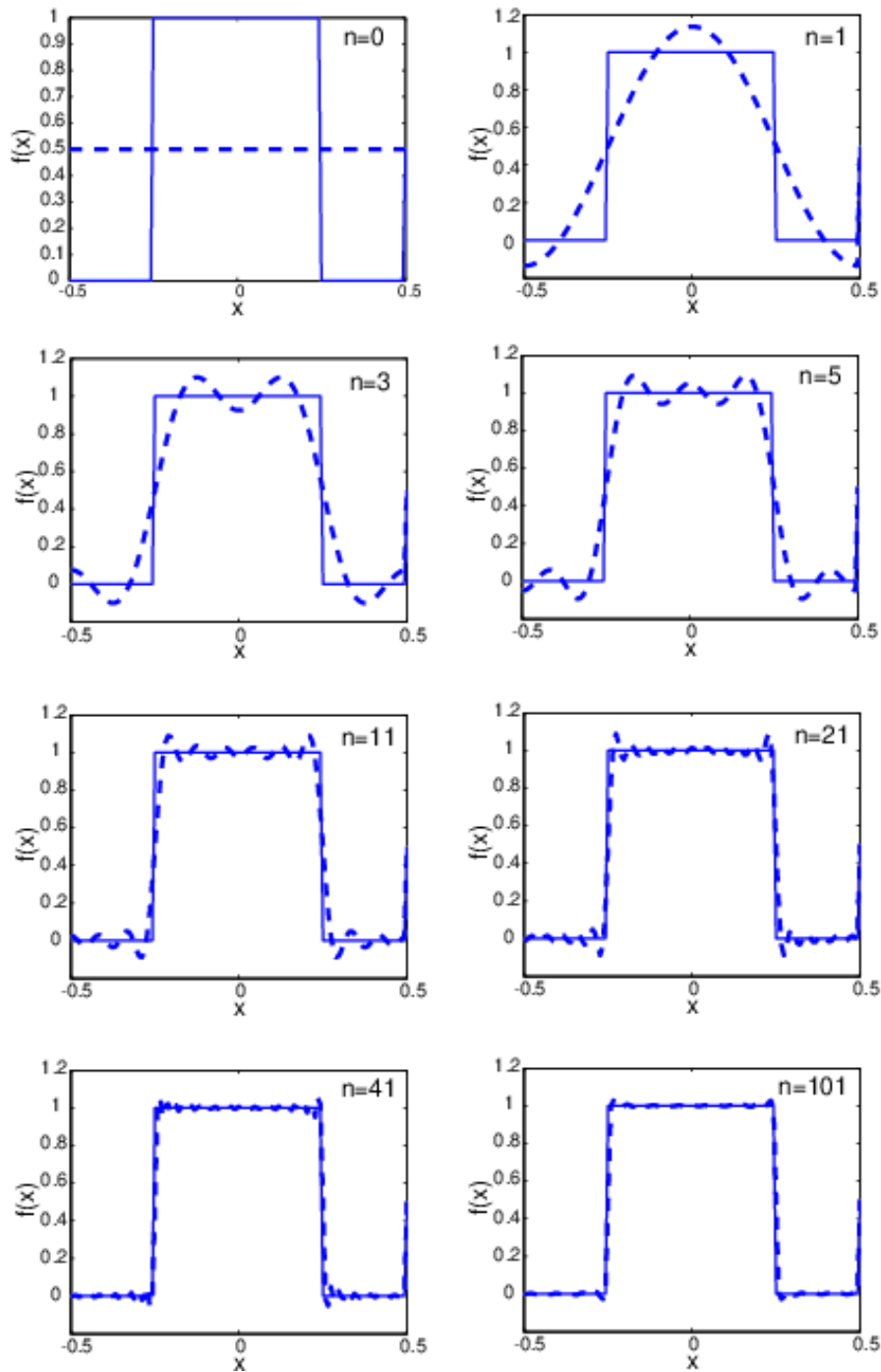


Figura 1.2: Gráficas que muestran las sumas de diferentes números de términos en la serie de Fourier para una función de forma cuadrada. La leyenda en la esquina superior derecha de cada gráfica indica el número de términos tomados de la serie. La línea continua es la función original y la línea quebrada es el resultado de la suma de Fourier. ([SerieFourierAnaliticaCuadrado.m](#), [SerieFourierIntegralCuadrado.m](#))

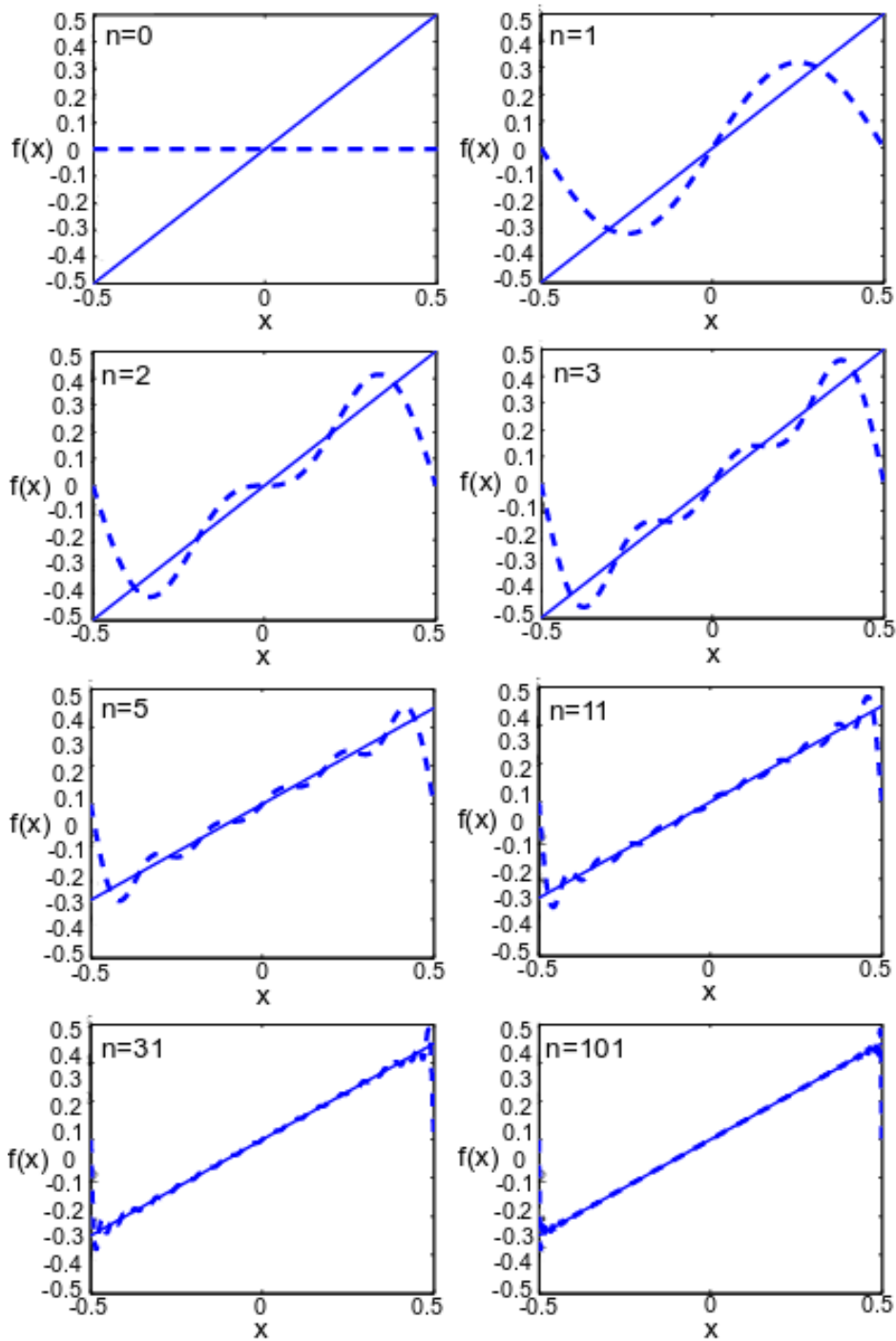


Figura 1.3: Gráficas que muestran las sumas de diferentes números de términos en la serie de Fourier para una función en forma de dientes de sierra. La leyenda en la esquina superior izquierda de cada gráfica indica el número de términos tomados de la serie. La línea continua es la función original y la línea quebrada es el resultado de la suma de Fourier. (SerieFourierAnaliticaDienteSierra.m, SerieFourierIntegralDienteSierra)

Calculando los coeficientes otra vez, encontramos que $a_n = 0$ para todos los valores de n porque la función es impar, y:

$$b_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} x \operatorname{sen}(2\pi nx) dx. \quad (1.16)$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \left[-\frac{x}{2\pi n} \cos(2\pi nx) \right]_{-1/2}^{1/2} + 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi nx) dx \\ &= \left[-\frac{x}{\pi n} \cos(2\pi nx) \right]_{-1/2}^{1/2} - 2 \left[-\frac{1}{(2\pi n)^2} \operatorname{sen}(2\pi nx) \right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= -\frac{1}{\pi n} \left[\frac{1}{2} \cos(n\pi) - \left(-\frac{1}{2} \right) \cos(-n\pi) \right] \\ &\quad - \frac{2}{(2\pi n)^2} [\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi)], \\ b_n &= -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi), \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde se ha utilizado el hecho que $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todo entero n . Esto nos da:

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, \\ -\frac{1}{n\pi} (-1)^n, & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Estos coeficientes se muestran en la Figura 1.1(d) y la suma de los términos de Fourier se muestra en la Figura 1.3.

Las Figuras 1.4 y 1.5 muestran los mismos casos que en las Figuras 1.2 y 1.3, pero con pequeños cambios en la función. En la Figura 1.4 se muestran los coeficientes de la serie de Fourier (Figura 1.4(a)) y la reconstrucción de la función de diente de sierra dado por la ecuación (1.15) sumando hasta $n = 51$ (Figura 1.4(b)). También se muestran los coeficientes de Fourier (Figura 1.4(c)) y la reconstrucción con los términos hasta $n = 51$ (Figura 1.4(d)), de la función dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \quad (1.19)$$

que es la misma función que la ecuación (1.15) pero con un desplazamiento vertical de 0.5. Esto se refleja en los coeficientes de Fourier solo en el término constante a_0 en la Figura 1.4(c). Todos los coeficientes de Fourier son iguales para estas dos funciones, con la única diferencia que $a_0 = 0$ para la función de la ecuación (1.15), y $a_0 = 0.5$ para la función de la ecuación (1.19).

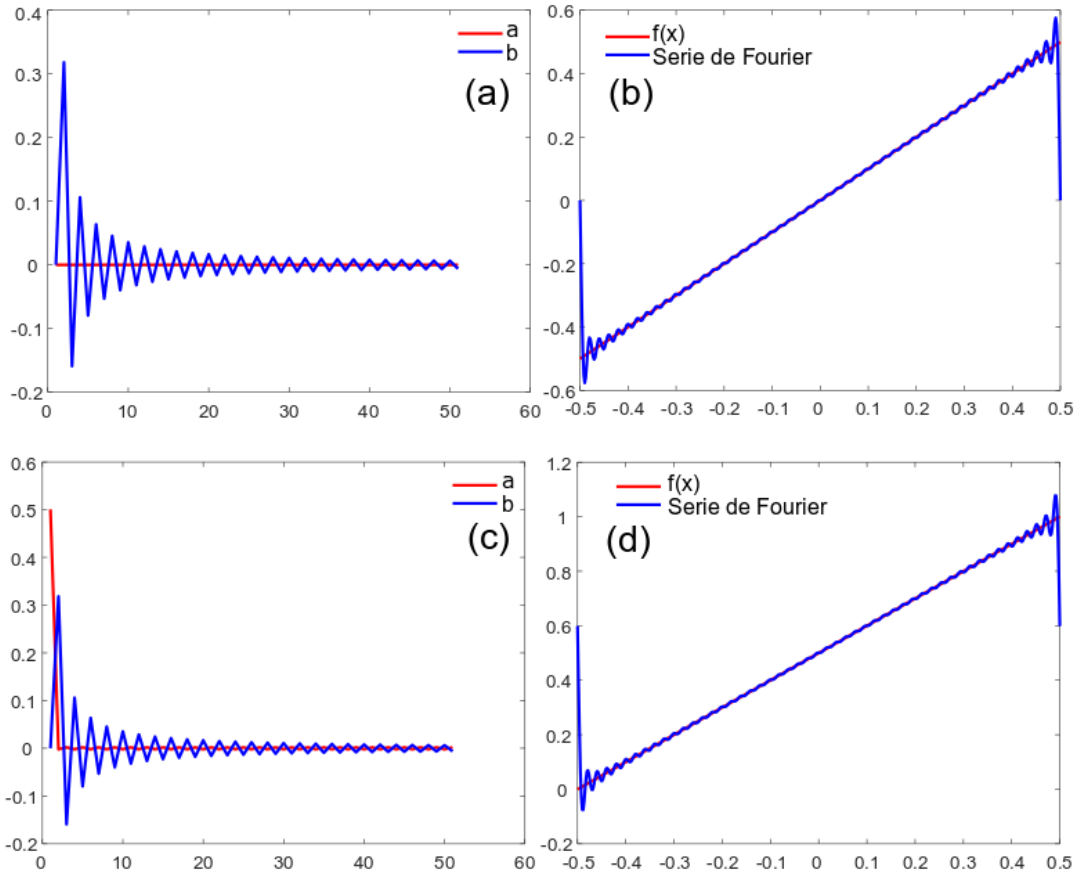


Figura 1.4: (a) los coeficientes de la serie de Fourier; (b) la reconstrucción de la función diente de sierra dado por la ecuación (1.15) sumando hasta $n = 51$; (c) los coeficientes de Fourier; (d) la reconstrucción con los términos hasta $n = 51$ de la función de la ecuación (1.15) con un desplazamiento vertical de 0.5.

(SerieFourierIntegralOffsetDienteSierra.m, SerieFourierIntegralDienteSierra.m)

La Figura (1.5) muestra los coeficientes de la serie de Fourier (Figura 1.5(a)) y la reconstrucción de la función cuadrada centrada en $x = 0$ dada por la ecuación (1.12) sumando hasta $n = 51$ (Figura 1.5(b)). También se muestran los coeficientes de Fourier (Figura 1.5(c)) y la reconstrucción con los términos hasta $n = 51$ (Figura 1.5(d)), de la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (1.20)$$

que es la misma función que la ecuación (1.12) pero con un desplazamiento horizontal de -0.25 . En los coeficientes de Fourier en este caso, el término constante a_0 es el mismo en los dos casos en la Figura 1.5(a) y (c) porque no hay un corrimiento vertical en este caso. También se puede ver que los coeficientes b en la Figura 1.5(c) tienen los mismos valores (absolutos) que los coeficientes a en la Figura 1.5(a), pero en la Figura 1.5(a) los coeficientes impares van alternando sus signos, y en la Figura 1.5(c) todos los coeficientes impares son negativos. La Figura 1.6 muestra porque ocurre esto. A la izquierda en la Figura 1.6 se indican los primeros tres términos (aparte del término constante) de cosenos en la serie de Fourier de la Figura 1.5(a), tomando en cuenta los signos de esta figura. A la derecha se muestran los mismos términos con el corrimiento de 0.25 del periodo a la izquierda. Es muy claro que las contribuciones en las gráficas a la derecha de la Figura 1.6 son términos senos con amplitudes negativas, como se indica en la Figura 1.5(c).

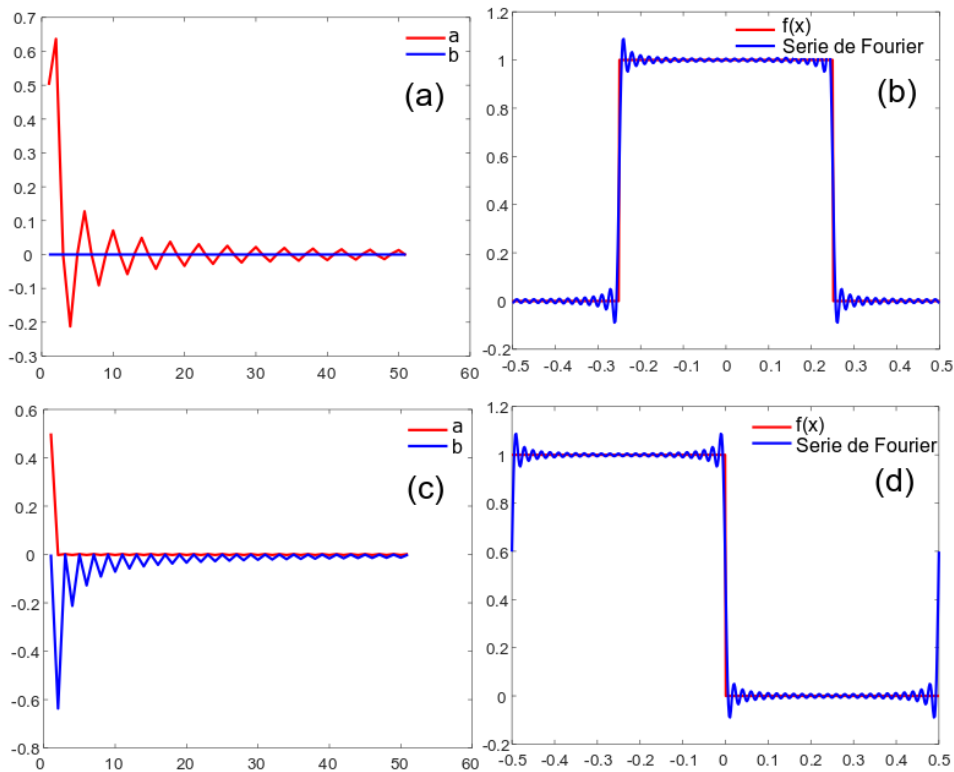


Figura 1.5: (a) los coeficientes de la serie de Fourier; (b) la reconstrucción de la función cuadrada dada por la ecuación (1.12) sumando hasta $n = 51$; (c) los coeficientes de Fourier; (d) la reconstrucción con los términos hasta $n = 51$ de la función de la ecuación (1.15) con un desplazamiento horizontal de -0.25 .

(SerieFourierIntegralOffsetCuadrado.m, SerieFourierIntegralCuadrado.m)

Los ejemplos de las Figuras 1.4 y 1.5 indican que, si puedes construir una función nueva usando una función para la cual ya se conocen los coeficientes de la serie de Fourier, se puede saber la serie de Fourier de la nueva función analizando la relación entre esta nueva función y la función conocida.

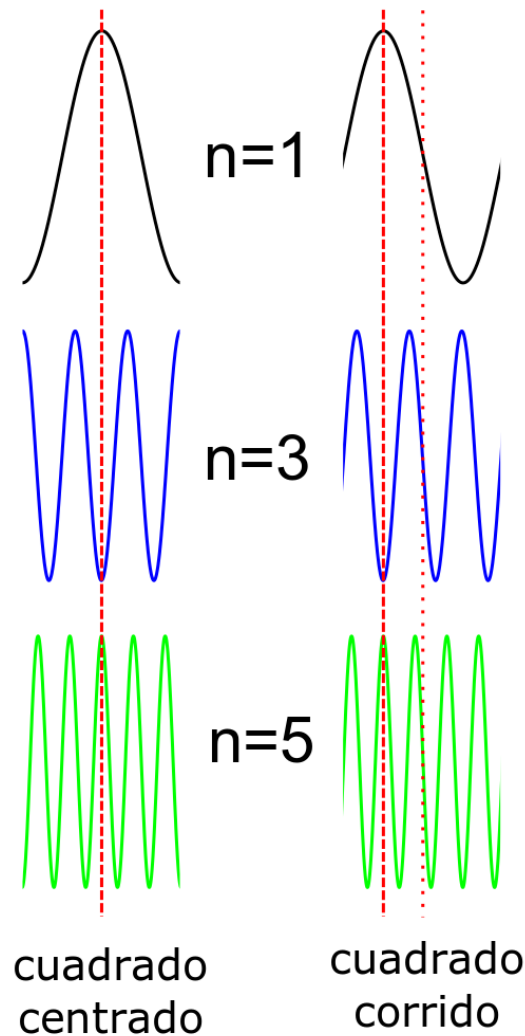


Figura 1.6: Izquierda: los primeros tres términos cosenos en la serie de Fourier de la Figura 1.5(a), con la posición de $x = 0$ marcado con la línea vertical roja. Derecha: los mismos términos con un corrimiento a la izquierda de 0.25 de un periodo, la posición $x = 0$ ahora está marcada por la línea de puntos en rojo, mostrando que estos términos ahora son senos con amplitud negativa.

Como ejemplo final se presenta una señal aleatoria. En este caso, no se puede realizar la integral de Fourier analíticamente, se debe realizar numéricamente. Este ejemplo muestra que el método de Fourier se puede aplicar a funciones, aún cuando no se sabe la forma analítica. En este caso se realizó el cálculo numérico con el programa MatLab. La Figura 1.7 indica la evolución de la suma de Fourier al aumentar el número de términos en la serie.

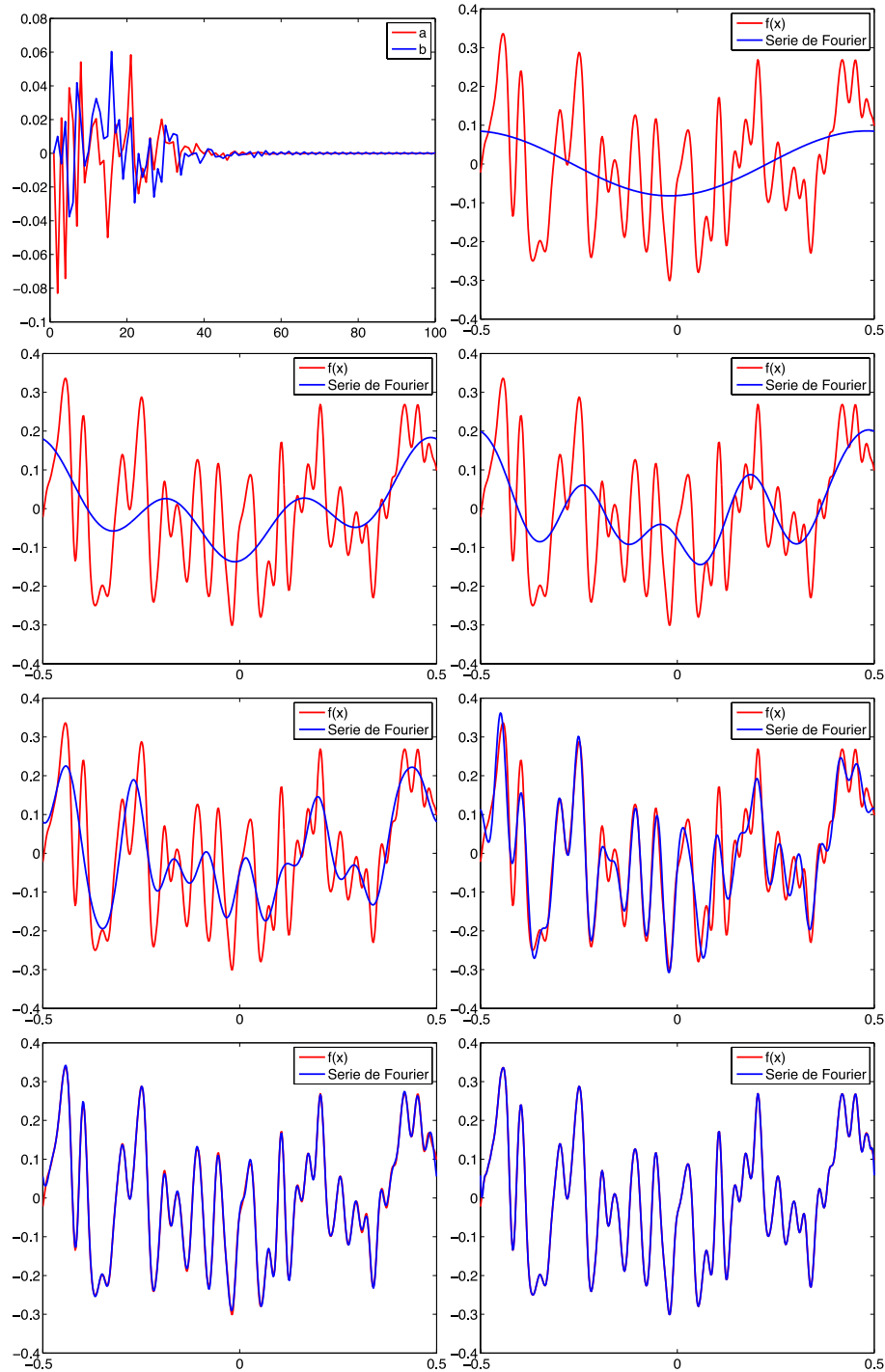


Figura 1.7: Gráficas que muestran las sumas de diferentes número de términos en la serie de Fourier para una función aleatoria. La primera gráfica arriba a la izquierda indica los coeficientes calculados para la serie de Fourier. De arriba hasta abajo y de izquierda a derecha, las curvas azules son para $n = 2, 4, 6, 12, 22, 42$ y 100 . La línea continua es la función original y la línea quebrada es el resultado de la suma de Fourier.

(SerieFourierIntegralAleatorio.m)

Podemos escribir la ecuación (1.1) en una forma más compacta usando la notación de funciones exponenciales complejas. Debido a que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ y $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, la ecuación (1.1) se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(e^{i\frac{2n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} \left(e^{i\frac{2n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} \right), \quad (1.19)$$

que se puede escribir como:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} e^{i\frac{2n\pi}{L}x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pm b_n}{2i} e^{i\frac{2n\pi}{L}x}, \quad (1.20)$$

donde el signo + es para $m > 0$ y el signo - es para $m < 0$, y $b_0 = 0$. Esta ecuación se puede escribir:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{L}x}, \quad (1.21)$$

donde:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad (1.22)$$

que significa que $|c_n| = |c_{-n}|$.

Los coeficientes se pueden calcular usando:

$$\frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{L} \int_L f(x) \left(\cos\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) - i\sin\left(2\pi n \frac{x}{L}\right) \right) dx, \quad (1.23)$$

que se puede escribir como:

$$c_n = \frac{1}{L} \int_L f(x) e^{i\frac{2\pi n}{L}x} dx, \quad (1.24)$$

Usaremos esta notación exponencial en lo que sigue.

Finalmente en esta sección notamos que los coeficientes pueden, en general, ser números complejos. Esto significa que las ondas armónicas tienen una amplitud y también una fase, que se puede pensar que es un corrimiento de las ondas cosenoidales o senoidales en la dirección del eje x .

1.2 La Transformada de Fourier

1.2.1 Definición

Ahora, ¿qué pasa si la función de interés no es periódica? Esto lo podemos pensar en el límite de $L \rightarrow \infty$ para que solo haya el primer periodo de la función (Arfken, 1985; Bracewell, 1965; Goodman, 1996). En este caso la separación en frecuencia entre las ondas armónicas es infinitesimal, y tenemos que pensar en términos de integrales en lugar de sumas en la ecuación (1.21):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du, \quad (1.25)$$

con $u = n/L$ es una variable con dimensiones inversas a x , por ejemplo, si x es una distancia, u es el inverso de la distancia, o frecuencia espacial. Además $\Delta u = 1/L$, con $L \rightarrow \infty$ y $F(u) = c_n/\Delta u$. Aquí $F(\)$ es una función de u , y contiene los pesos de las diferentes frecuencias espaciales necesarias para reconstruir la función $f(x)$. Se calcula $F(u)$ usando el equivalente de la ecuación (1.24)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx. \quad (1.26)$$

La ecuación (1.26) es la transformada de Fourier de la función $f(x)$, $F(u) = \mathfrak{F}(f(x))$, y la ecuación (1.25) es la transformada de Fourier inversa, $f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(F(u))$. El par de funciones $f(x)$ y $F(u)$ forman un par de la transformada de Fourier.

Las condiciones necesarias para que una transformada de Fourier exista son las siguientes:

- i. en un intervalo finito la función original debe tener un número finito de máximos y mínimos,
- ii. en un intervalo finito la función debe tener un número finito de discontinuidades finitas,
- iii. la función no debe tener discontinuidades infinitas.

Además, la función debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Entonces, por ejemplo, la función $f(x) = 1$ no tiene transformada de Fourier, porque su integral sobre un rango infinito es infinito. Sin embargo, en la práctica se encuentra este tipo de transformadas en el límite de alguna otra función, tal que el resultado se acerca mucho al resultado deseado (Bracewell, 1965; Goodman, 1996). De hecho, se puede pensar que las condiciones escritas arriba son un requisito de funciones que pueden existir físicamente (Bracewell, 1965). Por ejemplo, la función $f(x) = 1$ requiere una cantidad de energía infinita para producirse en un tiempo o distancia infinita. Esto es físicamente imposible, entonces estrictamente no tienen transformada de Fourier. De hecho funciones periódicas, como $\sin(\)$ o $\cos(\)$ requieren una cantidad de energía infinita para existir sobre una distancia o tiempo infinito, entonces no son físicamente realizables, pero cumplen las condiciones para tener una transformada de Fourier. Sin embargo, la transformada de Fourier de estas funciones se escribe en términos de la función delta de Dirac, que, como veremos más adelante, tiene una discontinuidad infinita, que también requiere de una energía infinita, físicamente. Sin embargo, siempre podemos producir estas funciones de manera práctica con una buena aproximación.

Ahora vamos a ver unos ejemplos de pares de la transformada de Fourier

1.2.2 Ejemplos de la Transformada de Fourier

1.2.2.1 La función $rect(\)$

Como primer ejemplo tomamos el caso de:

$$f(x) = rect\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{a}{2} < x < -\frac{a}{2}, \\ 1, & \frac{a}{2} \geq x \geq -\frac{a}{2}. \end{cases} \quad (1.27)$$

Esta es la definición de la función $rect(\)$ que usaremos mucho en lo que sigue. La forma de esta función se muestra en la figura 1.5(a). Aplicando la ecuación (1.25) a esta función tenemos:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} rect(x) e^{-i2\pi ux} dx = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi ux} dx = \frac{i}{2\pi u} [e^{-i2\pi ux}]_{-a/2}^{a/2}, \\ F(u) &= \frac{i}{2\pi u} (e^{-i2\pi ua} - e^{i2\pi ua}) = \frac{1}{\pi u} \sin(\pi ua), \end{aligned}$$

y definimos otra función que utilizaremos mucho:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}, \quad (1.28)$$

para que nos quede:

$$F(u) = \mathfrak{F}\left(\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = a \text{sinc}(au). \quad (1.29)$$

La función $\text{sinc}(x)$ tiene la forma de una senusoidal que disminuye en amplitud cuando aumenta x . Se puede usar la ley de L'Hopital para calcular el valor de $\text{sinc}(x)$ en el límite de $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \text{sen}(x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Entonces, la función $\text{sinc}(x)$ tiene el valor 1 en la posición $x = 0$, y es simétrica alrededor de este valor. La gráfica de $\text{sinc}(x)$ se muestra en la figura 1.5(b). Un aspecto importante y general de las transformadas de Fourier se puede ver en este ejemplo. El ancho del $\text{rect}(\quad)$ es a y el ancho del $\text{sinc}(x)$ es proporcional a $1/a$, es decir, el inverso: si el $\text{rect}(\quad)$ es más ancho, el $\text{sinc}(x)$ es más angosto y viceversa.

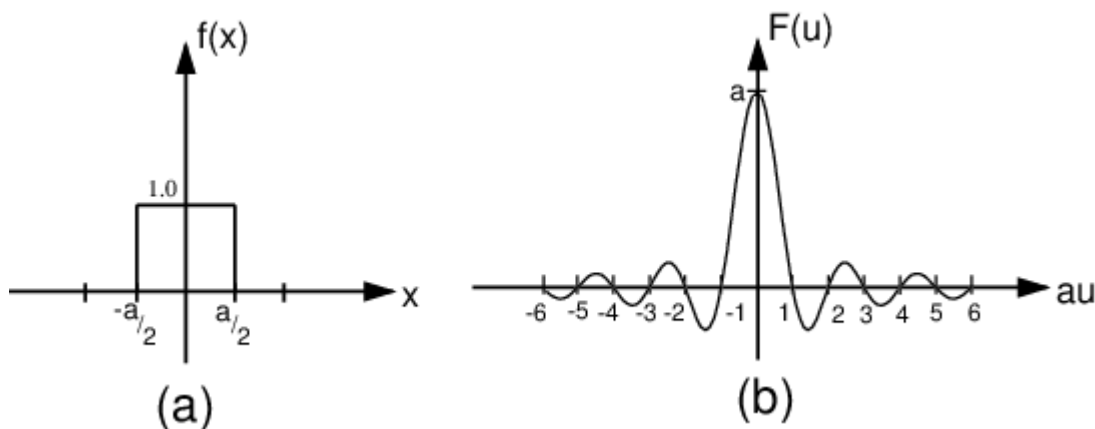


Figura 1.5: (a) La función $\text{rect}(x/a)$ y (b) su transformada de Fourier, la función $a \text{sinc}(au)$ ([TransformadaFourierSumRect.m](#), [TransformadaFourierFFTRect.m](#))

1.2.2.2 La función Gaussiana

Como segundo ejemplo tomaremos el caso de una función Gaussiana, como puede ser el caso de un pulso corto de luz:

$$f(t) = e^{-t^2/\tau^2}, \quad (1.30)$$

donde t es el tiempo y τ es el tiempo en el valor de $1/e$ de la Gaussiana, que indica la duración del pulso. Aquí la variable de la transformada de Fourier tiene dimensiones de inverso del tiempo, o frecuencia, entonces la transformada de Fourier, que en este caso también se conoce como el espectro, se calcula como:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\tau^2} e^{-2\pi\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau} + i\pi\omega\tau\right)^2} e^{-\pi^2\tau^2\omega^2} dt \\ &= e^{-\pi^2\tau^2\omega^2} \tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau} + i\pi\omega\tau\right)^2} d\left(\frac{t}{\tau} + i\pi\omega\tau\right). \end{aligned}$$

La integral que queda aquí es, por definición de la función de error (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1, \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-t^2} dt = -1,$$

entonces:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\left(e^{-t^2/\tau^2}\right) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\right) e^{-\pi^2\tau^2\omega^2}, \quad (1.31)$$

es decir, la transformada de Fourier de una Gaussiana es otra Gaussiana, o la función Gaussiana es una autotransformada de Fourier. Este par de la transformada de Fourier se muestra en la figura 1.6.

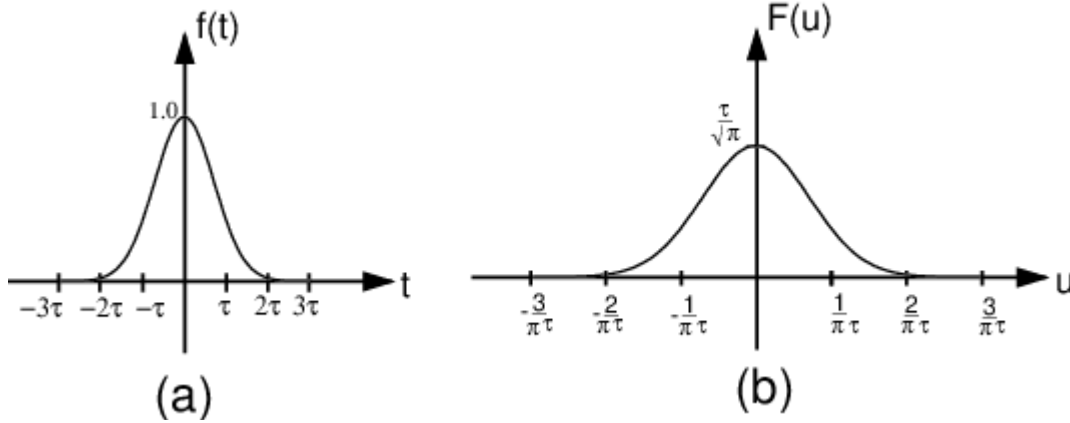


Figura 1.6: (a) La función Gaussiana e^{-t^2/τ^2} y (b) su transformada de Fourier, otra función Gaussiana $\left(\tau/\sqrt{\pi}\right)e^{-\pi^2\tau^2\omega^2}$ (TransformadaFourierFFTGauss.m)

En este caso el ancho $1/e$ del espectro es $\Delta\omega = 1/(\pi\tau)$. Entonces para un pulso de duración 100×10^{-15} segundos = 100 femtosegundos = $100fs$, $\tau = 50fs$, y $\Delta\omega = 6.37 \times 10^{12}Hz$. Utilizando la ecuación de una onda $c = \omega\lambda$, donde c es la velocidad de la luz y λ es la longitud de onda, y suponiendo una longitud de onda central de 800nm, se puede calcular el ancho de banda en términos de la longitud de onda:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\omega \approx 13nm,$$

y el ancho total en longitud de onda del espectro es $2\Delta\lambda \approx 26nm$.

1.2.2.3 La función *circ*()

Otro ejemplo que vamos a necesitar mucho es la transformada de Fourier de una función circular (ver la Figura 4a). Esta función se puede escribir como:

$$f(x, y) = circ\left(\frac{r}{a}\right) = \begin{cases} 1 & r \leq a/2 \\ 0 & r > a/2 \end{cases}, \quad (1.32)$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. En este caso tenemos una función de dos variables, entonces la transformada de Fourier también es de dos variables. Generalizando la ecuación (1.25) para el caso de dos variables, tenemos:

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (1.33)$$

Para una función circularmente simétrica, cambiamos de variables:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta), & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= r \sin(\theta), & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \rho \cos(\phi), & \rho &= \sqrt{u^2 + v^2}, \\ v &= \rho \sin(\phi), & \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right), \end{aligned}$$

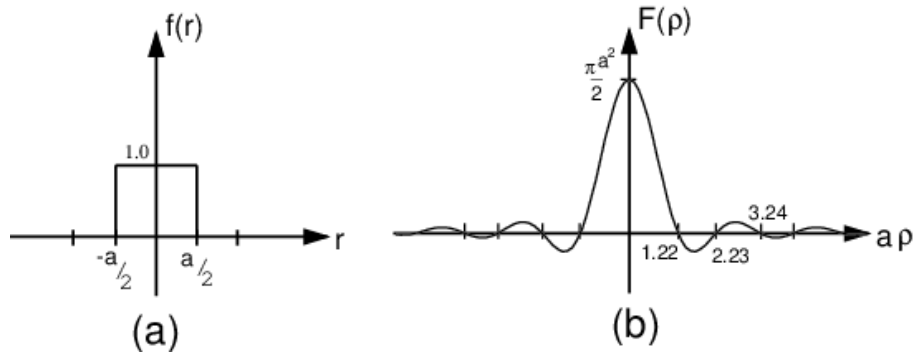


Figura 1.7: (a) Un corte en un eje de la función $\text{circ}(r/a)$ y (b) su transformada de Fourier $J_1(\pi\rho a)/(\pi\rho a)$. Nótese que las dos funciones son circularmente simétricas
(TransformadaFourierFFTCTCirc.m)

y la transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} F(\rho, \phi) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r) e^{-i2\pi r \rho (\cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta))} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r) e^{-i2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)} r dr d\theta, \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde la función $f(\quad)$ es circularmente simétrica, entonces no depende de θ .

Usando la definición de la función de Bessel (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i a \cos(\theta)} d\theta,$$

donde $J_0(\)$ es la función de Bessel del primer tipo de orden 0, la transformada de Fourier queda como:

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr, \quad (1.35)$$

donde se puede ver que la función $F(\)$ también es circularmente simétrica; no depende de ϕ . Esta ecuación es la forma general de la transformada de Fourier-Bessel para funciones circularmente simétricas; es una descomposición en funciones elementales $J_0(2\pi r \rho) r$.

Regresando a la función $\text{circ}\left(\frac{r}{a}\right)$, la transformada de Fourier-Bessel es:

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^{a/2} J_0(2\pi r \rho) r dr. \quad (1.36)$$

Usando la ecuación 9.1.30 dada en (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$\frac{d}{dx} \{x^{n+1} J_{n+1}(x)\} = x^{n+1} J_n(x),$$

Obtenemos:

$$F(\rho) = \frac{2\pi}{(2\pi\rho)^2} \int_0^{2\pi\rho a/2} r' J_0(r') dr' = \frac{2\pi}{(2\pi\rho)^2} 2\pi\rho \frac{a}{2} J_1\left(2\pi\rho \frac{a}{2}\right),$$

donde $J_1(\)$ es la función de Bessel del primer tipo de orden 1. Se puede escribir esta ecuación como:

$$F(\rho) = \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{J_1(\pi \rho a)}{\pi \rho a}, \quad (1.37)$$

que tiene la misma forma que la función $\text{sinc}(\)$, que ya vimos. Esta función está graficada en la Figura 1.7b. Los ceros de esta función aparecen en los valores $\pi \rho a = 1.22\pi, 2.23\pi, 3.24\pi, \dots$.

1.2.2.4 La función $\delta(\)$

La función $\delta(\)$ de Dirac es una función especial que tiene las siguientes propiedades (Arfken, 1985):

$$\begin{aligned} \delta(x - a) &= 0, \quad \text{si } x \neq a, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx &= f(a), \end{aligned} \quad (1.38)$$

y físicamente esta función es un pico muy delgado y muy alto en la posición $x = a$. Como ya mencionamos, estrictamente esta función no tiene transformada de Fourier, porque no es una función que se puede reproducir físicamente dado que tiene una discontinuidad infinita, pero se pueden utilizar las propiedades de las ecuaciones (1.38) para aproximar la transformada de Fourier ([TransformadaFourierFFTDelta.m](#)):

$$F(u) = \mathfrak{F}(\delta(x - a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) e^{-i2\pi ux} dx = e^{-i2\pi ua}, \quad (1.39)$$

Notese que, si $a = 0$, $\mathfrak{F}(\delta(x)) = 1$. Una generalización de la función $\delta(\)$ es la función **comb**($\)$):

$$\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na), \quad (1.40)$$

es decir, una serie de picos muy delgados con separación constante. Se puede mostrar que la transformada de Fourier de esta función es:

$$\mathfrak{T}\left(\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{1}{a} \text{comb}(ua), \quad (1.41)$$

que es el equivalente a una función periódica que contiene una serie de frecuencias discretas (una serie de Fourier).

1.2.3 Teoremas de la Transformada de Fourier

Se pueden ver más de estos teoremas en (Bracewell, 1965).

1.2.3.1 Teorema de la Linealidad

Si a y b son constantes:

$$\mathfrak{T}(af(x) + bg(x)) = a\mathfrak{T}(f(x)) + b\mathfrak{T}(g(x)) = aF(u) + bG(u), \quad (1.42)$$

donde $F(u)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$ y $G(u)$ la de $g(x)$.

1.2.3.2 Teorema de Escala

Si a es una constante:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(f(ax)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i2\pi ux} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i2\pi \frac{u}{a} x'} \frac{dx'}{a} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i2\pi \frac{u}{a} x'} dx', \end{aligned}$$

donde usamos un cambio de variable $x' = ax$, entonces:

$$\mathfrak{F}(f(ax)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right). \quad (1.43)$$

Esto significa que una función que está más delgada tiene una transformada de Fourier que es más ancha, y viceversa.

1.2.3.3 Teorema de Corrimiento

Si a es una constante:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f(x-a)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-i2\pi ux} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i2\pi u(x'+a)} dx' = e^{-i2\pi ua} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-i2\pi ux'} dx', \end{aligned}$$

donde usamos un cambio de variable $x' = x - a$, entonces:

$$\mathfrak{F}(f(x-a)) = F(u) e^{-i2\pi ua}, \quad (1.44)$$

y el corrimiento en la función introduce un cambio de fase en su transformada de Fourier.

1.2.3.4 Teorema de Parseval

Integrando el módulo cuadrado de una función:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du \int_{-\infty}^{\infty} F^*(u') e^{-i2\pi u'x} du' dx.$$

Intercambiando el orden de integración, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) F^*(u') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(u-u')x} dx du du'.$$

La integral en x es la transformada de Fourier de la función delta centrada en $u = u'$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du. \quad (1.45)$$

Esta ecuación se interpreta como la conservación de energía entre el espacio original y el espacio de Fourier.

1.2.3.5 Teorema de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de la transformada inversa de Fourier es:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(f(x))) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f(x))) = f(x). \quad (1.46)$$

Este teorema es resultado de que las definiciones de la transformada de Fourier y su inverso sean consistentes.

Otra definición que necesitaremos es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f(x))) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx \right\} e^{-i2\pi ux'} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ux} e^{-i2\pi ux'} du dx. \end{aligned}$$

La integral sobre u , I_u , en esta última ecuación es la transformada de Fourier del factor $e^{-i2\pi ux'}$:

$$\mathfrak{F}(e^{-i2\pi ux'}) = I_u,$$

y comparando con la ecuación (1.39), que es la ecuación para la transformada de Fourier de la función $\delta(\quad)$, se ve que:

$$I_u = \delta(x + x'),$$

y:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x+x')dx,$$

entonces:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f(x))) = f(-x), \quad (1.47)$$

es decir, regresamos a la misma función pero con una reflexión del eje.

Capítulo 2

Sistemas Lineales y Convolución

En este capítulo veremos la teoría de sistemas lineales, particularmente cuando el sistema es isoplanático, o invariante, es decir, que la respuesta de una entrada puntual es el mismo para todas las posiciones de la entrada. En la óptica este tipo de sistemas tienen la misma imagen para todas las posiciones del objeto. Luego veremos la operación de la convolución, que utilizaremos mucho en lo que sigue.

2.1 Sistemas Lineales

Un sistema en general requiere de una entrada de alguna forma, el sistema procesa esta entrada y produce una salida. La relación entre la entrada y la salida es, en general muy complicada; lo podemos describir con la ecuación:

$$f(x) = S(g(x)), \quad (2.1)$$

donde $f(x)$ es la función que describe la salida y $g(x)$ es la función que describe la entrada, para valores de alguna variable x , por ejemplo posición o tiempo. La función $S(\quad)$ describe la acción del sistema.

Un sistema lineal es un sistema cuya salida está relacionada con su entrada con una relación lineal:

$$S(ag_1(x) + bg_2(x)) = aS(g_1(x)) + bS(g_2(x)). \quad (2.2)$$

Esta relación indica que si es posible escribir la entrada $g(x)$ como una suma de algún tipo de funciones elementales con pesos adecuados (las constantes a y b en esta ecuación), la salida es simplemente la suma de las salidas de los elementos de entrada con los mismos pesos. Vamos a tomar como función elemental la función delta de Dirac:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) \delta(x - \zeta) d\zeta, \quad (2.3)$$

donde $g(\zeta)$ son los pesos requeridos, las funciones $\delta(x - \zeta)$ son las funciones elementales, y cambiamos la suma por la integral para el caso de una entrada $g(x)$ continua. La acción del sistema sobre esta entrada es:

$$S(g(x)) = S\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) \delta(x - \zeta) d\zeta\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) S(\delta(x - \zeta)) d\zeta, \quad (2.4)$$

donde usamos la propiedad de linealidad de la ecuación (2.2). La función $S(\delta(x - \zeta))$ es la *respuesta a un impulso* del sistema y depende de los valores x y ζ ; indicaremos esta función como $h(x, \zeta)$:

$$f(x) = S(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) h(x, \zeta) d\zeta. \quad (2.5)$$

Entonces, para poder calcular la salida $f(x)$ tenemos que saber la respuestas a todos los impulsos (funciones de $\delta(\quad)$) que contribuyen a la entrada, y usando los pesos $g(\zeta)$ para la entrada, sumar para formar la salida.

2.2 Sistemas Lineales e Isoplanáticos

Un sistema es isoplanático si la respuesta a un impulso es el mismo para todas las posibles posiciones del impulso de entrada. Esto significa que $h(x, \zeta)$ no es una función de las dos variables, es una función solamente de la diferencia entre los dos valores (no depende de las posiciones, solo de la separación), y suponiendo una magnificación de 1 entre la entrada y la salida:

$$h(x, \zeta) = h(x - \zeta), \quad (2.6)$$

y la salida está dada por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) h(x - \zeta) d\zeta, \quad (2.7)$$

que es la definición de **convolución**. Vamos a usar a la convolución mucho y usaremos el símbolo $\otimes$:

$$f(x) = g(\zeta) \otimes h(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) h(x - \zeta) d\zeta. \quad (2.8)$$

Cambiando la variable de integración en la ecuación (2.8): $\zeta' = x - \zeta$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(\zeta) \otimes h(\zeta) = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \zeta') h(\zeta') d\zeta' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta) g(x - \zeta) d\zeta = h(\zeta) \otimes g(\zeta), \end{aligned}$$

$$g(\zeta) \otimes h(\zeta) = h(\zeta) \otimes g(\zeta), \quad (2.9)$$

y la relación de convolución es conmutativa.

También se pueden mostrar que la convolución es asociativa y lineal:

$$f(\zeta) \otimes [g(\zeta) \otimes h(\zeta)] = [f(\zeta) \otimes g(\zeta)] \otimes h(\zeta), \quad (2.10)$$

$$f(\zeta) \otimes (g(\zeta) + h(\zeta)) = f(\zeta) \otimes g(\zeta) + f(\zeta) \otimes h(\zeta). \quad (2.11)$$

2.3 El Significado de Convolución

Usando las gráficas en la Figura 2.1, podemos construir una idea de qué significa la operación de convolución. Tomamos como nuestra primera función $g(\zeta)$ una función $rect(\zeta/a)$ (Figura 2.1a) que es simétrica alrededor del eje vertical. Para la función $h(\zeta)$ tomamos una función triangular que no es simétrica alrededor del eje vertical (Figura 2.1b). La función que necesitamos adentro de la integral de la convolución es $h(x - \zeta)$ y se muestra esta función en la Figura 2.1c. Es una versión de la función original $h(\zeta)$ pero invertida (en el eje ζ) y con un cambio de posición una distancia x en la dirección de ζ . La multiplicación e integración ahora se puede interpretar como se muestra en la Figura 2.1d, como el área de intersección entre las dos funciones. La Figura 2.1e muestra la forma del área de intersección entre las dos funciones como función de x . Entonces, podemos pensar en la operación de convolución como la variación del área de intersección entre una función y otra, ésta segunda función invertida y con una traslación por una distancia variable.

2.4 Transformada de Fourier de la Convolución

Ahora, vemos la propiedad más importante de la convolución, con la pregunta ¿qué es la transformada de Fourier de una función que se puede escribir como una convolución?

Empezamos con:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) h(x - \zeta) d\zeta e^{-i2\pi ux} dx,$$

donde escribimos la convolución explícitamente. Intercambiando el orden de las integraciones:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \zeta) e^{-i2\pi ux} dx \right\} d\zeta,$$

y la integral en el paréntesis es, por el teorema de corrimiento que ya vimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x - \zeta) e^{-i2\pi ux} dx = H(u) e^{-i2\pi u\zeta},$$

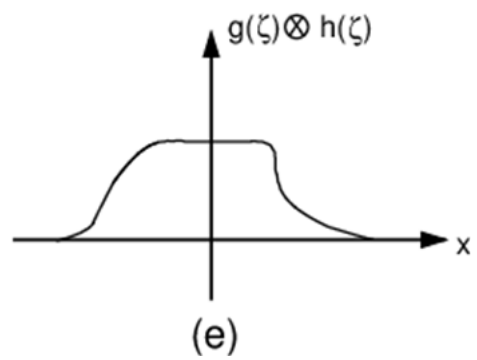
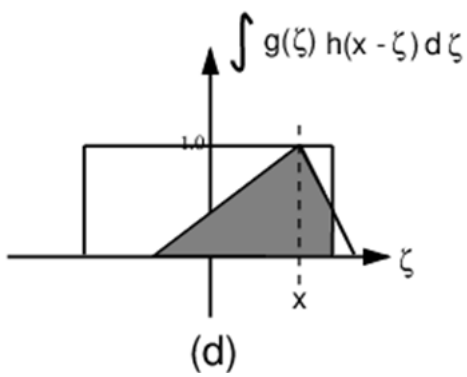
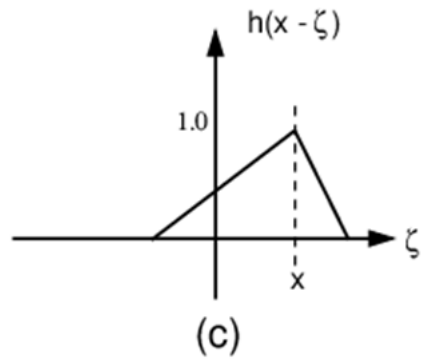
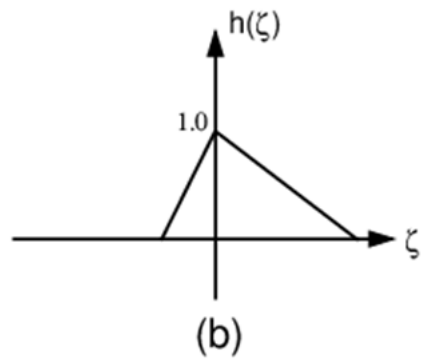
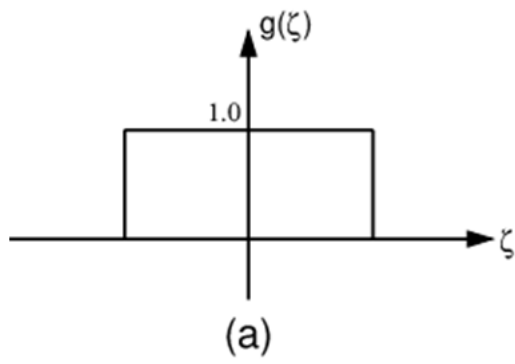


Figura 2.1: Interpretación gráfica de la convolución

Entonces:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) H(u) e^{-i2\pi u \zeta} d\zeta =$$

$$H(u) \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) e^{-i2\pi u \zeta} d\zeta = H(u)G(u),$$

y tenemos la relación:

$$F(u) = \mathfrak{F}(g(\zeta) \otimes h(\zeta)) = G(u)H(u), \quad (2.12)$$

es decir, la transformada de Fourier de una función que se puede escribir como una convolución de otras dos funciones es igual al producto de las transformadas de Fourier de estas dos funciones. Esto es importante porque la operación de multiplicación es mucho más sencilla que la operación de convolución, y si podemos escribir el efecto de algún sistema en términos de una convolución, podemos luego sacar su transformada de Fourier para tener la operación en términos de una multiplicación (además esta operación se puede pensar como un filtro sobre las frecuencias espaciales – y veremos más de esto más adelante), y después podemos tomar la transformada de Fourier inversa para regresar al espacio original.

De forma similar, tenemos que:

$$\mathfrak{F}(g(\zeta)h(\zeta)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)h(\zeta) e^{-i2\pi u \zeta} d\zeta.$$

Se puede escribir la función $h(\zeta)$ en términos de su transformada de Fourier:

$$\mathfrak{F}(g(\zeta)h(\zeta)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(u') e^{i2\pi u' \zeta} du' \right\} e^{-i2\pi u \zeta} d\zeta,$$

$$\mathfrak{F}(g(\zeta)h(\zeta)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(u') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta) e^{i2\pi u' \zeta} e^{-i2\pi u \zeta} d\zeta \right\} du',$$

donde se ha intercambiado el orden de las integraciones. La integral dentro de los paréntesis, por el teorema de corrimiento, es la transformada de Fourier de la función $g(\zeta)$ con un corrimiento:

$$\mathfrak{F}(g(\zeta)h(\zeta)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(u')G(u - u') du' = G(u) \otimes H(u), \quad (2.13)$$

es decir, la transformada de Fourier de un producto de dos funciones es la convolución de las transformadas de Fourier de estas dos funciones. En las Figuras 2.2 a 2.4 se muestran ejemplos del cálculo de la convolución numéricamente, utilizando la función de MatLab que calcula la convolución directamente y la transformada de Fourier inversa del producto de las transformadas de Fourier de las funciones originales.

Regresando a sistemas lineales e isoplanáticos, ahora es más fácil considerar lo que pasa en el espacio de Fourier. Tenemos que la salida está dada por la convolución de la entrada $g(\zeta)$ con la respuesta a un impulso $h(\zeta)$:

$$f(x) = g(\zeta) \otimes h(\zeta). \quad (2.14)$$

Tomamos la transformada de Fourier de esta convolución:

$$F(u) = G(u)H(u), \quad (2.15)$$

donde $F(u)$ es la transformada de Fourier (el espectro) de la salida, $G(u)$ es la transformada de Fourier (el espectro) de la entrada, y $H(u)$ es la transformada de Fourier de la respuesta a un impulso, también conocida como la *función de transferencia* del sistema. En el espacio Fourier la salida es simplemente la multiplicación de la entrada con la función de transferencia; una operación mucho más simple que la convolución necesaria en el espacio original, aunque ahora tenemos la complicación de hacer transformadas de Fourier.

Vamos a usar la convolución muy seguido porque es una forma sencilla de describir aberturas y, como vimos, simplifica el cálculo de la salida de sistemas. Abajo vamos a ver algunas cosas que se pueden hacer con la convolución.

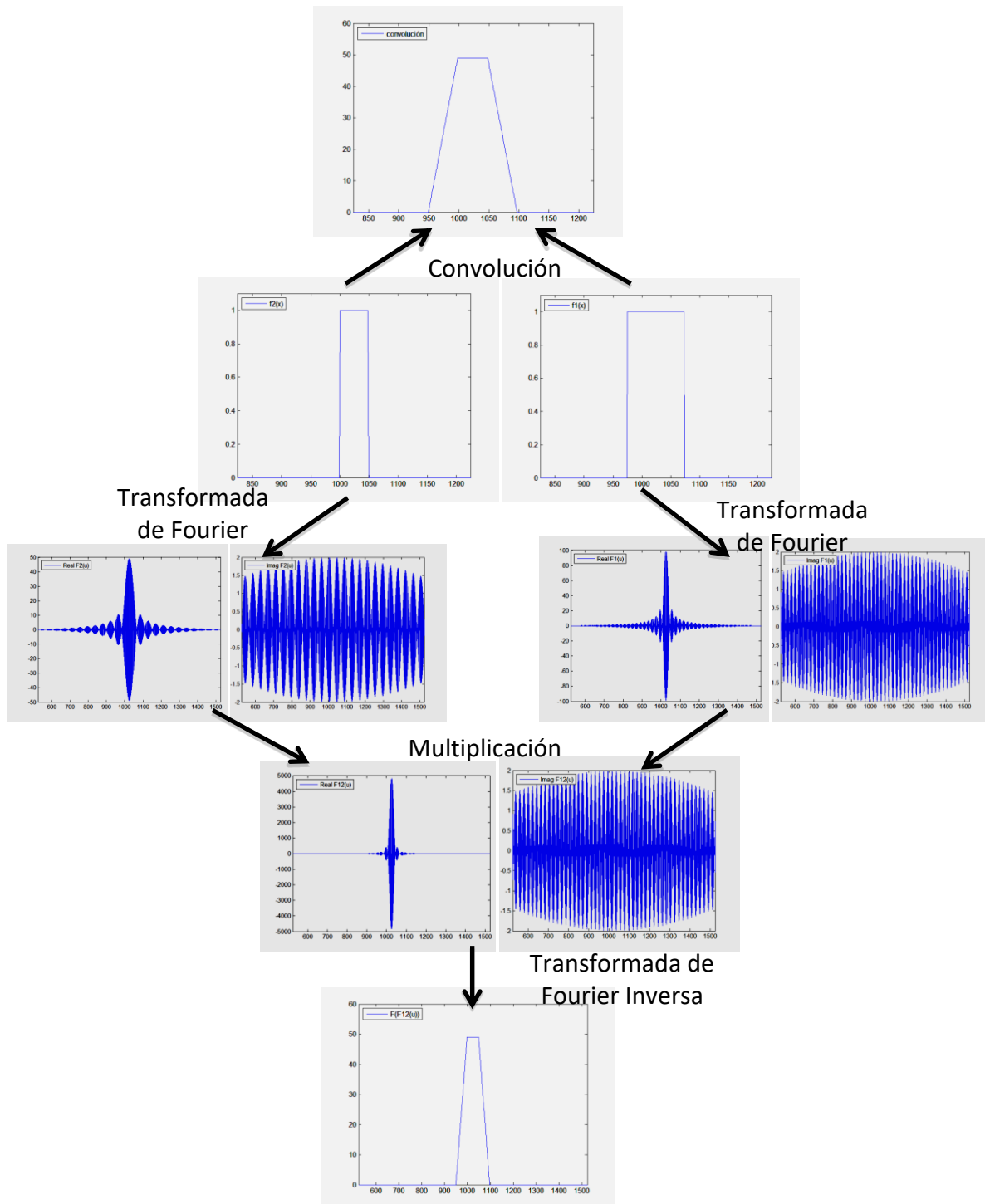


Figura 2.2: Se muestra el cálculo de la convolución de dos funciones. Las dos funciones originales (dos $\text{rect}(\)$) se muestran en la segunda línea de la figura. Arriba de éstos está la convolución calculada en MatLab. Abajo de las funciones originales son las transformadas de Fourier (partes reales e imaginarias), su producto y la transformada de Fourier inversa de ésta, que es igual a la convolución, con un cambio de escala. ([ConvolucionRectRect.m](#))

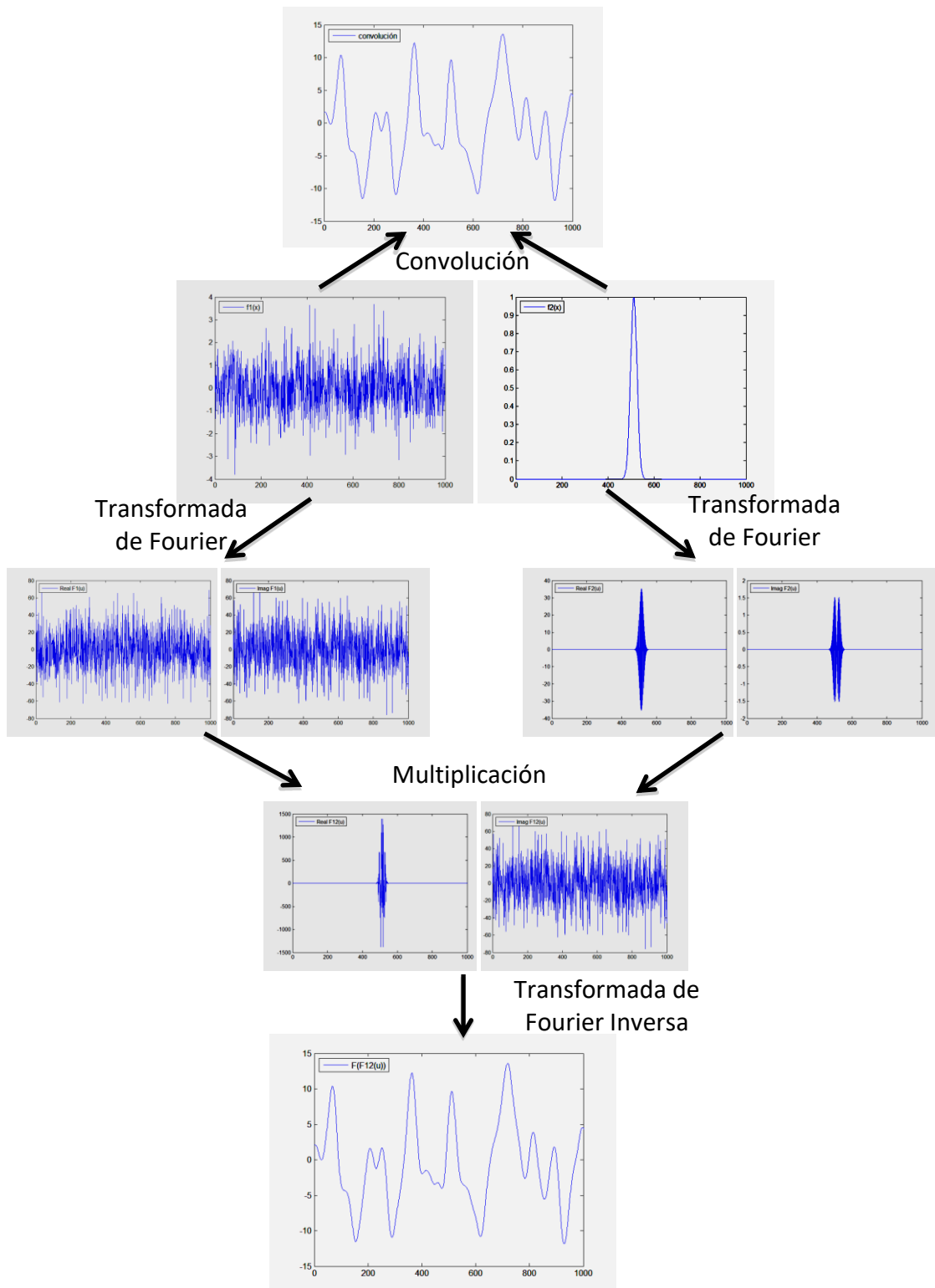


Figura 2.3: Se muestra lo mismo que la Figura 2.2, pero para una función de números aleatorios y una función Gaussiana. Ésta es una forma de generar una señal aleatoria con función de correlación Gaussiana.

(ConvolucionRandomGauss.m)

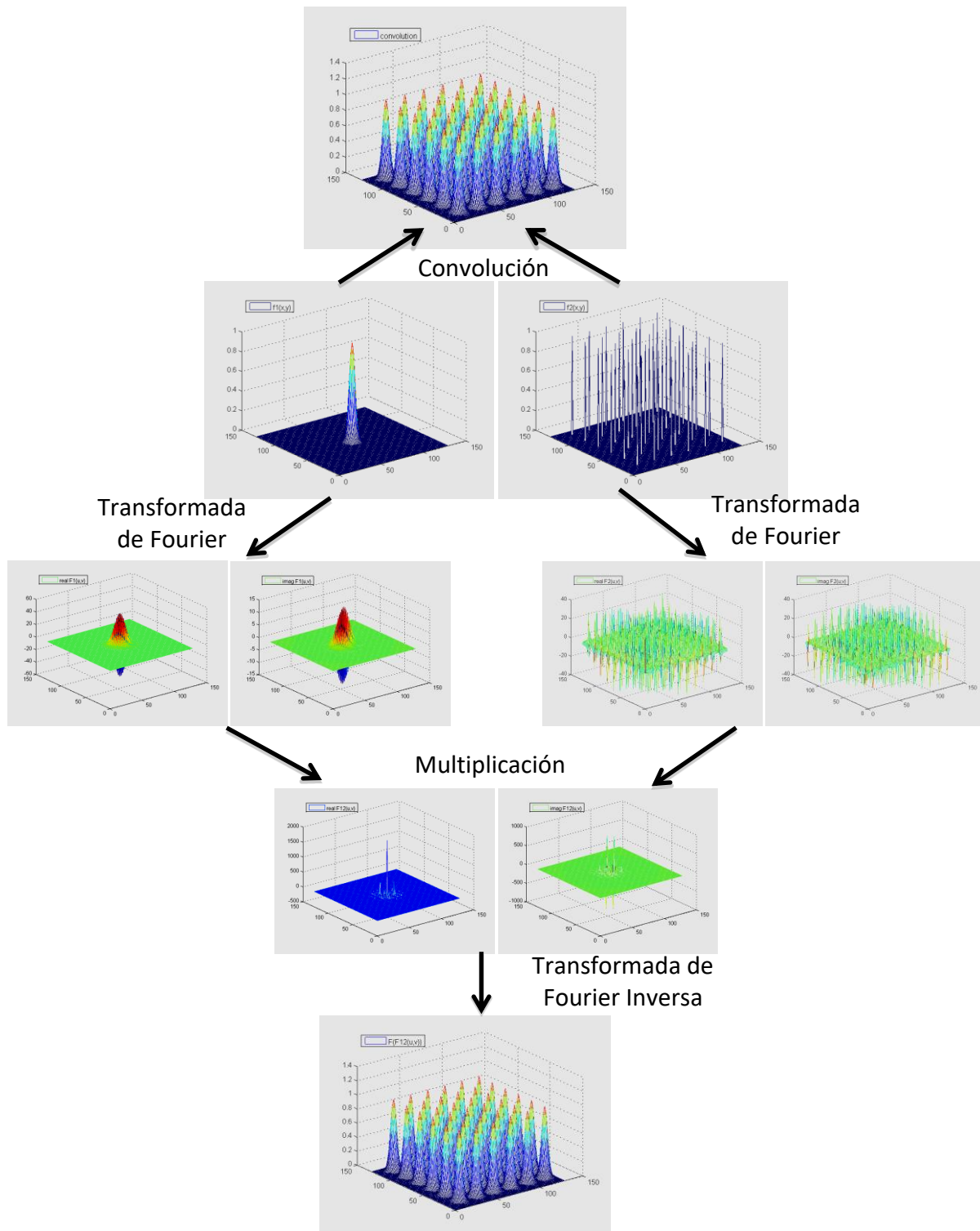


Figura 2.4: Se muestra lo mismo que la Figura 2.2, pero con funciones bidimensionales. Es para una función $\text{comb}(\)$ y una función Gaussiana. En la siguiente sección mostramos que la convolución con un $\text{comb}(\)$ da replicación de la otra función. ([Convolucion2dGaussComb.m](#))

2.5 Ejemplos usando convolución

Primero vemos qué pasa si hacemos la convolución con una función $\delta(\zeta - \zeta_0)$; nos da:

$$\begin{aligned} g(\zeta) \otimes \delta(\zeta - \zeta_0) &= \delta(\zeta - \zeta_0) \otimes g(\zeta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta - \zeta_0) g(x - \zeta) d\zeta = g(x - \zeta_0), \end{aligned} \quad (2.16)$$

que es la función original centrada en la posición definida por la función $\delta(\)$ ([ConvolucionDeltaRect.m](#)).

Ahora, si convolvemos con una función $comb(\zeta/a)$:

$$g(\zeta) \otimes comb\left(\frac{\zeta}{a}\right) = g(\zeta) \otimes a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\zeta - na).$$

Si suponemos que la separación a entre las funciones de $\delta(\)$ del $comb(\)$ es mayor que el ancho de la función $g(\)$ entonces podemos escribir:

$$g(\zeta) \otimes comb\left(\frac{\zeta}{a}\right) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\zeta) \otimes \delta(\zeta - na), \quad (2.17)$$

que es una suma de repeticiones de la función $g(\)$ separadas por la distancia a , esto es, tenemos *replicación* de la función $g(\)$ en las posiciones de los dientes (las $\delta(\)$) de la función $comb(\)$ (ver la Figura 2.5). Si el ancho de la función $g(\)$ es mayor que la separación a entonces la convolución es mucho más complicada ya que las copias de la función $g(\)$ se traslapan y cambia la forma del integral.

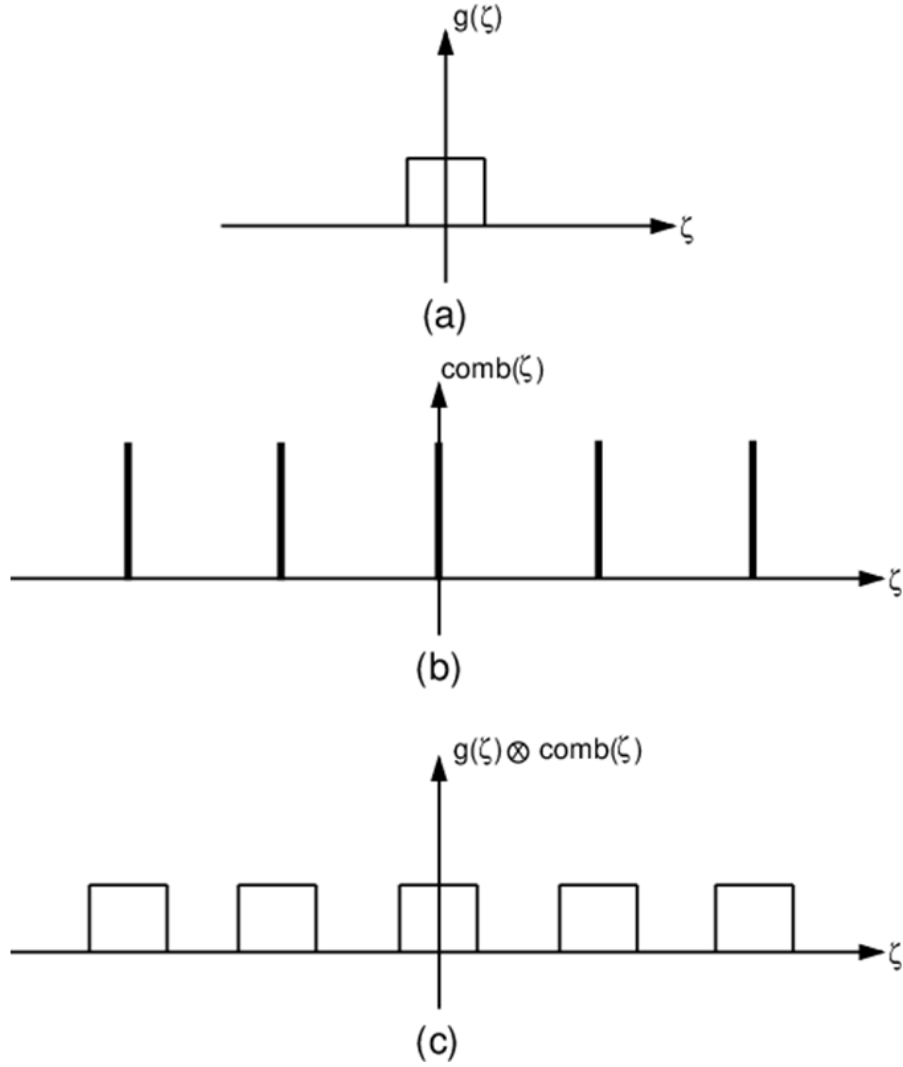


Figura 2.5: Replicación de una función con la convolución con un $\text{comb}(\)$
 (ConvolutionCombRect.m)

Suponiendo que a es mayor que el ancho de la función $g(\)$, vamos a calcular la transformada de Fourier de la convolución $g(\zeta) \otimes \text{comb}\left(\frac{\zeta}{a}\right)$:

$$\mathfrak{F}\left(g(\zeta) \otimes \text{comb}\left(\frac{\zeta}{a}\right)\right) = \mathfrak{F}(g(\zeta)) \mathfrak{F}\left(\text{comb}\left(\frac{\zeta}{a}\right)\right) = G(u) \frac{1}{a} \text{comb}(au). \quad (2.18)$$

Recordando la relación inversa de la transformada de Fourier (la transformada de Fourier de una función más ancha es una función más angosta), en el espacio de Fourier la separación de las funciones $\delta(\cdot)$ es menor que el ancho de la función $G(u)$, entonces el resultado es una serie de funciones de $\delta(\cdot)$ moduladas en amplitud por la función $G(u)$ (ver la Figura 2.6). La multiplicación por un $comb(\cdot)$ da un *muestreo* de la función original, y describe, por ejemplo, una copia digital de una función que se tiene en la computadora, o los valores medidos de una función en un experimento.

En realidad no podemos describir una función real como la convolución de otra función con un $comb(\cdot)$, porque ésto implica una función final infinita, ya que el $comb(\cdot)$ es infinito. Siempre tenemos que limitar o cortar nuestra función a un tamaño finito. Esto lo podemos hacer si multiplicamos con una función que es igual a 1 en algún rango de ζ y es igual a 0 fuera de este rango, es decir, multiplicamos por una función $rect(\cdot)$:

$$f(x) = \left\{ g(\zeta) \otimes comb\left(\frac{\zeta}{a}\right) \right\} rect\left(\frac{\zeta}{b}\right), \quad (2.19)$$

donde b es mayor que a y el ancho de la función $g(\cdot)$. La transformada de Fourier de esta función es:

$$\mathfrak{F}\left(\left\{ g(\zeta) \otimes comb\left(\frac{\zeta}{a}\right) \right\} rect\left(\frac{\zeta}{b}\right)\right) = \left\{ G(u) \frac{1}{a} comb(au) \right\} \otimes b sinc(bu), \quad (2.20)$$

que es la convolución de la función $sinc(\cdot)$ con una serie de funciones $\delta(\cdot)$ de amplitud variable, i.e es una replicación de la función $sinc(\cdot)$ con amplitud variable dada por la función $G(u)$ (ver la Figura 2.7). Nótese que, debido a que la función $rect(\cdot)$ nos da la separación más ancha en el espacio original, la función $sinc(\cdot)$ es la más angosta en el espacio de Fourier.
(ConvolucionCombRectxRect.m)

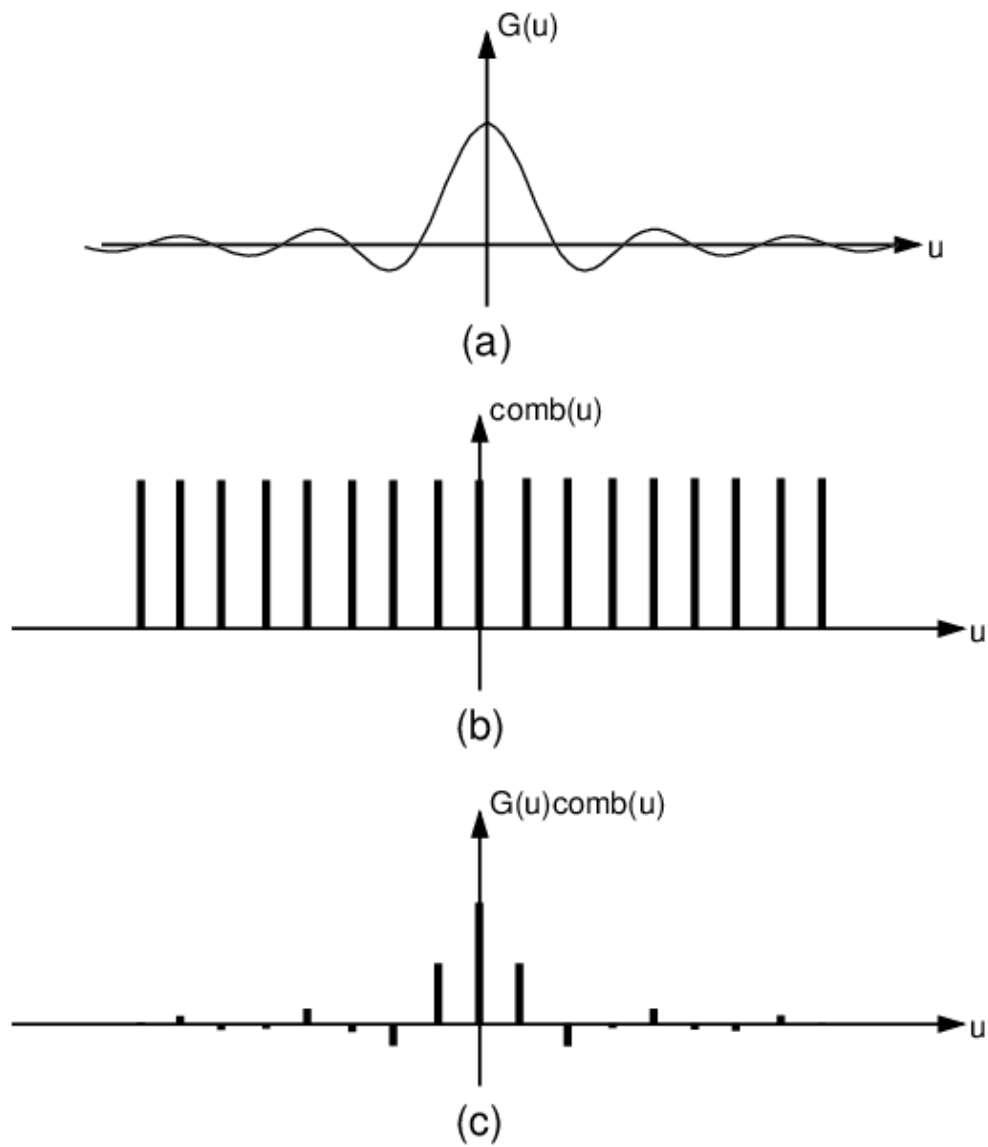


Figura 2.6: Muestreo de una función multiplicando con un $\text{comb}(\)$

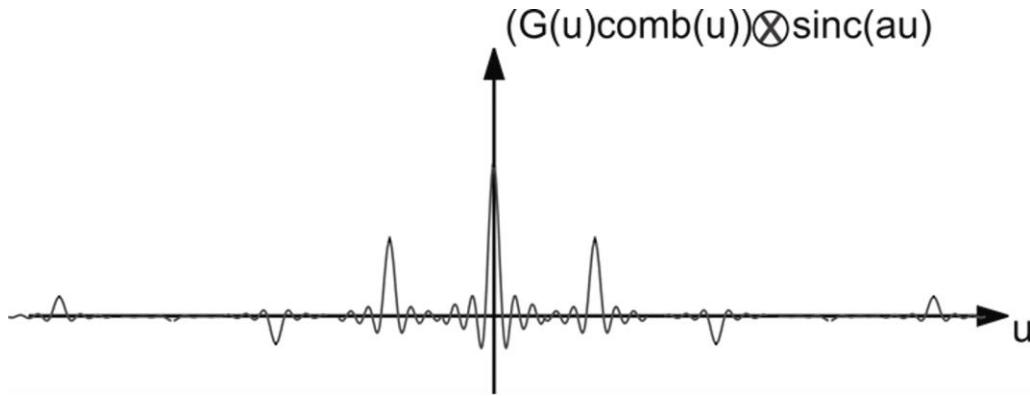


Figura 2.7: La transformada de Fourier de la función de la ecuación (2.20).

Finalmente en esta sección, un recordatorio de que las paréntesis son muy importantes en el tipo de expresión que estamos manejando. Por ejemplo

$$\left\{ \text{comb} \left(\frac{\zeta}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{\zeta}{b} \right) \right\} \otimes \text{rect} \left(\frac{\zeta}{c} \right) \neq \text{comb} \left(\frac{\zeta}{a} \right) \left\{ \text{rect} \left(\frac{\zeta}{b} \right) \otimes \text{rect} \left(\frac{\zeta}{c} \right) \right\}.$$

La expresión a la izquierda de esta ecuación es un $\text{comb}(\)$ limitado por el $\text{rect}(\)$ de ancho b , y luego la convolución con el $\text{rect}(\)$ de ancho c , que da replicación de esta función en cada posición del $\text{comb}(\)$ limitado. La función a la derecha es la convolución de dos funciones $\text{rect}(\)$, y luego la multiplicación por el $\text{comb}(\)$ es un muestreo de esta convolución. Se muestran estas dos funciones en la Figura 2.8.

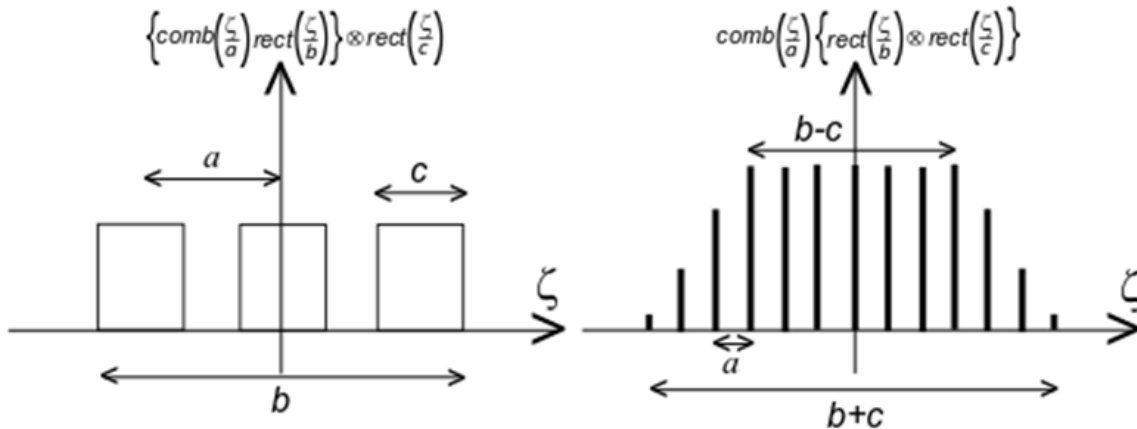


Figura 2.8: La importancia de los paréntesis en las expresiones con convolución.

A mano izquierda se gráfica la expresión $\left\{ \text{comb} \left(\frac{\zeta}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{\zeta}{b} \right) \right\} \otimes \text{rect} \left(\frac{\zeta}{c} \right)$, que es replicación de la función $\text{rect} \left(\frac{\zeta}{c} \right)$; a mano derecha se gráfica la expresión $\text{comb} \left(\frac{\zeta}{a} \right) \left\{ \text{rect} \left(\frac{\zeta}{b} \right) \otimes \text{rect} \left(\frac{\zeta}{c} \right) \right\}$, que es una modulación de la amplitud del $\text{comb} \left(\frac{\zeta}{a} \right)$

2.6 El Teorema de Muestreo

Como otro ejemplo en esta sección, veremos el teorema de muestreo (Whittaker, 1915; Shannon, 1949). En cualquier experimento no vamos a saber el comportamiento de lo que estamos midiendo para todos los valores de las variables, sólo en algunos puntos, es decir, tenemos un muestreo de la función que queremos medir. La pregunta es si es posible reconstruir la función que queremos usando los datos discretos que tenemos. Podemos escribir esta situación como:

$$g_1(x) = g(x) \text{comb}\left(\frac{x}{X}\right), \quad (2.21)$$

donde $g_1(x)$ son los datos discretos que obtenemos, $g(x)$ es la función que queremos medir y $\text{comb}(x/X)$ es la función que nos dice el muestreo de las mediciones, con una separación de X . En este momento sabemos que, para tener un buen muestreo de la función, la separación debe ser menor que el ancho de la función $g(x)$. Ahora tomamos la transformada de Fourier de esta ecuación:

$$G_1(u) = G(u) \otimes \frac{1}{X} \text{comb}(Xu), \quad (2.22)$$

y ahora, si la separación de las funciones $\delta(\cdot)$ en el espacio de Fourier es mayor que el ancho de la función $G(u)$, la función $G_1(u)$ tendrá la forma que se muestra en la Figura 2.9, con repeticiones del espectro de la función que queremos, $G(u)$ separadas por una frecuencia $1/X$ en el eje u .

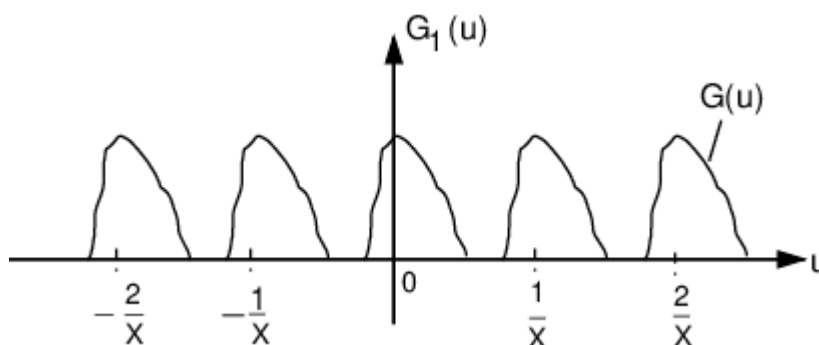


Figura 2.9: Repetición del espectro de la función deseada

Si pudiéramos separar sólo una de estas replicas del espectro de la función que queremos, podríamos hacer la transformada de Fourier inversa para obtener la función $g(x)$ que queremos. Entonces, la condición para poder reconstruir $g(x)$ es

que la separación de las funciones $\delta(\cdot)$ en la función $\text{comb}(Xu)$ debe ser mayor o igual a la diferencia entre la frecuencia mínima y la frecuencia máxima de la función $G(u)$. Escribiendo la frecuencia máxima como G_{max} y la frecuencia mínima como $-G_{max}$ para una copia del espectro (aquí suponemos que el espectro está limitado en frecuencia), el rango total de frecuencias es $2G_{max}$ y la condición para poder separar sólo una copia del espectro es:

$$\frac{1}{X} \geq 2G_{max}, \quad (2.23)$$

o

$$X \leq \frac{1}{2G_{max}}. \quad (2.24)$$

Si no se satisface esta condición las diferentes replicas de $G(u)$ se superponen y tenemos el caso de 'aliasing', que es una distorsión de la función que queremos. Veremos más de 'aliasing' más adelante. El valor de la separación de los puntos de muestreo de la ecuación (2.24) se conoce como el **límite de Nyquist**. Suponiendo que se satisface esta condición, queremos aislar sólo una de las replicas de la función $G(u)$. Esto lo podemos hacer si multiplicamos la función $G_1(u)$ con una función $\text{rect}(\cdot)$:

$$G_1(u)\text{rect}\left(\frac{u}{2G_{max}}\right) = G(u), \quad (2.25)$$

donde escogimos el ancho de la función $\text{rect}(\cdot)$ para aislar sólo la replica central de $G(u)$ es decir, va de la frecuencia G_{max} a la frecuencia $-G_{max}$. Calculando la transformada de Fourier inversa tenemos:

$$g(x) = g_1(x) \otimes 2G_{max}\text{sinc}(x2G_{max}). \quad (2.26)$$

Pero $g_1(x)$ es una serie de funciones de $\delta(\cdot)$ con amplitud variable, entonces la convolución nos da una replicación de la $\text{sinc}(\cdot)$ en las posiciones de los datos que tenemos, con estas mismas amplitudes (ver la Figura 2.10). Esto significa que reemplazando cada uno de nuestros puntos de datos con una función $2G_{max}\text{sinc}(2G_{max}x)$ con amplitud igual a la amplitud en este punto, reconstruimos exactamente la función continua $g(x)$. **(TeoremaDeMuestreoRect.m)**

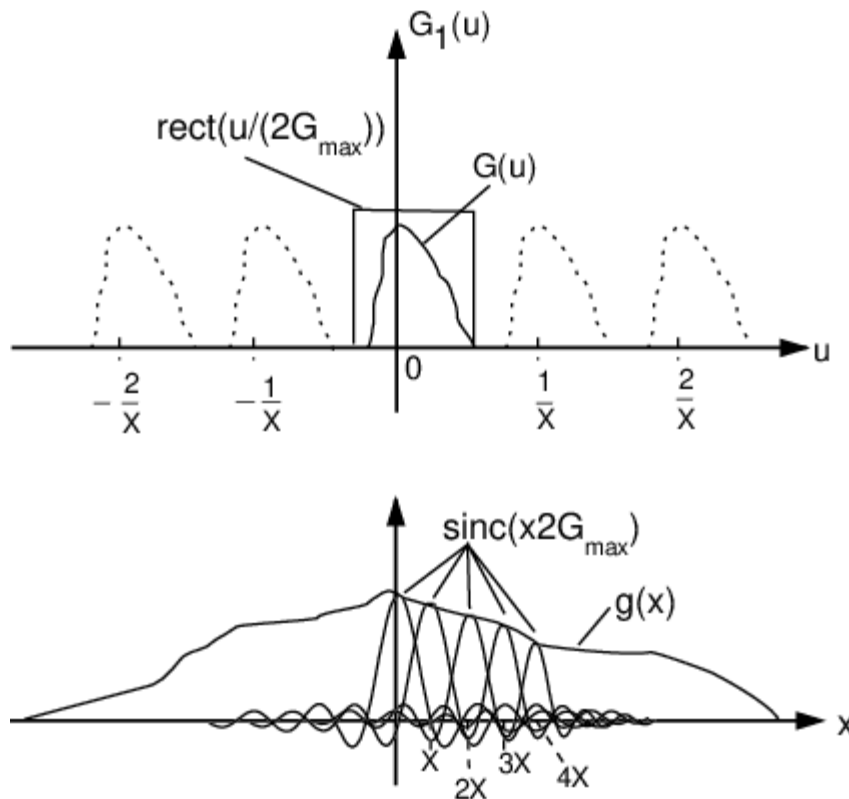


Figura 2.10: Construcción de la función original

2.7 Convolución de objetos perpendiculares

Ya vimos que la ecuación para la convolución en dos dimensiones es:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') g(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (2.27)$$

Ahora, ¿qué pasa si las dos funciones son unidimensionales?:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x) \delta(y), \\ g(x, y) &= g(x) \delta(y). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.27):

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(y') g(x - x') \delta(y - y') dx' dy', \quad (2.29)$$

que es separable en las variables:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') \delta(y - y') dy', \quad (2.30)$$

pero, por la definición de la función $\delta(\quad)$, la segunda integral a la derecha de la ecuación (2.30) es igual a $\delta(y)$, entonces:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx' \quad (2.31)$$

que es la convolución unidimensional que vimos antes. Ahora, ¿qué pasa si las dos funciones unidimensionales son perpendiculares:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x) \delta(y), \\ g(x, y) &= \delta(x) g(y). \end{aligned} \quad (2.32)$$

En este caso tenemos:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(y') \delta(x - x') g(y - y') dx' dy', \quad (2.33)$$

que, otra vez es separable en las variables:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') g(y - y') dy', \quad (2.34)$$

y usando las propiedades de la función $\delta(\quad)$, da:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = f(x)g(y). \quad (2.35)$$

Esto es, la convolución de dos funciones perpendiculares da el producto de las dos funciones.

2.8 Correlación

Otra relación que vamos a usar es la correlación, a la cual vamos a dar el símbolo $*$:

$$f(x) = g(\zeta) * h(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\zeta) h(\zeta + x) d\zeta, \quad (2.36)$$

donde $g^*(\)$ indica la conjugada compleja. Se puede mostrar que para la función de correlación:

$$g(\zeta) * h(\zeta) \neq h(\zeta) * g(\zeta). \quad (2.37)$$

La operación de correlación es muy similar a la operación de convolución, la diferencia es que en el caso de convolución hay que invertir la segunda función en el eje y en la correlación, no. Además, en la correlación, se toma la conjugada compleja de una de las funciones. Obviamente, si las dos funciones son reales y pares, la correlación y la convolución son idénticas.

Igual que para convolución, podemos sacar la transformada de Fourier de la ecuación (2.36):

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \{g(\zeta) * h(\zeta)\} e^{-i2\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\zeta) h(\zeta + x) d\zeta e^{-i2\pi ux} dx.$$

Intercambiando el orden de las integraciones:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\zeta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta + x) e^{-i2\pi ux} dx \right\} d\zeta,$$

y la integral en el parentesis es, por el teorema de corrimiento:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta + x) e^{-i2\pi u x} dx = H(u) e^{i2\pi u \zeta}, \quad (2.38)$$

que nos da:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\zeta) H(u) e^{i2\pi u \zeta} d\zeta = H(u) \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\zeta) e^{i2\pi u \zeta} d\zeta, \quad (2.39)$$

que es claramente la conjugada compleja de la transformada de Fourier de $g(\zeta)$:

$$F(u) = \mathfrak{I}(g(\zeta) * h(\zeta)) = [G(u)]^* H(u). \quad (2.40)$$

Igualmente, se puede mostrar que:

$$\mathfrak{I}([g(\zeta)]^* h(\zeta)) = G(u) * H(u). \quad (2.41)$$

Un caso especial de estas relaciones es cuando $h(\zeta) = g(\zeta)$, es decir, correlacionamos una función con sí misma. Esto se llama la autocorrelación y las relaciones de la transformada de Fourier se convierten en:

$$\mathfrak{I}(g(\zeta) * g(\zeta)) = G^*(u) G(u) = |G(u)|^2, \quad (2.42)$$

$$\mathfrak{I}(g^*(\zeta) g(\zeta)) = \mathfrak{I}(|g(\zeta)|^2) = G(u) * G(u). \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Fundamentos de Difracción

La difracción es la interacción de una onda con un obstáculo. Por ejemplo, la difracción ocurre cuando se introduce un objeto opaco entre una fuente puntual y una pantalla. En esta situación se forman zonas de luz y oscuridad en la pantalla que no son una sombra fiel del obstáculo, como se esperaría con la teoría geométrica (usando rayos) de propagación de una onda.

En este capítulo empezaremos con la teoría de Huygens-Fresnel que nos dará una idea simple de porqué ocurre la difracción y posteriormente veremos las teorías de Kirchhoff-Fresnel y de Rayleigh-Sommerfeld que son más rigurosas matemáticamente.

La difracción es un fenómeno común en todo tipo de onda, en ondas escalares como las ondas acústicas, y en ondas vectoriales como la luz. El caso vectorial es extremadamente complicado matemáticamente. Entonces, vamos a calcular para el caso más simple, que es el caso de las ondas escalares, que tienen muchas aplicaciones en difracción de la luz. En todo lo que vamos a ver, aproximaremos la difracción de la luz como un problema escalar, es decir, consideraremos sólo una componente (en una dirección) del campo eléctrico o el campo magnético y que las otras componentes se pueden tratar independientemente; no consideraremos la interacción entre diferentes componentes del campo dado por las ecuaciones de Maxwell. Esta aproximación escalar se ha mostrado que es válida si (Born y Wolf, 1980) (a) la abertura de difracción es grande comparada con la longitud de onda de la onda incidente y (b) no se observan los campos difractados muy cercanos a la abertura. Además, vamos a suponer una onda incidente monocromática. Con estas suposiciones podemos escribir el campo como:

$$V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (3.1)$$

donde $U(\mathbf{r})$ es la amplitud escalar compleja (compleja porque incluye una fase), y esta onda debe satisfacer la ecuación de onda:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

donde c es la velocidad de la luz, entonces la amplitud escalar compleja satisface la ecuación de Helmholtz,

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.3)$$

donde $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$. La intensidad escalar está dada por $I = |U(\mathbf{r})|^2$.

3.1 La Teoría de Huygens-Fresnel

El principio de Huygens nos dice como se propaga una onda; dice que “cada punto de un frente de onda actúa como una fuente secundaria de ondas esféricas. El frente de onda más adelante es la envolvente de estas ondas secundarias esféricas.” Con esta definición no hay ni interferencia ni difracción, porque estos fenómenos requieren la interacción entre las ondas secundarias esféricas. Por eso Fresnel propuso una extensión al principio de Huygens, que se conoce como el principio de Huygens-Fresnel (Born y Wolf, 1980): “cada punto de un frente de onda actúa como una fuente secundaria de ondas esféricas. Estas ondas secundarias esféricas interfieren para formar el frente de onda más adelante.” La Figura 3.1 muestra la propagación de una onda de una fuente P_S a un punto P sin una abertura, y el frente de onda en un punto intermedio.

Usando el principio de Huygens-Fresnel podemos escribir una ecuación para la contribución al campo en el punto P , $dU(P)$, de una parte infinitesimal del frente de onda dS (elemento de área del frente de onda), como se muestra en la Figura 3.1:

$$dU(P) = K(\theta)A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \frac{e^{iks}}{s} dS, \quad (3.4)$$

donde el término A es la amplitud de la fuente, e^{ikr_0}/r_0 es la onda esférica que sale de la fuente y llega a una distancia r_0 , y e^{iks}/s es la onda esférica secundaria que sale del punto del frente de onda y llega al punto de detección P . El factor $K(\theta)$ es un factor de inclinación que es necesario para limitar la propagación de la luz a la dirección de adelante; la luz no se propaga de regreso a la fuente.

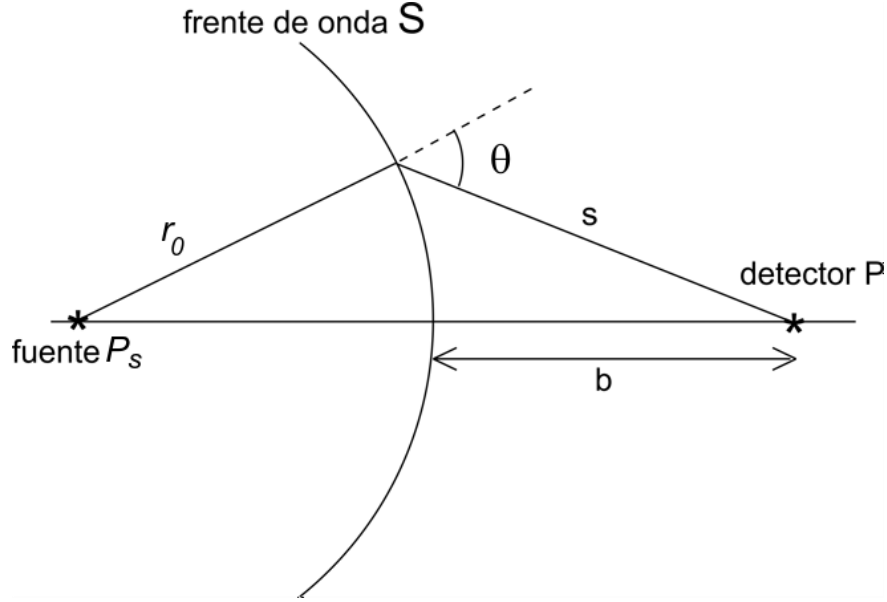


Figura 3.1: Geometría para el principio de Huygens-Fresnel.

Fresnel supuso que el factor de inclinación tenía la forma:

$$K(\theta) = \begin{cases} \text{máximo} & \theta = 0 \\ 0 & \theta = \pi/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

donde θ depende de la posición sobre el frente de onda. Para calcular el campo total en el punto P tenemos que integrar sobre todos los puntos del frente de onda intermedio:

$$U(P) = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \int_S K(\theta) \frac{e^{iks}}{s} dS. \quad (3.6)$$

Para evaluar esta integral, utilizamos la construcción de las zonas de Fresnel, como se muestra en la Figura 3.2 (Born y Wolf, 1980). Aquí dividimos el frente de onda en segmentos que están a distancias: $b, b + \lambda/2, b + 2\lambda/2, b + 3\lambda/2, \dots$, del punto de detección, y suponemos que, como los ángulos son pequeños, el factor

de inclinación en una zona es constante $K(\theta) = K_j$ en la zona j . De la Figura 3.2, con la ley de los cosenos, se puede escribir:

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\chi, \quad (3.7)$$

y derivando obtenemos:

$$\frac{ds}{d\chi} = \frac{r_0(r_0 + b)}{s} \sin\chi, \quad (3.8)$$

$$s \, ds = r_0(r_0 + b) \sin\chi \, d\chi. \quad (3.9)$$

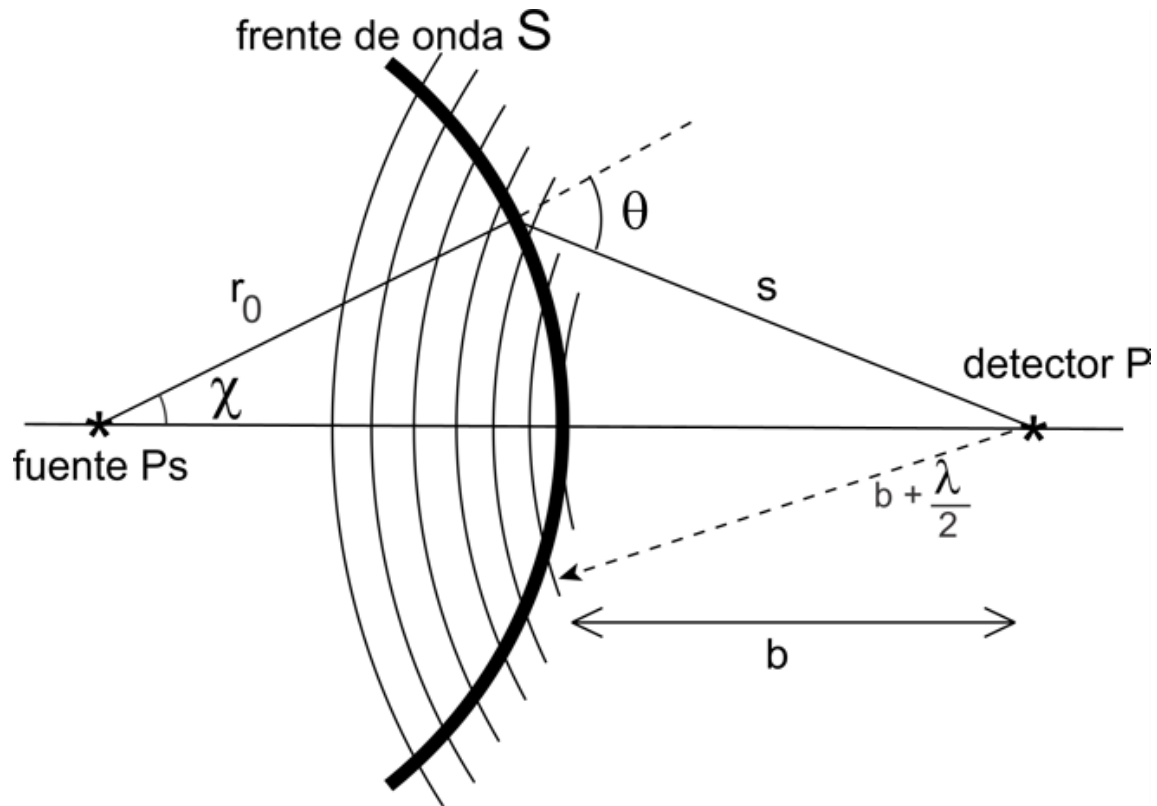


Figura 3.2: Geometría de las zonas de Fresnel.

Ahora, se puede escribir $dS = r_0^2 \sin\chi \, d\chi d\phi$, donde ϕ es el ángulo azimutal en la posición sobre el frente de onda. Así, se puede escribir:

$$dS = \frac{r_0}{(r_0 + b)} s \, ds d\phi, \quad (3.10)$$

y podemos escribir la contribución al campo difractado de la zona j como:

$$U_j(P) = 2\pi A \frac{e^{ikr_0}}{(r_0 + b)} K_j \int_{b+(j-1)\frac{\lambda}{2}}^{b+j\frac{\lambda}{2}} e^{iks} ds, \quad (3.11)$$

porque el factor de inclinación es constante dentro de cada zona. Calculando la integral nos da:

$$U_j(P) = 2\pi A \frac{e^{ikr_0}}{(r_0 + b)} K_j \left(-\frac{i}{k} e^{ikb} e^{ikj\lambda/2} [1 - e^{-ik\lambda/2}] \right), \quad (3.12)$$

que se puede simplificar a:

$$U_j(P) = 2i\lambda(-1)^{j+1} A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{(r_0 + b)} K_j. \quad (3.13)$$

Aquí se puede ver que la contribución de las zonas se va alternando entre positiva y negativa y que el campo total en el detector es:

$$U_j(P) = 2i\lambda(-1)^{j+1} A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{(r_0 + b)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} K_j, \quad (3.14)$$

donde la suma es sobre las partes del frente de onda que contribuyen al campo en el detector, es decir, que no son bloqueados por una abertura (aunque en este caso, en la Figura 3.2, no hay abertura).

Podemos estimar la suma sobre los factores de inclinación: primero escribimos la suma como:

$$\Sigma = K_1 - K_2 + K_3 - \dots + (-1)^{n+1} K_n$$

$$\Sigma = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots$$

$$\dots + \begin{cases} K_n/2 & \text{n impar} \\ K_{n-1}/2 - K_n & \text{n par} \end{cases}, \quad (3.15)$$

y suponemos que la variación en el factor de inclinación entre zonas consecutivas es muy pequeña, para poder aproximar los factores en los paréntesis en esta ecuación iguales a cero y:

$$\Sigma \approx \begin{cases} K_1/2 + K_n/2 & \text{n impar} \\ K_1/2 - K_n/2 & \text{n par} \end{cases}, \quad (3.16)$$

y el campo en P es aproximadamente :

$$U(P) = i\lambda(K_1 \pm K_n)A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{(r_0+b)}. \quad (3.17)$$

Para el caso de la Figura 3.2 el valor máximo de n es cuando el rayo s es tangente al frente de onda, pero en este caso, por definición de Fresnel, el factor de inclinación $K_n = 0$ (porque el cambio del ángulo de propagación es igual a 90°). En este caso:

$$U(P) = i\lambda K_1 A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{(r_0+b)}, \quad (3.18)$$

pero aquí sabemos que el campo en el punto P es debido solamente a la propagación de la onda entre los puntos P_S y P , porque no hay abertura, entonces:

$$U(P) = A \frac{e^{ik(r_0+b)}}{(r_0+b)}, \quad (3.19)$$

por lo cual, igualando las ecuaciones (3.18) y (3.19):

$$K_1 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda}. \quad (3.20)$$

En general, entonces:

$$K(\theta) = -\frac{i}{\lambda} K'(\theta). \quad (3.21)$$

Aquí el factor $1/\lambda$ significa que las ondas secundarias tienen una amplitud $1/\lambda$ veces la amplitud de la onda primaria, y el factor i es un cambio de fase de $\pi/2$ entre las ondas primarias y secundarias. Pero esto no significa que la onda va cambiando de amplitud y fase en el espacio libre, sólo es una consecuencia del modelo que adoptamos para describir la propagación de la onda, no tiene ningún sentido físico.

Ahora, si suponemos que metemos una abertura en la posición del frente de onda intermedio y que el tamaño de esta abertura es pequeño comparado con la distancia r_0 , entonces podemos aproximar a la onda primaria como constante adentro de la abertura y el campo en el punto P es:

$$U(P) = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\substack{\text{abertura} \\ \text{abierta}}} K(\theta) \frac{e^{iks}}{s} dS, \quad (3.23)$$

donde la integral es sobre la parte abierta de la abertura. Ésta es la **ecuación de difracción de Huygens-Fresnel**. Compararemos éste resultado con el resultado de teorías más rigurosas matemáticamente.

3.2 Teorema de Difracción de Kirchhoff

Primeramente, definimos el teorema de Green: si $U(P)$ y $G(P)$ son dos funciones de posición, y si las primeras y segundas derivadas de estas dos funciones son continuas dentro de un volumen V , entonces el teorema de Green relaciona una integral sobre una superficie S que envuelve el volumen V , con una integral sobre el volumen V (Born y Wolf, 1980):

$$\begin{aligned}
& \iiint_V (G(P)\nabla^2 U(P) - U(P)\nabla^2 G(P))dV \\
&= \iint_S \left(G(P)\frac{\partial U(P)}{\partial n} - U(P)\frac{\partial G(P)}{\partial n} \right) dS,
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla$ y $\mathbf{n}$ es la normal a la superficie S en la dirección fuera del volumen V . Si las dos funciones también satisfacen la ecuación de Helmholtz, ecuación (3.3):

$$\nabla^2 U(P) + k^2 U(P) = 0, \tag{3.25}$$

$$\nabla^2 G(P) + k^2 G(P) = 0, \tag{3.26}$$

y multiplicamos la ecuación (3.25) por $G(P)$ y ecuación (3.26) por $U(P)$ para obtener:

$$G(P)\nabla^2 U(P) + k^2 U(P)G(P) = 0, \tag{3.27}$$

$$U(P)\nabla^2 G(P) + k^2 U(P)G(P) = 0, \tag{3.28}$$

y tomando la diferencia de estas dos ecuaciones obtenemos:

$$G(P)\nabla^2 U(P) - U(P)\nabla^2 G(P) = 0, \tag{3.29}$$

y el teorema de Green, la ecuación (3.24), queda como:

$$\iint_S \left(G(P)\frac{\partial U(P)}{\partial n} - U(P)\frac{\partial G(P)}{\partial n} \right) dS = 0.
\tag{3.30}$$

Aquí vamos a tomar a la función $U(P)$ como la amplitud escalar compleja de la luz; la función $G(P)$ se llama la función de Green y es cualquier función que satisface la ecuación de Helmholtz y las condiciones impuestas por el teorema de Green. Es importante que noten que no hay una solución única para la función de Green. Entonces, la ecuación (3.30) es una condición que debe satisfacer el campo $U(P)$.

Queremos calcular el campo $U(P)$ en un punto adentro de una superficie cerrada S (ver la Figura 3.3) cuando conocemos los campos en todos los puntos de esta superficie (veremos después cómo usar esta idea en difracción). Vamos a usar, como Kirchhoff, la función de Green como una onda esférica en el espacio libre:

$$G(P_s) = \frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}}, \quad (3.31)$$

donde r_{0s} es la distancia entre el punto P_0 , un punto dentro del volumen V , y el punto P_s , en la superficie S . Ésta función tiene una discontinuidad en la posición P_0 , donde $r_{0s} = 0$ entonces, para satisfacer las condiciones del teorema de Green, tenemos que excluir este punto de la integral. Esto lo podemos hacer con una esfera S' alrededor del punto P_0 (ver la Figura 3.3) de radio ε para excluir este punto de la integral, y aplicamos el teorema de Green a la superficie total $S + S'$:

$$\iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS + \iint_{S'} \left(G \frac{\partial U}{\partial n'} - U \frac{\partial G}{\partial n'} \right) dS' = 0, \quad (3.32)$$

donde no hemos escrito las variables de posición para ahorrar espacio.

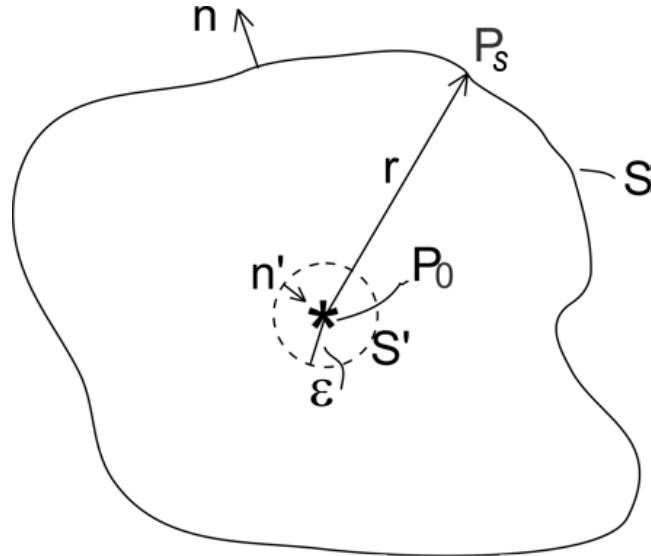


Figura 3.3: Geometría para el teorema de Green

Después tomaremos el límite de $\varepsilon \rightarrow 0$ para excluir solamente el punto P_0 del volumen. La derivada normal de la función de Green se puede escribir como:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla G = |\nabla G| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}), \quad (3.33)$$

donde la notación $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ significa el ángulo entre los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}$ (ver la Figura 3.4).

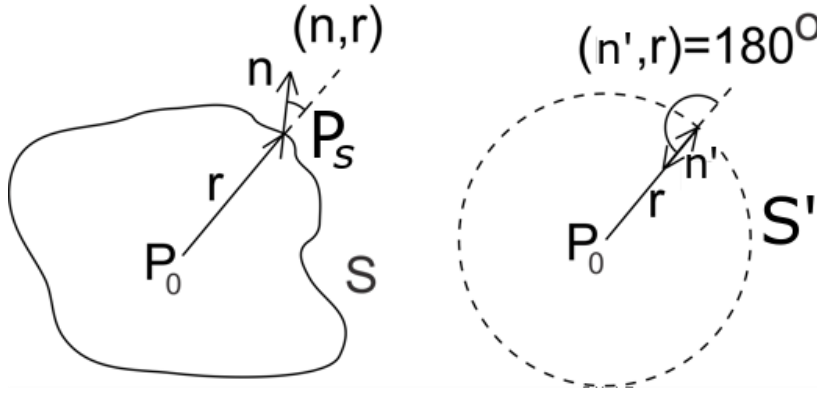


Figura 3.4: El ángulo entre los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{r}$

Se puede calcular que, para $G = e^{ikr}/r$:

$$\nabla G = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.34)$$

Para la superficie S' , $r = \varepsilon$ y $(\mathbf{n}', \mathbf{r}) = \pi$ siempre (ver la figura 3.4). Entonces $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{r}) = -1$, y el término dS' es igual a $\varepsilon^2 d\Omega$, donde Ω es el ángulo sólido. La integral sobre S' se convierte en:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S'} \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n'} - U \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \varepsilon^2 d\Omega = -4\pi U(P_0). \quad (3.35)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (3.32), obtenemos:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - U(r_s) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \right\} \right) dS, \quad (3.36)$$

donde r_s es un punto sobre la superficie. Esta ecuación es el **teorema de difracción de la integral de Helmholtz-Kirchhoff**. Para poder usar esta fórmula tenemos que conocer el campo y su derivada normal en todos los puntos de una superficie cerrada S .

La Figura 3.5 muestra cómo usar la ecuación (3.36) para el problema de difracción. Escogemos la superficie S como se indica en la Figura 3.5: una parte esférica de radio R muy grande centrada en el punto de observación P_0 , S_1 , y otras tres partes, S_2 , S_3 , y S_4 , en la abertura (que no necesariamente sea plano), S_3 en la parte abierta y S_2 y S_4 sobre la parte cerrada de la pantalla, que suponemos que absorbe perfectamente la luz incidente. Ahora podemos dividir la integral sobre S en cuatro integrales:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_1} dS_1 + \iint_{S_2} dS_2 + \iint_{S_3} dS_3 + \iint_{S_4} dS_4 \right\} \left(\frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - U(r_s) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \right) \right). \quad (3.37)$$

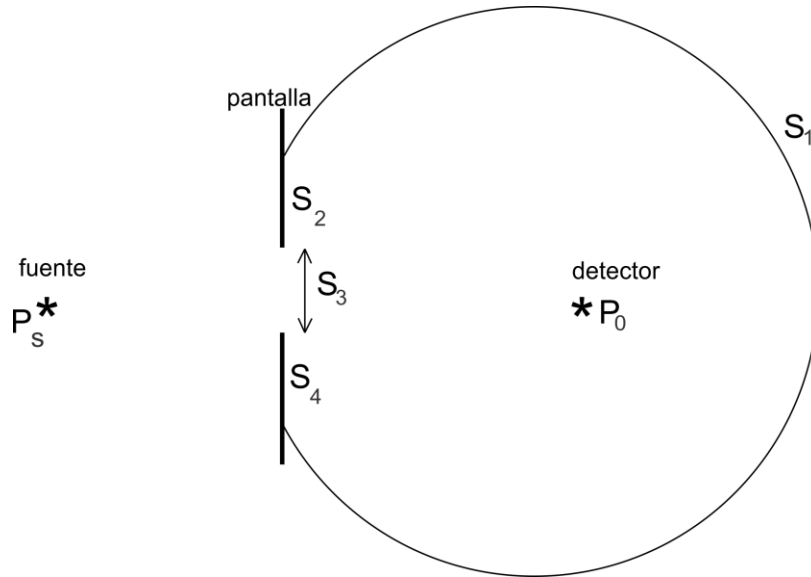


Figura 3.5: El teorema de Helmholtz-Kirchhoff aplicado a difracción.

Considerando primeramente la integral sobre la parte S_1 , tenemos que la función de Green es $G = e^{ikR}/R$, que $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{R}) = 1$, y que la derivado normal es:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \approx ik \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \text{si } R \rightarrow \infty,$$

y la integral sobre S_1 tiene el valor:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} dS_1 \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - ikU(r_s) \right),$$

pero podemos escribir dS_1 como $R^2 d\Omega$, donde Ω otra vez significa ángulo sólido:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} d\Omega e^{ikR} \left(\frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - ikU(r_s) \right) R. \quad (3.38)$$

Esta integral tiende a cero si se satisface la condición:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - ikU(r_s) \right) R = 0. \quad (3.39)$$

Esta condición se llama la condición de radiación de Sommerfeld y está satisfecha si $U(r_s)$ disminuye al menos tan rápido como una onda esférica (Born y Wolf, 1980). Suponemos que esta condición está satisfecha para permitirnos tomar la integral sobre S_1 igual a cero.

Ahora nos queda:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \iint_{S_2} dS_2 + \iint_{S_3} dS_3 + \iint_{S_4} dS_4 \right\} \left(\frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - U(r_s) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \right\} \right). \quad (3.40)$$

Para seguir más adelante necesitamos los valores del campo y su derivada normal sobre las superficies S_2 , S_3 , y S_4 . Por eso utilizaremos las condiciones en la frontera de Kirchhoff que dice que, sobre S_2 y S_4 la pantalla bloquea toda la luz incidente entonces:

$$U = \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad \text{sobre } S_2 \text{ y } S_4, \quad (3.41)$$

y que sobre la parte S_3 el campo y su derivada normal toman los valores que tomarían sobre la misma superficie, pero sin la presencia de la abertura, es decir, igual al campo incidente U_i y su derivada normal:

$$U = U_i, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U_i}{\partial n}, \quad \text{sobre } S_3. \quad (3.42)$$

Con estas condiciones en la frontera estamos suponiendo que no hay efectos de las orillas de la abertura sobre los campos de adentro hacia afuera de esta abertura. Esto supone que la abertura es grande comparada con la longitud de onda de la luz incidente; pero ésto es igual a unas de las condiciones necesarias para usar la teoría escalar, entonces no estamos haciendo ninguna aproximación adicional aquí.

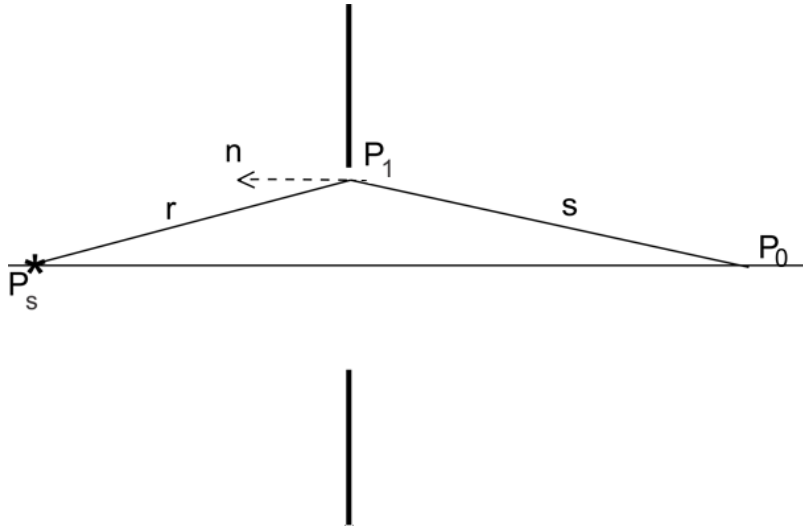


Figura 3.6: Geometría para la difracción

Ahora, la expresión para el campo difractado queda como:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_3} \left(\frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \frac{\partial U(r_s)}{\partial n} - U(r_s) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{e^{ikr_{0s}}}{r_{0s}} \right\} \right) dS_3. \quad (3.43)$$

Para continuar se necesitan los valores del campo $U(r_s)$ y su derivada normal $\partial U(r_s)/\partial n$ sobre la superficie S_3 .

Si iluminamos con una fuente puntual P_s de amplitud A , como se muestra en la Figura 3.6, y si suponemos que las distancias a la fuente y al punto de observación son muy grandes comparadas con la longitud de onda, $r, s \gg \lambda$:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, s) \left(ik - \frac{1}{s} \right) \frac{e^{iks}}{s} \approx \cos(\mathbf{n}, s) ik \frac{e^{iks}}{s}, \quad (3.44)$$

$$U_i = A \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial n} \approx \cos(\mathbf{n}, r) ik \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3.45)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.41), (3.42), (3.44), (3.45) en la ecuación (3.40) obtenemos:

$$U(P_0) = \frac{iA}{\lambda} \iint_{S_3} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} \left\{ \frac{\cos(\mathbf{n}, r) - \cos(\mathbf{n}, s)}{2} \right\} dS_3, \quad (3.46)$$

que es la **ecuación de difracción de Fresnel-Kirchhoff**.

Para comparar este resultado con la ecuación de Huygens-Fresnel, la ecuación (3.23), escribiremos la ecuación (3.46) en una forma diferente. Si $r \gg \lambda$, el término e^{ikr}/r es constante en toda la abertura abierta y lo podemos sacar de la integral. Además, refiriéndonos a la Figura 3.7:

$$\cos(\mathbf{n}, r) \approx \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos(\mathbf{n}, s) \approx \cos(\theta),$$

y la ecuación (3.46) queda como:

$$U(P_0) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_S \frac{e^{iks}}{s} \left\{ \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \right\} dS, \quad (3.47)$$

donde hemos quitado el subíndice 3 de la superficie entendiendo que la integral es sobre la parte abierta de la abertura.

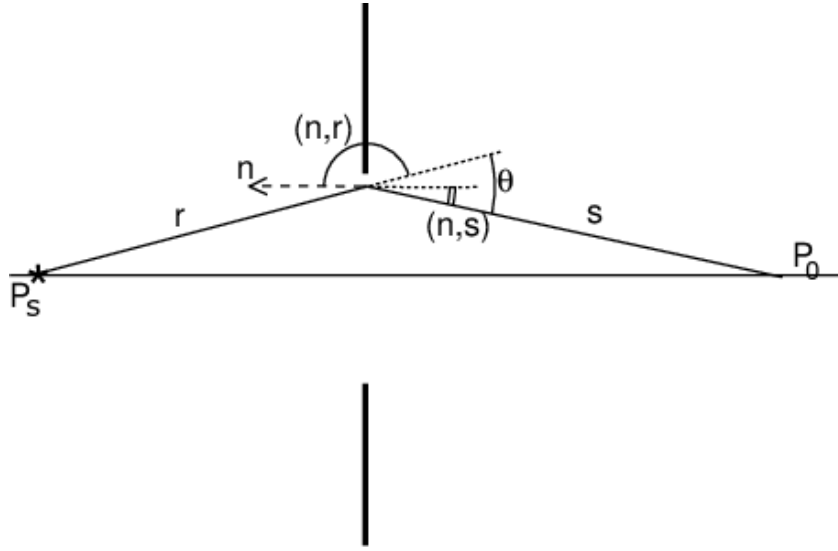


Figura 3.7: Definición de ángulos para la difracción

Comparando la ecuación (3.47) con la ecuación (3.23), vemos que son iguales si:

$$K(\theta) = -\frac{i}{\lambda} \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right). \quad (3.48)$$

Esto es, si la función de inclinación tiene los valores:

$$K(\theta) = \begin{cases} -i/\lambda & \theta = 0 \\ -i/2\lambda & \theta = \pi/2 \end{cases}, \quad (3.49)$$

que está en desacuerdo con las suposiciones de Fresnel (el supuso que $K(\theta) = 0$ en $\theta = \pi/2$). Pero esto es un error sólo en el factor de inclinación; el modelo de las ondas secundarias de Huygens-Fresnel es un buen modelo, y siempre podemos pensar en él cuando estamos considerando difracción. Otro punto interesante aquí es que aparece el factor de $-i/\lambda$ en el factor de inclinación en la ecuación de difracción de Fresnel-Kirchhoff. Esto significa que este factor es una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell.

Usando la ecuación (3.46) se pueden mostrar dos teoremas generales e importantes sobre difracción.

3.3 Teorema de la Reciprocidad de Helmholtz

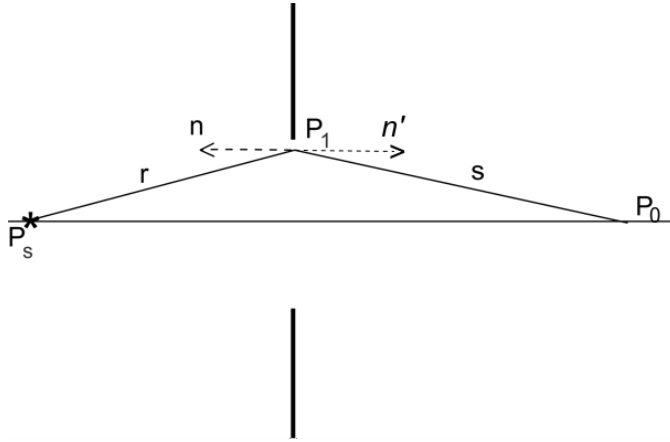


Figura 3.8: Geometría para el principio de reciprocidad

Tenemos que el campo en un punto P_0 debido a una fuente puntual en el punto P_s está dado por la ecuación (3.46). Ahora, si invertimos la geometría para tener una fuente puntual en el punto P_0 y detectamos en el punto P_s , la ecuación de difracción de Fresnel-Kirchhoff queda como:

$$U(P_0) = \frac{iA}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} \left\{ \frac{\cos(\mathbf{n}', s) - \cos(\mathbf{n}', r)}{2} \right\} dS, \quad (3.50)$$

pero $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ (ver la Figura 3.8), entonces:

$$U(P_0) = \frac{iA}{\lambda} \iint_{S_3} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} \left\{ \frac{\cos(\mathbf{n}, r) - \cos(\mathbf{n}, s)}{2} \right\} dS_3, \quad (3.51)$$

es decir, igual que la ecuación (3.46). Esto significa que una fuente puntual en P_S tiene el mismo efecto en el punto P_0 que una fuente puntual de la misma amplitud en P_0 tiene en el punto P_S . Esto es **el teorema de reciprocidad de Helmholtz** (Born y Wolf, 1980; Kong, 2005).

3.4 Principio de Babinet

Sea $U_1(P_0)$ el campo en el punto de observación P_0 en el patrón de difracción de una pantalla con abertura Σ , y $U_2(P_0)$ el campo en el mismo punto de observación y con la misma fuente, pero con la abertura Σ' que es la abertura complementaria a la abertura Σ , es decir, donde Σ está abierta, Σ' bloquea la luz, y donde Σ bloquea la luz Σ' la deja pasar. Sea $U_3(P_0)$ el campo en el punto P_0 con la misma fuente cuando no hay ninguna abertura. Por la forma de la ecuación de difracción de Fresnel-Kirchhoff, que es una integral sobre la parte abierta de la abertura, estos tres campos están relacionados como (Born y Wolf, 1980; Hecht, 1998):

$$U_3(P_0) = U_1(P_0) + U_2(P_0) \quad (3.52)$$

Esta ecuación es **el principio de Babinet**, y trae consecuencias interesantes.

Por ejemplo, si en un patrón de difracción, el punto de observación es tal que $U_1(P_0) = 0$, entonces de la ecuación (3.52) queda como $U_3(P_0) = U_2(P_0)$ que significa que la amplitud (y por consecuencia la intensidad) difractada en el mismo punto de observación con la abertura complementaria es igual a la amplitud difractada en el mismo punto si no hay abertura.

Otro ejemplo es el caso cuando $U_3(P_0) = 0$, cuando $U_1(P_0) = -U_2(P_0)$ que significa que las intensidades en los patrones de difracción de una abertura y su abertura complementaria son iguales donde la amplitud (intensidad) en el patrón de difracción sin abertura es cero. Un ejemplo de este último caso es cuando se ilumina una abertura con un haz láser y se observa la intensidad en una pantalla. Sin abertura la luz que llega a la pantalla es concentrada en una zona pequeña donde llega el haz, fuera de esta zona no hay luz. Entonces fuera de esta zona pequeña los patrones de difracción de una abertura (e.g. una rendija) y su abertura complementaria (e.g. un pelo) son idénticos, y conociendo el patrón de difracción de una de las aberturas, automáticamente se conoce el patrón de difracción de la otra, fuera de la zona central del haz láser.

3.5 La Ecuación de Rayleigh-Sommerfeld

Para derivar la ecuación de difracción de Fresnel-Kirchhoff, escogimos la función de Green $G = e^{ikr}/r$ que es una onda esférica. Como consecuencia de esta función de Green requeríamos las condiciones en la frontera del campo y su derivada normal sobre las partes cerradas de la abertura S_2 y S_4 . Se puede mostrar que si $U = 0$ y $\partial U/\partial n = 0$ sobre una curva finita, entonces, porque esta función tiene que satisfacer la ecuación de Helmholtz, $U = 0$ y $\partial U/\partial n = 0$ en todo el espacio. La ecuación de difracción de Fresnel-Kirchhoff no es auto-consistente, una consecuencia de esto es que si el punto de observación se mueve hacia la abertura (que es en contra de una de las aproximaciones necesarias para usar la teoría escalar) no se recuperan los valores del campo que usamos como condiciones en la frontera. Una nota importante aquí es que esto no significa que la ecuación de Fresnel-Kirchhoff no de resultados útiles y precisos, resultados de experimentos (díficiles) están de acuerdo con los resultados de esta teoría.

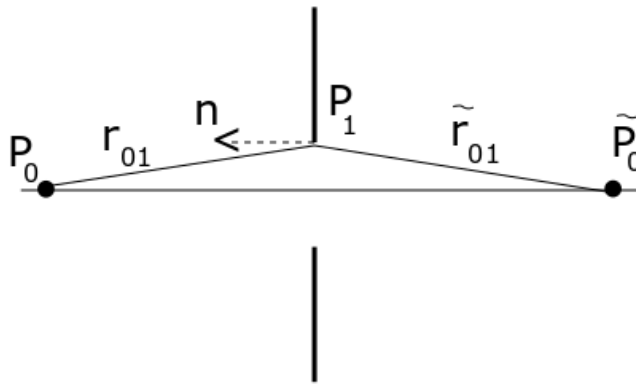


Figura 3.9: Geometría para la teoría de Rayleigh-Sommerfeld

La teoría de Rayleigh-Sommerfeld (Goodman, 1996) quita la necesidad de definir condiciones en la frontera para el campo y su derivada simultáneamente, utilizando una función de Green alternativa. La Figura 3.9 muestra la construcción para esta función de Green. Tenemos una abertura plana (no teníamos este requerimiento antes) y dos fuentes, una en el punto P_0 y la otra en la posición de la imagen de este punto en un espejo en el plano de la abertura, el punto $\widetilde{P}_0$. Suponemos que la fuente en la posición $\widetilde{P}_0$ está oscilando 180° fuera de fase con respecto a la fuente en la posición P_0 . La contribución en un punto de observación de estas dos fuentes es:

$$G_-(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ik\widetilde{r}_{01}}}{\widetilde{r}_{01}}, \quad (3.53)$$

donde $\widetilde{r_{01}}$ es la distancia entre el punto $\widetilde{P_0}$ y el punto P_1 . Obviamente, esta función satisface la ecuación de Helmholtz, que es una de las condiciones sobre la función de Green para este problema. Con esta función de Green hemos perdido el sentido físico del problema que teníamos con una función de Green igual a una onda esférica, pero esta nueva formulación del problema es igual de válida matemáticamente. La derivada normal de esta función de Green es:

$$\frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, r_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \cos(\mathbf{n}, \widetilde{r_{01}}) \left(ik - \frac{1}{\widetilde{r_{01}}} \right) \frac{e^{ik\widetilde{r_{01}}}}{\widetilde{r_{01}}}, \quad (3.54)$$

y debido a que $r_{01} = \widetilde{r_{01}}$ y que $\cos(\mathbf{n}, r_{01}) = -\cos(\mathbf{n}, \widetilde{r_{01}})$ para un punto sobre la abertura plana, entonces

$$G_-(P_1) = 0, \quad \frac{\partial G_-(P_1)}{\partial n} = 2\cos(\mathbf{n}, r_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}, \quad (3.55)$$

y si sustituimos estas ecuaciones en la ecuación (3.40) y suponemos que la distancia r_{01} es muy grande comparada con la longitud de onda, obtenemos

$$U(P_0) = -\frac{i}{\lambda} \left\{ \iint_{S_2} dS_2 + \iint_{S_3} dS_3 + \iint_{S_4} dS_4 \right\} \left(U(r_s) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\mathbf{n}, r_{01}) \right) \quad (3.56)$$

Finalmente, si aplicamos las condiciones en la frontera de Kirchhoff, pero ahora sólo para el campo U :

$$\begin{aligned} U &= 0 && \text{sobre } S_2 \text{ y } S_4, \\ U &= U_i && \text{sobre } S_3, \end{aligned}$$

e iluminamos con una fuente puntual en la posición P_2 , $U_i(r_1) = Ae^{ikr_{21}}/r_{21}$, obtenemos:

$$U_I(P_0) = -\frac{iA}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} \cos(\mathbf{n}, r_{01}) dS, \quad (3.57)$$

que es la **ecuación de difracción de Rayleigh-Sommerfeld de tipo I**. La ecuación de tipo II se obtiene utilizando la función de Green (que es igual de válida):

$$G_+(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} + \frac{e^{ik\widetilde{r}_{01}}}{\widetilde{r}_{01}}, \quad (3.58)$$

que da la ecuación de difracción:

$$U_{II}(P_0) = \frac{iA}{\lambda} \iint_S \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} \cos(\mathbf{n}, r_{21}) dS. \quad (3.59)$$

Se puede mostrar que las dos ecuaciones de difracción de Rayleigh-Sommerfeld son autoconsistentes, si se mueve el punto de observación cerca de la abertura se recuperan los valores del campo o del derivada normal de las condiciones en la frontera.

La teoría de Rayleigh-Sommerfeld da dos soluciones, U_I y U_{II} y la solución de Fresnel Kirchhoff es simplemente $U = 1/2 (U_I + U_{II})$. En general $U \neq U_I \neq U_{II}$, pero todavía no sabemos cual de las tres formulaciones es la más precisa, debido a problemas experimentales (una pantalla que absorbe toda la luz que llega, una abertura suficientemente grande para evitar efectos de los bordes, entre otros).

3.6 Espectro de Ondas Planas

En la derivación de las ecuaciones de difracción de Huygens-Fresnel, Fresnel-Kirchhoff y de Rayleigh-Sommerfeld supusimos que la onda incidente era una onda esférica que venía de una fuente puntual. Pero en general la onda incidente puede tener otra forma, e.g. el modo transversal fundamental en el haz de un láser tiene la forma de un haz Gaussiano para el campo (Yariv, 1985):

$$U_i(r, z) = A \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{\left\{ -i[kz - \eta(z)] - r^2 \left(\frac{1}{\omega^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right\}}, \quad (3.60)$$

donde r es la coordenada radial en la sección transversal del haz, ω_0 es el ancho mínimo del haz (el ancho donde la amplitud es e^{-1} de su valor en el eje en $z = z_0$), a veces se llama este ancho la cintura del haz, $\omega(z)$ es el ancho en la posición z ,

el parámetro $\eta(z)$ es un parámetro de fase que varía como $\tan^{-1}(z/z_0)$ y $R(z)$ es el radio de curvatura del frente de onda como función de z . La variación $U_i(r, z) \propto e^{-r^2/X}$ da el nombre de haz Gaussiano. Los modos de orden más alto son más complicados porque tienen una variación de la amplitud en la dirección radial. Además, dependiendo de la geometría del láser, se puede generar modos de Hermite que tienen variaciones en el ángulo azimutal en forma de funciones de Hermite, y puede haber más que un modo transversal oscilando al mismo tiempo. Entonces la pregunta es, ¿cómo podemos calcular el patrón de difracción de alguna abertura con estos haces, o cualquier haz con estructura complicada, incidentes sobre la abertura? Si simplemente sustituimos las expresiones para los haces en la integral de difracción no vamos a poder sacar un resultado analítico, tendríamos que usar métodos numéricos para resolver el problema. Pero hay otra forma de atacar el problema, usando la transformada de Fourier.

Si en un plano, que designamos $z = 0$, tenemos una distribución de amplitud eléctrica $U_0(x, y)$, podemos tomar la transformada de Fourier en dos dimensiones de esta distribución para obtener (Goodman, 1996):

$$A_0(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy, \quad (3.61)$$

y la transformada inversa de Fourier:

$$U_0(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv. \quad (3.62)$$

Esta última ecuación la podemos interpretar como una suma de funciones $e^{i2\pi(ux+vy)}$ con pesos de $A_0(u, v) du dv$.

Ahora, la función:

$$e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)},$$

representa una onda plana propagándose en la dirección (α, β, γ) y con $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, ver la Figura 3.10. En el plano $z = 0$ la función de una onda plana tiene la forma $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)}$ que significa que las funciones elementales que tenemos en la expansión de la onda $U_0(x, y)$ son ondas planas si:

$$\alpha = \lambda u, \quad \beta = \lambda v, \quad \gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 u^2 - \lambda^2 v^2},$$

y las amplitudes de estas ondas planas en la expansión están dadas por:

$$A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) \frac{d\alpha}{\lambda} \frac{d\beta}{\lambda}.$$

Así tenemos el **espectro angular** de $U_0(x, y)$:

$$A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) e^{-i2\pi \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right)} dx dy. \quad (3.63)$$

Entonces, podemos escribir cualquier onda como una suma de ondas planas; podemos calcular la difracción para cada una de estas ondas planas; y sumar los patrones de difracción obtenidos, con los pesos correspondientes (la función $A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right)$) para obtener el patrón de difracción de la onda original.

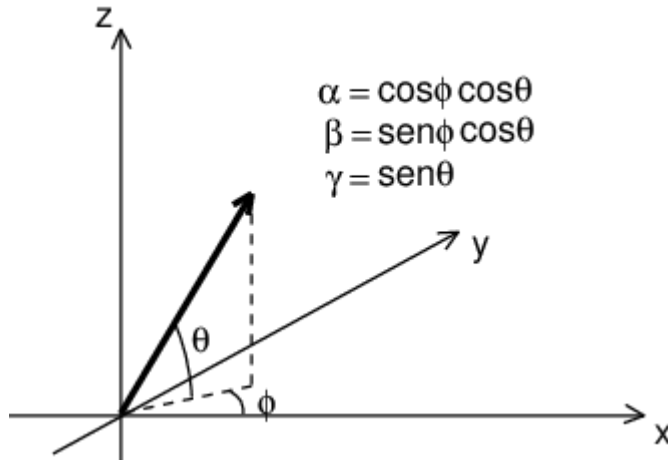


Figura 3.10: Definición de los ángulos para el espectro angular.

Por ejemplo: propagación en el espacio libre; queremos calcular la distribución del campo eléctrico en un plano z, dado que la distribución en el plano $z = 0$ es $A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right)$. La ecuación (3.63) da el espectro angular de la distribución del campo eléctrico, y en general podemos expresar el campo como:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_z \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) e^{i2\pi \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right)} \frac{d\alpha}{\lambda} \frac{d\beta}{\lambda}, \quad (3.64)$$

y la función $U(x, y, z)$ tiene que satisfacer la ecuación de Helmholtz. Sustituyendo la ecuación (3.64) en la ecuación de Helmholtz, cada onda plana en la expansión de la función $U(x, y, z)$ tiene que satisfacer la ecuación de Helmholtz $\nabla^2 U + k^2 U = 0$ (porque son ondas planas), dando:

$$\frac{d^2}{dz^2} A_z \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A_z \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = 0, \quad (3.65)$$

donde $\frac{2\pi}{\lambda} \gamma$ es el número de onda en la dirección z . Esta ecuación diferencial tiene una solución:

$$A_z \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}}. \quad (3.66)$$

Si $(\alpha^2 + \beta^2) < 1$ la componente tiene un cambio de fase que depende de la dirección de propagación (depende de la distancia entre los dos planos en una dirección γ), y si $(\alpha^2 + \beta^2) > 1$ la expresión para la amplitud de la onda plana es:

$$A_z \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) e^{-\frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}}, \quad (3.67)$$

es decir, un decaimiento exponencial en la dirección z . En este caso no hay propagación de energía en la dirección z . Estas ondas se llaman **ondas evanescentes**. Un ejemplo de este tipo de onda es el caso de ondas superficiales que llevan energía paralela a una superficie, e.g. en rejillas se puede tener el caso de absorción de energía con casi nada de la energía reflejada, porque las ondas superficiales absorben la energía de la onda incidente.

Ahora sustituimos la ecuación (3.66) en la ecuación (3.64) para obtener la distribución del campo eléctrico en el plano z en términos de las amplitudes de las ondas planas en el plano $z = 0$:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_0 \left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} e^{i 2\pi \left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right)} \frac{d\alpha}{\lambda} \frac{d\beta}{\lambda} . \quad (3.68)$$

En sistemas lineales vimos que en el espacio original la salida es la convolución de la entrada con la respuesta a un impulso. En el espacio Fourier esto corresponde a una multiplicación del espectro original con el espectro de la respuesta a un impulso o la función de transferencia. En la ecuación (3.66) tenemos la relación entre el espectro de entrada (en el plano $z = 0$) y la salida (en el plano z), y por lo tanto la función de transferencia para la propagación en el espacio libre es:

$$H(\alpha, \beta) = \begin{cases} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} & (\alpha^2 + \beta^2) < 1, \\ 0 & (\alpha^2 + \beta^2) \geq 1. \end{cases} \quad (3.69)$$

Capítulo 4

Difracción de Fraunhofer

En este capítulo, vamos a ver cómo se pueden usar las fórmulas que vimos en el capítulo anterior para calcular patrones de difracción para el caso cuando el plano de observación se encuentra muy lejos del plano de la abertura (Born y Wolf, 1980; Goodman 1996).

4.1 La condición de Fresnel

Empezamos suponiendo que las distancias entre la fuente y la abertura y entre la abertura, y el plano de observación son muy grandes comparados con la longitud de onda y el tamaño de la abertura, $r, s \gg \lambda$; y $r, s \gg$ abertura. En este caso el ángulo de inclinación $\theta \approx 0$ y las ecuaciones de difracción de Huygens-Fresnel, de Fresnel-Kirchhoff y de Rayleigh-Sommerfeld dan la misma ecuación para el campo en el punto P (ver la Figura 4.1):

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \iint_S U_i(x', y') \frac{e^{iks}}{s} dS, \quad (4.1)$$

donde $U_i(x', y')$ es el campo incidente en la abertura y la integral es sobre la parte abierta de la abertura. Si $r, s \gg \lambda$; y $r, s \gg$ abertura, el factor $1/s$ en la integral es casi constante e igual a $1/z$ (ver la Figura 4.1). El factor e^{iks} no es constante, porque cambios pequeños, del orden de la longitud de onda, dan cambios de 2π

en los términos de seno y coseno, entonces no podemos sacar este término de la integral.

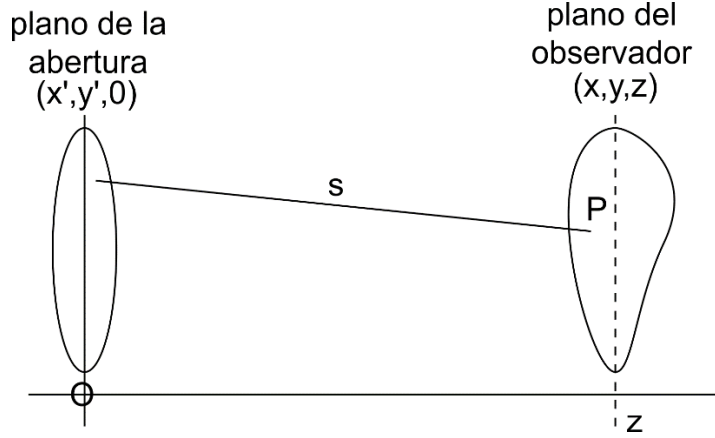


Figura 4.1: Geometría para la difracción de Fraunhofer

Ahora tenemos:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda z} \iint_S U_i(x', y') e^{iks} dS. \quad (4.2)$$

Considerando la geometría del problema que se muestra en la Figura 4.1:

$$s = \sqrt{(z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2)}, \quad (4.3)$$

que se puede escribir como:

$$s = z \left(1 + \left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

y si suponemos que $z \gg (x - x')$ y $z \gg (y - y')$ que significa que la distancia entre la abertura y el plano de detección es mucho mayor que el tamaño de la abertura, podemos expandir esta expresión para s como una expansión binomial:

$$s \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right). \quad (4.5)$$

Para que los términos del siguiente orden en la expansión no contribuyen significativamente al término e^{iks} , necesitamos que la fase de estos términos sea mucho menor que 1 radian (para que no contribuyan a la fase total):

$$\frac{2\pi z}{\lambda} \left(\left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right)_{max}^2 \ll 1, \quad (4.6)$$

donde el subíndice max indica el valor máximo que puede tomar la cantidad en paréntesis. Esta ecuación se puede escribir como:

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} ((x - x')^2 + (y - y')^2)_{max}^2, \quad (4.7)$$

que se conoce como **la condición de Fresnel**. Esta condición nos da un límite de qué tan cerca a la abertura podemos estar para que esta teoría tenga validez. Es importante que esta condición es el límite para difracción de Fresnel que veremos más adelante.

Suponiendo que la aproximación de Fresnel es válida:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_S U_i(x', y') e^{i\frac{k}{2z}((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx' dy', \quad (4.8)$$

donde hemos sustituido $dS = dx' dy'$. Ésta integral tiene la forma de una convolución, $U(P) = U_i(x, y) \otimes h(x, y)$, donde la respuesta a un impulso (un impulso es una función $\delta(\quad)$ en la abertura) es:

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)}, \quad (4.9)$$

sin tomar en cuenta las otras constantes afuera de la integral. Esta respuesta a un impulso corresponde a una función de transferencia que es la transformada de Fourier de la ecuación (4.9):

$$H(u, v) = \frac{1}{\pi} e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(u^2+v^2)}, \quad (4.10)$$

que nos indica cómo se difractan los diferentes componentes de frecuencia espacial de la estructura de la parte abierta de la abertura.

4.2 Difracción de Fraunhofer

La ecuación (4.8) es la ecuación base para calcular las fórmulas de difracción de Fraunhofer y de Fresnel. Aquí vamos a derivar la fórmula para difracción de Fraunhofer. Primero expandemos la expresión (4.5):

$$\begin{aligned} s &\approx z + \frac{(x - x')^2}{2z} + \frac{(y - y')^2}{2z} \\ &= z + \frac{x^2 + x'^2 - 2xx'}{2z} + \frac{y^2 + y'^2 - 2yy'}{2z}, \end{aligned}$$

Si suponemos **la aproximación de Fraunhofer** :

$$z \gg \frac{k}{2} (x'^2 + y'^2)_{max},$$

que es una condición más fuerte sobre z que la aproximación de Fresnel, y significa que z es mucho más grande que el tamaño de la abertura, podemos despreciar los términos (x'^2/z) y (y'^2/z) en la expansión de s y la integral de difracción queda como:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \iint_S U_i(x', y') e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{xx'}{z} + \frac{yy'}{z}\right)} dx' dy',$$

que se puede reescribir como:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \iint_{-\infty}^{\infty} U_i(x', y') e^{-i2\pi\left(x'\frac{x}{\lambda z} + y'\frac{y}{\lambda z}\right)} dx' dy', \quad (4.11)$$

donde se ha reordenado los términos dentro de la exponencial de la integral, y se ha tomado la forma de la parte abierta de la abertura dentro de la función $U_i(x', y')$, esto es, esta función incluye la forma de la abertura (1 donde pasa la luz, y 0 donde está tapada), además de la fase de la onda incidente. Revisando la forma de la ecuación (4.11) podemos ver que **el patrón de difracción de Fraunhofer de una abertura es proporcional a la transformada de Fourier de la función de transmisión de amplitud de la abertura** ($U_i(x', y')$) calculado en frecuencias espaciales:

$$u = \frac{x}{\lambda z}, \quad v = \frac{y}{\lambda z}, \quad (4.12)$$

donde (x, y) es la posición en el plano de observación y z es la distancia entre la abertura y el plano de detección, esto es:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \mathfrak{F}(U_i(x', y'))_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}}. \quad (4.13)$$

4.3 Ejemplos de la difracción de Fraunhofer

Vamos a suponer que la distancia de la fuente es infinita, es decir, que llega una onda plana a la abertura, y que la fuente esta posicionada sobre el eje z , es decir, esta onda plana incide normalmente sobre la abertura. (Después del primer ejemplo veremos qué pasa si la onda plana no incide normalmente.) Si incide normalmente, la fase y amplitud de la onda en la parte abierta de la abertura (que es plana: ésta es una de las condiciones de la teoría de Rayleigh-Sommerfeld) son constantes y podemos poner la función de transmisión de amplitud como $U_i(x', y') = 1$ en la parte abierta de la abertura (la fase absoluta de las ondas secundarias no importa, solo la fase relativa, porque cualquier factor constante lo podemos sacar de la integral). Esto significa que la función de transmisión de amplitud toma la forma de la parte abierta de la abertura.

4.3.1 Abertura Rectangular

Aquí la función de transmisión de amplitud es:

$$U_i(x', y') = \text{rect}\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right), \quad (4.14)$$

donde $l_{x'}$ y $l_{y'}$ son los tamaños de la abertura en la dirección x' y y' respectivamente, y ya vimos la función $rect(\)$ en el Capítulo 1. Sustituyendo esta función de transmisión de amplitud en la ecuación (4.13) obtenemos:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \mathfrak{F} \left(rect\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) rect\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right) \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}}. \quad (4.15)$$

Pero, en el capítulo 1 también vimos la transformada de Fourier de la función $rect(\)$:

$$\mathfrak{F} \left(rect\left(\frac{x}{a}\right) \right) = a \operatorname{sinc}(ua),$$

entonces la amplitud difractada en el punto P es:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} l_{x'} l_{y'} \operatorname{sinc}\left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z}\right). \quad (4.16)$$

Usando la relación $I(P) = |U(P)|^2$ por la intensidad, obtenemos:

$$I(P) = \left(\frac{A l_{x'} l_{y'}}{\lambda z} \right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z}\right). \quad (4.17)$$

En esta ecuación los términos al principio son constantes para una fuente, una abertura y una distancia de detección dadas, no cambian con la posición en el plano de detección, entonces podemos escribir este término como una constante:

$$I(P) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z}\right). \quad (4.18)$$

En la Figura 4.2 se muestra la variación de esta función en la dirección x . Los ceros de la distribución se encuentran en las posiciones $x = \lambda z / l_{x'}$ y el ancho del máximo principal es $2\lambda z / l_{x'}$.

Otro punto importante aquí, es que las variables de las funciones $\operatorname{sinc}(\)$ dependen de x/z e y/z que, en la aproximación de ángulos pequeños son los

ángulos entre el rayo que va desde el origen al punto de observación, y el eje (ver la Figura 4.3). Esto significa que, si cambia z , x e y cambian para mantener la misma intensidad, es decir, el patrón de difracción sólo se abre o se cierra, no se cambia de forma en la zona de difracción de Fraunhofer, al acercar o alejar la pantalla a la abertura.

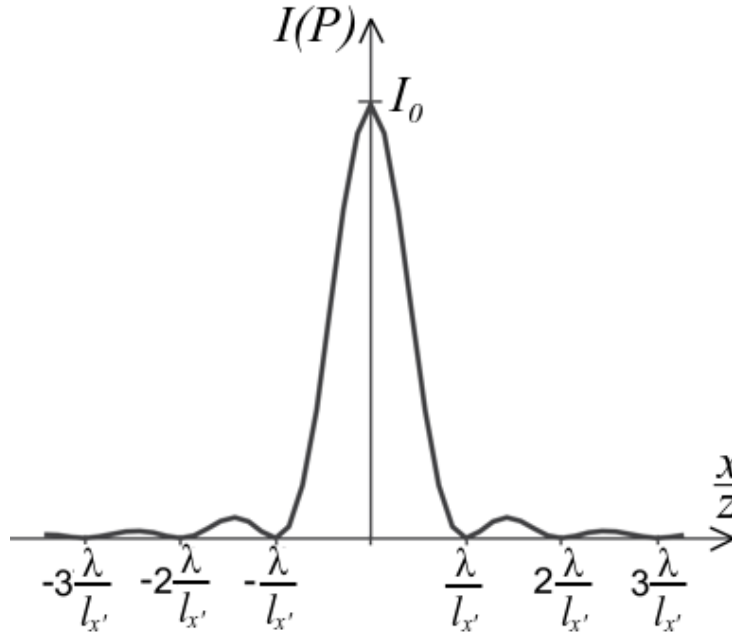


Figura 4.2: La función $\text{sinc}(\)$. (FraunhoferRendija.m)

4.3.2 Abertura Rectangular con Incidencia Oblicua

Ahora, si iluminamos la misma abertura rectangular con una onda plana a un ángulo de θ_i del normal (ver la Figura 4.4), la función de transmisión de amplitud cambia para tomar en cuenta la variación de fase en la abertura:

$$U_i(x', y') = \text{rect}\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right) e^{-kx' \sin(\theta_i)}. \quad (4.19)$$

Entonces, la amplitud difractada en la posición P es:

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \mathfrak{F}\left(\text{rect}\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right) e^{-kx' \sin(\theta_i)}\right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

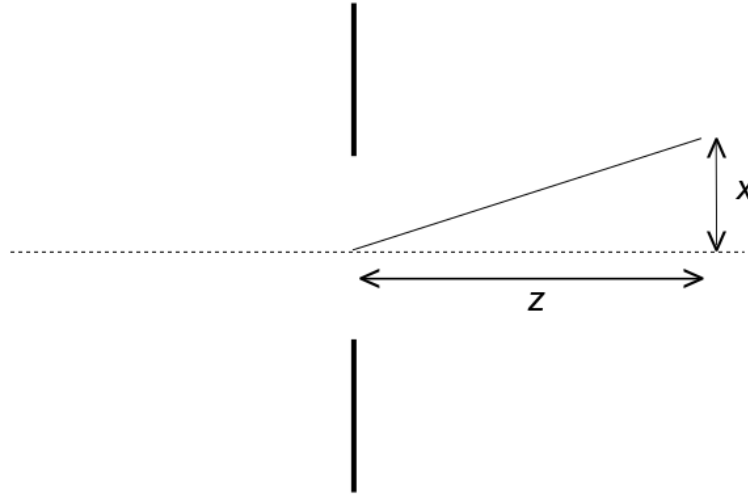


Figura 4.3: El ángulo de difracción

La parte de la transformada de Fourier en esta ecuación nos da, por el teorema de corrimiento de la Transformada de Fourier, la transformada de Fourier del producto de los dos $rect()$ pero con un cambio de posición:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} l_{x'} l_{y'} \text{sinc}\left(\frac{l_{x'}(x - \Delta x)}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z}\right), \quad (4.21)$$

es decir, la misma respuesta que el caso de incidencia normal, pero con un cambio de posición. El cambio de posición Δx está dado por:

$$\frac{\Delta x}{\lambda z} = \frac{\text{sen}(\theta_i)}{\lambda}, \quad \Delta x = z \text{sen}(\theta_i).$$

Refiriéndonos a la Figura 4.5, para ángulos pequeños, este cambio de posición es el cambio por la propagación directa del haz incidente al ángulo θ_i . Aquí es importante que tenemos la aproximación de ángulos pequeños, y que en este caso el patrón de difracción no cambia con un cambio en la dirección de la onda plana incidente, simplemente cambia de posición, y el cambio es el cambio en la dirección de propagación directa de la onda incidente. Por eso no repetiremos este caso en lo que sigue, calculamos para los casos de incidencia normal.

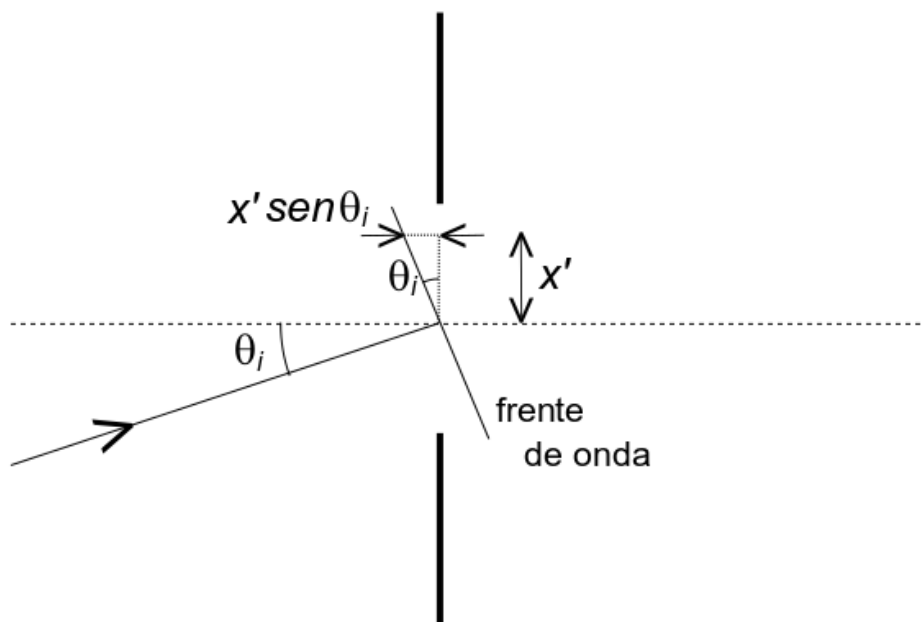


Figura 4.4: Incidencia oblicua.

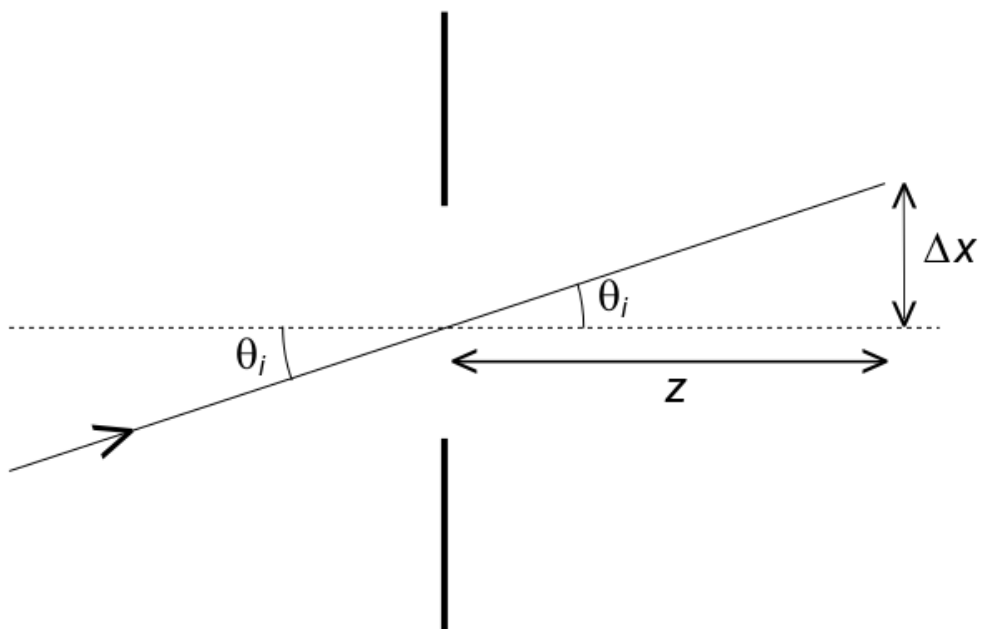


Figura 4.5: El haz directo con incidencia oblicua.

4.3.3 Rendija Doble

La geometría de la abertura se muestra en la Figura 4.6. Hay dos formas en que podemos describir matemáticamente la función de transmisión de amplitud de esta abertura:

$$U_i^a(x', y') = \left(\text{rect}\left(\frac{x' - x_0}{l_{x'}}\right) + \text{rect}\left(\frac{x' + x_0}{l_{x'}}\right) \right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right), \quad (4.22)$$

o en términos de una convolución:

$$U_i^b(x', y') = \left(\text{rect}\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) \otimes (\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)) \right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right). \quad (4.23)$$

Las amplitudes difractadas son proporcionales a las transformadas de Fourier de éstas funciones de transmisión de amplitud, incluyendo el escalamiento de las frecuencias espaciales dado por la ecuación (4.12), y las dos formas de escribir la abertura nos dan la misma respuesta:

$$U(P) \propto \left(l_{x'} \text{sinc}\left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z}\right) \left(e^{i2\pi \frac{x_0 x}{\lambda z}} + e^{-i2\pi \frac{x_0 x}{\lambda z}} \right) \right) l_{y'} \text{sinc}\left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z}\right), \quad (4.24)$$

y el término de exponenciales nos da:

$$\left(e^{i2\pi \frac{x_0 x}{\lambda z}} + e^{-i2\pi \frac{x_0 x}{\lambda z}} \right) = 2 \cos\left(2\pi \frac{x_0 x}{\lambda z}\right). \quad (4.25)$$

Entonces, la intensidad difractada es proporcional a:

$$I(P) \propto 4(l_{x'} l_{y'})^2 \text{sinc}^2\left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z}\right) \cos^2\left(2\pi \frac{x_0 x}{\lambda z}\right). \quad (4.26)$$

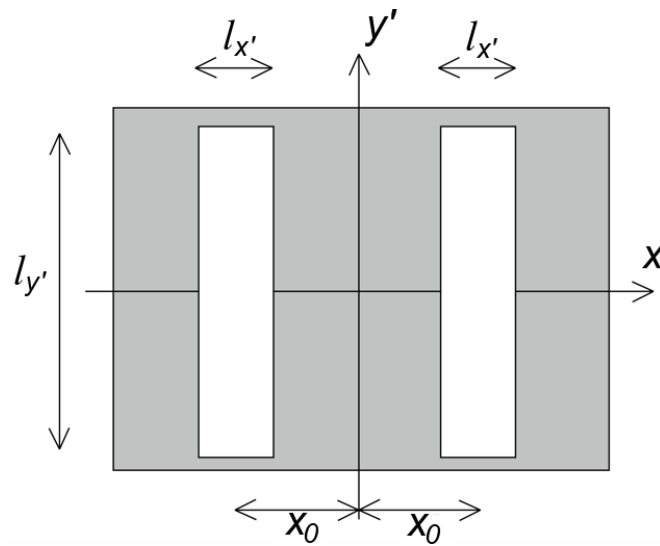


Figura 4.6: La geometría de una rendija doble

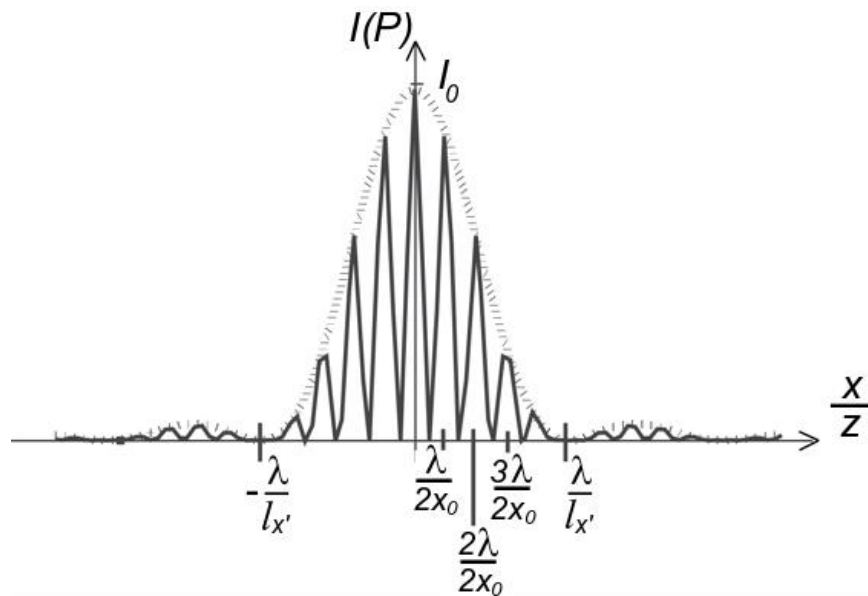


Figura 4.7: El patrón de difracción de una rendija doble. Se muestra la función $\text{sinc}^2(\)$ (con líneas cortas) que varía lentamente y que multiplica (modula) al patrón de interferencia dada por la función $\cos^2(\)$, y se muestra la intensidad total dada por ésta multiplicación (curva continua). ([FraunhoferDobleRendija.m](#))

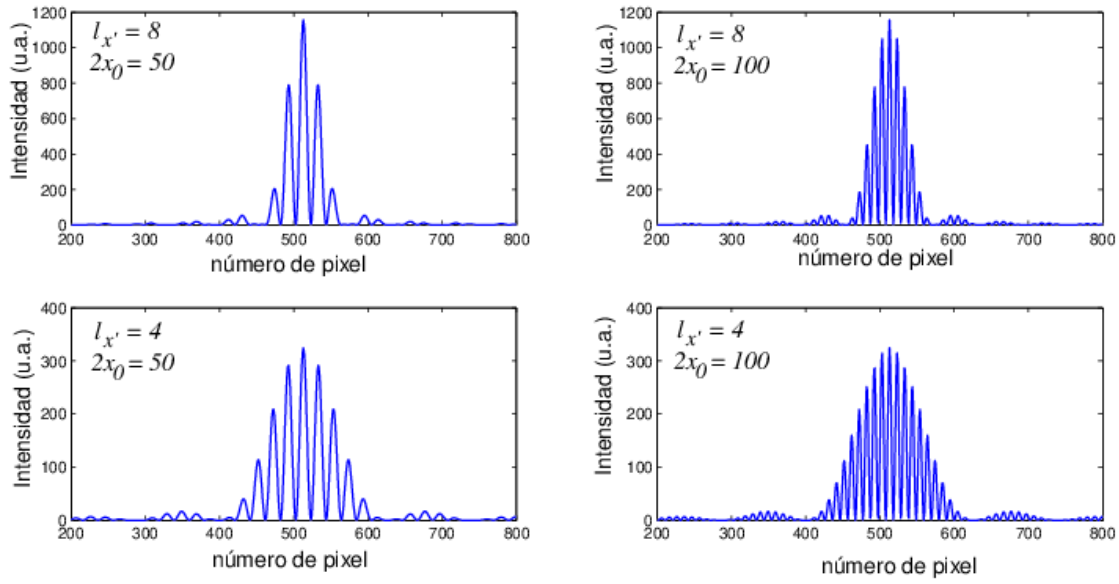


Figura 4.8: Patrones de difracción de rendijas dobles de diferentes tamaños. Nótese que el efecto del ancho de las rendijas es independiente del efecto de la separación de las rendijas. (FraunhoferDobleRendija.m)

En la Figura 4.7 se muestra la variación de esta intensidad en el eje x . Aquí los términos de $\text{sinc}^2(\)$ son por la difracción de cada una de las rendijas (sólo depende del tamaño de cada rendija) y la parte de $\cos^2(\)$ es por la interferencia entre los campos difractados de las dos rendijas (solo depende de la separación entre rendijas). Por la relación inversa entre las variables en el espacio normal y el espacio de Fourier, el patrón del $\cos^2(\)$ es más angosto que el patrón del $\text{sinc}^2(\)$ (porque la separación tiene que ser más grande que el ancho de cada rendija para tener dos rendijas separadas). Es importante que el patrón de difracción contiene información sobre el ancho de las rendijas y también de su separación. Se muestran ejemplos de patrones de difracción de una rendija doble en la Figura 4.8

4.3.4 Rendijas Múltiples

Si tenemos N rendijas en la abertura, la función de transferencia de amplitud es:

$$U_i(x', y') = \left(\text{rect}\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) \otimes \sum_{n=1}^N \delta(x - nx_0) \right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right), \quad (4.27)$$

con x_0 la separación entre las rendijas en este caso. El campo difractado es la transformada de Fourier de esta expresión:

$$U(P) \propto \left(l_{x'} \text{sinc} \left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z} \right) \sum_{n=1}^N e^{i2\pi n \frac{x_0 x}{\lambda z}} \right) l_{y'} \text{sinc} \left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z} \right), \quad (4.28)$$

y la intensidad difractada es:

$$I(P) \propto (l_{x'} l_{y'})^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z} \right) \left(\sum_{n=1}^N e^{i2\pi n \frac{x_0 x}{\lambda z}} \right)^2. \quad (4.29)$$

Se puede mostrar que el término de suma de exponenciales es igual a:

$$\left(\sum_{n=1}^N e^{i2\pi n \frac{x_0 x}{\lambda z}} \right)^2 = \left(\frac{\text{sen} \left(2\pi N \frac{x_0 x}{2\lambda z} \right)}{\text{sen} \left(2\pi \frac{x_0 x}{2\lambda z} \right)} \right)^2, \quad (4.30)$$

y la intensidad queda como:

$$I(P) \propto (l_{x'} l_{y'})^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{l_{x'} x}{\lambda z} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{l_{y'} y}{\lambda z} \right) \left(\frac{\text{sen} \left(2\pi N \frac{x_0 x}{2\lambda z} \right)}{\text{sen} \left(2\pi \frac{x_0 x}{2\lambda z} \right)} \right)^2. \quad (4.31)$$

Las intensidades calculadas con esta ecuación se muestran en la Figura 4.9. Se puede ver que para el caso de una abertura de N rendijas, aparecen $N - 2$ picos secundarios entre los picos principales del patrón de difracción. También, como aumenta N , el ancho de los picos disminuye, y la energía en cada pico secundario disminuye. En este caso, es interesante notar que el patrón de difracción nos da información sobre el número de rendijas, además de la separación y ancho de ellas. En el límite de un número muy grande de rendijas (que es una rejilla de difracción) el patrón de difracción consiste en picos de intensidad muy angostos con muy poca energía en los picos secundarios.

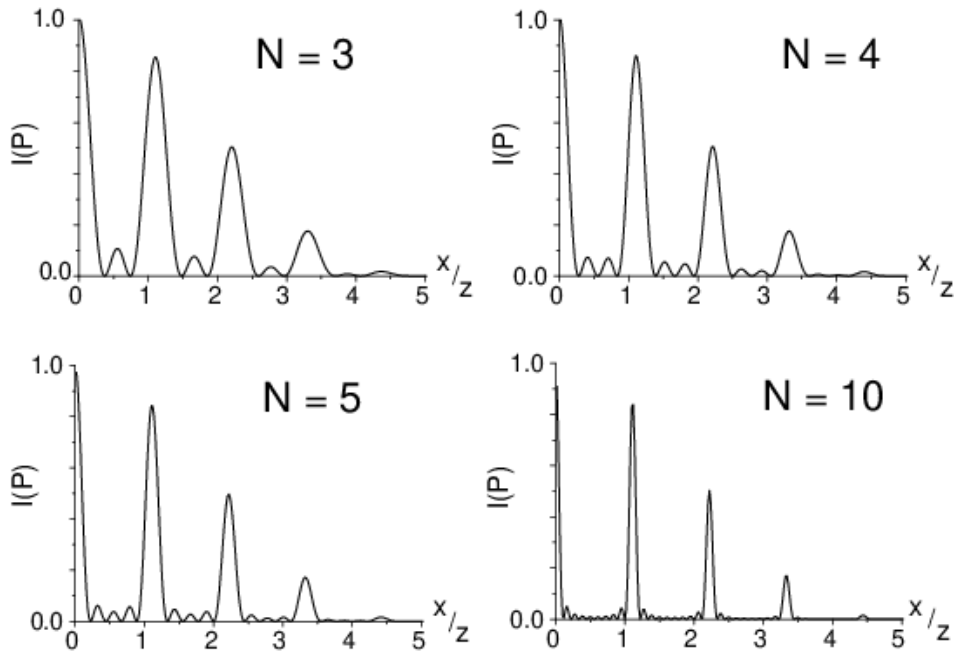


Figura 4.9: Las intensidades difractadas en una abertura de 3, 4, 5 y 10 rendijas. Nótese que, para una abertura de N rendijas hay $N-2$ picos secundarios entre los máximos principales del patrón de difracción. (FraunhoferMultiplesRendijas.m)

Otra forma de considerar este caso es con la función de transmisión de amplitud:

$$U_i(x', y') = \left(\text{rect}\left(\frac{x'}{l_{x'}}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l_{y'}}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x'}{x_0}\right) \right) \text{rect}\left(\frac{x'}{Nx_0 + l_{x'}}\right), \quad (4.32)$$

donde la última función $\text{rect}(\quad)$, a la derecha de la ecuación (4.32) limita el ancho total de la abertura a N rendijas. La intensidad difractada utilizando esta ecuación está dada por el modulo cuadrado de su transformada de Fourier:

$$I(P) = I_0 \left(\text{sinc}\left(\frac{l_{x'}x}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{l_{y'}y}{\lambda z}\right) \text{comb}\left(\frac{x_0x}{\lambda z}\right) \right) \otimes \text{sinc}\left(\frac{(Nx_0 + l_{x'})x}{\lambda z}\right), \quad (4.33)$$

que es replicación de la última función $\text{sinc}(\quad)$ a la derecha de la ecuación (4.33), en las posiciones de los $\delta(\quad)$ de la función $\text{comb}(\quad)$, y todo modulado por la función $\text{sinc}\left(\frac{l_{x'}x}{\lambda z}\right)$. Esta ecuación da el mismo resultado que la ecuación (4.31), pero, mientras la ecuación (4.33) es correcta, y es fácil de interpretar, la

ecuación (4.31) es mejor en este caso porque da más información directa sobre la forma del patrón de difracción, y como está relacionado con el número de rendijas en la abertura. Típicamente, habrá diferentes formas de escribir las formulas de las aberturas, pero alguna de las ecuaciones para el patrón de difracción es más fácil de interpretar o para extraer la información útil.

4.3.5 Abertura Circular

Si la abertura tiene la forma de un círculo de diámetro l el campo difractado en un punto P es proporcional a:

$$U(P) \propto \mathfrak{F} \left(\text{circ} \left(\frac{r'}{l} \right) \right)_{\rho=r/\lambda z}, \quad (4.34)$$

y en el capítulo 1 vimos que esta transformada de Fourier esta dada por:

$$U(P) \propto \pi l^2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi l r}{\lambda z} \right)}{\frac{\pi l r}{\lambda z}}, \quad (4.35)$$

donde la función $J_1(\quad)$ es la función de Bessel del primer orden. La distribución de intensidad es:

$$I(P) = I_0 \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi l r}{\lambda z} \right)}{\frac{\pi l r}{\lambda z}} \right]^2, \quad (4.36)$$

que se conoce como la función de Airy. El factor de 2 en los paréntesis cuadrados es para dar una función con un máximo de 1. En la Figura 4.10 se muestra la forma de la función de Airy y las posiciones de los primeros ceros. La Figura 4.11 muestra una foto de éste patrón de difracción. En la foto se puede notar que los anillos no son perfectamente circulares debido a imperfecciones en la abertura experimental, que no es totalmente circular (obtener una abertura perfectamente circular es muy complicada).

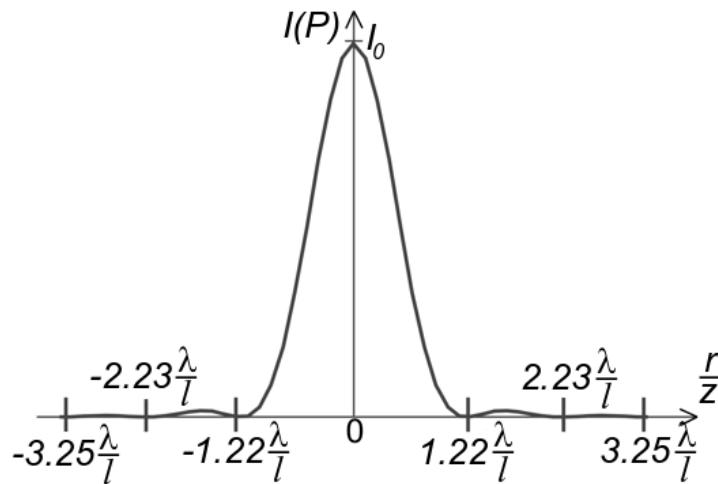


Figura 4.10: El patrón de difracción de una abertura circular. (FraunhoferCirculo.m)

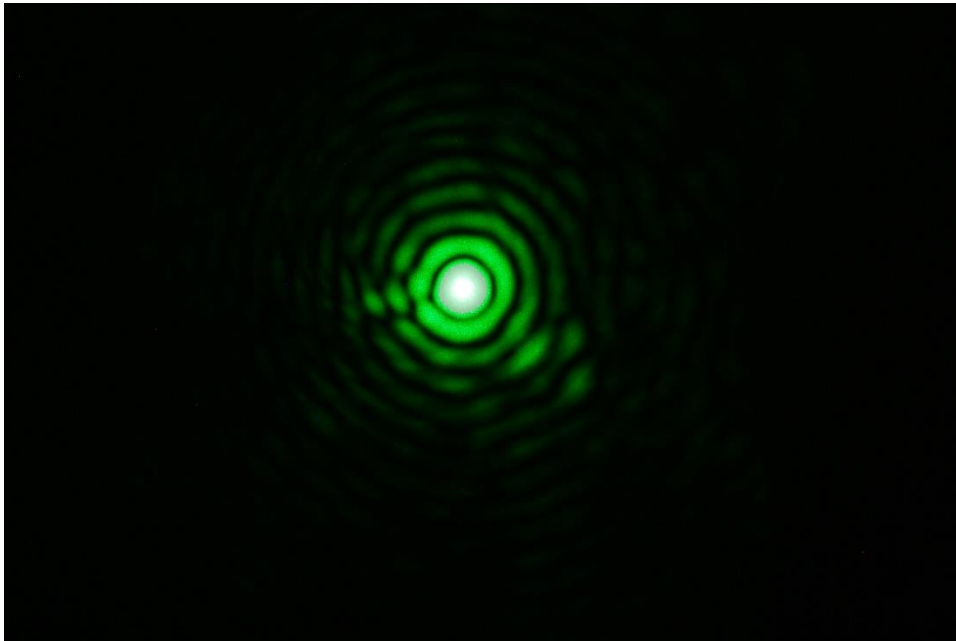


Figura 4.11: Fotografía del patrón de difracción de Fraunhofer obtenido de una abertura circular.

También, aquí podemos preguntar ¿qué fracción de la energía total está contenida en un círculo de radio R en el plano de observación? Para contestar esta pregunta tenemos que integrar la intensidad difractada (la ecuación (4.34)):

$$\text{Energía contenida} = L(R) = \int_0^R \int_0^{2\pi} I(P) r dr d\phi. \quad (4.37)$$

Sustituyendo la ecuación (4.36) en la ecuación (4.37), y tomando en cuenta el valor del constante I_0 :

$$L(R) = \frac{A^2 \pi^2 l^4}{\lambda^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi l r}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi l r}{\lambda z}} \right]^2 r dr d\phi = \frac{2A^2 \pi^3 l^4}{\lambda^2} \int_0^R \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi l r}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi l r}{\lambda z}} \right]^2 r dr, \quad (4.38)$$

donde hicimos la integral sobre el ángulo ϕ . Ahora cambiamos el variable de integración:

$$r' = \frac{klr}{2z}, \quad dr' = \frac{kl}{2z} dr,$$

y la integral queda como:

$$L(R) = 2A^2 \pi l^2 \int_0^{\frac{klR}{2z}} \frac{J_1^2(r')}{r'} dr'. \quad (4.39)$$

Ahora, usando la relación (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$\frac{J_1^2(x)}{x} = J_0(x)J_1(x) - \frac{dJ_1(x)}{dx} J_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{J_0^2(x) + J_1^2(x)\}, \quad (4.40)$$

y los valores de las funciones de Bessel $J_0(0) = 1, J_1(0) = 0$, entonces la integral para la energía contenida es:

$$L(R) = A^2 \pi l^2 \left\{ 1 - J_0^2 \left(\frac{klR}{2z} \right) - J_1^2 \left(\frac{klR}{2z} \right) \right\}. \quad (4.41)$$

Queremos normalizar ésta expresión para que $L(\infty) = 1$. Entonces, tenemos que dividir por la energía total pasando la abertura, pero esto es simplemente $A^2 \pi l^2$, el área de la abertura multiplicada por el cuadrado de la amplitud. La energía contenida normalizada es:

$$L_N(R) = 1 - J_0^2 \left(\frac{klR}{2z} \right) - J_1^2 \left(\frac{klR}{2z} \right). \quad (4.42)$$

En la Figura 4.12 se muestra esta función. Se puede ver que hay 84% de la energía dentro del máximo principal del patrón de difracción, el patrón de Airy.

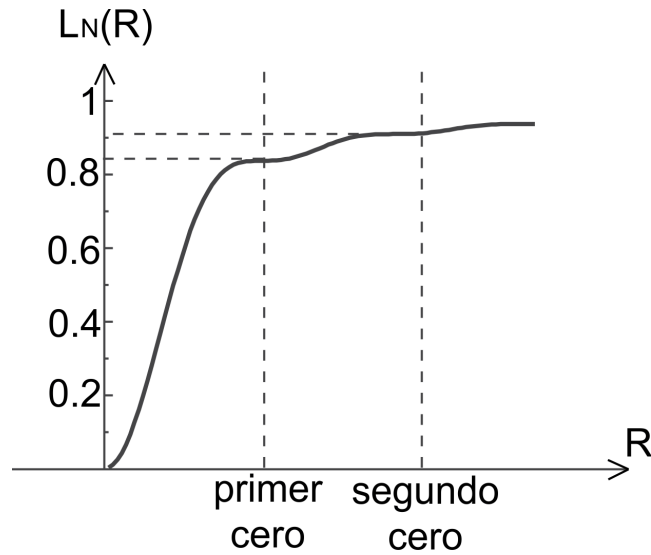


Figura 4.12: Energía contenida en el patrón de difracción de una rendija circular

4.3.6 Rejilla de Amplitud

En esta sección consideramos una abertura periódica en amplitud de forma cosenoidal:

$$U_i(x', y') = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f x) \right] \text{rect} \left(\frac{x'}{l} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{l} \right), \quad (4.43)$$

donde suponemos que $l \gg f$. Se indica la forma de esta abertura en la Figura 4.13. Sabemos que el patrón de difracción es proporcional a:

$$U(P) \propto \mathfrak{T} \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f x) \right] \text{rect} \left(\frac{x}{l} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{l} \right) \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}}. \quad (4.44)$$

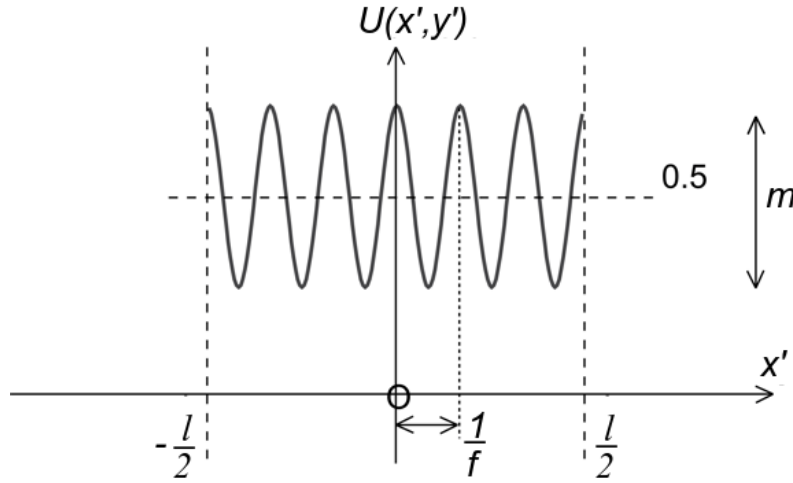


Figura 4.13: Una abertura de forma cosenoidal

Tomando esta transformada de Fourier en dos partes, primero la parte $\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f x)$, notando que $\cos(X) = \frac{1}{2} \{e^{iX} + e^{-iX}\}$, y usando el teorema de corrimiento de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} \left(\left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi f x) \right] \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}} &= \frac{1}{2} \delta \left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z} \right) + \frac{m}{4} \delta \left(\frac{x}{\lambda z} + f, \frac{y}{\lambda z} \right) + \frac{m}{4} \delta \left(\frac{x}{\lambda z} - f, \frac{y}{\lambda z} \right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

La segunda parte de la integral nos da:

$$\mathfrak{T} \left(\text{rect} \left(\frac{x}{l} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{l} \right) \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}} = l^2 \text{sinc} \left(\frac{lx}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{ly}{\lambda z} \right). \quad (4.46)$$

Ahora, la función original es el producto de los dos términos en la izquierda de las ecuaciones (4.45) y (4.46) entonces la transformada de Fourier es la convolución de las transformadas de Fourier de estas dos ecuaciones:

$$U(P) \propto \frac{1}{2} \delta\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right) + \frac{m}{4} \delta\left(\frac{x}{\lambda z} + f, \frac{y}{\lambda z}\right) + \frac{m}{4} \delta\left(\frac{x}{\lambda z} - f, \frac{y}{\lambda z}\right) \\ \otimes \left(l^2 \text{sinc}\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) \text{sinc}\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \right),$$

pero ya vimos que convolución de una función con una $\delta(\quad)$ es la replicación de la función en la posición de la delta:

$$U(P) \propto \frac{l^2}{2} \text{sinc}\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \\ \times \left(\text{sinc}\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(\frac{l}{\lambda z}(x + f\lambda z)\right) + \frac{m}{2} \text{sinc}\left(\frac{l}{\lambda z}(x - f\lambda z)\right) \right). \quad (4.47)$$

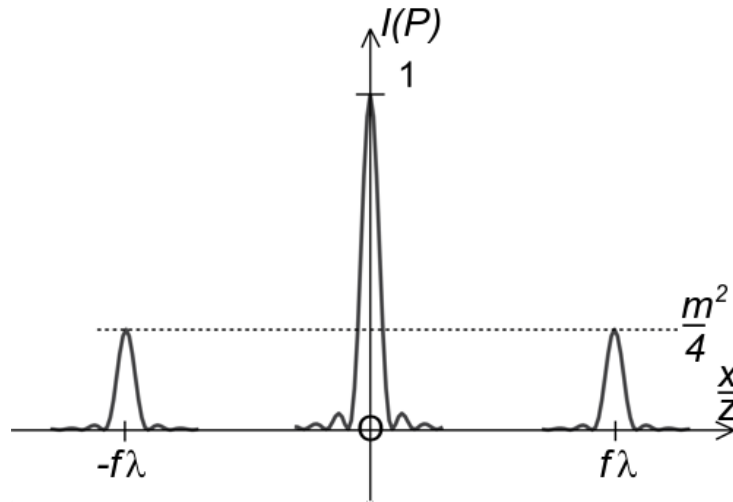


Figura 4.14: El patrón de difracción de la abertura de forma cosenoidal.
(FraunhoferCosRejillaAmplitud.m)

La intensidad difractada es proporcional al módulo cuadrado de la amplitud, y si suponemos que la frecuencia espacial de la rejilla f es suficientemente grande que no hay intersección entre las tres funciones $\text{sinc}(\quad)$, la intensidad es:

$$I(P) \propto I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{ly}{\lambda z}\right) \times \left(\text{sinc}^2\left(\frac{lx}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{l}{\lambda z}(x + f\lambda z)\right) + \frac{m^2}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{l}{\lambda z}(x - f\lambda z)\right) \right). \quad (4.48)$$

Se muestra ésta función en la Figura 4.14. Se puede ver que hay suficiente información en el patrón de difracción, de la posición y la intensidad de los picos, para obtener todos los parámetros de la abertura.

4.3.7 Rejilla de Fase Senusoidal

Aquí veremos el caso de una rejilla de fase. Primeramente con una rejilla de fase de forma senusoidal y luego una de forma cuadrada. Para el primer caso, la transmisión de amplitud es:

$$U_i(x', y') = e^{i\frac{m}{2}\text{sen}(2\pi f x')} \text{rect}\left(\frac{x'}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{l}\right), \quad (4.49)$$

donde el término exponencial es un término periódico de una fase senusoidal.

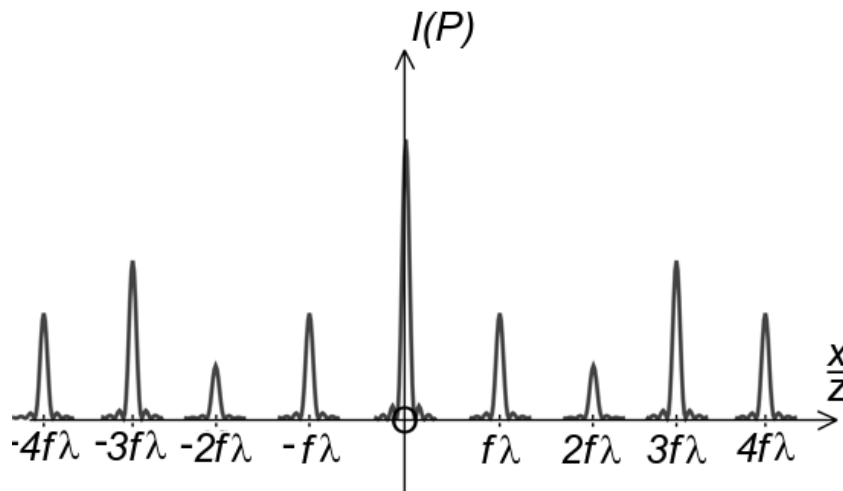


Figura 4.15: El patrón de difracción de una rejilla de fase de forma cosenoidal.
([FraunhoferSenRejillaFase.m](#))

Usando la relación (Abrammowitz y Stegun, 1972):

$$e^{i\frac{m}{2}\sin(2\pi f x')} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) e^{i2\pi q f x'}, \quad (4.50)$$

la amplitud difractada queda como:

$$U(P) \propto \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \delta\left(\frac{x}{\lambda z} - f q, \frac{y}{\lambda z}\right) \otimes \left[l^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{l x}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{l y}{\lambda z}\right) \right], \quad (4.51)$$

y la intensidad como:

$$I(P) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l y}{\lambda z}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(\frac{m}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{l}{\lambda z}(x - f q \lambda z)\right). \quad (4.52)$$

En la Figura 4.15 se muestra la forma de esta función, que resulta ser mucho más complicada que el caso de una abertura de amplitud.

4.3.8 Rejilla de Fase Cuadrada

Para el caso de una abertura de fase de forma cuadrada, tenemos:

$$U_i(x', y') = \exp(i\delta\varphi), \quad (4.53)$$

donde $\delta\varphi$ es la variación de la fase sobre la rejilla, y ignorando un término constante de fase, $\delta\varphi$ está dado por:

$$\delta\varphi = \begin{cases} \varphi & mp - w/2 < x' < mp + w/2, \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}, \quad (4.54)$$

con m un entero, p el periodo de la rejilla, y w es el ancho de las formas rectangulares formando la rejilla. También, en este caso no tomaremos en cuenta la extensión finita de la rejilla.

Ahora, esta rejilla está formado por zonas donde $\delta\varphi = 0$, donde $\exp(i\delta\varphi) = 1$, y zonas donde $\exp(i\delta\varphi) = \exp(i\varphi)$, entonces:

$$U_i(x', y') = \left\{ 1 - [1 - \exp(i\varphi)] \text{rect}\left(\frac{x'}{w}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x'}{p}\right) \right\}. \quad (4.55)$$

Ahora, el patrón de difracción es la transformada de Fourier de esta ecuación:

$$U(P) \propto \left\{ \delta(x) - \frac{w}{p} [\delta(x) - \exp(i\varphi)\delta(x)] \otimes \text{sinc}\left(\frac{xw}{\lambda z}\right) \text{comb}\left(\frac{x p}{\lambda z}\right) \right\}. \quad (4.56)$$

Convolución con las funciones $\delta(\)$ da replicación de la función $\text{sinc}(\)$, entonces, la intensidad difractada es:

$$I(P) = I_0 \left| \delta(x) - \frac{w}{p} \text{sinc}\left(\frac{xw}{\lambda z}\right) [1 - \exp(i\varphi)] \right|^2. \quad (4.57)$$

La intensidad difractada para el orden 0 corresponde a la posición $x = 0$. En esta posición, la función $\text{sinc}(\)$ tiene un valor de 1, y:

$$I(x = 0) = I_0 \left| 1 - \frac{w}{p} [1 - \exp(i\varphi)] \right|^2 = I_0 \left\{ 1 - \left(\frac{w}{p} - \left(\frac{w}{p} \right)^2 \right) 2(1 - \cos\varphi) \right\}. \quad (4.58)$$

La intensidad difractada para el orden 1 corresponde al primer diente del $\text{comb}(\)$, en la posición $x = \lambda z/p$. En esta posición la función $\delta(\)$ al lado derecha de la ecuación (4.57) no tiene contribución, y:

$$\begin{aligned} I\left(x = \frac{\lambda z}{p}\right) &= I_0 \left| \frac{w}{p} \text{sinc}\left(\frac{w}{p}\right) [1 - \exp(i\varphi)] \right|^2 \\ &= I_0 \left(\frac{w}{p} \right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{w}{p}\right) 2(1 - \cos\varphi). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Para una forma de la abertura fija, con un grosor de la parte rectangular de h , la fase de la rejilla depende del índice de refracción n como:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} nh, \quad (4.60)$$

y la Figura 4.16 muestra las variaciones de la intensidad en el orden 0 y el orden 1, como función del índice de refracción para $p = 2w$.

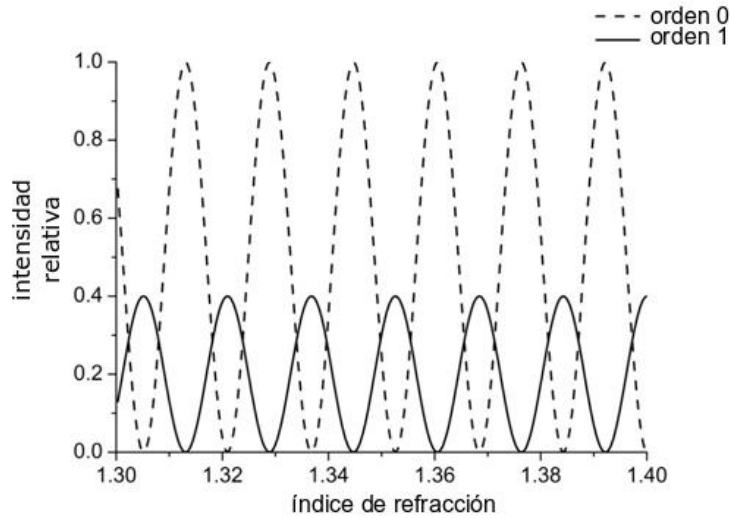


Figura 4.16: Variación de las intensidades difractadas en una rejilla de fase de forma cuadrada, como función del índice de refracción.
(FraunhoferRectRejillaFase.m)

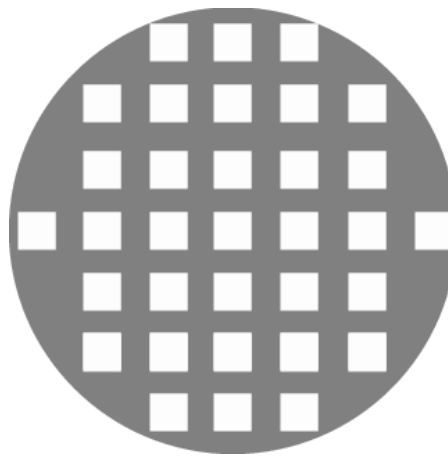


Figura 4.17: Una abertura bidimensional. El tamaño de cada cuadro es $a \times a$, la separación entre los centros de cuadros adyacentes es b y el tamaño de la parte circular de la abertura es c .

4.3.9 Difracción en aberturas bidimensionales

En ésta sección veremos la difracción en algunas aberturas bidimensionales. Empezamos con la abertura mostrada en la Figura 4.17.

Se puede describir ésta abertura como:

$$U_i(x', y') = \left\{ \text{rect} \left(\frac{x'}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{a} \right) \otimes \text{comb} \left(\frac{x'}{b} \right) \text{comb} \left(\frac{y'}{b} \right) \right\} \text{circ} \left(\frac{r}{c} \right). \quad (4.61)$$

La amplitud difractada es proporcional a:

$$U(x, y) = \frac{\pi a^2 c^2}{b^2} \left\{ \text{sinc} \left(\frac{ax}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{ay}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{bx}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{by}{\lambda z} \right) \right\} \otimes \frac{J_1 \left(\frac{\pi cr}{\lambda z} \right)}{\frac{\pi cr}{\lambda z}}, \quad (4.62)$$

y la intensidad es:

$$I(x, y) = \left\{ \frac{\pi a^2 c^2}{b^2} \text{sinc} \left(\frac{ax}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{ay}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{bx}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{by}{\lambda z} \right) \right\}^2 \otimes \left\{ \frac{J_1 \left(\frac{\pi cr}{\lambda z} \right)}{\frac{\pi cr}{\lambda z}} \right\}^2. \quad (4.63)$$

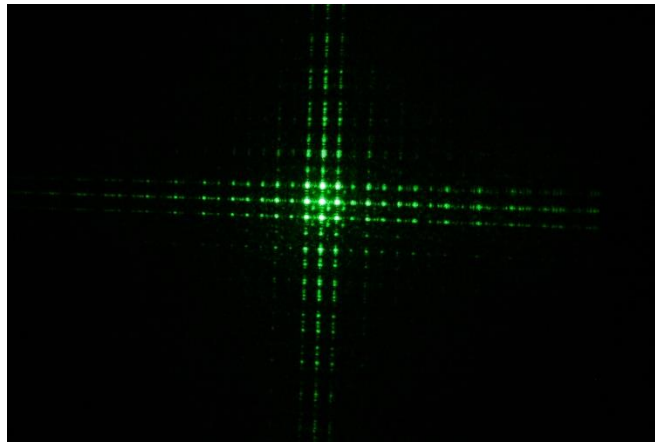


Figura 4.18: Fotografía del patrón de difracción de Fraunhofer obtenido de la abertura mostrada en la Figura 4.17. (FraunhoferMultiplesCuadrados.m)

La Figura 4.18 muestra una foto de la intensidad difractada por una abertura como la de la Figura 4.17 que se puede relacionar con la ecuación (4.63).

Un caso muy similar al anterior es la abertura dado por:

$$U_i(x', y') = \left\{ \text{circ} \left(\frac{r}{b} \right) \otimes \text{comb} \left(\frac{x'}{b} \right) \text{comb} \left(\frac{y'}{b} \right) \right\} \text{rect} \left(\frac{x'}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{a} \right), \quad (4.64)$$

que se muestra en la Figura 4.19. La intensidad difractada en esta abertura se muestra en la Figura 4.20, y es dada por:

$$I(x, y) = \left\{ \frac{a^2}{b^2} \pi c^2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi c r}{\lambda z} \right)}{\frac{\pi c r}{\lambda z}} \text{comb} \left(\frac{bx}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{by}{\lambda z} \right) \right\}^2 \otimes \left\{ \text{sinc} \left(\frac{ax}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{ay}{\lambda z} \right) \right\}^2. \quad (4.65)$$

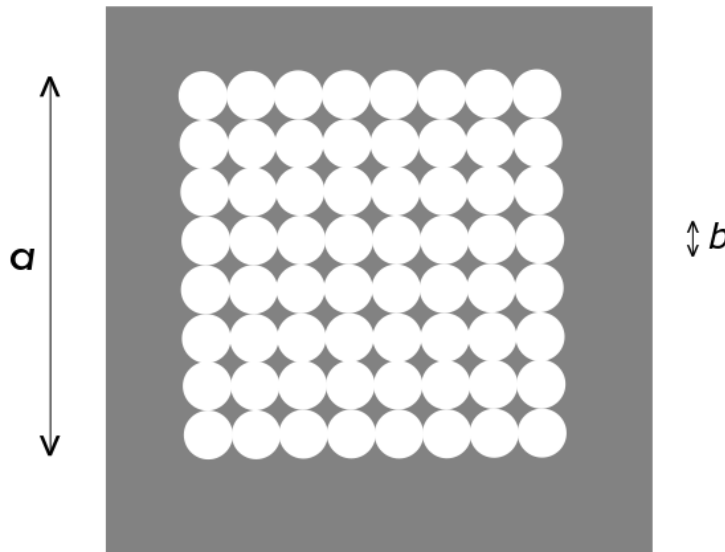


Figura 4.19: una abertura con un arreglo cuadrado de agujeros circulares.

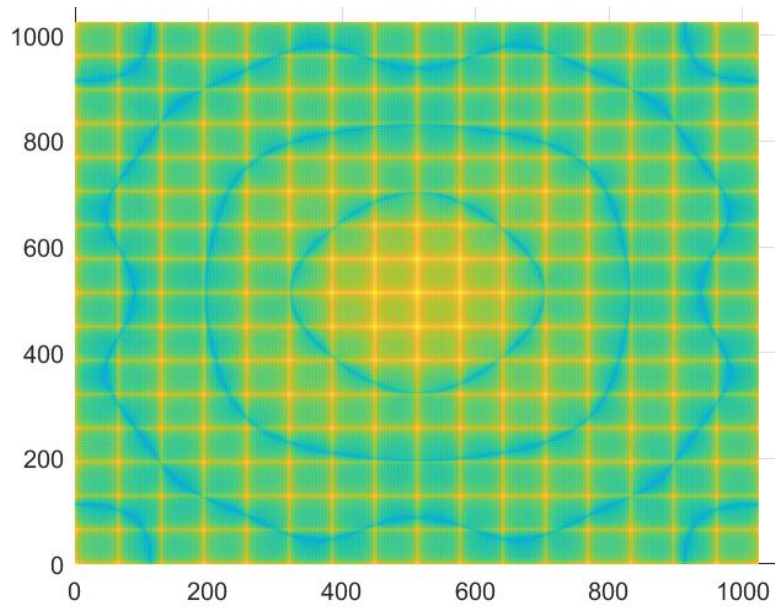


Figura 4.20: Pátrón de difracción de una abertura con un arreglo cuadrado de agujeros circulares, calculado con la ecuación (4.65), y graficado en escala logarítmica para ver los detalles de la intensidad. (FraunhoferMultiplesCirculos.m)

Otra abertura es la de la Figura 4.21, que es un arreglo de triángulos. Esta abertura se puede construir como se muestra en la Figura 4.22. Se empieza con una rejilla de líneas horizontales. Luego se agregan líneas a 60° y a -60° para obtener la abertura final. Las tres rejillas tienen la misma separación entre líneas.

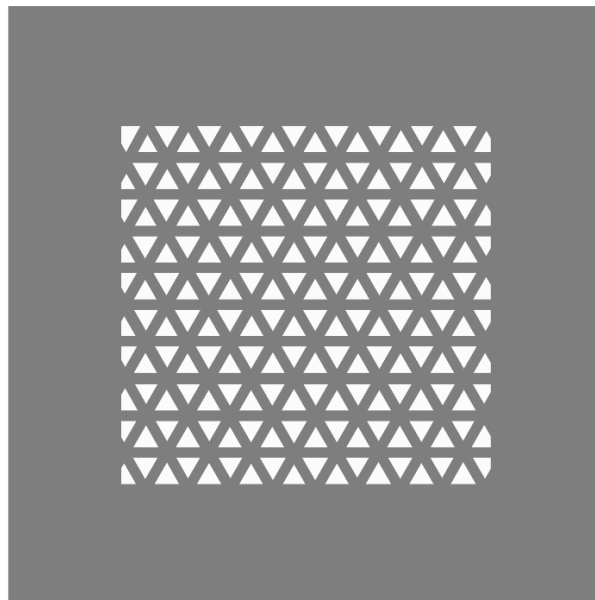


Figura 4.21: Una abertura que es un arreglo de triángulos.

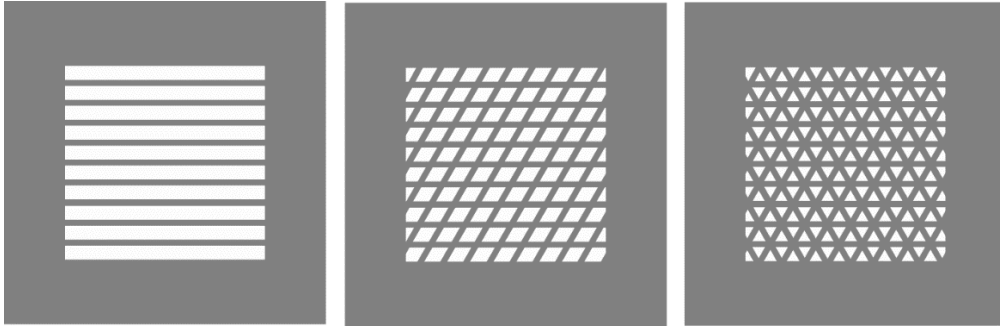


Figura 4.22: Construcción de la abertura con triángulos: se utiliza una rejilla con líneas horizontales (izquierda); se agrega una rejilla con líneas en $+60^\circ$ (centro); se agrega una rejilla con líneas en -60° (derecha). Las tres rejillas tienen la misma separación entre líneas.

En ecuaciones se puede escribir que la abertura es el producto de las tres rejillas en diferentes ángulos:

$$\begin{aligned}
 U_i(x', y') = & \left\{ \left[\text{rect} \left(\frac{y'}{a} \right) \otimes \text{comb} \left(\frac{y'}{b} \right) \right]_{0^\circ} \text{rect} \left(\frac{x'}{c} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{c} \right) \right\} \\
 & \times \left\{ \left[\text{rect} \left(\frac{y'}{a} \right) \otimes \text{comb} \left(\frac{y'}{b} \right) \right]_{60^\circ} \text{rect} \left(\frac{x'}{c} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{c} \right) \right\} \\
 & \times \left\{ \left[\text{rect} \left(\frac{y'}{a} \right) \otimes \text{comb} \left(\frac{y'}{b} \right) \right]_{-60^\circ} \text{rect} \left(\frac{x'}{c} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{c} \right) \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{4.66}$$

El campo difractado es proporcional a la transformada de Fourier de esta ecuación:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) = & \left\{ \left[\frac{a}{b} \text{sinc} \left(\frac{ya}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{yb}{\lambda z} \right) \right]_{0^\circ} \otimes c^2 \text{sinc} \left(\frac{xc}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{yc}{\lambda z} \right) \right\} \\
 & \otimes \left\{ \left[\frac{a}{b} \text{sinc} \left(\frac{ya}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{yb}{\lambda z} \right) \right]_{60^\circ} \otimes c^2 \text{sinc} \left(\frac{xc}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{yc}{\lambda z} \right) \right\} \\
 & \otimes \left\{ \left[\frac{a}{b} \text{sinc} \left(\frac{ya}{\lambda z} \right) \text{comb} \left(\frac{yb}{\lambda z} \right) \right]_{-60^\circ} \otimes c^2 \text{sinc} \left(\frac{xc}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{yc}{\lambda z} \right) \right\},
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

y la intensidad difractada es el módulo cuadrado de ésta expresión. Gráficamente, éstas convoluciones se representan en la Figura 4.23. La Figura 4.24 muestra una fotografía del patrón de difracción de ésta abertura para comparación.

Finalmente, consideramos la abertura de la Figura 4.25, que es la abertura de un telescopio astronómico (es una aproximación, porque en un telescopio real el espejo secundario, el círculo oscuro pequeño, y las monturas de éste, las líneas horizontales y verticales, no están en el mismo plano que el espejo primario, que es el círculo blanco grande). Esta abertura se puede describir como:

$$U_i(x', y') = \left[\text{circ} \left(\frac{r'}{a} \right) - \text{circ} \left(\frac{r'}{b} \right) \right] \left[1 - \text{rect} \left(\frac{x'}{c} \right) \right] \left[1 - \text{rect} \left(\frac{y'}{c} \right) \right], \quad (4.68)$$

donde a es el diámetro del espejo primario, b es el diámetro del secundario.

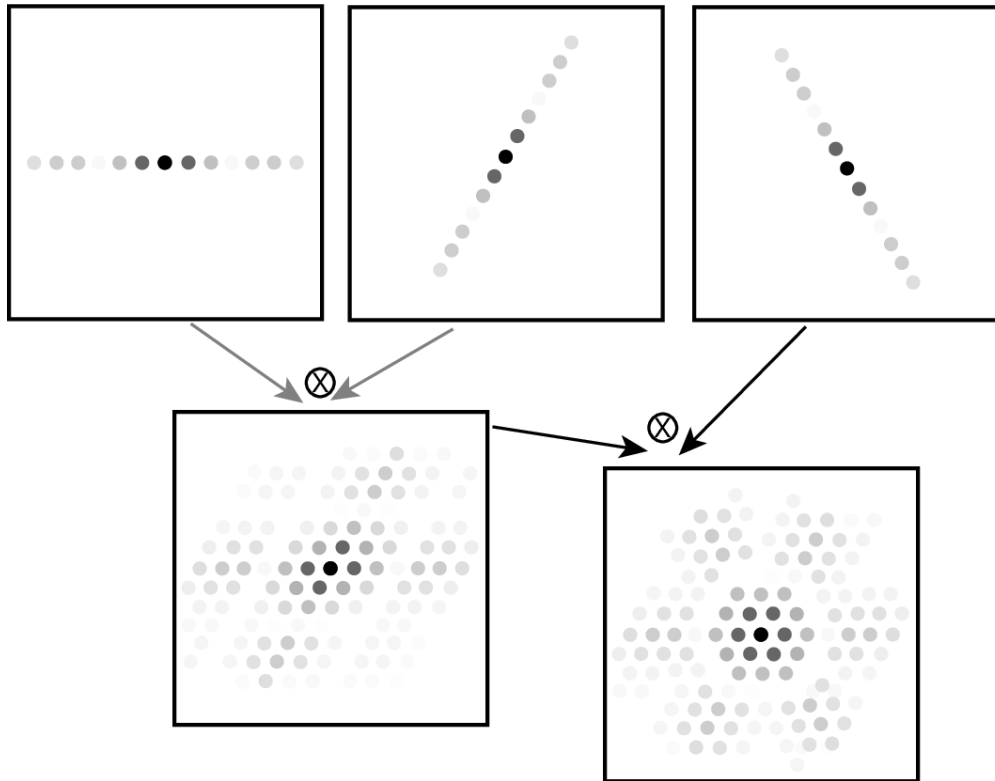


Figura 4.23: El campo difractado en una abertura formada por triángulos. Las Figuras de arriba representan los patrones de difracción para cada una de las tres rejillas que forman la abertura. Cada mancha de luz es un patrón del producto de dos funciones $\text{sinc}(\)$ como se indica en la ecuación (4.67). La figura de abajo a la izquierda es la convolución de los primeros dos términos en el patrón de difracción y la figura de abajo a la derecha es la convolución de ésta con el último término. (FraunhoferTriangles.m)

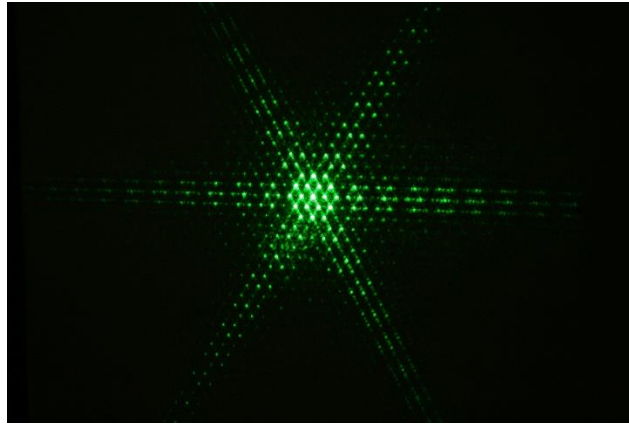


Figura 4.24: Fotografía del patrón de difracción de Fraunhofer obtenido de la abertura mostrada en la Figura 4.19. (FraunhoferTriangles.m)

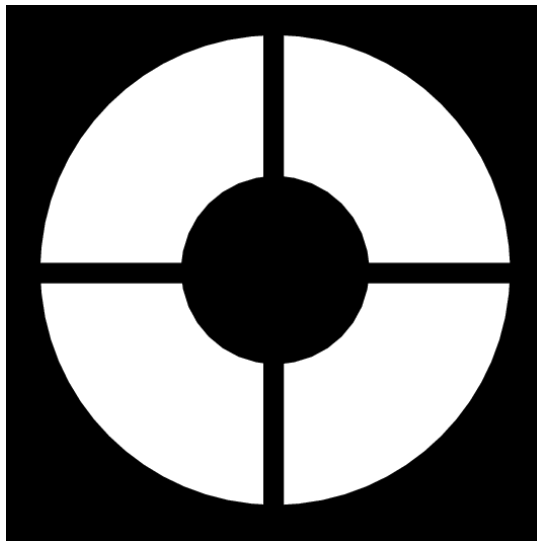


Figura 4.25: La abertura de un telescopio astronómico.

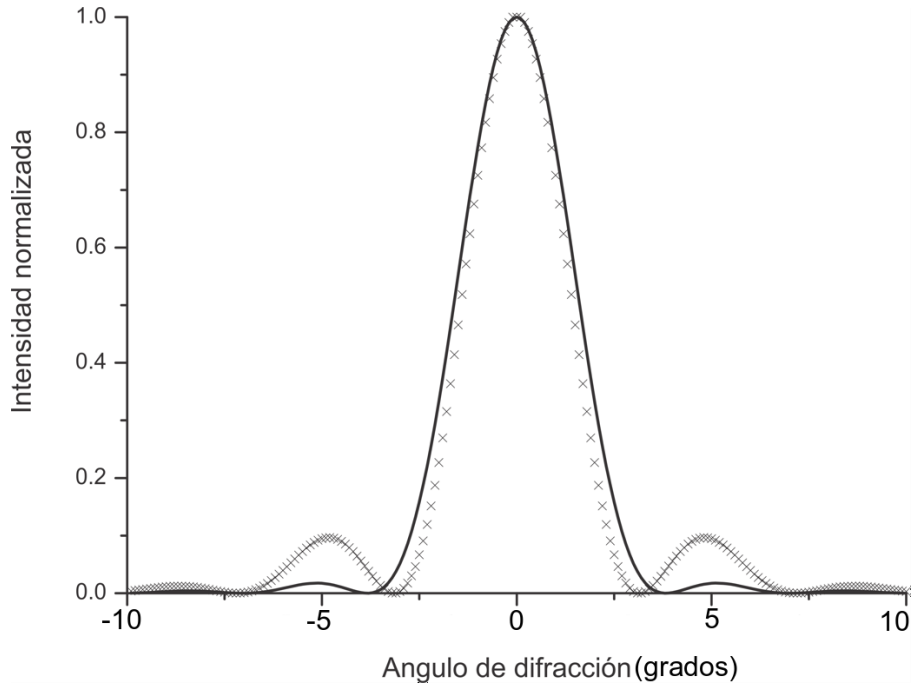


Figura 4.26: Intensidad contra ángulo para una abertura circular (línea continua) y para la diferencia de dos patrones de Airy (cruces). (FraunhoferTelescopio.m)

El parámetro c es el ancho de las monturas del secundario. La transformada de Fourier es:

$$U(x, y) = \left[\frac{J_1\left(\frac{ka\rho}{2z}\right)}{\frac{ka\rho}{2z}} - \frac{J_1\left(\frac{kb\rho}{2z}\right)}{\frac{kb\rho}{2z}} \right] \otimes \left[\left\{ \delta(x) - c \operatorname{sinc}\left(\frac{cx}{\lambda z}\right) \right\} \delta(y) \right] \otimes \left[\left\{ \delta(y) - c \operatorname{sinc}\left(\frac{cy}{\lambda z}\right) \right\} \delta(x) \right]. \quad (4.69)$$

Los dos términos al final de la ecuación (4.69) representan líneas de intensidad $\operatorname{sinc}(\quad)$ en las direcciones determinadas por los soportes del espejo secundario. El primer término es la diferencia de dos patrones de Airy. En la Figura 4.26 se muestra el patrón de Airy para el primario y el primer término de la ecuación (4.69). Se puede ver en la figura que el efecto de la diferencia es un aumento relativo en la intensidad del anillo secundario. Ésto produce un halo en las imágenes de estrellas tomadas con este tipo de telescopio. La Figura 4.27 es una foto que muestra estos dos efectos.

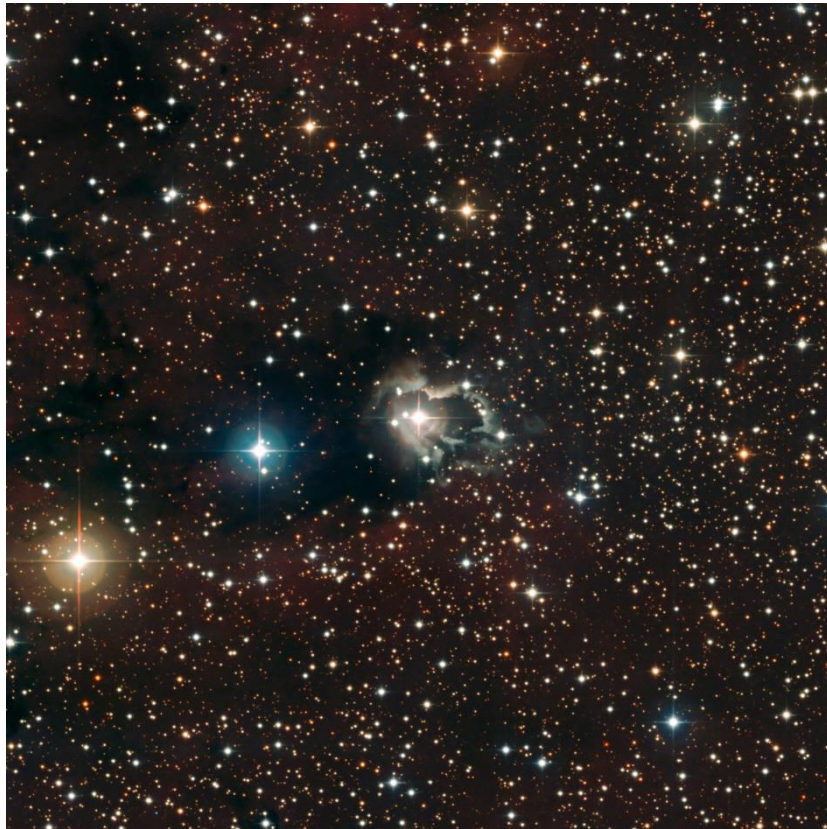


Figura 4.27: Imagen tomada con el MPG/ESO 2.2m telescopio en el observatorio de La Silla, Chile. Imagen obtenida de la colección de imagenes de la página de European Southern Observatory (Observatorio Europeo Astral)
<http://www.eso.org/public/images/>. (FraunhoferTelescopio.m)

Es importante indicar que los patrones de difracción para las últimas dos aberturas indicadas aquí se pueden calcular integrando numericamente sobre la parte abierta de la abertura, pero las técnicas de la óptica de Fourier utilizadas simplifican el problema para que se pueda *entender* la forma de los patrones de difracción.

Capítulo 5

Difracción de Fresnel

En este capítulo vamos a ver el caso de difracción de Fresnel, que es el caso cuando las distancias de la fuente o del punto de observación no están tan lejos como en el caso de difracción de Fraunhofer (Born y Wolf, 1980). Entonces, la integral de difracción queda como:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_i(x', y') e^{i\frac{k}{2z}((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx' dy'. \quad (5.1)$$

Ya vimos que se puede representar difracción de Fresnel como un sistema lineal, con su función de transferencia (ver la ecuación (4.10)). Otra forma de escribir difracción de Fresnel es como una transformada de Fourier. Expandiendo los términos cuadráticos en la fase de la ecuación (5.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} U(P) &= -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U_i(x', y') e^{i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)} e^{i\frac{k}{2z}(xx' + yy')} dx' dy', \end{aligned} \quad (5.2)$$

que se puede escribir en términos de la transformada de Fourier ([FresnelFFTRect.m](#), [FresnelFFTCirc.m](#)):

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \mathfrak{F} \left(U_i(x', y') e^{i\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)} \right), \quad (5.3)$$

o la transformada de Fourier de la función de la pupila multiplicada por un factor cuadrático de fase. Ésta ecuación es una forma de calcular difracción de Fresnel, sin embargo, numéricamente puede ser complicado utilizar esta expresión para realizar cálculos, particularmente para aberturas grandes comparadas con la longitud de onda, cuando el factor de fase en la transformada de Fourier de la ecuación (5.3) oscila rápidamente, y en general se trabaja sobre la ecuación integral (5.1) para calcular los patrones de difracción. El tratamiento matemático de la difracción de Fresnel es mucho más complicada que la difracción de Fraunhofer, y la mejor forma de verla es con ejemplos.

5.1 Difracción de Fresnel en una rendija

Si tomamos el ejemplo de una abertura cuadrangular:

$$U_i(x', y') = \text{rect} \left(\frac{x'}{l_{x'}} \right) \text{rect} \left(\frac{y'}{l_{y'}} \right), \quad (5.4)$$

la integral de difracción es:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \int_{-l_{y'}/2}^{l_{y'}/2} \int_{-l_{x'}/2}^{l_{x'}/2} e^{i\frac{k}{2z}((x-x')^2+(y-y')^2)} dx' dy', \quad (5.5)$$

que es separable en términos de x' y y' :

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \int_{-l_{x'}/2}^{l_{x'}/2} e^{i\frac{k}{2z}(x-x')^2} dx' \int_{-l_{y'}/2}^{l_{y'}/2} e^{i\frac{k}{2z}(y-y')^2} dy'. \quad (5.6)$$

Podemos convertir estas integrales en integrales conocidas con los cambios de variable:

$$\zeta = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x - x'), \quad \eta = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(y - y'),$$

para obtener:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \times \left\{ \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\left(l_{x'}/2\right)-x\right)}^{\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\left(l_{x'}/2\right)+x\right)} e^{i\frac{\pi}{2}\zeta^2} d\zeta \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{-\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\left(l_{y'}/2\right)-y\right)}^{\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\left(l_{y'}/2\right)+y\right)} e^{i\frac{\pi}{2}\eta^2} d\eta \right\}. \quad (5.7)$$

Esta ecuación se puede escribir en términos de las integrales de Fresnel (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt.$$

Escribiendo la ecuación (5.7) como:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \frac{\pi z}{k} U(\zeta) U(\eta), \quad (5.8)$$

con:

$$U(\zeta) = \int_0^{\zeta_1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta^2\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\zeta^2\right) \right) d\zeta - \int_0^{\zeta_2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\zeta^2\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\zeta^2\right) \right) d\zeta, \quad (5.9)$$

$$U(\eta) = \int_0^{\eta_1} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right) \right) d\eta - \int_0^{\eta_2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta^2\right) \right) d\eta, \quad (5.10)$$

donde

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(\left(l_{x'}/2 \right) + x \right), & \zeta_2 &= -\sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(\left(l_{x'}/2 \right) - x \right), \\ \eta_1 &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(\left(l_{y'}/2 \right) + y \right), & \eta_2 &= -\sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(\left(l_{y'}/2 \right) - y \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Podemos reescribir la ecuación (5.8) en términos de las integrales de Fresnel:

$$U(P) = -A \frac{e^{ikz}}{2} \{ [C(\zeta_1) - C(\zeta_2)] + i[S(\zeta_1) - S(\zeta_2)] \} \{ [C(\eta_1) - C(\eta_2)] + i[S(\eta_1) - S(\eta_2)] \}. \quad (5.12)$$

Entonces la distribución de la intensidad es:

$$I(P) = -A \frac{e^{ikz}}{2} \{ [C(\zeta_1) - C(\zeta_2)]^2 + [S(\zeta_1) - S(\zeta_2)]^2 \} \{ [C(\eta_1) - C(\eta_2)]^2 + [S(\eta_1) - S(\eta_2)]^2 \}. \quad (5.13)$$

Las integrales de Fresnel están incluidas en los paquetes de computadora de matemáticas, entonces ésta ecuación da un método para realizar los cálculos de patrones de difracción de Fresnel para este tipo de abertura. ([FresnelCSRect.m](#))

5.1.1 La Espiral de Cornu

No es fácil interpretar esta ecuación como en esta forma, pero se puede calcular la integral en una forma gráfica usando la espiral de Cornu (ver la Figura 5.1), que es la gráfica de $C(\alpha)$ contra $S(\alpha)$. Escribiendo como dl la longitud de arco en esta curva, tenemos que:

$$dl^2 = dC(\alpha)^2 + dS(\alpha)^2, \quad (5.14)$$

entonces:

$$\left(\frac{dl}{d\alpha}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\pi\alpha^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi\alpha^2}{2}\right) = 1, \quad (5.15)$$

y $dl = d\alpha$, o cambios en el parámetro α corresponden a cambios en la posición en la curva, como se muestra en la Figura 5.1.

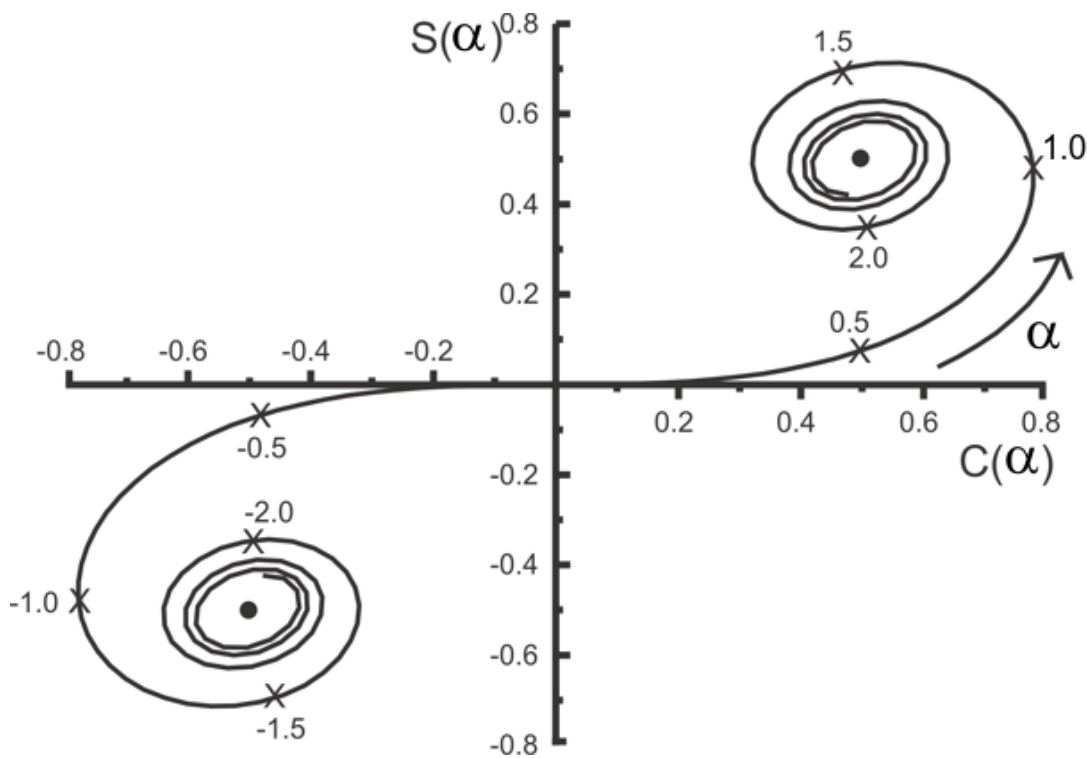


Figura 5.1: La espiral de Cornu

En la gráfica, la distancia entre dos puntos correspondientes a los valores α_1 y α_2 es:

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \left[(C(\alpha_1) - C(\alpha_2))^2 + (S(\alpha_1) - S(\alpha_2))^2 \right]^{1/2}, \quad (5.16)$$

entonces la ecuación (5.13) es igual a:

$$I(P) = \frac{A^2}{4} d^2(\zeta_1, \zeta_2) d^2(\eta_1, \eta_2). \quad (5.17)$$

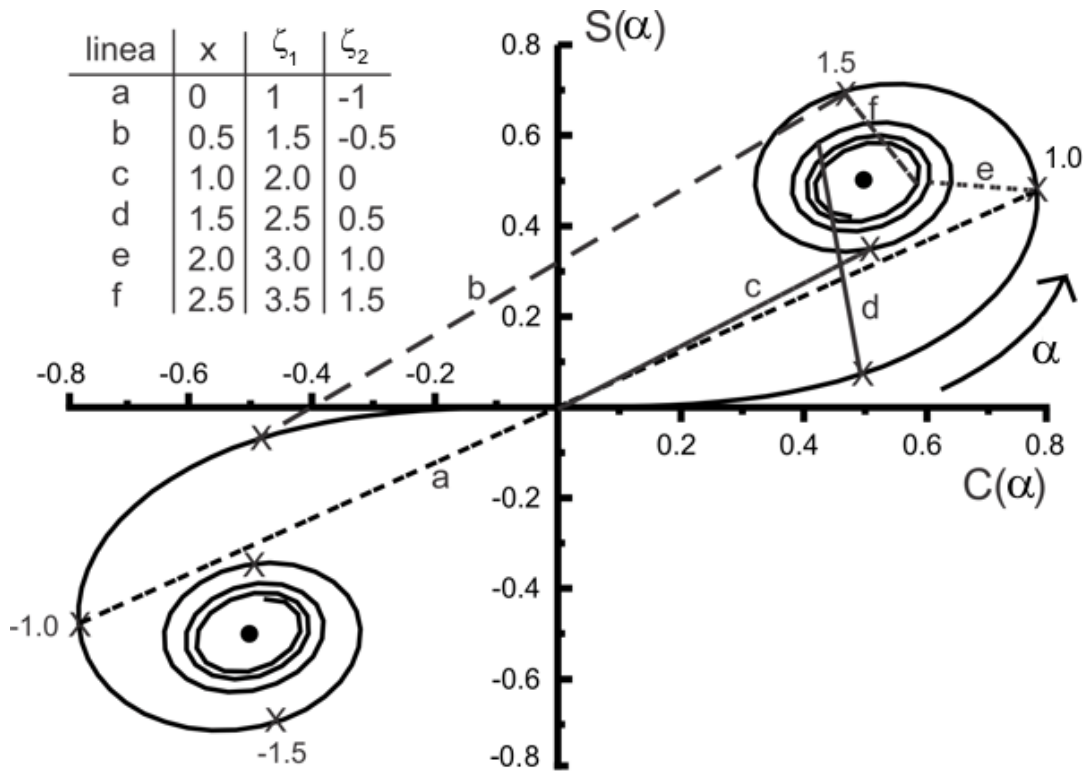


Figura 5.2: Un ejemplo del uso de la espiral de Cornu

Como ejemplo, podemos graficar la variación en x para el caso de la abertura cuadrada. Aquí $\zeta_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(\left(\frac{l}{2} \right) + x \right)$ y $\zeta_2 = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(\left(\frac{l}{2} \right) + x \right)$, donde x es la posición en el plano de observación. En la Figura 5.2 se muestran algunas de las

distancias $d(\zeta_1, \zeta_2)$ para diferentes valores de $\sqrt{\frac{k}{\pi z}} x$ para el caso de $\sqrt{\frac{k}{\pi z}} l = 4$; esto es, todas las distancias se escriben en unidades de $\sqrt{\frac{k}{\pi z}}$. La Figura 5.3 es la gráfica de la intensidad difractada contra la posición x .

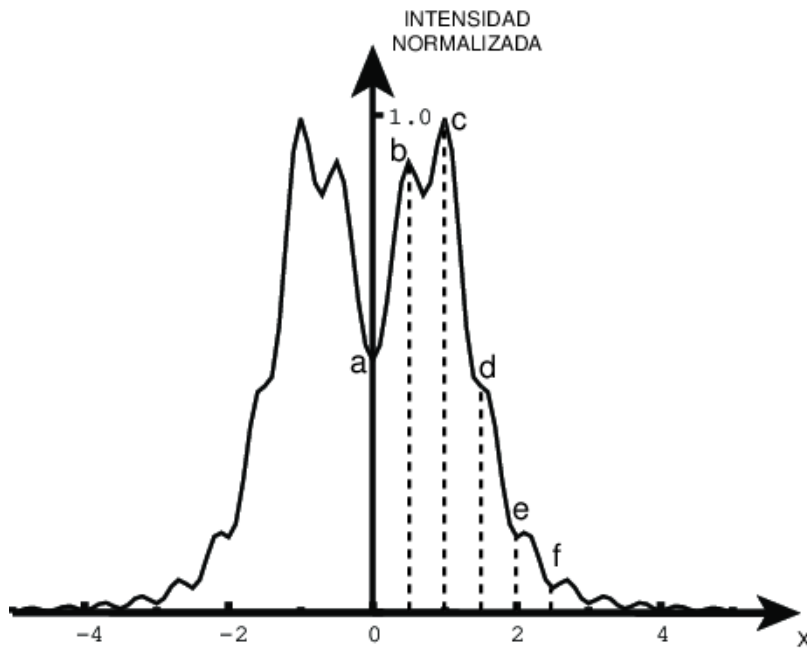


Figura 5.3: La distribución de intensidad correspondiendo al espiral de Cornu de la Figura 5.2. (FresnelCSRect.m)

5.2 Difracción de Fresnel con un haz enfocado

Otra geometría interesante para el caso de difracción de Fresnel es la geometría indicada en la Figura 5.4. Aquí la onda incidente es una onda convergente que tiene su foco en el punto $(0, y_0, z)$. El campo en la abertura abierta es:

$$U_i(x', y') = \frac{e^{-iks}}{s} \approx \frac{e^{-iks}}{z}, \quad (5.18)$$

donde:

$$s = \sqrt{(z^2 + (y' - y_0)^2 + x'^2)} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y' - y_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x'^2}{z} \right)^2 \right). \quad (5.19)$$

En esta última ecuación hicimos una expansión binomial y suponemos que se satisface la condición de Fresnel. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación para difracción de Fresnel, la ecuación (5.1), obtenemos:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{1}{z^2} \iint_S e^{i\frac{k}{2z}(x'^2 + (y' - y_0)^2)} e^{i\frac{k}{2z}((x - x')^2 + (y - y')^2)} dx' dy'. \quad (5.20)$$

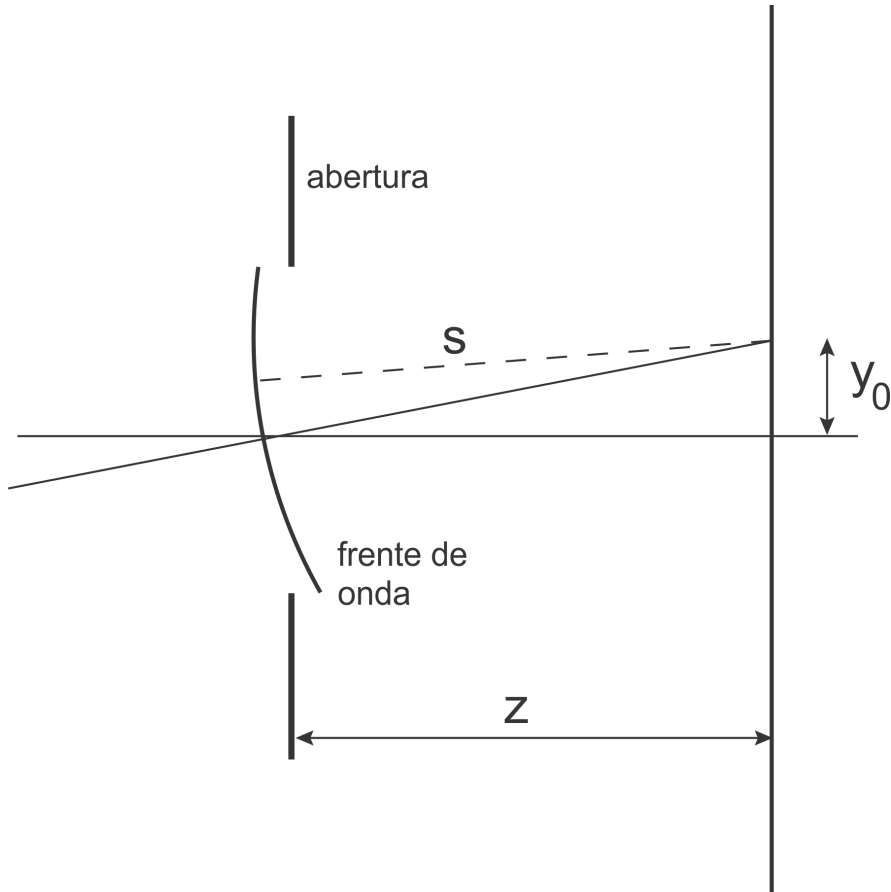


Figura 5.4: Geometría para el caso de una onda convergente incidente.

Expandiendo los términos cuadrados y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
 U(P) &= -\frac{iA}{\lambda} \frac{1}{z^2} \iint_S e^{-i\frac{k}{2z}(y_0^2 - x^2 - y^2 + 2xx' - 2(y-y_0)y')} dx' dy' \\
 &= -\frac{iA}{\lambda} \frac{1}{z^2} e^{-i\frac{k}{2z}(y_0^2 - x^2 - y^2)} \iint_S e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx' - (y-y_0)y')} dx' dy'.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Se puede ver que la parte de la integral de esta ecuación es la transformada de Fourier de la parte abierta de la abertura, S , centrado en el punto $(x, y - y_0)$, es decir, aparte del término de fase afuera de la integral (que desaparece para la intensidad) y un factor de $1/z$, el patrón de difracción de Fresnel de una onda convergente, si observamos en el plano focal de la onda incidente, es igual al patrón de difracción de Fraunhofer de la misma abertura centrado en el punto donde enfoca la onda incidente.

5.3 Propagación por pasos

Suponemos que tenemos propagación por una distancia z que se puede escribir como:

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n. \tag{5.22}$$

Esta propagación se puede considerar utilizando la función de transferencia para difracción cuando se satisface la condición de Fresnel, que es la ecuación (4.10):

$$H(u, v) = \frac{1}{\pi} e^{ikz} e^{-i\pi\lambda z(u^2 + v^2)}.$$

Sustituyendo la ecuación (5.22) en esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned}
 H(u, v) &= \frac{1}{\pi} e^{ik(z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n)} e^{-i\pi\lambda(z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n)(u^2 + v^2)} \\
 &= \frac{1}{\pi} e^{ikz_1} e^{ikz_2} e^{ikz_3} \dots e^{ikz_n} \\
 &\quad \times e^{-i\pi\lambda z_1(u^2 + v^2)} e^{-i\pi\lambda z_2(u^2 + v^2)} e^{-i\pi\lambda z_3(u^2 + v^2)} \dots e^{-i\pi\lambda z_n(u^2 + v^2)},
 \end{aligned}$$

que se puede escribir como:

$$H(u, v) = \frac{1}{\pi} \prod_{j=1}^n e^{ikz_j} e^{-i\pi\lambda z_j(u^2+v^2)}, \quad (5.23)$$

que significa que la propagación por una distancia z es igual a la propagación por la distancia z_1 , seguida por la propagación por la distancia z_2 , seguida por la propagación por la distancia z_3 , etc., como se espera físicamente.

5.4 Escalamiento en difracción de Fresnel

La ecuación general para la difracción de Fresnel en una dimensión es:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \int_S U_i(x') e^{i\frac{k}{2z}(x'-x)^2} dx'. \quad (5.24)$$

Aquí vamos a suponer que la fuente de luz se encuentra a una distancia finita z_0 de la abertura (es una fuente puntual o tiene un enfocamiento del haz) y la pantalla de observación se encuentra a una distancia z de la abertura. Se puede hacer una expansión binomial del término de fase de la onda esférica incidente para obtener:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ik(z+z_0)}}{zz_0} \int_S e^{i\frac{k}{2z_0}(x')^2} e^{i\frac{k}{2z}(x'-x)^2} dx'. \quad (5.25)$$

Considerando sólo el término de fase adentro de la integral y expandiendo el cuadrado se obtiene:

$$e^{\left(i\frac{k}{2}\left\{x'^2\left[\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z}\right]-2x'\left[\frac{x}{z}\right]+\left[\frac{x^2}{z}\right]\right\}\right)}. \quad (5.26)$$

Cuando $\left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right] = 0$ tenemos el caso analizado arriba, el haz incidente se enfoca sobre la pantalla de observación, y el patrón de difracción de Fresnel es igual a la transformada de Fourier de la abertura. Dividiremos los otros casos en dos:

$\left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right] > 0$, cuando la fuente puntual está antes de la abertura o después de la pantalla,
 $\left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right] < 0$, cuando la fuente puntual está entre la abertura y la pantalla.

Para el primer caso, completando el cuadrado dentro de la exponencial, podemos escribir la ecuación para la fase como:

$$e^{\left(i\frac{k}{2}\left[\frac{x^2}{z}\right] - \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]^{-1} \left[\frac{x}{z}\right]^2\right)} e^{\left(i\frac{k}{2}\left\{x' \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]^{1/2} - \left[\frac{x}{z}\right] \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]^{-1/2}\right\}^2\right)}. \quad (5.27)$$

Esto se puede verificar multiplicando todos los términos en la expresión. El primer término en la ecuación (5.27) es igual a:

$$e^{\left(i\frac{k}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{z}\right] - \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]^{-1} \left[\frac{x}{z}\right]^2\right\}\right)} = e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{z_0+z}\right)}, \quad (5.28)$$

y escribiendo $a = z_0/z$, se puede escribir el segundo término de fase de la ecuación (5.27) como:

$$e^{\left(i\frac{k}{2}\left\{x' \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]^{1/2} - \left[\frac{x}{z}\right] \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]^{-1/2}\right\}^2\right)} = e^{\left(i\frac{k}{2z}\left\{x' \left[\frac{1+a}{a}\right]^{1/2} - x \left[\frac{a}{1+a}\right]^{1/2}\right\}^2\right)}. \quad (5.29)$$

Entonces el campo difractado queda como:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ik(z+z_0)}}{zz_0} e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{z_0+z}\right)} \int_S e^{\left(i\frac{k}{2z}\left\{x' \left[\frac{1+a}{a}\right]^{1/2} - x \left[\frac{a}{1+a}\right]^{1/2}\right\}^2\right)} dx'. \quad (5.30)$$

Para el segundo caso $\left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right] < 0$, podemos escribir la fase dentro de la integral como:

$$e^{\left(i\frac{k}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{z}\right]-\left[\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z}\right]^{-1}\left[\frac{x}{z}\right]^2\right\}\right)}e^{\left(-i\frac{k}{2}\left\{x'\left|\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z}\right|^{1/2}+\left[\frac{x}{z}\right]\left|\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z}\right|^{-1/2}\right\}^2\right)}, \quad (5.31)$$

donde los términos de la raíz cuadrada tienen el módulo del término $\left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z}\right]$ y hay un cambio en el signo del segundo término comparado con el primer caso. Para este caso, el campo difractado es:

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ik(z+z_0)}}{zz_0} e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{z_0+z}\right)} \int_S e^{\left(-i\frac{k}{2z}\left\{x'\left|\frac{1+a}{a}\right|^{1/2}+x\left|\frac{a}{1+a}\right|^{1/2}\right\}^2\right)} dx'. \quad (5.32)$$

Comparando las ecuaciones (5.30) y (5.32) con la ecuación para difracción de Fresnel, la ecuación (5.8), podemos concluir lo siguiente:

1. La variable de integración, x' , la posición en la abertura, tiene un factor de escala de $\sqrt{|(1+a)/a|}$. Esto significa que todas las combinaciones de z y z_0 que dan el mismo valor de a producen el mismo patrón de difracción. Además, si z_0 o z cambia para que a varíe, el patrón de difracción producido es el mismo que el patrón de difracción de la abertura escalada con los valores de z y z_0 originales. Esto significa que cambios en las posiciones de la fuente y el detector producen el mismo efecto en el patrón de difracción que un escalamiento de la abertura. Otra forma de pensar en esto es, si z_0 esta fijo, es decir, tenemos el haz incidente enfocado en un punto fijo, cambios en z son equivalentes a cambios en el tamaño de la abertura con la pantalla (o z) fija. Esto significa que cambiando la posición de la pantalla obtenemos los patrones de difracción de todos los posibles tamaños de la abertura con la misma forma que la abertura original (Furlan *et al*, 2001). Nota que, cuando $a = 0$, el haz incidente está enfocado en la abertura, que es un caso no válido porque se requiere de una mínima distancia entre la abertura y la fuente para que la teoría de Fresnel sea válida.
2. Las variables en el plano de detección tienen un factor de escalamiento de $\sqrt{|a/(1+a)|}$. Esto significa que, aunque se obtienen todos los patrones de difracción de Fresnel de todos los tamaños de la abertura, éstos patrones son escalados dependiendo del valor de a (Furlan *et al*, 2001).

3. La diferencia de signos en el factor de fase en la integral en las ecuaciones (5.30) y (5.32) también es importante. Hay una inversión del patrón de difracción en el segundo caso debido al cambio de signo en frente del término de x . Si la abertura es simétrica, éste factor no es importante, pero si no es simétrica, el patrón de difracción es invertida (veremos esto en los ejemplos abajo). El factor negativo que multiplica a toda la fase del segundo caso desaparece al tomar la intensidad.

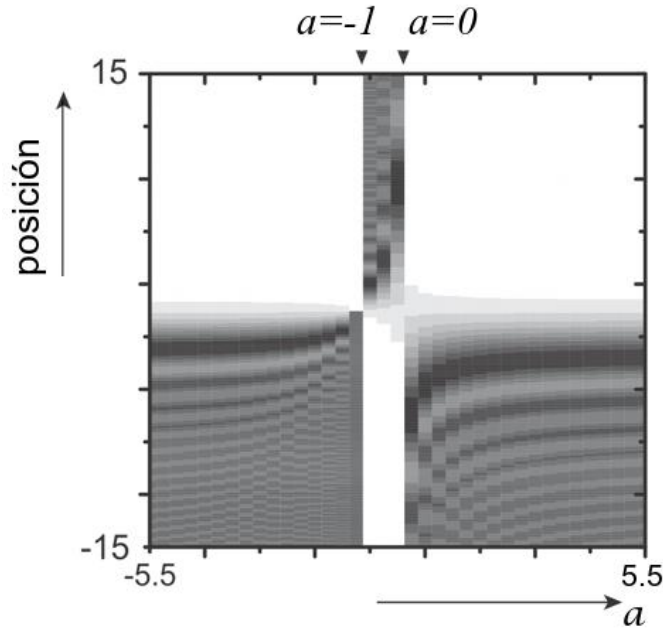


Figura 5.5: La variación del patrón de difracción de un borde con a . (Recuerda que a positiva es el enfocamiento antes de la abertura y a negativa es el enfocamiento después de la abertura.) (FresnelCSBordeConEscala.m)

Aquí calculamos dos ejemplos para ilustrar este efecto de escala. Escribimos las ecuaciones (5.30) y (5.32) en la forma de las integrales de Fresnel:

$$U(P) \propto \int_{\zeta_{min}}^{\zeta_{max}} e^{i\frac{\pi}{2}\zeta^2} d\zeta, \quad (5.33)$$

donde:

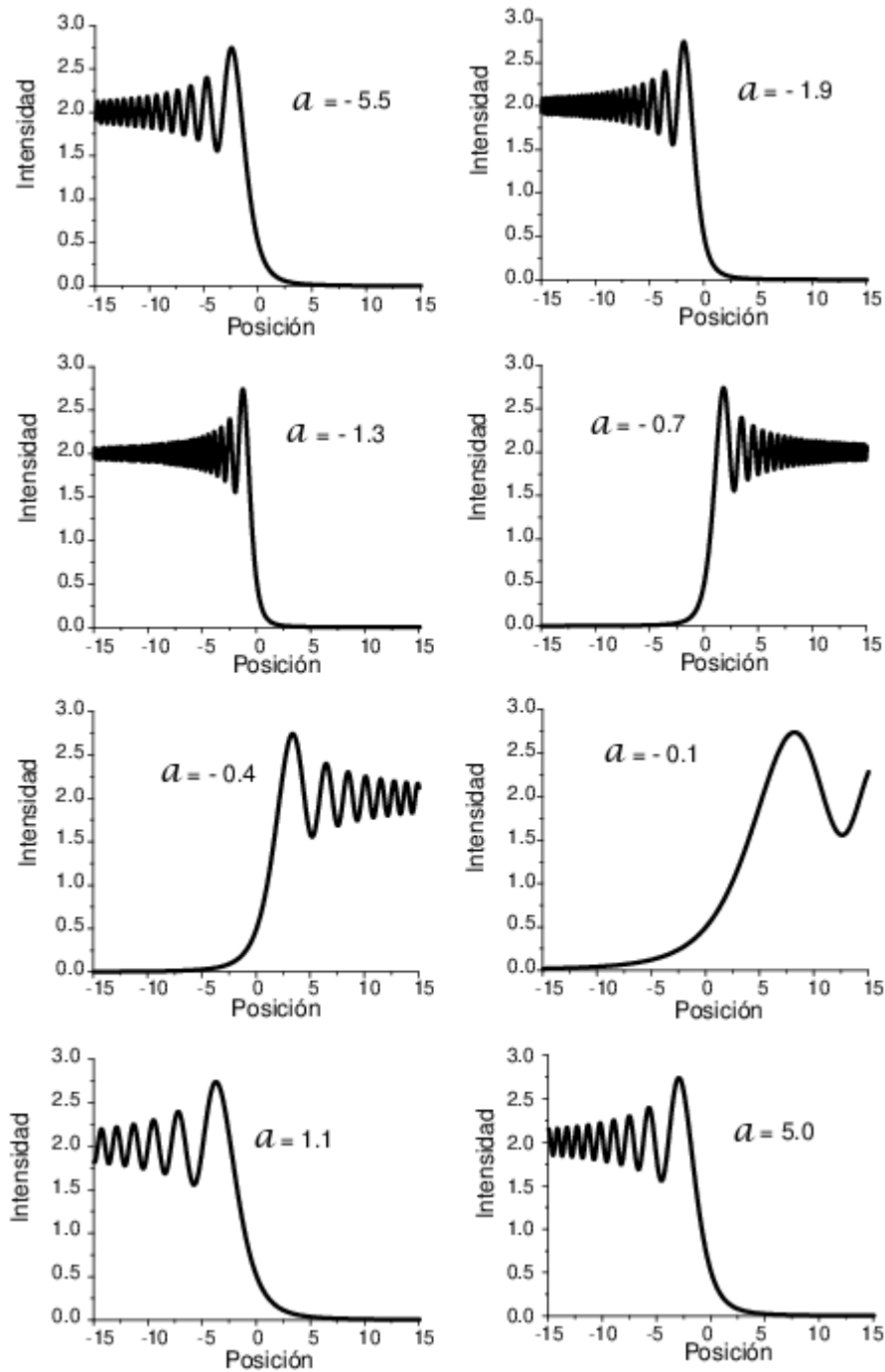


Figura 5.6: Los patrones de difracción de Fresnel de un borde para diferentes valores de a . (FresnelCSBordeConEscala.m)

$$\begin{aligned}
\zeta_{max} &= \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left\{ x'_{max} \left[\frac{1+a}{a} \right]^{1/2} - x \left[\frac{a}{1+a} \right]^{1/2} \right\}, & \text{si } \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \right] > 0, \\ \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left\{ x'_{max} \left| \frac{1+a}{a} \right|^{1/2} + x \left| \frac{a}{1+a} \right|^{1/2} \right\}, & \text{si } \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \right] < 0, \end{cases} \\
\zeta_{min} &= \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left\{ x'_{min} \left[\frac{1+a}{a} \right]^{1/2} - x \left[\frac{a}{1+a} \right]^{1/2} \right\}, & \text{si } \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \right] > 0, \\ \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left\{ x'_{min} \left| \frac{1+a}{a} \right|^{1/2} + x \left| \frac{a}{1+a} \right|^{1/2} \right\}, & \text{si } \left[\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \right] < 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

y x'_{max} y x'_{min} son los límites máximos y mínimos de la abertura. En ambos ejemplos el valor de $z = 10$, es decir, la pantalla está fija en una posición.

El primer ejemplo es el caso de un borde, por lo cual $x'_{max} = 0$, $x'_{min} = -\infty$, $\zeta_{max} = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}} x \left[\frac{a}{1+a} \right]^{1/2}$ y $\zeta_{min} = -\infty$. Esto significa que el patrón de difracción es siempre el mismo con un escalamiento en el plano de detección. Las Figuras 5.5 y 5.6 muestran los resultados para este caso cuando se cambia la posición de enfocamiento del haz incidente para variar a .

La región donde hay una inversión en el patrón de difracción es cuando hay un enfocamiento del haz incidente entre la abertura y la pantalla. La Figura 5.7 muestra este caso para indicar físicamente porqué hay una inversión. También se puede ver, en las Figuras 5.5 y 5.6, que los patrones de difracción son todos de la misma forma con un escalamiento dependiendo de la posición de enfocamiento.

El segundo ejemplo es una rendija de ancho w . En este caso $x_{max} = w/2$ y $x_{min} = -w/2$. Los resultados para el caso de $w = 6$ se presentan en las Figuras 5.8 y 5.9. En este caso, se puede ver que el patrón de difracción varía con la posición de enfocamiento del haz incidente. Es importante notar que estos patrones de difracción son todos los posibles patrones de difracción de una rendija para esta distancia a la pantalla. Nótese también que los valores absolutos de las curvas presentadas aquí no son correctos porque ignoran las constantes afuera de la integral que incluyen el factor $1/z_0$ para la variación de la amplitud del haz incidente al cambiar la posición de enfocamiento.

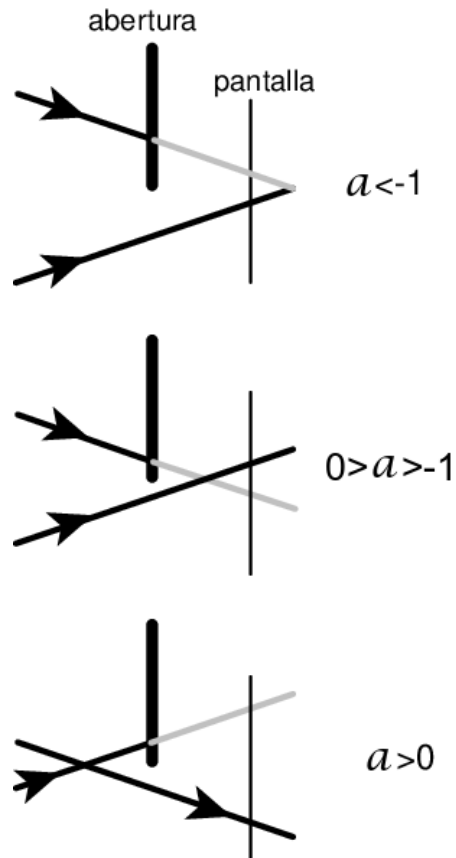


Figura 5.7: Esquema para mostrar porqué hay una inversión en el patrón de difracción para diferentes valores de a . Nótese los rayos tapados, de color gris. Cuando $0 > a > -1$ el rayo tapado es el de abajo, el opuesto a los otros casos.

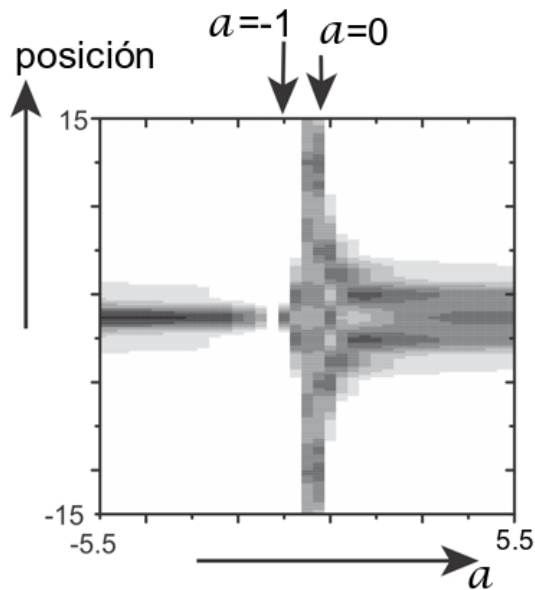


Figura 5.8: Variación del patrón de difracción de una rendija como función de a .
(FresnelCSRendijaConEscala.m)

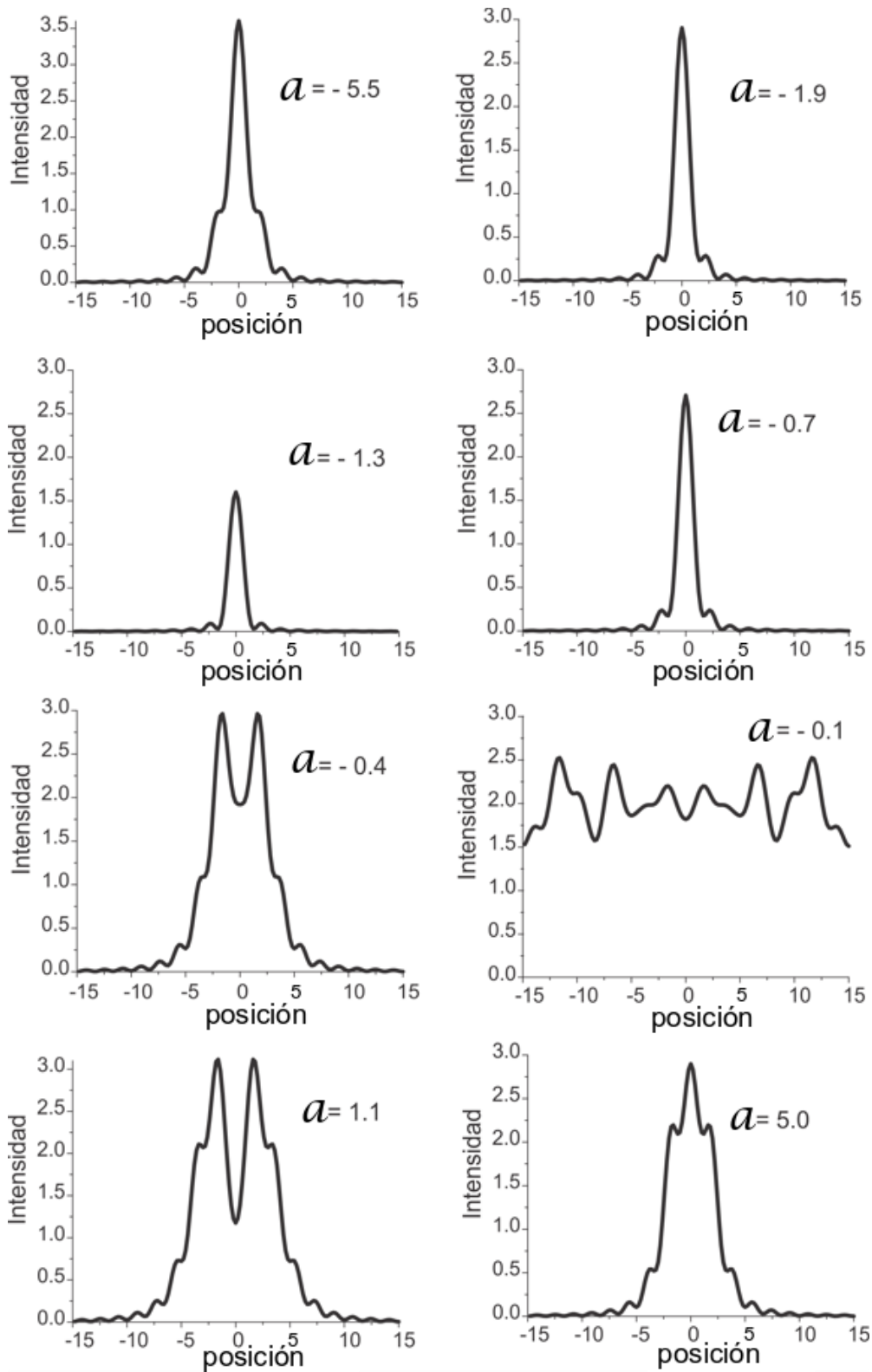


Figura 5.9: Difracción de Fresnel de una rendija con diferentes valores del parámetro a . (FresnelCSBordeConEscala.m)

5.5 Difracción de Fresnel en una abertura circular

Para el caso de difracción de Fresnel en una abertura circular, la integral a resolver es:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_S \text{circ} \left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{r'} \right) e^{i\frac{k}{2z}((x'-x)^2 + (y'-y)^2)} dx' dy', \quad (5.35)$$

donde r' es el radio de la abertura circular. Escribiendo la integral en coordenadas polares:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^{2\pi} \int_0^{r'} e^{i\frac{k}{2z}(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi))} r dr d\theta, \quad (5.36)$$

con:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi), & x' &= r \cos(\theta), \\ y &= \rho \sin(\phi), & y' &= r \sin(\theta). \end{aligned}$$

Reorganizando los términos de la integral tenemos:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} \int_0^{r'} \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{k}{2z}(2\rho r \cos(\theta - \phi))} d\theta \right\} e^{i\frac{k}{2z}(r^2)} r dr. \quad (5.37)$$

La integral sobre θ es igual a la integral que vimos para la transformada de Fourier de la función $\text{circ}(\)$, y se puede calcular su resultado en términos de la función de Bessel de orden cero:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} 2\pi \int_0^{r'} J_0 \left(\frac{2\pi r \rho}{z} \right) e^{i\frac{k}{2z}(r^2)} r dr. \quad (5.38)$$

Ahora, siguiendo el trabajo de Lommel (Born y Wolf, 1980; Mielenz, 1998), separemos la integral en sus partes reales e imaginarias:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} \pi r'^2 2 \int_0^1 J_0(vr) e^{i\frac{u}{2}(r^2)} r dr$$

$$= U_0(L(u, v) - iM(u, v)), \quad (5.39)$$

donde $r \rightarrow \frac{r}{r'}$, $u = \frac{kr'^2}{z}$, $v = \frac{2\pi\rho r'}{z}$ y $U_0 = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{i\frac{k}{2z}\rho^2} \pi r'^2$ y:

$$L(u, v) = 2 \int_0^1 J_0(vr) \cos\left(i\frac{u}{2}r^2\right) r dr, \quad (5.40)$$

$$M(u, v) = 2 \int_0^1 J_0(vr) \sin\left(i\frac{u}{2}r^2\right) r dr.$$

Aquí utilizamos las funciones de Lommel:

$$U_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{u}{v}\right)^{n+2s} J_{n+2s}(v), \quad (5.41)$$

$$V_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{v}{u}\right)^{n+2s} J_{n+2s}(v).$$

Calculando la integral por partes en la ecuación (5.40) (Born y Wolf, 1980) se obtiene:

$$L(u, v) = \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_1(u, v) + \frac{\sen\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_2(u, v)$$

$$= \frac{2}{u} \left\{ \sin\left(\frac{v^2}{2u}\right) + V_0(u, v) \sin\left(\frac{u}{2}\right) - V_1(u, v) \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right\}, \quad (5.42)$$

$$M(u, v) = \frac{\sen\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_1(u, v) - \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}} U_2(u, v)$$

$$= \frac{2}{u} \left\{ \cos\left(\frac{v^2}{2u}\right) + V_0(u, v) \cos\left(\frac{u}{2}\right) - V_1(u, v) \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right\}.$$

De la ecuación (5.39), la intensidad difractada se calcula como:

$$I(\rho) = L(u, v)^2 + M(u, v)^2. \quad (5.43)$$

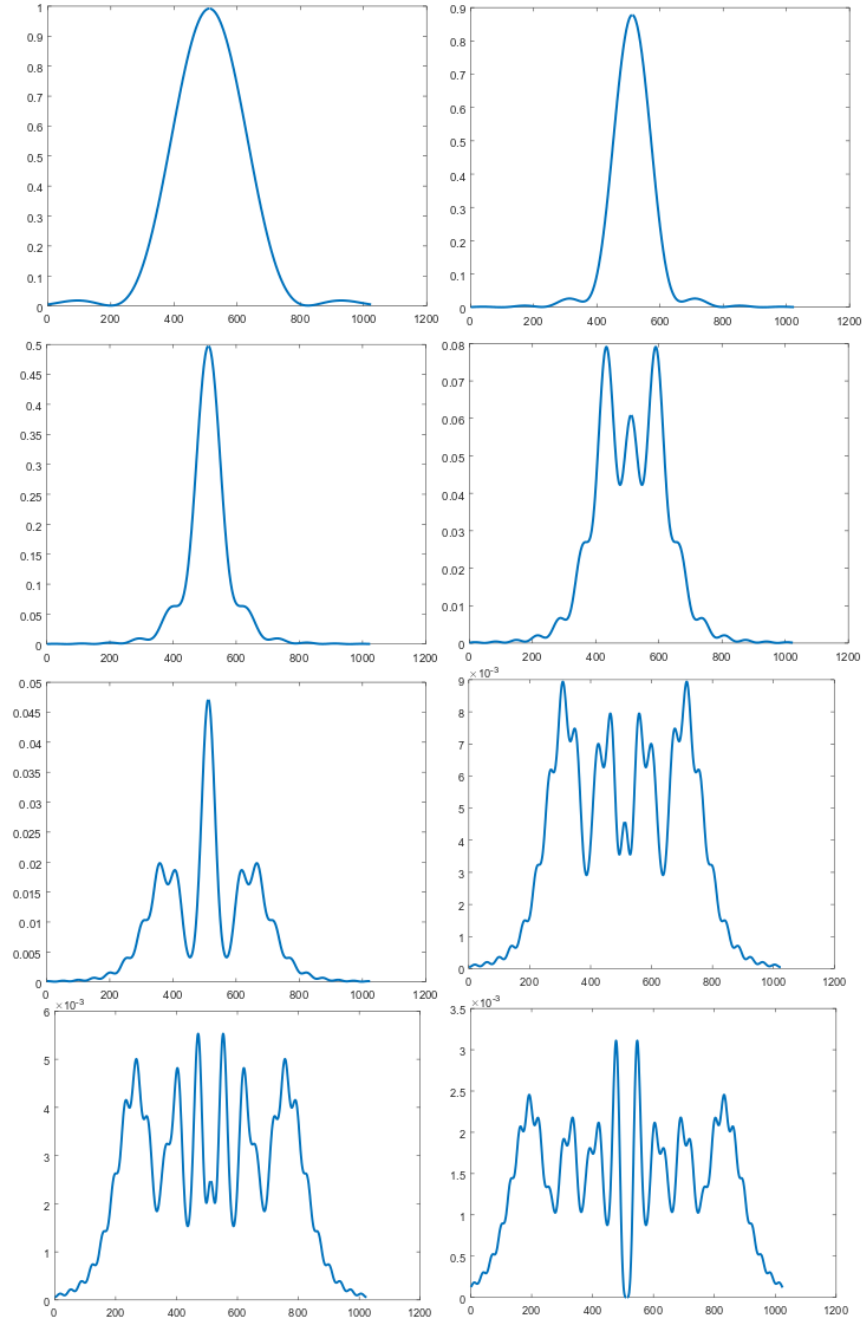


Figura 5.10: Patrones de difracción de Fresnel de una abertura circular. El parámetro r'/z es, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.27, 0.33, 0.38 y 0.45. (FresnelLommelCirc.m, FresnelFFTCirc.m)

La Figura 5.10 muestra algunos ejemplos de patrones de difracción de aberturas circulares, calculados utilizando éstas ecuaciones. Nota que, en algunos casos hay un mínimo de intensidad en el centro del patrón. Éste punto oscuro se llama el punto de Poisson y fue evidencia para la teoría de ondas para explicar las propiedades de la luz (Hecht, 1998).

5.6 Transformada fraccional de Fourier

Ahora vamos a considerar la geometría de la Figura 5.11. Otra vez tenemos una onda esférica, que converge en el punto $(0,0,R)$, y observamos en el plano z . La ecuación que describe la difracción es la ecuación (5.1):

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_S U_i(x', y') e^{i\frac{k}{2z}((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx' dy', \quad (5.44)$$

donde ahora:

$$U_i(x', y') = \frac{e^{-iks}}{R}, \quad (5.45)$$

con:

$$s = \sqrt{R^2 + x'^2 + y'^2} \approx R + \frac{y'^2}{2R} + \frac{x'^2}{2R}, \quad (5.46)$$

donde usamos una expansión binomial con $R \gg x', y'$. Sustituyendo las ecuaciones (5.45) y (5.46) en la ecuación (5.44), expandiendo el término cuadrado en el exponente de esta última ecuación y suponiendo que podemos separar la dependencia en x e y , obtenemos:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_S e^{ik\frac{x^2}{2z}} e^{ik\frac{x'^2}{2R}} e^{ik\frac{x'^2}{2z}} e^{ik\frac{x'x}{z}} dx' \\ \times \int_S e^{ik\frac{y^2}{2z}} e^{ik\frac{y'^2}{2R}} e^{ik\frac{y'^2}{2z}} e^{ik\frac{y'y}{z}} dy', \quad (5.47)$$

que se puede simplificar a:

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \frac{e^{-ikR}}{R} \int_S e^{i\frac{k}{2z}\{x^2 + (1-\frac{z}{R})x'^2\}} e^{ik\frac{x'x}{z}} dx' \times \int_S e^{i\frac{k}{2z}\{y^2 + (1-\frac{z}{R})y'^2\}} e^{ik\frac{y'y}{z}} dy'. \quad (5.48)$$

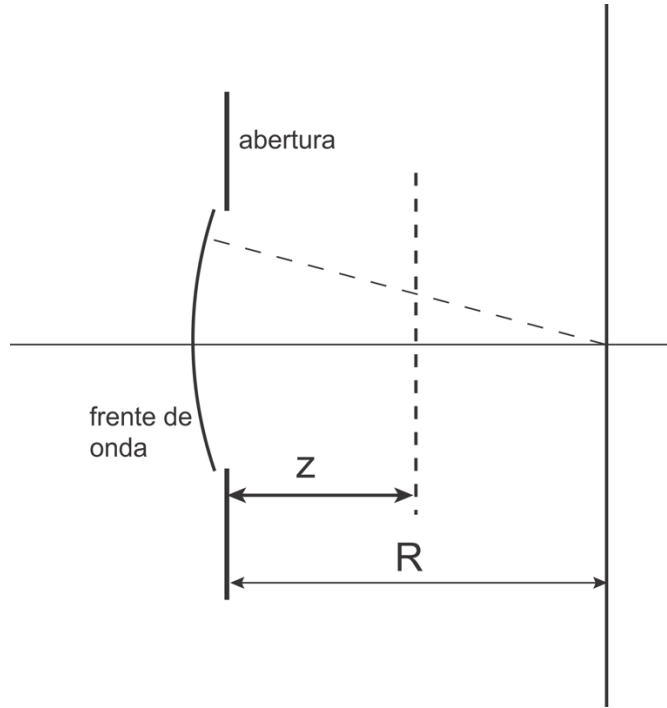


Figura 5.11: Geometría para calcular la transformada fraccional de Fourier.

En 1980, Namias (Namias,1980; McBride y Kerr, 1987), propuso una definición de lo que él llamó la transformada fraccional de Fourier $\mathfrak{F}_\alpha(\quad)$. Su definición es:

$$\mathfrak{F}_\alpha(f(t)) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{\text{sen}(\alpha)}} e^{i\frac{1}{2}s^2 \cot(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{1}{2}t^2 \cot(\alpha)} e^{i\frac{st}{\text{sen}(\alpha)}} f(t) dt, \quad (5.49)$$

donde el término $\text{sen}(\alpha)$ en la última exponencial da la orden fraccional de la transformada de Fourier. Cuando $\alpha = \pi/2$, $\text{sen}(\alpha) = 1$, y $\cot(\alpha) = 0$, y la ecuación (5.49) reduce a:

$$\mathfrak{F}_{\frac{\pi}{2}}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t) dt, \quad (5.50)$$

que es la ecuación de la transformada de Fourier usual. Cuando $\alpha \rightarrow 0$, $\text{sen}(\alpha) \rightarrow \alpha$, y $\text{cot}(\alpha) \rightarrow 1/\alpha$, la ecuación (5.48) nos da:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_0(f(t)) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\alpha}} e^{i\frac{s^2}{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{t^2}{2\alpha}} e^{i\frac{st}{\alpha}} f(t) dt \right\}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-i\frac{(s-t)^2}{2\alpha}} f(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

pero se puede mostrar que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-i\frac{(s-t)^2}{2\alpha}} \right\} = \delta(s - t),$$

entonces:

$$\mathfrak{F}_0(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - t) f(t) dt = f(s), \quad (5.51)$$

que es la función original. Regresando a la ecuación (5.49) para valores generales de α podemos hacer el cambio de variables:

$$\begin{aligned} s &= i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z}} \tan(\alpha) x, \\ t &= i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z}} \text{sen}(\alpha) \cos(\alpha) x', \\ g(x') &= f(t), \end{aligned}$$

para obtener:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_\alpha(f(t)) &= i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda z} \cos(\alpha)} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + x'^2 \cos^2(\alpha))} e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}xx'} g(x') dx' \\
&= K e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{\lambda z}x'^2 \cos^2(\alpha)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda z}xx'} g(x') dx',
\end{aligned}
\tag{5.52}$$

donde el término K agrupa todos los términos afuera de la integral. Comparando la ecuación (5.52) con la ecuación (5.48) vemos que (Pellat-Finet, 1994; Torre, 2002):

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \frac{e^{-ikR}}{R} K^2 \mathfrak{F}_\alpha(S_{x'}) \mathfrak{F}_\alpha(S_{y'}), \tag{5.53}$$

donde $S_{x'}$, es la forma de la abertura en la dirección x' , $S_{y'}$, es la forma en la dirección y' , y la variable α está relacionada con la distancia entre la abertura y el plano de observación, z , como $\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{z}{R}$.

Cuando $z = R$, tenemos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, y, de la ecuación (5.52):

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \frac{e^{-ikR}}{R} K^2 e^{i\frac{\pi}{\lambda z}x^2} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}y^2} \mathfrak{F}(S_{x'}) \mathfrak{F}(S_{y'}), \tag{5.54}$$

donde $\mathfrak{F}(\)$ es la transformada de Fourier usual. Esto es el mismo resultado que vimos antes, si la pantalla coincide con la posición de enfocamiento del haz, la amplitud es proporcional a la transformada de Fourier de la abertura multiplicada por un factor cuadrático de fase.

Cuando $z = 0$, $\cos^2(\alpha) = 1$, y $\sin^2(\alpha) = 0$, tenemos el caso que vimos en la ecuación (5.51):

$$U(x, y) \propto S_{x'} S_{y'}, \tag{5.55}$$

es decir, la amplitud difractada es una réplica de la forma de la abertura. Sabemos que esto es cierto, cerca de la abertura la amplitud de la luz está dada por la sombra directa de la abertura.

Entonces, la amplitud a una distancia z de la abertura está dada por la transformada fraccional de Fourier de orden $\sin(\alpha)$, donde $\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{z}{R}$.

Una propiedad interesante de la transformada fraccional de Fourier es que:

$$\mathfrak{F}_\alpha \left(\mathfrak{F}_\beta (f(x)) \right) = \mathfrak{F}_{\alpha+\beta} (f(x)). \quad (5.56)$$

Físicamente, esto significa que la propagación de la onda entre $z = 0$ y $z = R$ es igual a una propagación entre $z = 0$ y $z = z'$ seguida por una propagación entre $z = z'$ y $z = R$, independientemente del valor z' . También, ésta propiedad nos da una definición de la transformada fraccional inversa de Fourier. La transformada inversa tiene el parámetro α y el orden $\sin \alpha$ negativos, para que:

$$\mathfrak{F}_\alpha \left(\mathfrak{F}_{-\alpha} (f(x)) \right) = \mathfrak{F}_{\alpha-\alpha} (f(x)) = \mathfrak{F}_0 (f(x)) = f(x).$$

Físicamente, la amplitud en una distancia z de la abertura está relacionada con la amplitud en la posición $z = R$ por la transformada fraccional inversa de Fourier de parámetro $-\alpha'$ y orden $-\sin \alpha'$, donde la condición para el valor de α' es la misma condición que antes con $z \rightarrow R - z$, $\cos^2(\alpha') = 1 - \frac{R-z}{R} = \frac{z}{R}$:

$$U(x', y') = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ik(R-z)}}{R-z} \frac{e^{-ikR}}{R} K^2 \mathfrak{F}_{-\alpha'} (U(x)), \quad (5.57)$$

con:

$$\mathfrak{F}_{-\alpha} (U(x)) = K e^{-i\frac{\pi}{\lambda(R-z)}x'^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{\lambda(R-z)}x^2 \cos^2(\alpha)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda(R-z)}xx'} U(x) dx. \quad (5.58)$$

5.7 Efecto Talbot

Aquí veremos cómo se difracta la luz en una abertura periódica:

$$f(x) = \text{comb} \left(\frac{x}{a} \right) \otimes g(x). \quad (5.59)$$

Entonces la transformada de Fourier de la abertura es:

$$F(u) = \frac{1}{a} \text{comb}(au)G(u). \quad (5.60)$$

Vimos en el Capítulo 4 que la función de transferencia para difracción de Fresnel es:

$$H(u) = e^{ikz} e^{-i\pi\lambda zu^2}. \quad (5.61)$$

Suponiendo que se ilumina la abertura con una onda plana de amplitud 1, la transformada de Fourier del campo a una distancia z después de la abertura es:

$$F'(u) = F(u)H(u) = \frac{1}{a} \text{comb}(au)G(u)e^{ikz} e^{-i\pi\lambda zu^2}. \quad (5.62)$$

En la ecuación (5.62), en cada $\delta(\quad)$ de la función $\text{comb}(au)$, donde ésta función no es igual a cero, la frecuencia tiene el valor $u = n/a$ y el término de fase que depende de u es:

$$\phi = -\pi\lambda zu^2 = -\pi\lambda z \frac{n^2}{a^2}. \quad (5.63)$$

La fase para la $\delta(\quad)$ con índice n es:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0, \\ \phi_1 &= -\frac{\pi\lambda z}{a^2}, \\ \phi_n &= n^2 \phi_1. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Entonces, si:

$$-\phi_1 = \frac{\pi\lambda z}{a^2} = 2m\pi, \quad (5.65)$$

todas las fases también serán enteros multiplicados por 2π (porque son n^2 veces ϕ_1 con n un entero). En este caso los fases de todas las contribuciones de todas las $\delta(\quad)$ del $\text{comb}(au)$ serán iguales a un entero número de 2π , y la ecuación (5.62) quedará como:

$$\begin{aligned}
F'(u) &= \frac{1}{a} \text{comb}(au) G(u) e^{ikz} e^{-i\pi\lambda zu^2}, \\
&= \frac{1}{a} \text{comb}(au) G(u) e^{ikz} e^{-i2m\pi}, \\
&= \frac{1}{a} \text{comb}(au) G(u) e^{ikz},
\end{aligned} \tag{5.66}$$

y la imagen, aparte de un factor de fase constante (e^{ikz}), es idéntica al objeto, es decir, por difracción se forma una imagen perfecta del objeto (Talbot, 1836; Montgomery, 1967). Usando la condición sobre el valor de la diferencia de la fase entre los dientes del $\text{comb}(au)$, la ecuación (5.65), se puede reagrupar los términos para obtener la condición para la formación de ésta imagen:

$$z = \frac{2ma^2}{\lambda} = 2mz_T, \tag{5.67}$$

donde z_T es la **distancia de Talbot**.

Ahora, si la fase:

$$\phi_1 = (2m + 1)\pi, \tag{5.68}$$

el problema se complica. En general, no es obvio cómo la amplitud en la imagen está relacionada con la amplitud del objeto, al menos que algunas de las siguientes condiciones estén satisfechas:

- i. Consideramos el caso paraxial, y sólo consideramos los órdenes 0 y ± 1 , que son los órdenes que se propagan más cerca al eje óptico, o
- ii. $\lambda < a < 2\lambda$, por lo cual sólo se difractan los órdenes 0 y ± 1 , o
- iii. La transmisión de amplitud de la abertura es de forma cosenoidal, por lo cual sólo produce los órdenes 0 y ± 1 .

Entonces, en estos casos:

$$F'(u) = \left(\frac{1}{a} \text{comb}(au) G(u) e^{ikz} \right)_{n=0} - \left(\frac{1}{a} \text{comb}(au) G(u) e^{ikz} \right)_{n=\pm 1}, \tag{5.69}$$

donde el primer término, de frecuencia espacial cero, es un constante, y los otros dos términos son cosenos de la frecuencia $u = \pm 1/a$. Aquí, el signo menos en

frente de los cosenos (que viene del cambio de faso de 180° dado por la ecuación (5.68)), significa que son de amplitud negativa, que significa que la imagen será igual que el objeto pero con una inversión de contraste (donde el objeto era brillante la intensidad difractada será oscuro y viceversa). La condición para obtener estas imágenes es:

$$\Delta\phi_1 = \frac{\pi\lambda z}{a^2} = (2m + 1)\pi,$$

$$z = \frac{(2m + 1)a^2}{\lambda} = (2m + 1)z_T.$$
(5.70)

Finalmente, si:

$$\Delta\phi_1 = (2m + 1)\frac{\pi}{2},$$

el término de fase queda como:

$$e^{-i\phi_1} = e^{-i\pi\lambda zu^2} = e^{-i(2m+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$= \cos\left([2m + 1]\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left([2m + 1]\frac{\pi}{2}\right) = i(-1)^{m+1}.$$
(5.71)

Otra vez, suponiendo que solo tenemos los ordenes 0 y ± 1 , obtenemos:

$$F'(u) = \left(\frac{1}{a} \text{comb}(au)G(u)e^{ikz}\right)_{n=0} + i \left(\frac{1}{a} \text{comb}(au)G(u)e^{ikz}\right)_{n=\pm 1}.$$
(5.72)

Escribiendo esta expresión en términos de las frecuencias espaciales, tenemos:

$$F'(u) = \left(\frac{1}{a} \delta(u)G(u)e^{ikz}\right) + i \left(\frac{1}{a} \delta\left(a\left(u - \frac{1}{a}\right)\right)G(u)e^{ikz}\right)$$

$$+ i \left(\frac{1}{a} \delta\left(a\left(u + \frac{1}{a}\right)\right)G(u)e^{ikz}\right),$$
(5.73)

donde $u = 1/a$ es la frecuencia espacial en el primer orden del patrón de difracción. Calculando la amplitud en la imagen:

$$f'(x) = e^{ikz} \frac{1}{a} G(u=0) + ie^{ikz} \frac{2}{a} \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) G\left(u = \frac{1}{a}\right), \quad (5.74)$$

y la intensidad en la imagen es:

$$I(x) = \frac{1}{a^2} G^2(u=0) + \frac{4}{a^2} \cos^2\left(2\pi \frac{x}{a}\right) G^2\left(u = \frac{1}{a}\right), \quad (5.75)$$

que se puede escribir como:

$$I(x) = \frac{1}{a^2} G^2(u=0) + \frac{2}{a^2} \left\{1 + 2\cos\left(2\pi \frac{2x}{a}\right)\right\} G^2\left(u = \frac{1}{a}\right). \quad (5.76)$$

Se ve que cuando $\phi_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ la imagen tiene el doble de la frecuencia que tiene el objeto (por el término de frecuencia $2/a$). Entonces hay una imagen a dos veces la frecuencia del objeto. Esto se conoce como un subimagen de Talbot y ocurre cuando:

$$z = \frac{(2m+1)a^2}{2\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right) z_T. \quad (5.77)$$

Si la abertura no es infinita, si está recortada en alguna posición, ya vimos que tendremos la convolución de la función de *comb*() con una función *sinc*(), que es la replicación de la función *sinc*() en las posiciones de los δ () del *comb*(). Esto significa que habrá que integrar la variación de la fase sobre los valores de las frecuencias contribuyendo en cada *sinc*() y si esta función es suficientemente ancha, no habrá reproducción de la abertura inicial en el patrón de difracción. La Figura 5.12 muestra las diferentes replicas del objeto y la degradación de las copias del objeto, hacia la parte superior de la figura, por el tamaño finito del objeto.

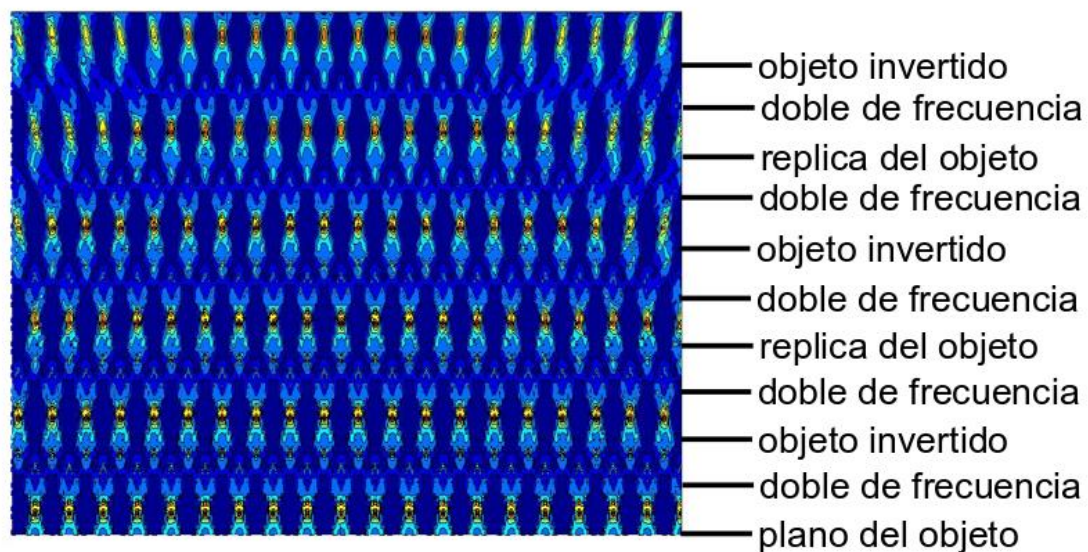


Figure 5.12: El patrón de difracción de Fresnel de un objeto periodico (en el plano de abajo), calculado en MatLab, mostrando las diferentes replicas de las imagenes de Talbot. (FresnelCSMultipleRect.m)

Capítulo 6

Formación de Imágenes

Ahora vamos a ver la formación de imágenes en sistemas ópticos y vamos a empezar con el instrumento óptico más sencillo: la lente delgada.

6.1 Función de transmisión de lentes delgadas

La definición de una lente delgada es que el grosor de la lente es tan pequeño que un rayo que atraviesa esta lente entra y sale de la lente en la misma altura (ver la figura 6.1). Entonces, el único efecto que tiene la lente sobre un frente de onda es un cambio de fase que varía con la altura en el plano de la lente (figura 6.1). Esto resulta en un cambio de curvatura del frente de onda. Para encontrar el efecto de la lente delgada, sólo hay que encontrar el cambio de fase que sufren los rayos a diferentes alturas al pasar por la lente.

Refiriendo a la figura 6.2, podemos escribir el cambio de fase como función de posición $\Delta\phi(x_l, y_l)$, con el subíndice l indicando la posición sobre la cara de la lente, como:

$$\Delta\phi(x_l, y_l) = kn\Delta(x_l, y_l) + k(\Delta_0 - \Delta(x_l, y_l)), \quad (6.1)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$, n es el índice de refracción de la lente, $\Delta(x_l, y_l)$ es el grosor de la lente en la posición (x_l, y_l) , y Δ_0 es el grosor de la lente en la posición $(0,0)$. Nota que suponemos que los rayos pasan sin cambiar su altura adentro de la lente: ésta es la aproximación de una lente delgada.

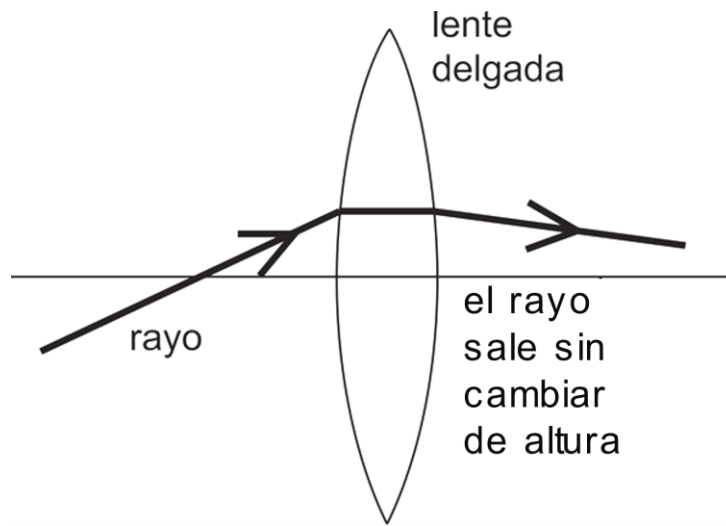


Figura 6.1: La definición de una lente delgada

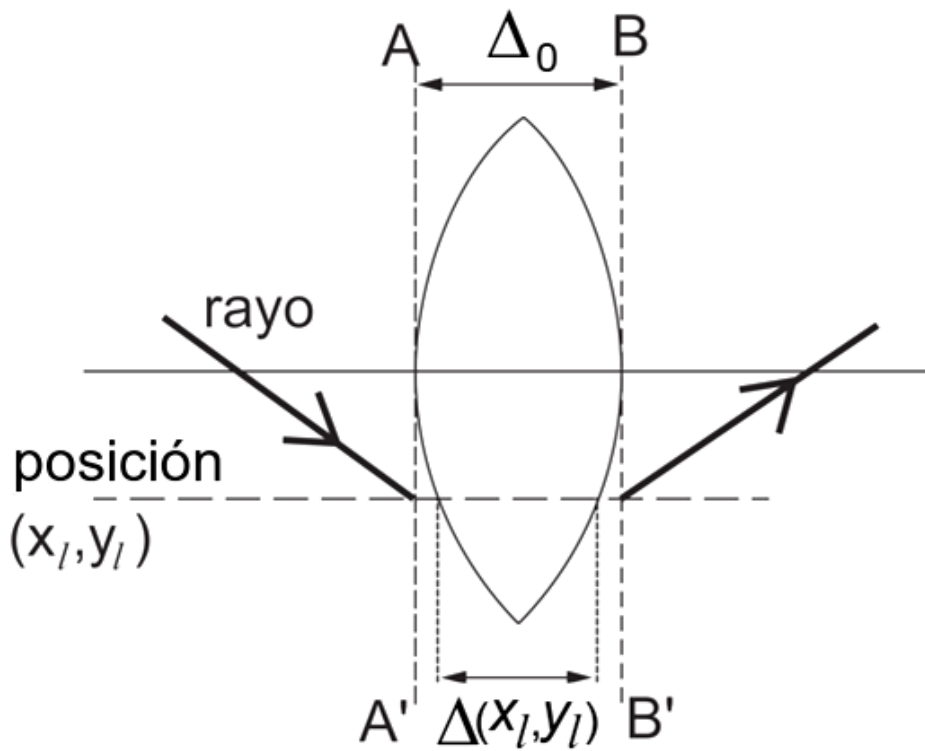


Figura 6.2: Geometría para calcular la función de fase de una lente delgada

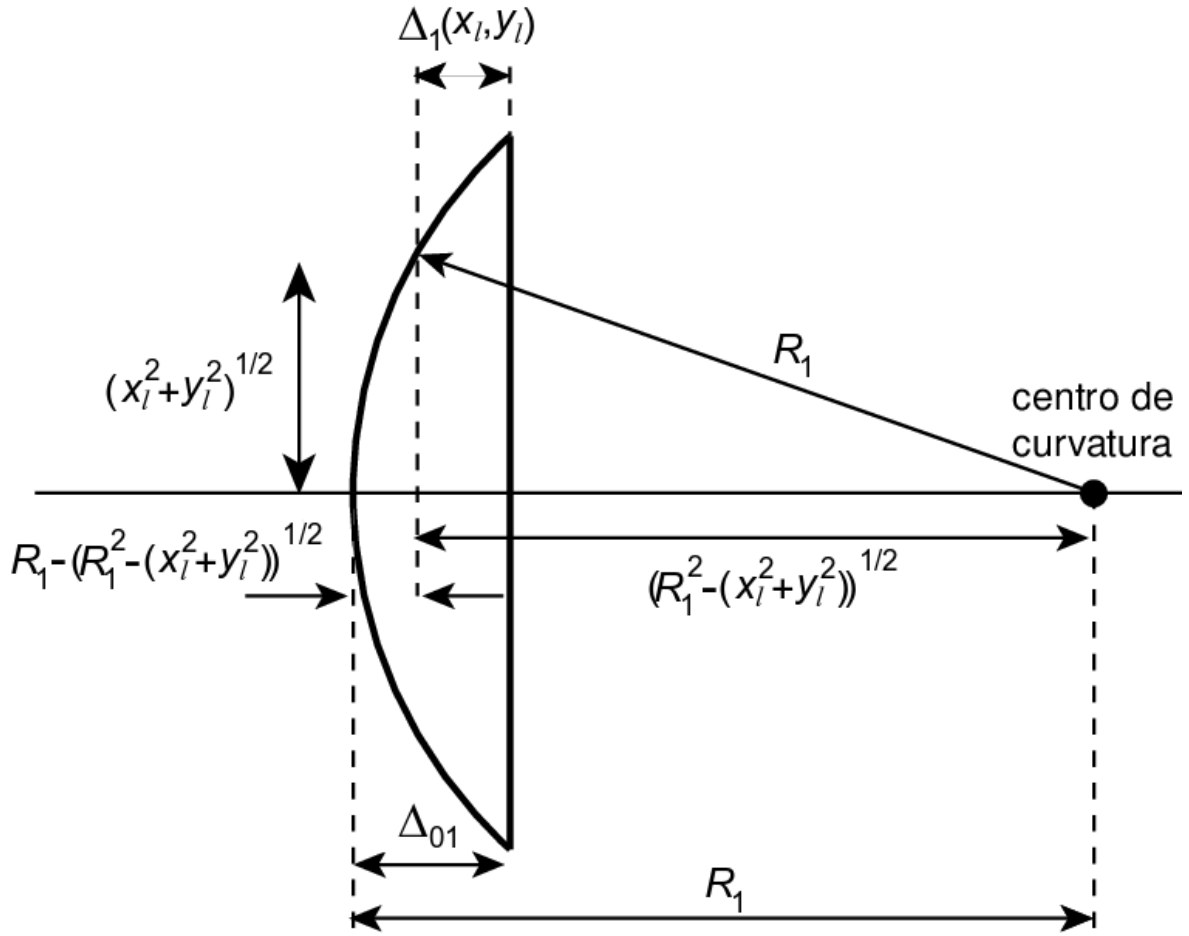


Figura 6.3: La definición de los parámetros para calcular la función de fase de una lente delgada

Aquí tenemos que calcular $\Delta(x_l, y_l)$ y esto lo podemos hacer dividiendo la lente en dos partes. La figura 6.3 muestra la primera parte de la lente, y usando esta figura podemos calcular la primera parte del grosor de la lente para una posición (x_l, y_l) :

$$\begin{aligned}\Delta_1(x_l, y_l) &= \Delta_{01} - R_1 + \left(R_1^2 - (x_l^2 + y_l^2)\right)^{1/2} \\ &= \Delta_{01} - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{R_1^2}}\right),\end{aligned}\tag{6.2}$$

donde Δ_{01} es la primera parte del grosor de la lente en la posición $(0,0)$. Aquí estamos usando la notación de signos normal para trazo de rayos: el radio de curvatura de una superficie es negativo si el centro de curvatura es a la izquierda de la superficie, y positivo si el centro de curvatura es a la derecha de la superficie.

En forma similar se puede calcular que la contribución de la segunda parte de la lente es:

$$\Delta_2(x_l, y_l) = \Delta_{02} - R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{R_2^2}} \right). \quad (6.3)$$

El grosor total es simplemente la suma de estas dos contribuciones:

$$\Delta(x_l, y_l) = \Delta_0 - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{R_1^2}} \right) - R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{R_2^2}} \right), \quad (6.4)$$

donde usamos $\Delta_0 = \Delta_{01} + \Delta_{02}$. Ahora usamos la aproximación paraxial: todos los ángulos involucrados tienen que ser pequeños, y los rayos tienen que pasar muy cerca al eje, entonces:

$$x_l, y_l \ll R_1, R_2,$$

y podemos hacer una expansión binomial de la expresión para $\Delta(x_l, y_l)$:

$$\Delta(x_l, y_l) = \Delta_0 - R_1 \left(1 - \left(1 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{2R_1^2} \right) \right) - R_2 \left(1 - \left(1 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{2R_2^2} \right) \right), \quad (6.5)$$

que se puede simplificar para obtener:

$$\Delta(x_l, y_l) = \Delta_0 - \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.6)$$

Ahora la expresión para el cambio de fase, la ecuación (6.1), se reduce a:

$$\Delta\phi(x_l, y_l) = kn\Delta_0 - k(n-1) \frac{(x_l^2 + y_l^2)}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.7)$$

Pero, hay una expresión muy conocida para la distancia focal de una lente:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (6.8)$$

donde f es la *distancia focal* de la lente, y es la distancia a la que se forma la imagen si la onda incidente es una onda plana. Esto nos da para el cambio de fase:

$$\Delta\phi(x_l, y_l) = kn\Delta_0 - \frac{k}{2f}(x_l^2 + y_l^2). \quad (6.9)$$

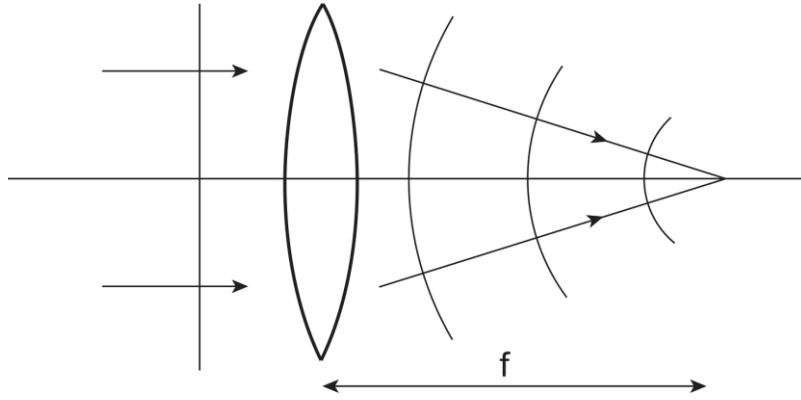


Figura 6.4: La función de fase de una lente positiva da un frente de onda convergente al punto focal.

Entonces, si llega una onda plana en la primera cara de la lente, el campo en la segunda cara es:

$$U(x_l, y_l) = e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2 + y_l^2)}, \quad (6.10)$$

donde el primer término exponencial es una fase constante y el segundo es la aproximación cuadrática a una onda esférica convergiendo a una distancia f . La Figura 6.4 muestra ésta geometría. Para un campo incidente general $U_i(x_l, y_l)$, el campo en la segunda cara de la lente es:

$$U(x_l, y_l) = U_i(x_l, y_l) e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2 + y_l^2)}, \quad (6.11)$$

donde hemos utilizado la aproximación de la lente delgada para pasar la distribución del campo que llega a la primera cara, a la segunda cara de la lente.

6.2 Transformada de Fourier con lentes delgadas

En esta sección veremos como utilizar una lente delgada para formar una transformada de Fourier de un objeto. Consideramos la iluminación con una onda plana que incide normalmente y veremos 3 casos: i) La lente y el objeto pegados, ii) el objeto en frente de la lente, y iii) el objeto después de la lente.

6.2.1 Objeto pegado a la lente

La Figura 6.5 muestra la geometría en este caso. La función de transmisión del objeto es $O(x_o, y_o)$, y usando la ecuación (6.11) el campo en la segunda cara de la lente es:

$$U(x_l, y_l) = O(x_l, y_l)P(x_l, y_l)e^{ikn\Delta_0}e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2+y_l^2)}, \quad (6.12)$$

donde $P(x_l, y_l)$ es la función que describe la pupila de la lente y el objeto está posicionado en el plano de la lente: suponemos que no pasa nada de luz afuera de la pupila.

Ahora, el campo en el plano de observación es simplemente el patrón de difracción de Fresnel de esta distribución de amplitud:

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ikn\Delta_0} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x_l, y_l)P(x_l, y_l)e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2+y_l^2)} e^{i\frac{k}{2z}((x-x_l)^2+(y-y_l)^2)} dx_l dy_l. \quad (6.13)$$

Expandiendo los términos de fase en esta integral obtenemos:

$$e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2+y_l^2)} e^{i\frac{k}{2z}((x-x_l)^2+(y-y_l)^2)} = e^{-i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)} e^{-i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} e^{-i\frac{k}{z}(xx_l+yy_l)},$$

entonces, si observamos en $z = f$:

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikf}}{f} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x_l, y_l)P(x_l, y_l) e^{-i2\pi\left(\frac{x}{\lambda f}x_l + \frac{y}{\lambda f}y_l\right)} dx_l dy_l. \quad (6.14)$$

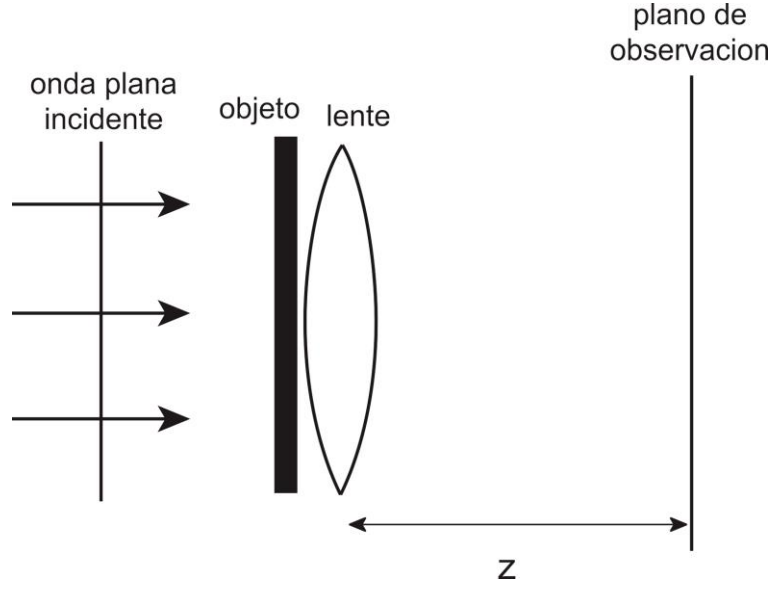


Figura 6.5: Geometría para el objeto pegado a la lente

Aparte del término cuadrático de fase afuera de la integral, esto es simplemente proporcional a la transformada de Fourier del producto de la función de transmisión del objeto y la función de la pupila de la lente, con un escalamiento en la frecuencia espacial. La intensidad en el plano $z = f$ es:

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \mathfrak{F}(O(x_l, y_l)P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \right|^2. \quad (6.15)$$

Si la lente es más grande que el tamaño del objeto, el término $P(x_l, y_l) = 1$ donde el objeto $O(x_l, y_l)$ no es igual a cero, entonces:

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \mathfrak{F}(O(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \right|^2, \quad (6.16)$$

que es el módulo cuadrado de la transformada de Fourier del objeto. Si no tenemos objeto, $O(x_l, y_l) = 1$, y la intensidad es:

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \mathfrak{F}(P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \right|^2, \quad (6.17)$$

que es la transformada de Fourier de la pupila de la lente. Si la pupila es, como es típicamente, circular, sobre la pantalla tenemos una función de Airy, con un tamaño determinado por los términos $x/\lambda f$ y $y/\lambda f$. Una interpretación física de este

resultado se puede ver refiriéndose a la figura 6.6. Tenemos difracción de la abertura circular (sin la lente), que nos da un patrón de difracción como función del ángulo $\theta = x/z$ en la notación del Capítulo 4. Aquí, la lente convierte rayos paralelos que pasan a un ángulo θ en rayos que forman una imagen a una altura h en una distancia f , la distancia focal de la lente, donde $\theta = h/f$. Éste es el cambio de escala del patrón $x/z \rightarrow h/f$. La forma del patrón está determinada por la forma de la abertura de la lente (recuerda que suponemos que no pasan rayos afuera de la lente).

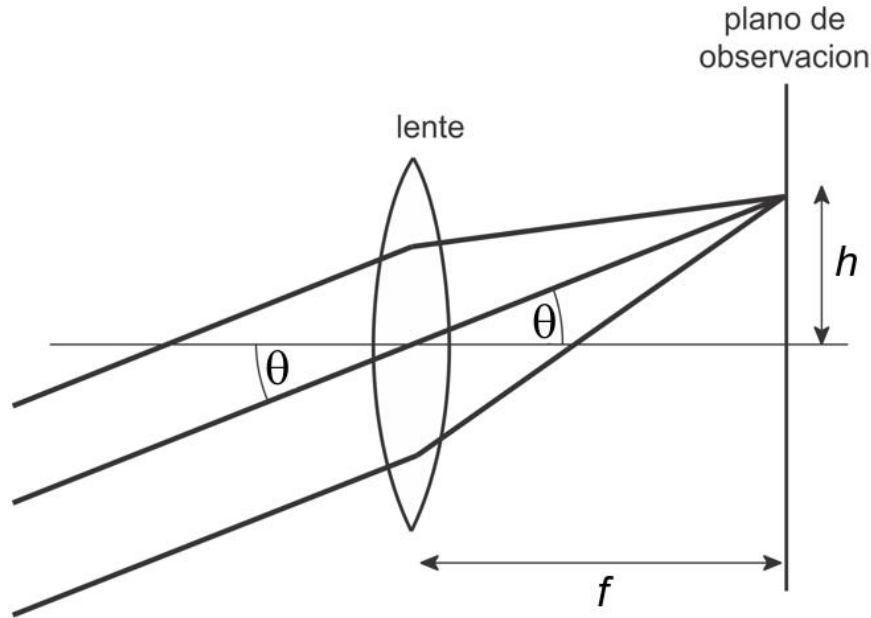


Figura 6.6: La escala de la transformada de Fourier con el objeto pegado a la lente

Regresando al caso más general, la intensidad es proporcional a la transformada de Fourier del producto de la pupila de la lente y la función de transmisión del objeto. Pero ya vimos que la transformada de Fourier de un producto es igual a la convolución de las transformadas de Fourier de cada término:

$$I(x, y) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \mathfrak{T}(O(x_l, y_l)) \otimes \mathfrak{T}(P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \right|^2, \quad (6.18)$$

que es el módulo cuadrado de la convolución de la transformada de Fourier del objeto con la transformada de Fourier de la pupila. Por la interpretación de la convolución que ya vimos, podemos decir que en cada punto de la transformada de Fourier del objeto tenemos una transformada de Fourier de la pupila.

6.2.2 Objeto antes de la lente

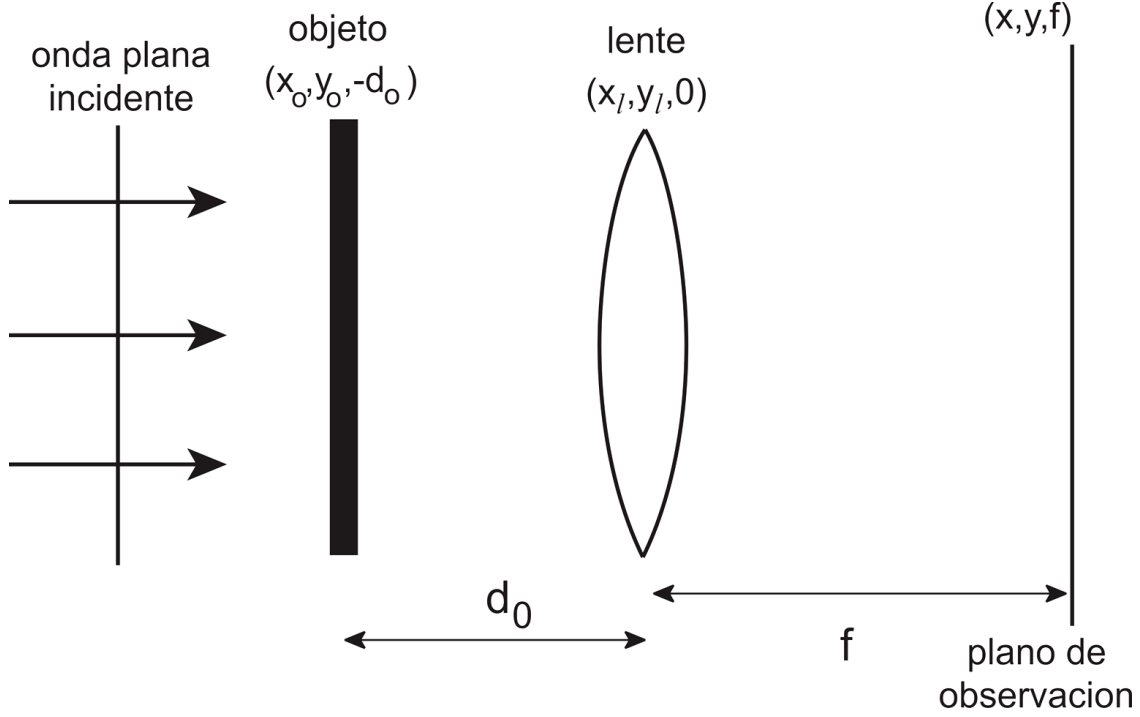


Figura 6.7: La geometría para el objeto antes de la lente

La geometría para este caso se indica en la figura 6.7. Suponemos inicialmente que la pupila de la lente no afecta la onda que pasa por el sistema $P(x_l, y_l) = 1$ (veremos después cuál es el efecto de la pupila). Usando la ecuación (6.14) podemos escribir:

$$U(x, y, f) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikf}}{f} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \mathfrak{F}(U_i(x_l, y_l, 0))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \quad (6.19)$$

donde $U_i(x_l, y_l, 0)$ es el campo que llega a la primera cara de la lente de distancia focal f . Suponemos que la distancia entre la lente y el plano de observación también es f . En esta ecuación, el problema es calcular $\mathfrak{F}(U_i(x_l, y_l, 0))$. Si el campo transmitido por el objeto es $O(x_o, y_o, -d_o)$, notamos que el campo

$U_i(x_l, y_l, 0)$ es simplemente el patrón de difracción de Fresnel del campo $O(x_o, y_o, -d_o)$ a una distancia d_o :

$$U_i(x_l, y_l, 0) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} O(x_o, y_o, -d_o) e^{i\frac{k}{2d_o}((x_o-x_l)^2+(y_o-y_l)^2)} dx_o dy_o. \quad (6.20)$$

Por la forma de ésta integral, lo podemos escribir como una convolución:

$$U_i(x_l, y_l, 0) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} \left\{ O(x_o, y_o, -d_o) \otimes e^{i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} \right\}, \quad (6.21)$$

y necesitamos la transformada de Fourier de este término:

$$\mathfrak{F}(U_i(x_l, y_l, 0)) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} \left\{ \mathfrak{F}(O(x_o, y_o, -d_o)) \mathfrak{F}\left(e^{i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)}\right) \right\}, \quad (6.22)$$

donde usamos la relación de que la transformada de Fourier de una convolución es el producto de las transformadas de Fourier de las dos funciones. En el Capítulo 1 vimos la transformada de Fourier de una Gaussiana, entonces podemos escribir:

$$\mathfrak{F}\left(e^{i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)}\right)_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} = e^{-\frac{\pi d_o}{\lambda f^2}(x^2+y^2)}. \quad (6.23)$$

Entonces:

$$\mathfrak{F}(U_i(x_l, y_l, 0)) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{-\frac{\pi d_o}{\lambda f^2}(x^2+y^2)} \mathfrak{F}(O(x_o, y_o, -d_o)), \quad (6.24)$$

y sustituyendo en la ecuación (6.19) obtenemos:

$$\begin{aligned} U(x, y, f) &= -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikf}}{f} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \mathfrak{F}(U_i(x_l, y_l, 0))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \\ &= -\frac{A}{\lambda^2} \frac{e^{ikf}}{f} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\left(1-\frac{d_o}{f}\right)} \mathfrak{F}(O(x_o, y_o, -d_o))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Aquí tenemos que la amplitud es proporcional a la transformada de Fourier del objeto, multiplicado por un factor de fase que es cuadrático en la posición en el plano de observación. Este término de fase desaparece si $d_o = f$ y en este caso la amplitud es directamente proporcional a la transformada de Fourier del objeto, es decir, si la distancia entre el objeto y la lente, y la distancia entre la lente y el plano de observación son iguales a la distancia focal de la lente, la amplitud en la imagen es proporcional a la transformada de Fourier de la función de transmisión de amplitud del objeto. En este caso, la intensidad en la imagen es:

$$I(x, y, f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f d_o} \left| \mathfrak{F}(O(x_o, y_o, -d_o))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \right|^2. \quad (6.26)$$

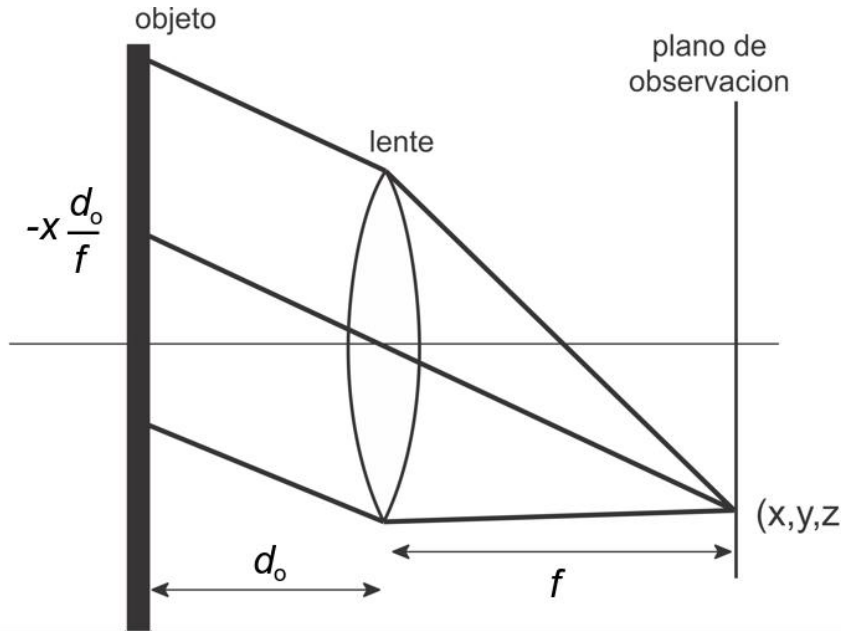


Figura 6.8: El efecto de viñeteo con el objeto en frente de la lente

Hasta ahora supusimos $P(x_l, y_l) = 1$, que en realidad no es cierto. En la Figura 6.8 se muestra el efecto de la pupila finita de la lente. La zona del objeto que contribuye a un punto de la imagen depende de la pupila de la lente, de la posición del punto de la imagen, y la distancia focal de la lente. Esto se puede escribir:

$$O(x_o, y_o, -d_o) \rightarrow O(x_o, y_o, -d_o) F(P(x_l, y_l), x, y, f),$$

donde $F(\quad)$ indica una función. Este efecto, de que no todo el objeto se puede observar en un punto de la imagen, se llama **viñeteo**. Además de este efecto, otra

vez, en la ecuación (6.19) debemos tener, en el término de la transformada de Fourier:

$$\mathfrak{I}(U_i(x_l, y_l, 0)P(x_l, y_l, 0)) = \mathfrak{I}(U_i(x_l, y_l, 0)) \otimes \mathfrak{I}(P(x_l, y_l, 0)),$$

y la intensidad final será:

$$I(x, y, f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f d_o} \left| \mathfrak{I}(O(x_o, y_o, -d_o) \otimes \mathfrak{I}(P(x_l, y_l, 0))) \right|_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}}^2, \quad (6.27)$$

igual que en el primer caso que vimos con un factor de normalización un poco diferente, pero con la transformada de Fourier de la pupila de la lente convuelto con la transformada de Fourier del objeto.

6.2.3 Objeto después de la lente

En la Figura 6.9 se indica la geometría para este caso. La amplitud de la onda plana que llega a la lente es A . La amplitud de la fuente que da una amplitud A a una distancia f es Af . Entonces la amplitud a una distancia d de la fuente es Af/d , y el campo en el plano del objeto es, suponiendo la misma amplitud en todo el objeto (ignorando el efecto de la pupila):

$$U_i(x_o, y_o) = \frac{Af}{d} e^{-i\frac{k}{2d}(x_o^2 + y_o^2)}, \quad (6.28)$$

donde (x_o, y_o) es un punto en el plano del objeto, el origen de las coordenadas es en el punto focal de la lente, hemos hecho la aproximación binomial para la distancia entre el punto focal y el punto del objeto, y la fase es negativa porque suponemos que en el punto focal la fase es cero. El campo después del objeto es:

$$U(x_o, y_o) = U_i(x_o, y_o)O(x_o, y_o) = \frac{Af}{d} O(x_o, y_o) e^{-i\frac{k}{2d}(x_o^2 + y_o^2)}. \quad (6.29)$$

Luego tenemos la difracción de Fresnel entre el objeto y el plano de observación a una distancia d :

$$U(x, y, 0) = -\frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikd}}{d} \int \int_S U(x_o, y_o) e^{i\frac{k}{2d}((x-x_o)^2 + (y-y_o)^2)} dx_o dy_o. \quad (6.30)$$

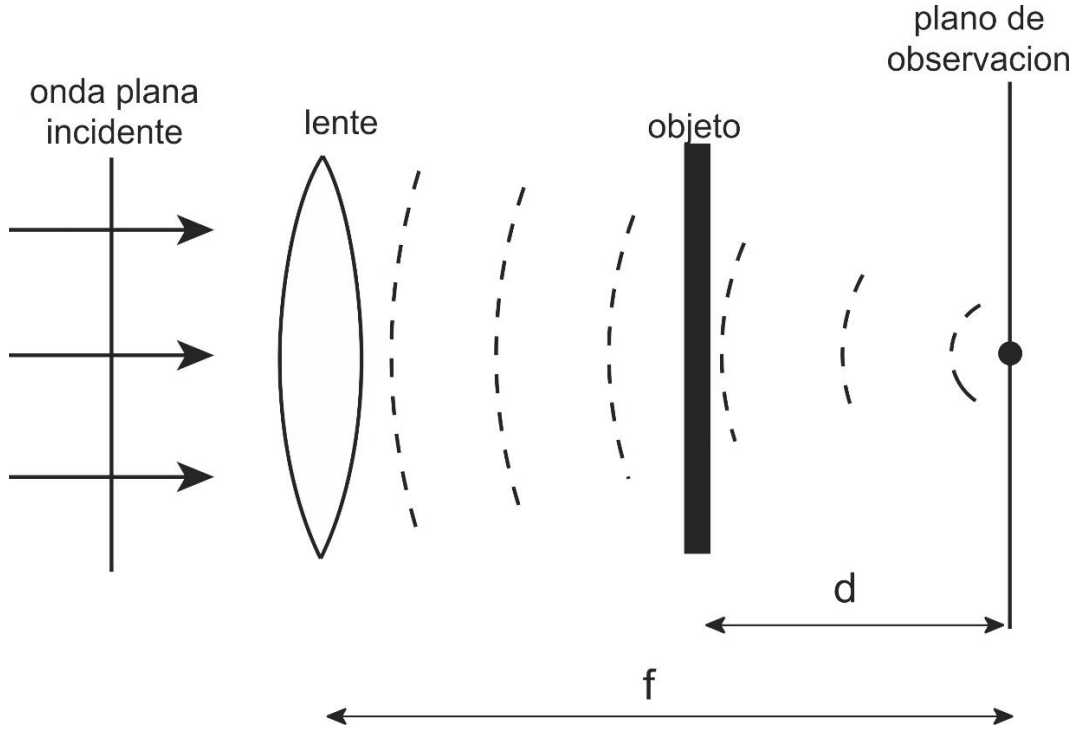


Figura 6.9: La geometría para el objeto después de la lente

Se puede escribir este campo como:

$$\begin{aligned}
 U(x, y, 0) &= -\frac{i}{\lambda} \frac{Af}{d} \frac{e^{ikd}}{d} \int \int_S O(x_o, y_o) e^{-i\frac{k}{2d}(x_o^2+y_o^2)} e^{i\frac{k}{2d}((x-x_o)^2+(y-y_o)^2)} dx_o dy_o, \\
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

y reorganizando los términos obtenemos:

$$U(x, y, 0) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Af}{d} \frac{e^{ikd}}{d} e^{-i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \int \int_S O(x_o, y_o) e^{i\frac{k}{2d}(xx_o+yy_o)} dx_o dy_o, \tag{6.32}$$

que se puede escribir como:

$$U(x, y, 0) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Af}{d} \frac{e^{ikd}}{d} e^{-i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \mathfrak{I}(O(x_o, y_o))_{u=\frac{x}{\lambda d}, v=\frac{y}{\lambda d}}, \tag{6.33}$$

donde supusimos que se ilumina todo el objeto con el haz convergente. Aparte del factor de fase cuadrático, otra vez llegamos a una expresión que es proporcional a la transformada de Fourier de la función de transmisión de amplitud del objeto. La intensidad en la imagen es:

$$I(x, y, f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f d_o} \left| \mathfrak{F}(O(x_o, y_o))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}} \right|^2. \quad (6.34)$$

En la aproximación de la óptica geométrica la pupila de la lente cambia sólo el tamaño de la zona iluminada del objeto por los rayos convergentes. Entonces, en este caso la imagen es la transformada de Fourier de la parte iluminada del objeto. Para ver el efecto de la pupila de la lente sobre el campo difractado en el plano imagen, utilizamos la ecuación (6.14) para el caso sin objeto para obtener el campo que llega al objeto:

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \mathfrak{F} \left(P(x_l, y_l) e^{i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)(\frac{1}{z}-\frac{1}{f})} \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}}, \quad (6.35)$$

donde z es la distancia de propagación entre la lente y el objeto $z = f - d$. El campo después del objeto es, entonces:

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} O(x_o, y_o) \mathfrak{F} \left(P(x_l, y_l) e^{i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)(\frac{1}{z}-\frac{1}{f})} \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}}. \quad (6.36)$$

Utilizando la difracción de Fresnel para propagar una distancia d , obtenemos:

$$U(x, y) = -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \left(-\frac{i}{\lambda} \right) \frac{e^{ikd}}{d} \times \int \int_S O(x_o, y_o) \mathfrak{F} \left(P(x_l, y_l) e^{i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)(\frac{1}{z}-\frac{1}{f})} \right) e^{i\frac{k}{2d}((x-x_o)^2+(y-y_o)^2)} dx_o dy_o. \quad (6.37)$$

Expandiendo el término exponencial en la integral se obtiene:

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & -\frac{iA}{\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \left(-\frac{i}{\lambda} \right) \frac{e^{ikd}}{d} e^{-i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \\
& \times \int \int_S O(x_o, y_o) e^{i\frac{k}{2d}(x_o^2+y_o^2)} \mathfrak{F} \left(P(x_l, y_l) e^{i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)} \right) \\
& \times e^{i\frac{k}{2d}(xx_o+yy_o)} dx_o dy_o,
\end{aligned} \tag{6.38}$$

que se puede escribir:

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & -\frac{A}{\lambda^2} \frac{e^{ikz}}{z} e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} \frac{e^{ikd}}{d} e^{-i\frac{k}{2d}(x^2+y^2)} \times \\
& \mathfrak{F} \left(O(x_o, y_o) e^{i\frac{k}{2d}(x_o^2+y_o^2)} \mathfrak{F} \left(P(x_l, y_l) e^{i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)} \right) \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}} \Bigg|_{u=\frac{x}{\lambda d}, v=\frac{y}{\lambda d}},
\end{aligned} \tag{6.39}$$

donde el objeto está multiplicado por el patrón de difracción de Fresnel de la pupila sobre el objeto, dado por la transformada de Fourier de la pupila de la lente multiplicada por un factor cuadrático de fase. Además, el objeto está multiplicado por otro factor cuadrático de fase, debido a que en el plano imagen tenemos el patrón de difracción de Fresnel del objeto. Se puede ver que, en este caso, la relación de la pupila de la lente con el campo en el plano imagen es mucho más complicado que en los otros casos.

6.3 Formación de Imágenes por Lentes Delgadas

En la sección anterior vimos la formación de la transformada de Fourier con una lente delgada. Aquí veremos la formación de imágenes. La Figura 6.10 muestra la geometría que vamos a analizar. Si suponemos un sistema isoplanático (la imagen es la misma, sólo recorrida, para diferentes puntos del objeto), y notando que tenemos un sistema lineal (la imagen de dos puntos del objeto es la suma de los campos de las imágenes de cada punto) podemos escribir la imagen como la convolución del objeto, $O(x_o, y_o)$, con la función de respuesta a un impulso:

$$\begin{aligned}
U(x_i, y_i, z_i) &= h(x_o, y_o) \otimes O(x_o, y_o) \\
&= \int \int h(x_i - x_o, y_i - y_o) O(x_o, y_o) dx_o dy_o,
\end{aligned} \tag{6.40}$$

donde $h(x_i - x_o, y_i - y_o)$ es la imagen en la posición (x_i, y_i, z_i) cuando el objeto es un impulso en (x_o, y_o) , es decir, el objeto es $\delta(x_o, y_o)$.

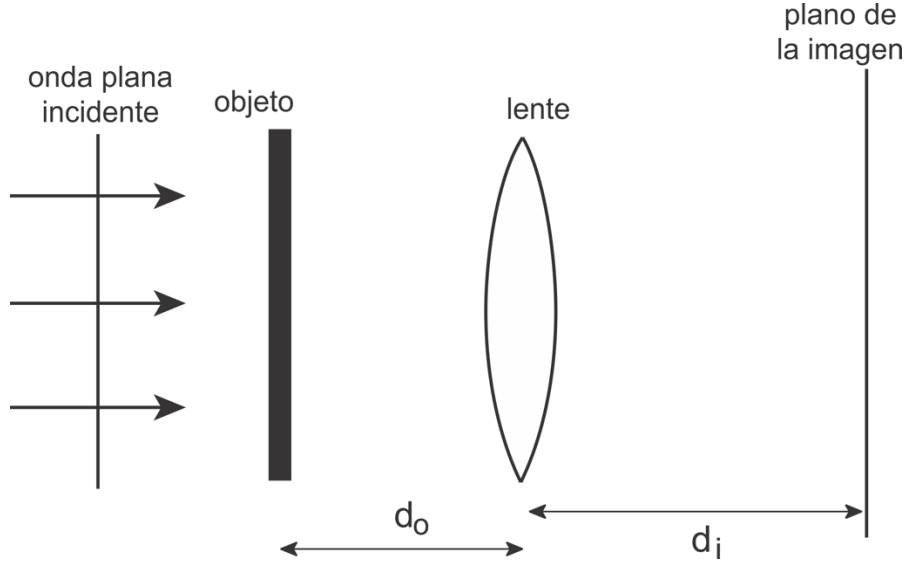


Figura 6.10: La geometría para la formación de imágenes con una lente delgada

Entonces hay que calcular la imagen cuando el objeto es $\delta(x_o, y_o)$. El campo que llega a la lente con esta fuente puntual es, en la aproximación binomial:

$$U_i(x_l, y_l, z_l) = \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{i\frac{k}{2d_o}((x_l-x_o)^2+(y_l-y_o)^2)}. \quad (6.41)$$

Este campo luego pasa por la lente:

$$U(x_l, y_l, z_l) = \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{i\frac{k}{2d_o}((x_l-x_o)^2+(y_l-y_o)^2)} P(x_l, y_l) e^{ikn\Delta_0} e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2+y_l^2)}, \quad (6.42)$$

donde $P(x_l, y_l)$ es la función de la pupila de la lente. Finalmente tenemos la difracción de Fresnel una distancia d_i entre la lente y el plano de la imagen:

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikd_i}}{d_i} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{ikn\Delta_0} \times \int \int e^{i\frac{k}{d_o}((x_l-x_o)^2+(y_l-y_o)^2)} P(x_l, y_l) e^{-i\frac{k}{2f}(x_l^2+y_l^2)} e^{i\frac{k}{d_i}((x_i-x_l)^2+(y_i-y_l)^2)} dx_l dy_l, \quad (6.43)$$

que se puede simplificar a:

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikd_i}}{d_i} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{ikn\Delta_0} e^{i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} e^{i\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} \times \int \int P(x_l, y_l) e^{-i\frac{k}{d_o}(x_l x_o + y_l y_o)} e^{i\frac{k}{2}(x_l^2+y_l^2)} \left\{ \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} \right\} e^{-i\frac{k}{d_i}(x_i x_l + y_i y_l)} dx_l dy_l. \quad (6.44)$$

Ahora, el término $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f}$ se puede simplificar usando la ecuación de Gauss, que dice que, para planos conjugados en d_o y d_i :

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f},$$

entonces, suponiendo planos conjugados, es decir, que la imagen del objeto a la distancia d_o se forma en la distancia d_i , tenemos que:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} = 0, \quad (6.45)$$

y la función de respuesta a un impulso es:

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikd_i}}{d_i} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{ikn\Delta_0} e^{i\frac{k}{2d_o}(x_o^2+y_o^2)} e^{i\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)} \times \int \int P(x_l, y_l) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \left(\frac{x_o}{d_o} + \frac{x_i}{d_i} \right) x_l + \left(\frac{y_o}{d_o} + \frac{y_i}{d_i} \right) y_l \right\}} dx_l dy_l. \quad (6.46)$$

Usando las leyes de la óptica paraxial, sabemos que la magnificación en un sistema óptico es $M = -d_i/d_o$, entonces podemos definir variables del objeto escaladas $\widetilde{x}_o = Mx_o$ e $\widetilde{y}_o = My_o$ para poder definir las posiciones en el plano de la imagen

relativas a estas variables escalonadas (el caso de $d_i = d_o = 2f$ y $M = -1$ es el caso más sencillo para considerar):

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikd_i}}{d_i} \frac{e^{ikd_o}}{d_o} e^{ikn\Delta_0} e^{i\frac{k}{2d_o}\{(x_o^2 + y_o^2) - \frac{1}{M}(x_i^2 + y_i^2)\}} \\ \times \int \int P(x_l, y_l) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda d_i}\{(x_i - \widetilde{x}_o)x_l + (y_i - \widetilde{y}_o)y_l\}} dx_l dy_l. \quad (6.47)$$

La parte de la integral de esta ecuación es la transformada de Fourier de la pupila de la lente en frecuencias espaciales $u = \frac{(x_i - \widetilde{x}_o)}{\lambda d_i}$, $v = \frac{(y_i - \widetilde{y}_o)}{\lambda d_i}$. Esto es, la transformada de Fourier esta centrada en la posición $x_i = \widetilde{x}_o$, $y_i = \widetilde{y}_o$, donde $(\widetilde{x}_o, \widetilde{y}_o)$ es la posición de la imagen paraxial (geométrica) del objeto puntual.

Afuera del término integral hay términos que dan la caída en la amplitud por la propagación y hay términos de fase, unos de estos términos son constantes (e^{ikd_i} , e^{ikd_o} , $e^{ikn\Delta_0}$), un término depende en forma cuadrática de la posición del objeto puntual y un término depende en forma cuadrática de la posición del punto de observación.

La fase cuadrática de fase que depende de la posición en el plano de la imagen significa que la relación entre la función de la respuesta a un impulso y la pupila de la lente no es una transformada de Fourier exacta. Pero, sólo podemos medir la intensidad de la luz, y este término de fase no afecta la intensidad, entonces no es un término importante en la formación de las imágenes por la lente delgada.

El término que depende de la posición del punto del objeto si es importante, porque la integral de convolución en la ecuación (6.40), que nos da el campo total en la imagen, es una integral sobre la posición en el objeto. Si suponemos que la transformada de Fourier de la función de la pupila es suficientemente pequeña (es decir, la pupila de la lente es suficientemente grande), el rango de los términos $u = \frac{(x_i - \widetilde{x}_o)}{\lambda d_i}$, $v = \frac{(y_i - \widetilde{y}_o)}{\lambda d_i}$, donde la transformada de Fourier tiene valores importantes será muy pequeño. Esto significa que los parámetros x_o y y_o (que son proporcionales a $\widetilde{x}_o$ e $\widetilde{y}_o$) cambian muy poco donde la transformada de Fourier puede contribuir en forma significativa al campo total, y si estos parámetros cambian poco, el término de fase que depende de estos parámetros, $e^{i\frac{k}{2d_o}(x_o^2 + y_o^2)}$, cambiará poco (si el cambio en los parámetros es mucho menor que la longitud de onda multiplicado por d_o). Si ésta relación está satisfecha, entonces podemos escribir:

$$h(x_i - x_o, y_i - y_o) = \tilde{h} \mathfrak{I} \left(P(x_l, y_l) \right)_{u=\frac{(x_i-\tilde{x}_o)}{\lambda d_i}, v=\frac{(y_i-\tilde{y}_o)}{\lambda d_i}}, \quad (6.48)$$

donde $\tilde{h}$ denota términos de amplitud y fase que son constantes, y hemos eliminado el término de fase que depende de la posición en el plano imagen. Recordando lo que vimos anteriormente, la función de respuesta a un impulso es proporcional al patrón de difracción de Fraunhofer de la pupila de la lente.

Para un objeto complejo, $O(x_o, y_o)$, la imagen es:

$$U_i(x_i, y_i) = \tilde{h} \left\{ \mathfrak{I} \left(P(x_l, y_l) \right)_{u=\frac{(x_i-\tilde{x}_o)}{\lambda d_i}, v=\frac{(y_i-\tilde{y}_o)}{\lambda d_i}} \right\} \otimes O(x_o, y_o). \quad (6.49)$$

Capítulo 7

Sistemas Ópticos

7.1 Sistemas ópticos en General: Pupilas

En el capítulo anterior, vimos la formación de imágenes con una sola lente delgada. En general, los sistemas ópticos son construidos con varios componentes que resultan ser lentes gruesas, ver la Figura 7.1. Sin embargo, se puede aplicar la misma teoría a sistemas reales como las lentes delgadas, porque, si el sistema óptico no tiene aberraciones, el frente de onda que sale del sistema para un objeto puntual será una onda esférica convergiendo al punto de la imagen, igual que el caso de una lente delgada. Ésta onda esférica saldrá del sistema en la pupila de salida, y el sistema recibirá la onda incidente en la pupila de entrada (ver la Figura 7.1). Entre la pupila de entrada y la pupila de salida, casi siempre se calcula la fase del frente de onda utilizando la óptica geométrica. La pérdida de información entre el objeto y la imagen se puede considerar como consecuencia del tamaño finito de la pupila de entrada (la teoría de Abbe que se discute más adelante) o como difracción en la pupila de salida.

7.2 Luz Coherente e Incoherente

Aquí vamos a ver la formación de imágenes en sistemas usando luz completamente coherente espacialmente o completamente incoherente espacialmente (Goodman, 1996). Recuerden que todos los cálculos que haremos son para una sola longitud de onda λ , entonces todo es para luz coherente temporalmente. Si tenemos un sistema lineal e isoplanático, podemos escribir la salida del sistema, la imagen, $U_i(x_i, y_i)$, como la convolución de la función de respuesta a un impulso, $h(x, y)$, y la entrada, el objeto, $U_o(x_o, y_o)$:

$$U_i(x_i, y_i) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) U_o(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (7.1)$$

y ya vimos que la intensidad es:

$$I_i(x_i, y_i) = \langle |U_i(x_i, y_i)|^2 \rangle_{\text{tiempo}}, \quad (7.2)$$

donde el promedio, como se indicaba, es sobre el tiempo. Sustituyendo la ecuación (7.1) en la ecuación (7.2), obtenemos:

$$I_i(x_i, y_i) = \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle h(x_i - x_o, y_i - y_o) h^*(x_i - x'_o, y_i - y'_o) U_o(x_o, y_o) U_o^*(x'_o, y'_o) \rangle dx_o dy_o dx'_o dy'_o, \quad (7.3)$$

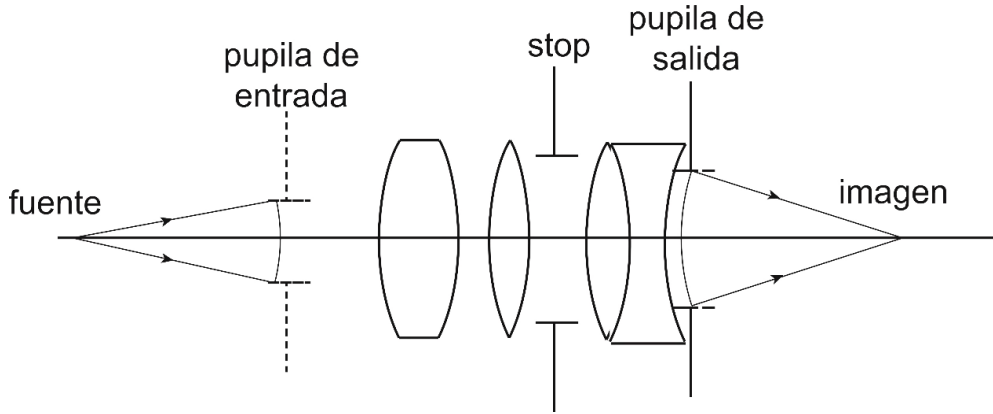


Figura 7.1: Esquemático que muestra las pupilas de un sistema óptico

Ahora, la función de repuesta a un impulso no varía con el tiempo, entonces:

$$I_i(x_i, y_i) = \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) h^*(x_i - x'_o, y_i - y'_o) \langle U_o(x_o, y_o) U_o^*(x'_o, y'_o) \rangle dx_o dy_o dx'_o dy'_o. \quad (7.4)$$

La diferencia entre luz coherente y luz incoherente está en el término de $\langle U_o(x_o, y_o) U_o^*(x'_o, y'_o) \rangle$.

Para luz coherente espacialmente, la fase varía como el término armónico $e^{i(kr - \omega t)}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia de propagación para llegar al punto de interés, entonces podemos escribir el promedio como:

$$\langle U_o(x_o, y_o) U_o^*(x'_o, y'_o) \rangle_{coh} = U_o U_o^* \langle e^{-i\omega t} e^{i\omega t} \rangle = U_o U_o^*, \quad (7.5)$$

donde $U_o = e^{ikr_o}$ y $U_o^* = e^{-ikr'_o}$.

Para luz espacialmente incoherente, la relación entre la fase en dos posiciones diferentes es aleatoria. Entonces, sólo hay una contribución (un promedio que no es cero) cuando la posición $(x_o, y_o) = (x'_o, y'_o)$. Esto significa que el promedio es:

$$\begin{aligned} \langle U_o(x_o, y_o) U_o^*(x'_o, y'_o) \rangle_{incoh} &= \langle U_o(x_o, y_o) U_o^*(x'_o, y'_o) \rangle \delta(x_o - x'_o, y_o - y'_o) \\ &= I_o(x_o, y_o) \delta(x_o - x'_o, y_o - y'_o), \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde la función $\delta(\quad)$ es la función delta de Dirac.

Para luz coherente, sustituyendo la ecuación (7.5) en la ecuación (7.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} I_i(x_i, y_i)_{coh} &= \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) h^*(x_i - x'_o, y_i - y'_o) U_o U_o^* dx_o dy_o dx'_o dy'_o \\ &= \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) U_o(x_o, y_o) dx_o dy_o \right|^2, \end{aligned} \quad (7.7)$$

que significa que:

$$U_i(x_i, y_i)_{coh} = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) U_o(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (7.8)$$

y que, **para luz coherente, la formación de la imagen es lineal en amplitud.**

Para luz incoherente, sustituyendo la ecuación (7.6) en la (7.4), obtenemos:

$$I_i(x_i, y_i)_{incoh} = \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) h^*(x_i - x'_o, y_i - y'_o) \times I_o(x_o, y_o) \delta(x_o - x'_o, y_o - y'_o) dx_o dy_o dx'_o dy'_o, \quad (7.9)$$

que se puede escribir como:

$$I_i(x_i, y_i)_{incoherente} = \int \int_{-\infty}^{\infty} |h(x_i - x_o, y_i - y_o)|^2 I_o(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (7.10)$$

que significa **que la formación de imágenes con luz incoherente es lineal en intensidad.**

Es importante enfatizar aquí que los términos "coherente" e "incoherente" se refieren a la coherencia espacial. Las fórmulas deducidas arriba para la luz incoherente incluyen una sola longitud de onda, que significa que los campos son monocromáticos y temporalmente coherentes. Para calcular la imagen con luz policromática, habría que sumar las intensidades de las imágenes para cada longitud de onda.

7.3 Formación de Imágenes con Luz Coherente

Para luz coherente tenemos que:

$$U_i(x_i, y_i)_{coh} = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_o, y_i - y_o) U_o(x_o, y_o) dx_o dy_o = h(x, y) \otimes U_o(x_o, y_o). \quad (7.11)$$

Tomando la transformada de Fourier de esta ecuación nos da:

$$\mathfrak{I}(U_i(x_i, y_i)_{coh}) = H(u, v) \mathfrak{I}(U_o(x_o, y_o)), \quad (7.12)$$

donde $\mathfrak{I}(U_i(x_i, y_i)_{coh})$ es el espectro de ondas espaciales de la amplitud en la imagen, $\mathfrak{I}(U_o(x_o, y_o))$ es el espectro de ondas espaciales de la amplitud en el objeto y $H(u, v)$ es la función de transferencia del sistema con luz coherente espacialmente y es la transformada de Fourier de la función de respuesta a un impulso. Para el caso de una lente delgada, ya vimos que la función de respuesta a un impulso es proporcional a la transformada de Fourier de la pupila de la lente, que da, en la notación del Capítulo 6:

$$h(x, y) = \tilde{h} \mathfrak{I}(P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}}, \quad (7.13)$$

donde suponemos una magnificación de 1, y escribimos $x = x_i - x_o$ y $y = y_i - y_o$. La función de transferencia es, entonces:

$$H(u, v) = \tilde{h} \mathfrak{I} \left(\mathfrak{I}(P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}} \right), \quad (7.14)$$

y podemos calcular:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{I} \left(\mathfrak{I}(P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}} \right) \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{I}(P(x_l, y_l)) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} du dv \Big|_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}} \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{I}(P(x_l, y_l)) e^{i2\pi(u(-\xi) + v(-\eta))} du dv \Big|_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}} \\ &= \mathfrak{I}^{-1} \left(\mathfrak{I}(P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}} \right)_{-\xi, -\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{F}^{-1} \left(\mathfrak{F}(P(x_l, y_l)) \right)_{-\xi=u\lambda d_i, -\eta=v\lambda d_i} \\
&= P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i),
\end{aligned} \tag{7.15}$$

esto es:

$$H(u, v) = \tilde{h} P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i), \tag{7.16}$$

y la función de transferencia para luz coherente espacialmente es proporcional a la función de la pupila con un escalamiento y una inversión (por las variables). Típicamente tenemos aberturas simétricas, entonces el signo menos en las variables, que significa una inversión de la forma de la abertura, no va a afectar los resultados. Por ejemplo, si tomamos una abertura circular, que es la abertura de una lente típica:

$$P(x_l, y_l) = \text{circ} \left(\frac{r}{a} \right), \tag{7.17}$$

la función de transferencia es:

$$H(u, v) = \tilde{h} \text{circ} \left(\frac{\lambda d_i \sqrt{u^2 + v^2}}{a} \right). \tag{7.18}$$

Esta función se muestra en la Figura 7.2 en el eje $v = 0$. Todas las frecuencias espaciales hasta $u = \pm a/(2\lambda d_i)$ pasan con una amplitud dada por la constante $\tilde{h}$, y frecuencias espaciales con una magnitud mayor que $a/(2\lambda d_i)$ no pasan. Esto es, la lente sirve como un filtro de paso bajo de las frecuencias espaciales entre el objeto y la imagen.

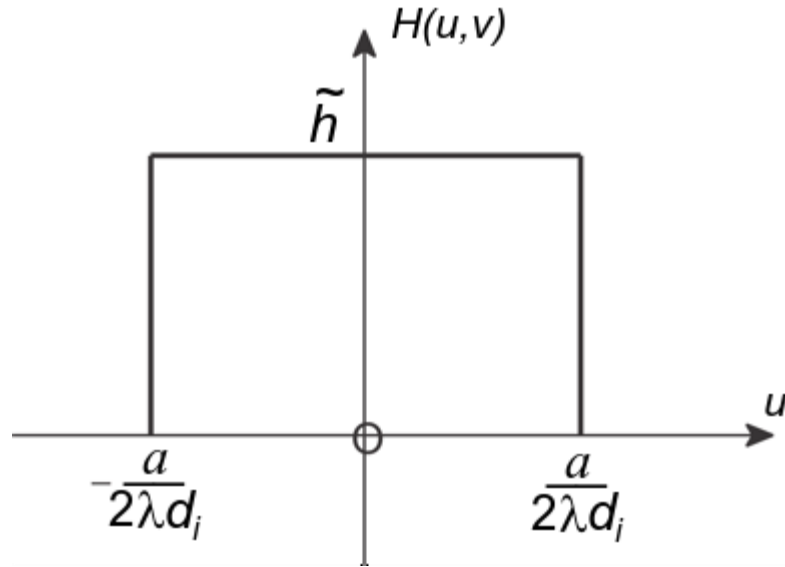


Figura 7.2: Función de transferencia para un sistema coherente

7.3.1 Teoría de Formación de Imágenes de Abbe

La idea de que la lente sirve como un filtro de paso bajo fue introducida primeramente por Abbe (Hecht,1998), pero en términos de la pupila de entrada. Refiriéndonos a la Figura 7.3, la luz que se difracta a un ángulo θ del objeto termina en la posición h en el plano focal; $h = f\theta$, donde f es la distancia focal de la lente. Ahora, usamos la ecuación de la rejilla para ángulos pequeños, $\theta = m\lambda s$, donde s es la frecuencia espacial del objeto y m es el orden de difracción. Para el primer orden de difracción, $m = 1$, $\theta = \lambda s$ y nos da $h = f\lambda s$, o $s = h/\lambda f$. Pero el valor máximo de h es el radio de la lente $a/2$, y la frecuencia espacial máxima es, entonces:

$$s_{max} = \frac{a}{2\lambda f}. \quad (7.19)$$

Se puede ver que esta ecuación nos da el límite en frecuencia espacial en términos de la distancia del objeto (en este caso f), pero tiene la misma forma que el límite de la Figura 7.2, que está en términos de la distancia de la imagen.

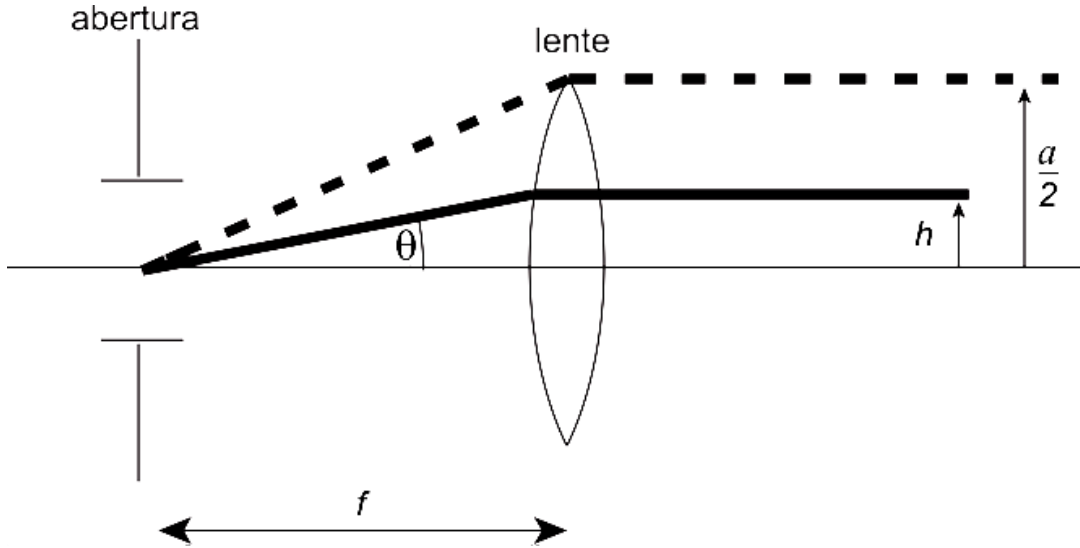


Figura 7.3: La geometría de la teoría de formación de imágenes de Abbe

7.4 Formación de imágenes con luz incoherente

Para luz incoherente tenemos que trabajar con las intensidades (Wilson, 1995; Williams y Becklund, 1989):

$$I_i(x_i, y_i)_{incoh} = \int \int_{-\infty}^{\infty} |h(x_i - x_o, y_i - y_o)|^2 I_o(x_o, y_o) dx_o dy_o$$

$$= q(x, y) \otimes I_o(x_o, y_o), \quad (7.20)$$

donde $q(x, y) = |h(x_i - x_o, y_i - y_o)|^2$ es la función de esparcimiento de un punto (point spread function PSF) que es la respuesta del sistema a un impulso de intensidad. Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (7.20):

$$\mathfrak{I}(I_i(x_i, y_i)_{incoh}) = Q(u, v) \mathfrak{I}(I_o(x_o, y_o)). \quad (7.21)$$

Ahora, tenemos que:

$$q(x, y) = |h(x, y)|^2 = h(x, y)h^*(x, y). \quad (7.22)$$

y que:

$$Q(u, v) = \mathfrak{I}(q(x, y)) = \mathfrak{I}(h(x, y)h^*(x, y)) = \mathfrak{I}(h(x, y)) * \mathfrak{I}(h(x, y)), \quad (7.23)$$

que es la autocorrelación de la transformada de Fourier de la función $h(x, y)$. En algunos libros de texto y artículos un poco más viejos, la ecuación (7.23) se escribe en términos de una convolución:

$$Q(u, v) = \mathfrak{I}(h(x, y)) \otimes \mathfrak{I}(h^*(x, y)) = H(u, v) \otimes H^*(-u, -v). \quad (7.24)$$

Sustituyendo el valor de $H(u, v)$ de la ecuación (7.16), $H(u, v) = \tilde{h} P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)$, en la ecuación (7.23):

$$Q(u, v) = |\tilde{h}|^2 P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i) * P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i), \quad (7.25)$$

es decir, la función de transferencia de la intensidad en un sistema incoherente es proporcional a la autocorrelación de la función de la pupila escalada e invertida.

La función de transferencia óptica, OTF (por sus siglas en inglés, Optical Transfer Function), se define como la función de transferencia $Q(u, v)$ normalizada por su valor en $u = v = 0$:

$$OTF(u, v) = \frac{P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i) * P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)}{\iint |P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)|^2 du dv}. \quad (7.25)$$

Como ejemplo, tomamos el caso de una abertura rectangular (por ser más sencilla que una circular). Ya vimos el caso de convolución de una función rectangular, y como la función $rect(\)$ es real y simétrica, la correlación es igual a la convolución, y la Figura 7.4 muestra el OTF para este caso. La correlación de dos funciones cuadradas nos da una función triangular, entonces aquí las frecuencias espaciales mayores que $a/\lambda d_i$ no pasan, y las frecuencias espaciales menores que $a/\lambda d_i$ pasan con amplitudes que varían con la frecuencia espacial. En la misma figura se muestra la OTF para una abertura circular, que es el caso más común.

La OTF es, en general, una función compleja:

$$OTF(u, v) = M(u, v) \exp(i\Phi(u, v)), \quad (7.26)$$

donde $M(u, v)$ es la función de transferencia de modulación MTF (por sus siglas en inglés, Modulation Transfer Function) y $\Phi(u, v)$ es la función de transferencia de fase PTF (por sus siglas en inglés, Phase Transfer Function). Como se muestra en la Figura 7.5, la MTF causa una reducción en la amplitud del componente de frecuencia espacial en la frecuencia de interés, y la PTF da un recorrido lateral a este componente.

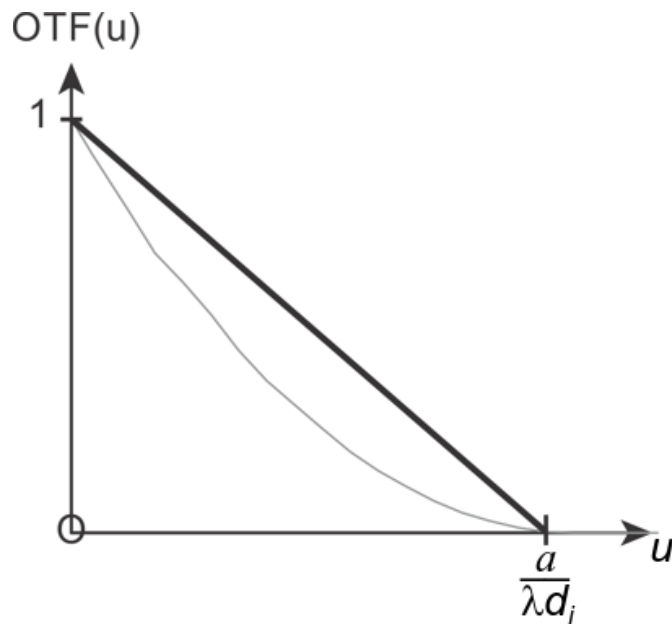


Figura 7.4: La OTF para $v = 0$ para una abertura cuadrada de lado a (línea oscura) y para una abertura circular de diámetro a (línea clara).

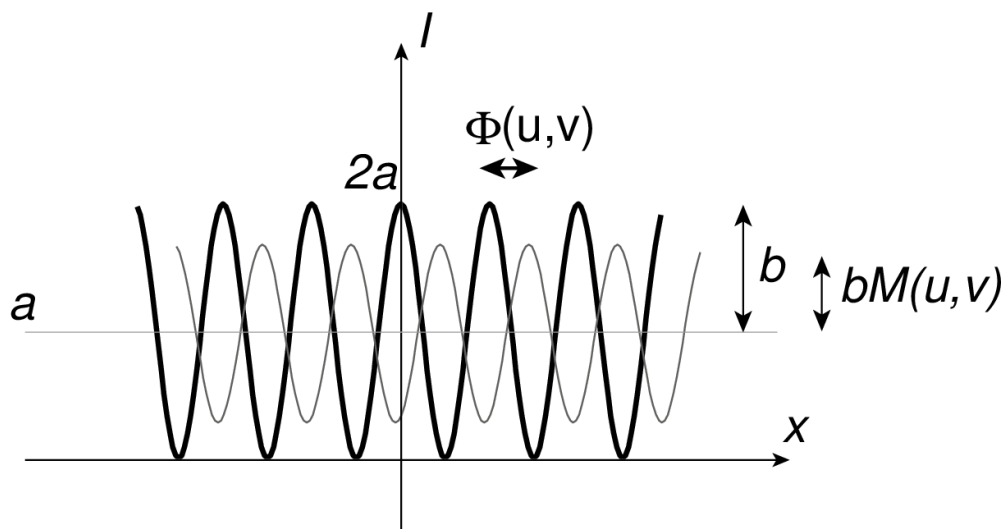


Figura 7.5: Efecto del MTF y PTF sobre la imagen de un objeto periódico. La curva oscura es el objeto y la curva clara es la imagen.

7.4.1 La OTF unidimensional

Normalmente, los sistemas ópticos están caracterizados en términos de líneas por unidad de distancia. Esto es, necesitamos considerar objetos que son líneas, no puntos como hicimos arriba. Un objeto de intensidad en forma de línea lo podemos describir como una función delta: $I_o(x_o, y_o) = \delta(y_o)$. La imagen de este objeto es la convolución del objeto con la PSF del sistema:

$$\begin{aligned}
 I_i(x_i, y_i)_{incoh} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x_i - x_o, y_i - y_o) I_o(x_o, y_o) dx_o dy_o \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x_i - x_o, y_i - y_o) \delta(y_o) dx_o dy_o \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} q(x_i - x_o, y_i) dx_o.
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Esta función es la imagen de una línea, o la función de esparcimiento de una línea LSF (por sus siglas en inglés, Line Spread Function). Tomando nuestra línea de objeto en $y_o = 0$, y suponiendo una PSF simétrica en x , obtenemos la definición de la LSF $l(y)$:

$$l(y) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx. \tag{7.28}$$

Entonces, si tenemos un objeto que se puede formar con la suma de líneas de transmisión de intensidad $I_o(x, y) = f(y)$, la imagen también se puede formar con una suma de imágenes de líneas y está dada por:

$$I_i(x_i, y_i) = l(y) \otimes f(y). \tag{7.29}$$

Tomando la transformada de Fourier de esta ecuación:

$$\mathfrak{I}(I_i(x_i, y_i)) = \mathfrak{I}(l(y)) \mathfrak{I}(f(y)), \tag{7.30}$$

donde $L(v) = \mathfrak{I}(l(y))$ es la función de transferencia óptica unidimensional (1D OTF). Otra vez, la 1D OTF es, en general, una función compleja: $L(v) = M(v) \exp(i\Phi(v))$, donde $M(v)$ es la función de transferencia de modulación en 1D, 1D MTF (1D Modulation Transfer Function) y $\Phi(v)$ es la función de transferencia de fase en 1D, 1D PTF (1D Phase Transfer Function). (Ver la Figura 7.5)

7.5 Comparación entre sistemas coherentes e incoherentes

7.5.1 Resolución de objetos puntuales

Una medida de comparación entre un sistema coherente y un sistema incoherente es la resolución del sistema. Con las ecuaciones deducidas en las secciones anteriores, se puede ver que la imagen de un objeto puntual aislado es lo mismo para la luz coherente e incoherente. Sin embargo, la combinación de dos puntos en un objeto sí varía porque la luz de los dos puntos se combina en formas diferentes para los dos casos.

La resolución es un parámetro importante. Es una medida de qué tan cerca pueden estar dos objetos para que un observador pueda decir que en la imagen hay dos objetos y no uno solo. El criterio de Rayleigh (Born y Wolf, 1980; Hecht, 1998) para la resolución dice que dos fuentes puntuales incoherentes se pueden resolver si la separación entre las dos imágenes es tal que el mínimo del patrón de Airy de uno de los objetos cae en el máximo del otro. Si los objetos están más cerca que este límite no se puede resolver y la imagen aparentemente se ve que viene de un sólo objeto; si la separación es mayor se puede resolver los dos objetos fácilmente. La Figura 7.6(a) muestra la situación del límite de resolución para dos objetos incoherentes con un sistema óptico de diámetro l . En ecuaciones, la intensidad total para el caso incoherente es:

$$I_{incoh}(x_i) = I_0 \left\{ \left(2 \frac{J_1\left(\frac{klx_i}{2z}\right)}{\frac{klx_i}{2z}} \right)^2 + \left(2 \frac{J_1\left(\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}\right)}{\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}} \right)^2 \right\}, \quad (7.31)$$

donde la separación Δ está dada por la posición del primer mínimo de la función de Airy:

$$\frac{\Delta}{z} = 1.22 \frac{\lambda}{l}. \quad (7.32)$$

La Figura 7.6(b) muestra el caso para luz coherente y las dos fuentes con la misma separación que el caso de luz incoherente. En este caso la intensidad está dada por:

$$I_{coh}(x_i) = I_0 \left\{ \left(2 \frac{J_1\left(\frac{klx_i}{2z}\right)}{\frac{klx_i}{2z}} \right) + e^{i\phi} \left(2 \frac{J_1\left(\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}\right)}{\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}} \right) \right\}^2, \quad (7.33)$$

donde el factor ϕ es la diferencia de fase entre las dos fuentes coherentes. Se puede escribir esta ecuación como:

$$\begin{aligned} \frac{I_{coh}(x_i)}{I_0} = & \left(2 \frac{J_1\left(\frac{klx_i}{2z}\right)}{\frac{klx_i}{2z}} \right)^2 + \left(2 \frac{J_1\left(\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}\right)}{\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}} \right)^2 \\ & + \left(2 \frac{J_1\left(\frac{klx_i}{2z}\right)}{\frac{klx_i}{2z}} \right) \left(2 \frac{J_1\left(\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}\right)}{\frac{kl(x_i + \Delta)}{2z}} \right) 2\cos\phi. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Aquí el patrón de intensidad final depende de la diferencia de fase entre las dos fuentes:

- $\phi = 0^\circ$: En este caso $\cos(\phi) = 1$ y no hay un mínimo en el contraste, entonces es más difícil ver que hay dos fuentes, y la resolución es peor, las dos fuentes deben estar más separadas para poder ver que son dos, que el caso incoherente.
- $\phi = 90^\circ$: En este caso el término $\cos(\phi) = 0$ y el caso coherente es idéntico al caso incoherente.
- $\phi = 180^\circ$: Aquí $\cos(\phi) = -1$, y el mínimo entre los dos picos es más grande, es más fácil ver que hay dos objetos y la resolución es mejor.

Se puede ver que la comparación entre un sistema coherente y un sistema incoherente en términos de la resolución de dos objetos puntuales depende de la diferencia de fase entre las dos fuentes coherentes, es decir, depende de la forma del objeto.

Hay otro criterio para la resolución que se puede utilizar, el criterio de Sparrowe (Hecht, 1998). Este criterio indica que se pueden resolver dos objetos si las intensidades de sus imágenes se suman para dar una intensidad uniforme en la

región intermedia entre las dos imágenes individuales. Esto da un límite de resolución menor que el caso de Rayleigh, pero el proceso de análisis realizado arriba es igual para el caso de Sparrowe.

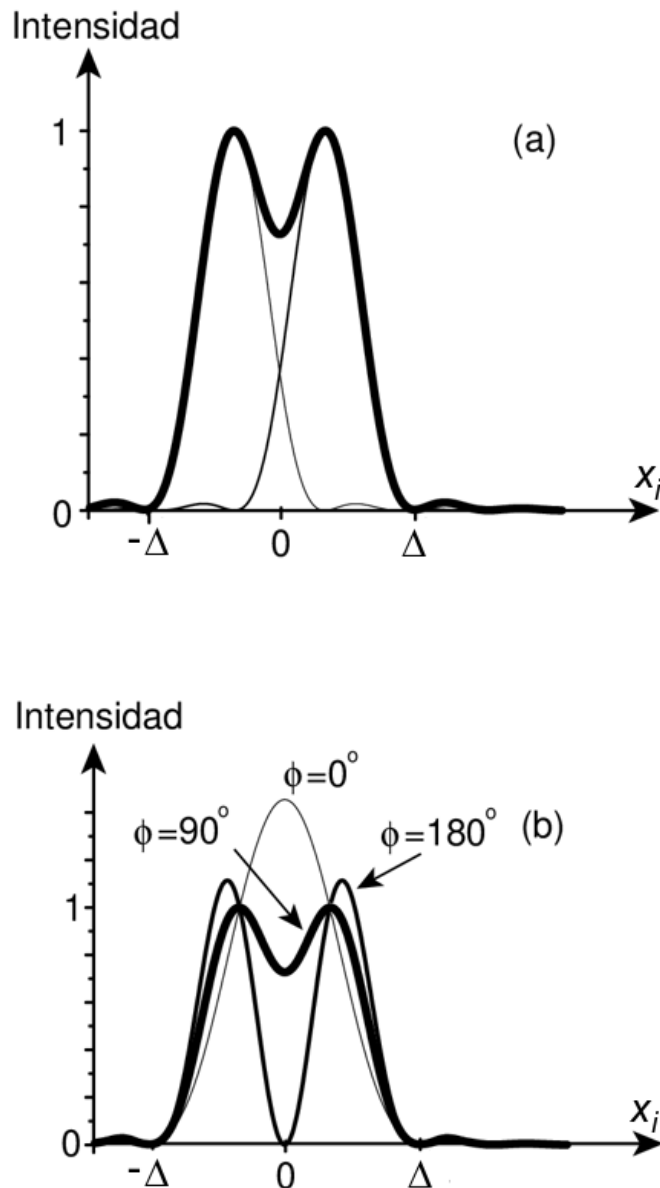


Figura 7.6: Gráficas de la suma de imágenes de dos objetos puntuales. (a) para luz incoherente y (b) para luz coherente con diferentes fases entre las dos fuentes.

La resolución también se puede pensar en términos de la 1D MTF para sistemas con luz incoherente. El método empieza con la suposición de que la LSF, $l(y)$ es

una función conocida. Para muchas situaciones se puede aproximar $l(y)$ como una función gaussiana:

$$l(y) = \frac{C_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad (7.35)$$

donde C_1 es un constante de normalización, y σ es el ancho (la desviación estandar) de la función Gaussiana. Esta forma de la LSF ocurre en muchos casos prácticos, e.g. en problemas de imagenología médica. Sin embargo, para medir la LSF se utilizarían sólo unos pocos puntos del detector (particularmente si la LSF es, como debería ser, angosta comparada con el tamaño de la imagen total) que es ineficiente, y difícil de interpretar si la LSF es muy angosta. Por eso, es mejor medir la imagen de un borde, $e(y)$, ESF (por sus siglas en inglés, Edge Spread Function), que es la integral de la LSF:

$$e(y_o) = \int_{-\infty}^{y_o} l(y - y') dy' = \frac{C_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_o} e^{-\frac{(y-y')^2}{2\sigma^2}} dy' + C_2, \quad (7.36)$$

donde y_o es la posición del borde y C_2 es un constante de integración. Con un cambio de variables, se puede escribir esta ecuación como:

$$e(y_o) = \frac{C_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-y_o}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt + C_2 = \frac{C_1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{y - y_o}{\sigma\sqrt{2}}\right) + C_2, \quad (7.37)$$

donde $\operatorname{erf}(\)$ es la función de error. Experimentalmente, se mide $e(y_o)$ y se ajusta la ecuación (7.37) para obtener el parámetro σ que es el ancho de la LSF.

Hay varias aproximaciones que se pueden utilizar para definir la resolución de un sistema con la LSF como una función gaussiana, en términos de la LSF o en términos de la 1D MTF. La 1D MTF es la transformada de Fourier de la LSF:

$$M(v) = C_1 e^{-2\pi^2 \sigma^2 v^2}. \quad (7.38)$$

Bentzen (1983) tomó el límite de la resolución en términos de la LSF: R_B , la separación mínima de Bentzen es igual al ancho total en la mitad del valor máximo de la LSF:

$$\exp\left(-\frac{(R_B/2)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$R_B = 2\sqrt{2\ln(2)}\sigma \approx 2.35\sigma. \quad (7.39)$$

Hebden *et al* (1975) tomaron el límite de resolución, R_H , como el inverso del valor de la frecuencia espacial en la cual la MTF cae a 10% de su valor máximo:

$$\exp\left(-2\pi^2\sigma^2\left(\frac{1}{R_H}\right)^2\right) = \frac{1}{10},$$

$$R_H = \frac{2\pi\sigma}{\sqrt{2\ln(10)}} \approx 2.93\sigma. \quad (7.40)$$

Por comparación, el valor de R_B corresponde a aproximadamente el inverso de la frecuencia espacial en la cual la MTF cae a 35% de su valor máximo, y el valor de R_H corresponde al ancho total en el valor 1/2.055 del valor máximo de la LSF.

También se pueden comparar estas dos resoluciones con el límite de Sparrowe, que indica que se pueden resolver dos objetos si las intensidades de sus imágenes suman para dar una intensidad uniforme en la región intermedia entre las dos imágenes individuales. En el caso de interés tenemos dos LSF de forma gaussiana con ancho σ , y con una separación Δ :

$$I(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(y - \Delta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7.41)$$

y la condición para la resolución de Sparrowe es la separación $\Delta = R_S$, para la cual:

$$\frac{d^2}{d^2y} I(y) = 0. \quad (7.42)$$

Realizando el cálculo, se obtiene:

$$R_S = 2\sigma. \quad (7.43)$$

Este límite de resolución es menor que los dos anteriores, y corresponde a un valor del MTF que es 0.7% del valor máximo, y al ancho total en el valor $1/1.284$ del valor máximo de la LSF. La Figura 7.7 muestra las distribuciones de intensidad para los diferentes valores de resolución. En la práctica, cual de estos valores de resolución son lo más cercana a la realidad depende de muchos factores, entre los cuales el más importante es el ruido en la medición, lo cual podría requerir de una separación mayor de las dos imágenes para distinguirlas. Sin embargo, los límites de resolución son útiles para *comparar* el comportamiento de diferentes sistemas.

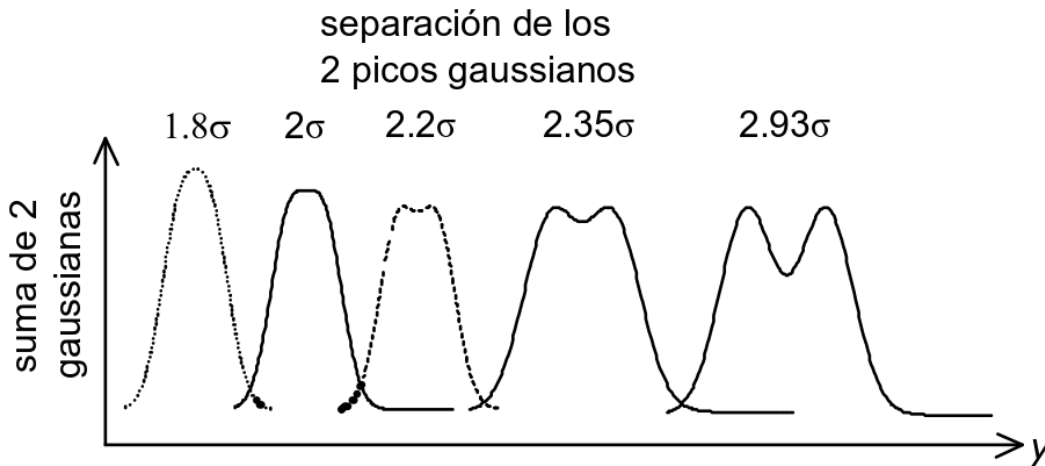


Figura 7.7: La suma de dos objetos incoherentes para diferentes separaciones entre ellos.

7.5.2 La Imagen de un objeto periódico

En la sección anterior vimos que un sistema incoherente transmite una frecuencia espacial máxima que es dos veces la frecuencia espacial máxima transmitida en el sistema coherente. Pero esto no significa que el sistema incoherente es mejor que el sistema coherente para la formación de imágenes; hay que tomar en cuenta que la frecuencia espacial en un sistema coherente se refiere a la amplitud y en el sistema incoherente a la intensidad. Por ejemplo, consideramos el caso de un objeto con transmisión de amplitud:

$$U_o(x_o) = \cos(2\pi u_{max} x_o), \quad (7.44)$$

donde $u_{max} = a/2\lambda d_i$, es decir, la frecuencia espacial máxima transmitida en un sistema coherente. La transmisión de intensidad correspondiente es:

$$I_o(x_o) = |U_o(x_o)|^2 = \cos^2(2\pi u_{max} x_o) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi 2u_{max} x_o)), \quad (7.45)$$

que tiene una frecuencia espacial de $2u_{max} = a/\lambda d_i$, que es la frecuencia espacial máxima transmitida por el sistema incoherente. Pero, en el valor máximo, el sistema coherente pasa toda la amplitud de la frecuencia espacial (multiplicado por un constante, $\tilde{h}$), mientras que en el sistema incoherente, ésta frecuencia espacial está transmitida con muy poca amplitud. Entonces en este caso, el sistema coherente dará una mejor imagen.

Ahora consideramos el caso de una función de transmisión de amplitud:

$$U_o(x_o) = \cos^2(2\pi u_{max} x_o) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi 2u_{max} x_o)). \quad (7.46)$$

Ésta transmisión de amplitud tiene una frecuencia espacial $2u_{max}$ entonces en el sistema coherente no se transmitirá ésta información. La función de transmisión de intensidad es:

$$\begin{aligned}
I_o(x_o) &= \cos^4(2\pi u_{max} x_o) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + 2\cos(2\pi 2u_{max} x_o) + \cos^2(2\pi 2u_{max} x_o) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos(2\pi 2u_{max} x_o) + \frac{1}{2} (1 + \cos(2\pi 4u_{max} x_o)) \right).
\end{aligned}
\tag{7.47}$$

El término con una frecuencia espacial $4u_{max}$ no pasa por el sistema incoherente, pero el término de frecuencia espacial $2u_{max}$ sí pasa, aunque con una amplitud pequeña. Entonces, el sistema incoherente tiene información en la imagen que no tiene la imagen coherente, y el sistema incoherente es mejor para este caso.

7.5.3 La imagen de un borde

El análisis de la imagen de un borde es un problema clásico en microscopía. Aquí veremos las diferencias entre las imágenes usando luz coherente e incoherente espacialmente.

7.5.3.1 Luz incoherente

Como vimos arriba, un borde $b(y)$ se puede escribir como:

$$b(y - y_0) = \int_{y_0}^{\infty} \delta(y - y') dy', \tag{7.48}$$

con el borde en la posición $y = y_0$ (Considine, 1966). Entonces la imagen del borde está dada por la integral de las imágenes de las líneas $\delta(y')$, es decir, la integral de la LSF en las diferentes posiciones requeridas para formar el borde:

$$I_i(y_i) = e(y_i) = \int_{y_0}^{\infty} l(y_i - y') dy', \tag{7.49}$$

si la magnificación es 1. Entonces, el problema es, primero, calcular la imagen de una línea, para luego calcular la imagen del borde. Tenemos que:

$$l(y) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx, \quad (7.50)$$

y vamos a suponer una abertura cuadrada, para simplificar las matemáticas:

$$q(x, y) = \left| \left(\frac{a}{\lambda z} \right)^2 \text{sinc} \left(\frac{ax}{\lambda z} \right) \text{sinc} \left(\frac{ay}{\lambda z} \right) \right|^2. \quad (7.51)$$

La integral para la imagen de una línea queda como:

$$\begin{aligned} l(y) &= \left(\frac{a}{\lambda d_i} \right)^4 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi ay}{\lambda d_i} \right)}{\frac{2\pi ay}{\lambda d_i}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi ax}{\lambda d_i} \right)}{\frac{2\pi ax}{\lambda d_i}} \right)^2 dx \\ &= \left(\frac{a}{\lambda d_i} \right)^4 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi ay}{\lambda d_i} \right)}{\frac{2\pi ay}{\lambda d_i}} \right)^2 \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

La imagen de un borde es, entonces, suponiendo que el borde se encuentra en la posición $y_0 = 0$:

$$\begin{aligned} e(y_i) &= \left(\frac{a}{\lambda d_i} \right)^4 \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a(y_i - y')}{\lambda d_i} \right)}{\frac{2\pi a(y_i - y')}{\lambda d_i}} \right)^2 dy' \\ &= \left(\frac{a}{\lambda d_i} \right)^4 \frac{1}{4} \int_{\frac{2\pi a}{\lambda d_i}}^{-\infty} \frac{\sin^2(y'')}{(y'')^2} dy'', \end{aligned} \quad (7.53)$$

con el cambio de variable $y'' = 2\pi a(y_i - y') / \lambda d_i$. Usando las relaciones trigonométricas, esta integral se puede escribir como:

$$e(y_i) = \left(\frac{a}{\lambda d_i}\right)^4 \frac{1}{4} \int_{\frac{2\pi a}{\lambda d_i}}^{-\infty} \left(\frac{1}{(y'')^2} - \frac{\cos(2y'')}{(y'')^2} \right) dy'', \quad (7.54)$$

y se puede integrar el término con cos() por partes para obtener:

$$e(y_i) = \left(\frac{a}{\lambda d_i}\right)^4 \frac{1}{4} \left\{ \int_{\frac{2\pi a}{\lambda d_i}}^{-\infty} \frac{\text{sen}(2y'')}{2y''} dy'' - \left(1 - \cos\left(\frac{\lambda d_i}{\pi a y_i}\right) \right) \right\}. \quad (7.55)$$

El término:

$$\int_{\frac{2\pi a}{\lambda d_i}}^{-\infty} \frac{\text{sen}(2y'')}{2y''} dy'' = \begin{cases} \frac{\pi}{2} S\left(\frac{2\pi a}{\lambda d_i} |y_i|\right) & y < 0, \\ \frac{\pi}{2} + S\left(\frac{2\pi a}{\lambda d_i} |y_i|\right) & y \geq 0, \end{cases} \quad (7.56)$$

donde la función $S(\quad)$ es la función del seno que está tabulado. La Figura 7.8 muestra la forma de la ecuación (7.55) normalizada a un valor máximo de 1.

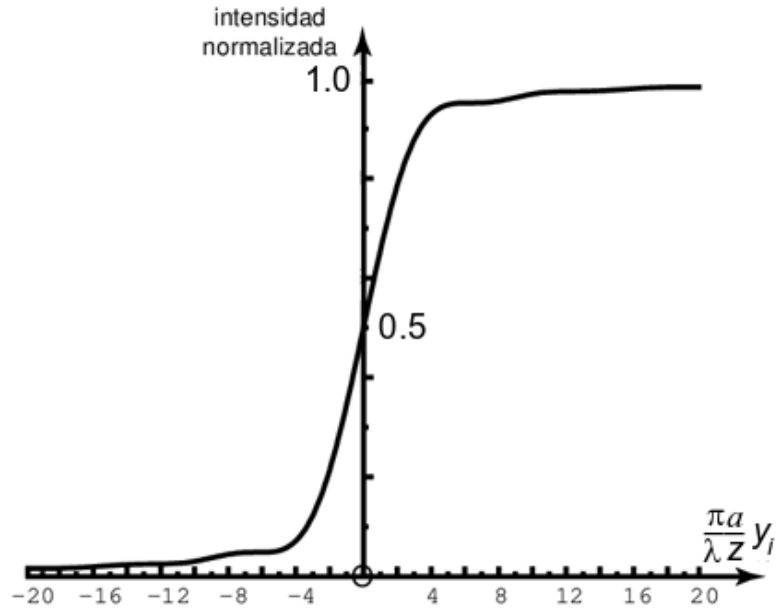


Figura 7.8: La imagen incoherente de un borde. (ImágenesBorde.m)

7.5.3.2 Luz coherente

Otra vez, primero tenemos que calcular la imagen de una línea (Considine, 1966): el objeto es $U_o(x_o, y_o) = \delta(y_o)$ y su transformada de Fourier es $\mathfrak{Z}(U_o)(u, v) = \delta(u)$. Si tenemos una lente sencilla de diámetro $2a$, la función de transferencia del sistema es igual a la forma de la lente, y el espectro de la imagen es:

$$\mathfrak{Z}(U_i)(u, v) = \delta(u) \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i v}{a}\right), \quad (7.57)$$

donde la función $\text{rect}(\quad)$ es la proyección del círculo en el eje v de la imagen.

La imagen de una línea es la transformada de Fourier inversa de esta ecuación:

$$U_i(y_i) = \frac{a}{\lambda d_i} \text{sinc}\left(\frac{a y_i}{\lambda d_i}\right). \quad (7.58)$$

Ahora, ésta función ya está normalizada para que $\int_{-\infty}^{\infty} U_i(y) dy = 1$, entonces la imagen de un borde en la posición $y = 0$ está dada por:

$$I_i(y_i) = \left| \int_0^{\infty} U_i(y_i - y') dy' \right|^2 = \left| \int_0^{\infty} \frac{a}{\lambda d_i} \text{sinc}\left(\frac{a(y_i - y')}{\lambda d_i}\right) dy' \right|^2. \quad (7.59)$$

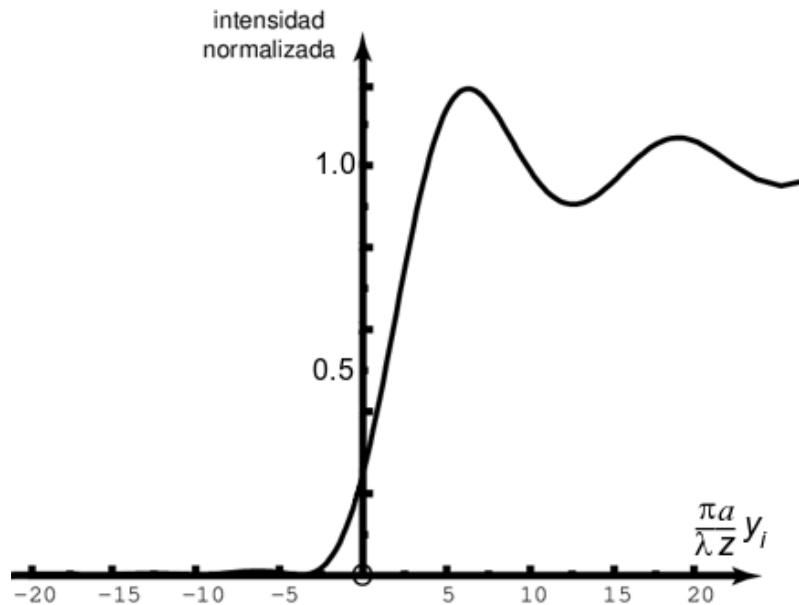


Figura 7.9: La imagen coherente de un borde. (ImágenesBorde.m)

Si siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos para el caso de luz incoherente, obtenemos:

$$I_i(y_i) = \left| \int_{\frac{2\pi a}{\lambda d_i} y_i}^{-\infty} \frac{\sin(y'')}{y''} dy'' \right|^2. \quad (7.60)$$

La Figura 7.9 muestra la forma de la imagen coherente de un borde.

7.5.3.3 Comparación de los dos casos

De las Figuras 7.8 y 7.9 se puede ver algunas diferencias importantes entre la imagen con luz coherente y la imagen con luz incoherente. La imagen con luz coherente tiene franjas de interferencia y la de luz incoherente no, este efecto es general para luz coherente: siempre aparecen franjas. En la posición del borde la intensidad con luz coherente es 25% del máximo, y con luz incoherente es 50% del máximo, es decir, hay un aparente cambio de posición del borde con luz coherente. Otro parámetro importante es la pendiente de la intensidad en la posición del borde, porque si la pendiente es más alta, se puede medir la posición del borde con más precisión. Para luz coherente se puede calcular que la pendiente en la posición $y = 0$ es (Considine, 1966):

$$\frac{dI_i(0)}{dy}_{coh} = 2 \frac{a}{\lambda d_i}, \quad (7.61)$$

y para luz incoherente (Considine, 1966):

$$\frac{dI_i(0)}{dy}_{incoh} = 1.7 \frac{a}{\lambda d_i}, \quad (7.62)$$

por tanto es más preciso medir la posición de un borde con luz coherente.

Capítulo 8

Apodización

Existe una técnica para alterar la transmisión en la pupila o abertura de un sistema y cambiar la respuesta a un impulso o la función de transferencia del sistema (Wilson, 1995). Esta técnica se llama apodización. En este capítulo veremos la teoría de apodización y algunos ejemplos.

8.1 Teoría de Apodización

Escribiendo la función de la pupila del sistema óptico sin alteración como $P(x_l, y_l)$ y la función que describe la alteración como $f(x_l, y_l)$, tenemos que la función de la nueva función de la pupila es: $f(x_l, y_l)P(x_l, y_l)$ y, para luz coherente, la respuesta a un impulso es proporcional a:

$$h(x, y) \propto \mathfrak{F}(f(x_l, y_l)P(x_l, y_l))_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}} = \mathfrak{F}(f(x_l, y_l)) \otimes \mathfrak{F}(P(x_l, y_l)), \quad (8.1)$$

donde no se ha anotado el escalamiento en las variables de la transformada de Fourier a la derecha. La función de transferencia para luz coherente es:

$$H(u, v) \propto \mathfrak{F}(h(x, y)) = f(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i), \quad (8.2)$$

es decir, la función de transferencia es simplemente el producto de la función de la pupila con la función de alteración de la transmisión de la pupila (con una inversión y un escalamiento).

Para luz incoherente, tenemos la PSF que es:

$$q(x, y) = |h(x, y)|^2 \propto |\mathfrak{I}(f(x_l, y_l)P(x_l, y_l))|^2, \quad (8.4)$$

y la OTF es:

$$\begin{aligned} OTF(u, v) &= \mathfrak{I}(q(x, y)) \\ &\propto \{f(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)\} \\ &\quad * \{f(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)\}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

que es la autocorrelación de la pupila multiplicada por la función de alteración de la transmisión de la pupila.

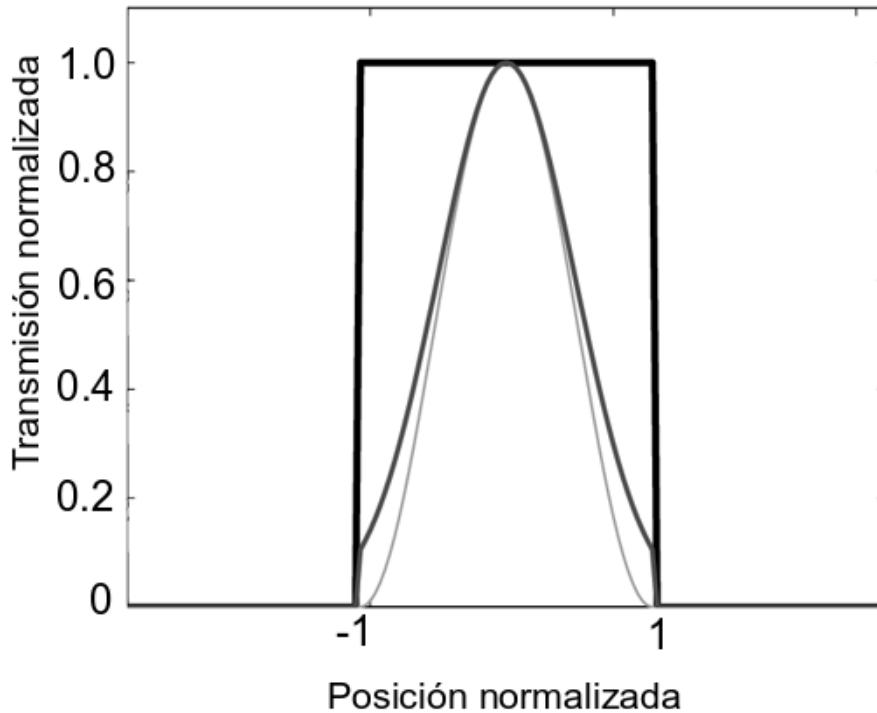


Figura 8.1: Forma de las funciones de transmisión de la pupila de la lente. Líneas oscuras, pupila circular; curva gris oscura, pupila circular multiplicada por $0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$; curva gris claro, pupila circular multiplicada por $\exp(r_l^2/R^2)$.

8.2 Ejemplos de apodización

8.2.1 Apodización de Amplitud

Para el caso de luz coherente, la función de cambio en la transmisión en la pupila, $f(x_l, y_l)$, actúa como un filtro adicional para las frecuencias espaciales en la imagen. La Figura 8.1 muestra la forma de los primeros filtros utilizados aquí. Los primeros perfiles de los filtros utilizados (todos los filtros son circularmente simétricos) son (a) el perfil circular original, (b) abertura circular multiplicada por $0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$, donde r es la distancia del centro de la pupila a la posición de interés y R es el ancho de la forma cosenoidal del filtro, y (c) abertura circular multiplicada por una gaussiana $\exp(r_l^2/R^2)$. Nótese que las funciones de transferencia para luz coherente tienen la misma forma que las funciones de transmisión de la pupila. Se muestran el PSF (que es también la intensidad en la imagen para luz coherente) en las Figuras 8.2 y 8.3.

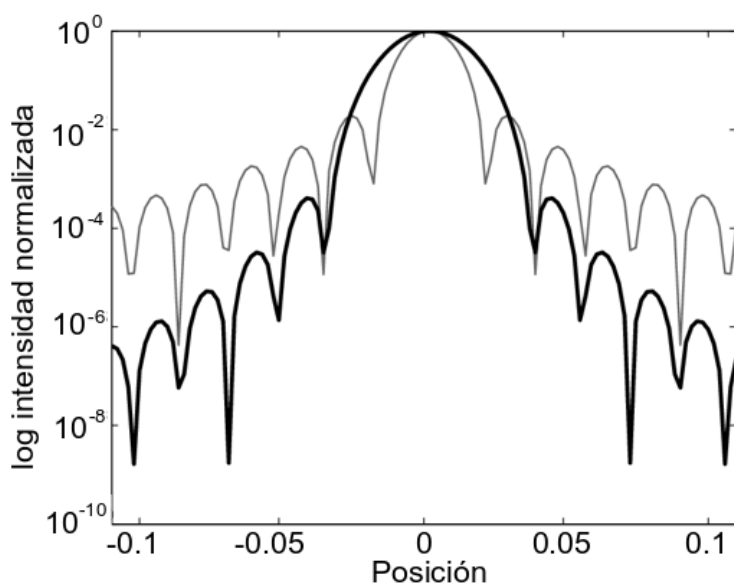


Figura 8.2: Intensidad en la respuesta a un impulso para una abertura circular (curva gris) y una abertura circular multiplicada por $0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$ (curva oscura). (ApodizacionCosCirc.m)

Se puede ver en éstas dos figuras que el efecto de los filtros en la abertura de la lente es la de aumentar el ancho del pico central y reducir la intensidad de la luz en los picos secundarios. Éste efecto, de reducir la intensidad en los picos secundarios, es el origen de la palabra “apodización” (del griego para “quitar los pies”), y es útil para observar planetas extrasolares. Para este caso se requiere observar un objeto débil (un planeta) junto a un objeto muy fuerte (una estrella). La apodización permite detectar el planeta y la pérdida de resolución no tiene importancia en este caso, si el planeta está separado lo suficiente de la estrella.

Nótese que los filtros en este caso tienen un máximo en el centro de la abertura y disminuye la transmisión hacia las orillas.

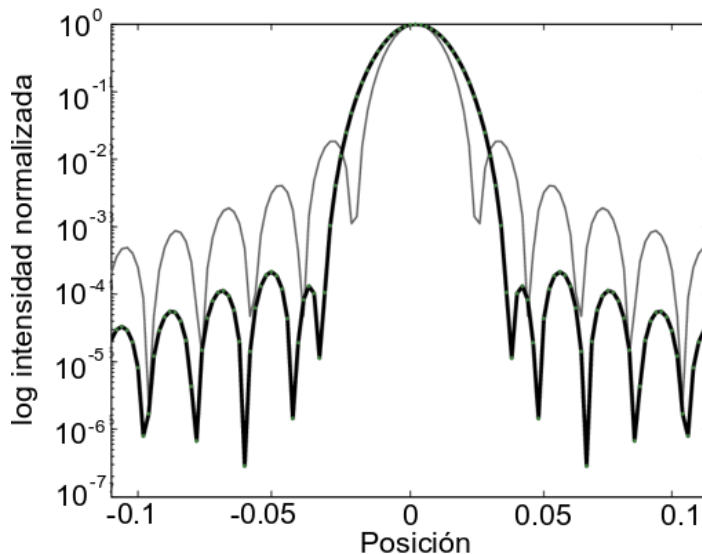


Figura 8.3: Intensidad en la respuesta a un impulso para una abertura circular (curva clara) y una abertura circular multiplicada por $\exp(r_l^2/R^2)$ (curva oscura). (ApodizacionGaussCirc.m)

La Figura 8.4 muestra el MTF para estos casos. Se puede ver que los filtros aumentan el valor relativo de las frecuencias espaciales bajas y disminuyen la contribución de las frecuencias altas.

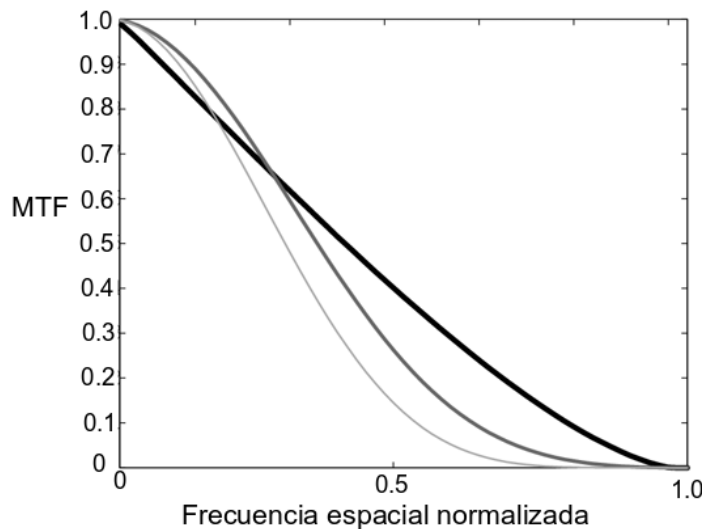


Figura 8.4: Valor de la MTF para una abertura circular (curva oscura); una abertura circular multiplicada por $0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$ (curva gris claro), y una abertura circular multiplicada por $\exp(r_l^2/R^2)$ (curva gris oscuro). (ApodizacionCosCirc.m, ApodizacionGaussCirc.m)

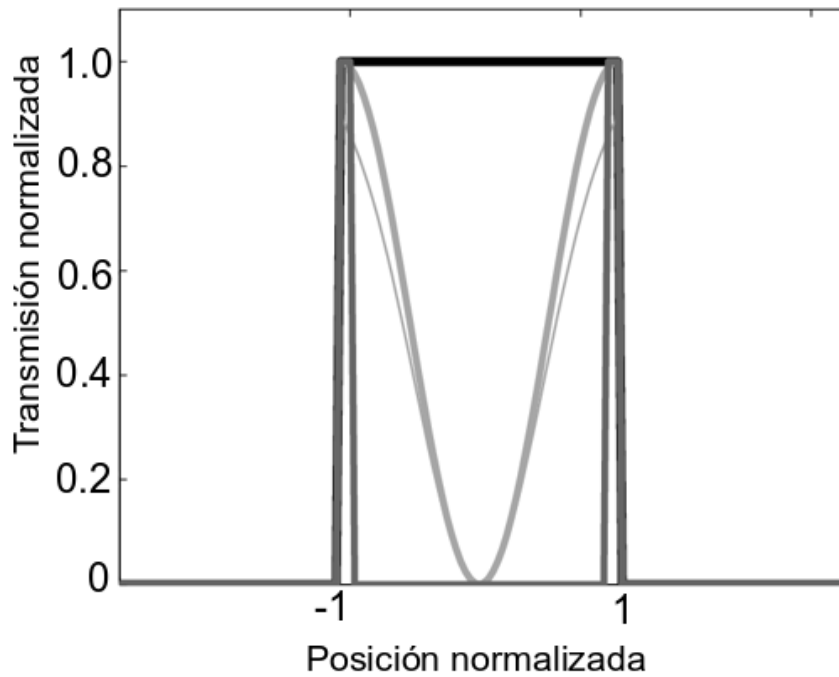


Figura 8.5: Funciones de transmisión de la abertura de la lente: abertura circular, líneas oscuras; abertura anular, líneas gris oscuras; abertura circular multiplicada por $1 - \exp(r_l^2/R^2)$, curva gris; y abertura circular multiplicada por $1 - 0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$, curva gris tenue.

También, se puede hacer un filtro que tenga un mínimo en el centro y aumente hacia las orillas. La Figura 8.5 muestra los filtros de la pupila para estos casos. Los filtros son: abertura circular, abertura anular, abertura circular multiplicada por $1 - \exp(r_l^2/R^2)$, y abertura circular multiplicada por $1 - 0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$. Estas últimas dos aberturas son las complementarias a las consideradas arriba.

Los resultados para la intensidad de la respuesta a un impulso (para los casos de luz coherente e incoherente [PSF] son lo mismo) se muestran en las Figuras 8.6-8.8.

Se puede ver en éstas curvas que ahora el pico central es más angosto y hay más energía en los picos secundarios: es el caso opuesto al caso visto arriba. Este caso se conoce como **superresolución**, basado en el criterio de Rayleigh que dice que el límite de resolución está dado por la posición del primer mínimo en el patrón de difracción. La Figura 8.9 muestra la MTF para éstos casos. Se puede ver que, para producir superresolución, se requiere disminuir la importancia relativa de las frecuencias espaciales bajas y aumentar la contribución de las frecuencias

espaciales altas. Hay una regla general que dice: cuando una función de abertura tiene un máximo en el centro y se reduce hacia los extremos de la abertura, produce apodización; y cuando una abertura tiene un mínimo en el centro y se incrementa hacia los extremos produce superresolución. Sin embargo, no se puede realizar estas dos mejoras simultáneamente: si se reduce la energía en los picos secundarios el ancho del pico central aumenta; y si se reduce el ancho del pico central se aumenta la energía en los picos secundarios. Se puede utilizar superresolución para poder observar dos objetos muy cercanos.

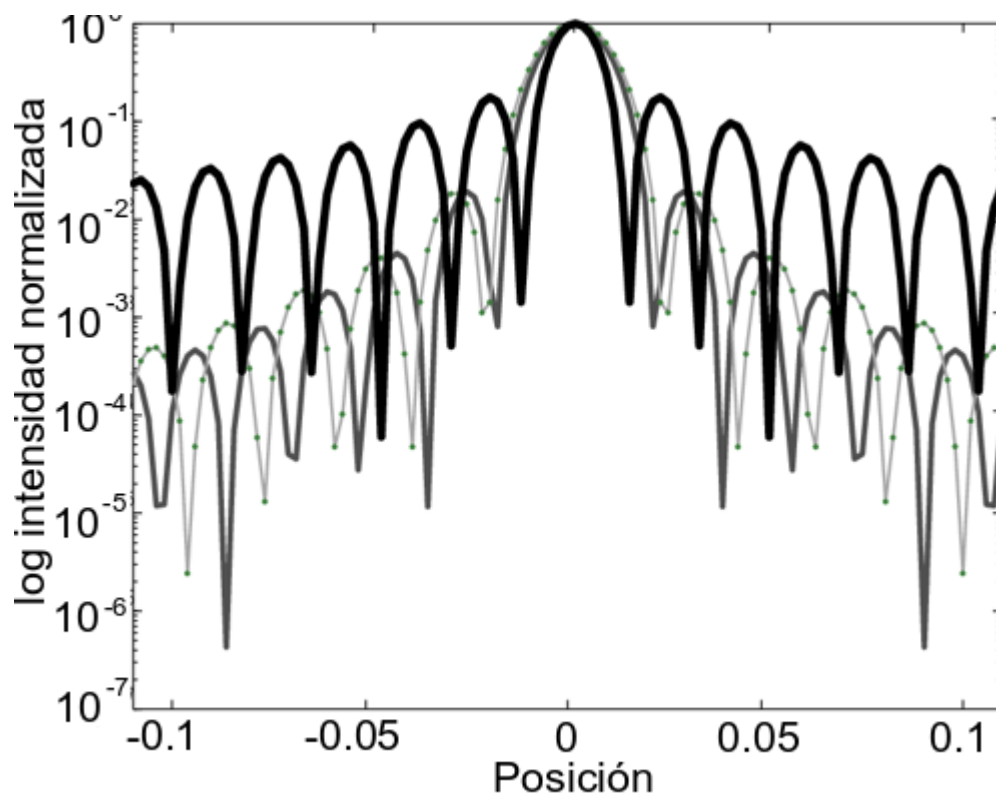


Figura 8.6: Intensidad en la respuesta a un impulso para: abertura circular de radio relativo 1, curva gris oscuro; abertura circular de radio relativo 0.9, curva gris claro; abertura anular entre radios relativos 1 y 0.9, curva oscura.

(ApodizacionAnular.m)

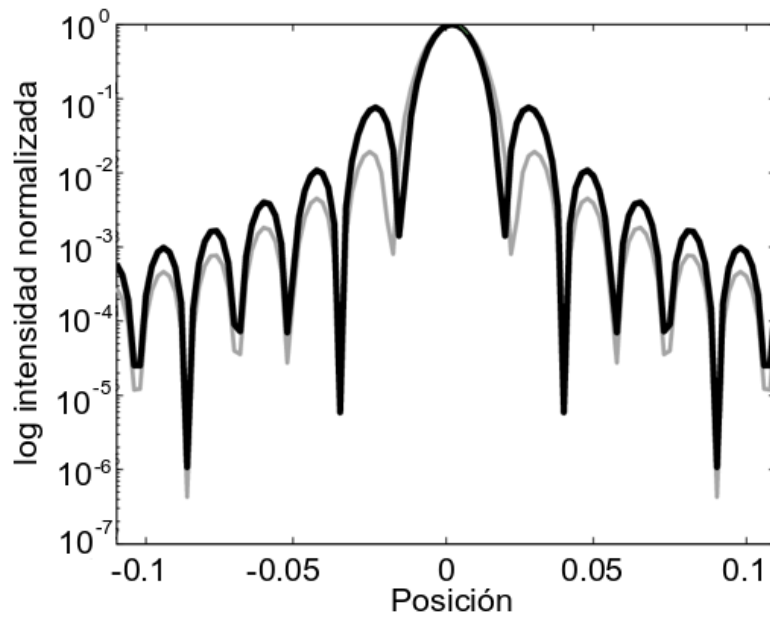


Figura 8.7: Intensidad en la respuesta a un impulso para una abertura circular (curva ligera) y una abertura circular multiplicada por $1 - 0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$ (curva oscura). (ApodizacionInvCosCirc.m)

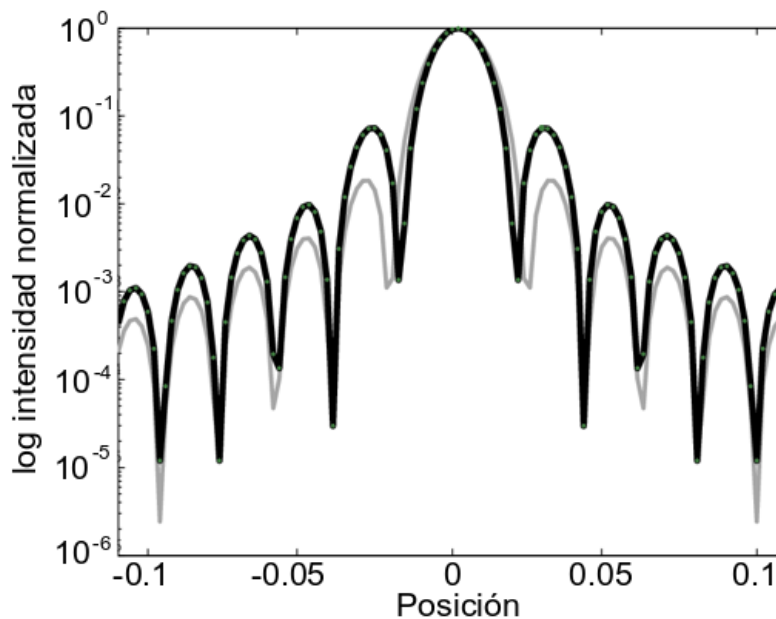


Figura 8.8: Intensidad en la respuesta a un impulso para una abertura circular (curva ligera) y una abertura circular multiplicada por $1 - \exp(r_l^2/R^2)$ (curva oscura). (ApodizacionInvGaussCirc.m)

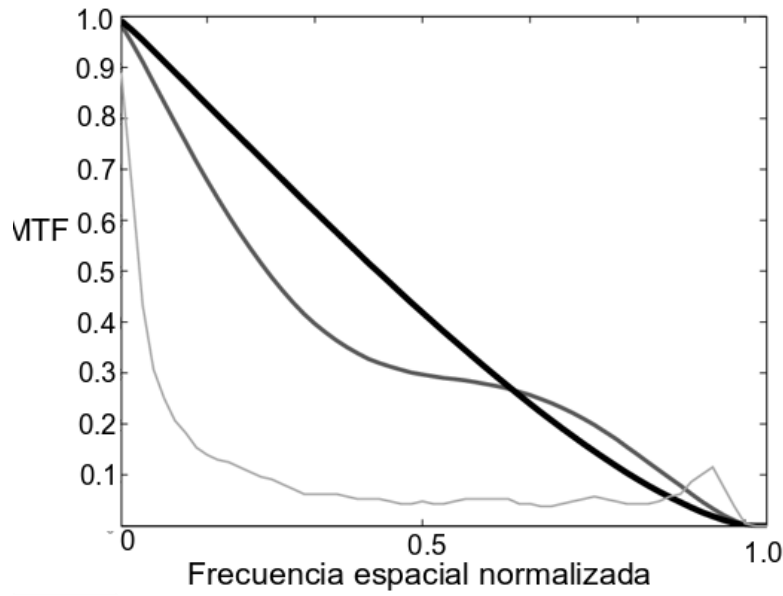


Figura 8.9: Valor de la MTF para una abertura circular (curva oscura); una abertura circular multiplicada por $1 - 0.5[1 + \cos(\pi r_l/R)]$, y una abertura circular multiplicada por $1 - \exp(r_l^2/R^2)$ (curva gris oscuro) (estas dos curvas son idénticas en la escala mostrada); una abertura anular, curva gris claro. (ApodizacionAnular.m, ApodizacionInvCosCirc.m, ApodizacionInvGaussCirc.m)

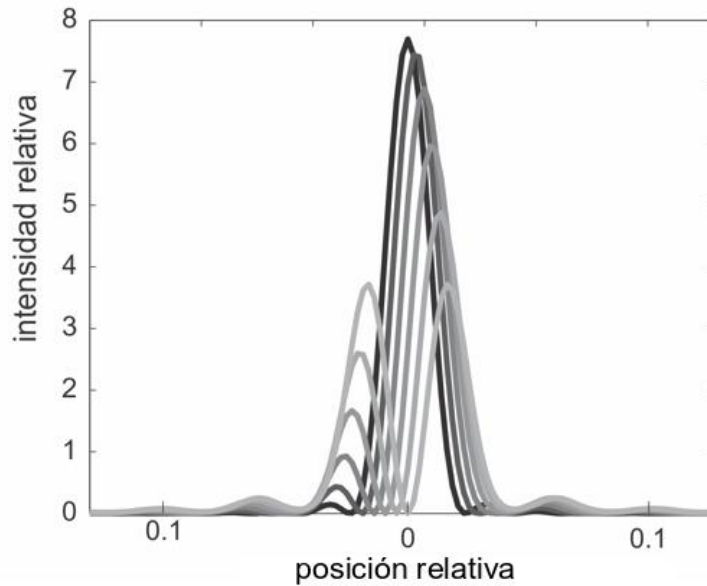


Figura 8.10: Gráficas del PSF para una abertura con un escalón de fase en $x = 0$. De la curva más oscura a la curva más clara, la fase tiene los valores $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$. (ApodizacionMedioFaseCirc.m)

8.2.2 Apodización de Fase

También se puede considerar variaciones de fase y no de amplitud. Por ejemplo, si consideramos una abertura donde hay un escalón de fase:

$$f(x_l) = \begin{cases} 1 & x_l \leq 0, \\ e^{i\phi} & x_l > 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

y el valor de ϕ puede variar. Las Figuras 8.10, 8.11 y 8.12 muestran los PSF, los MTF y los PTF, respectivamente, para valores de $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$. En estas gráficas se nota la asimetría introducida por el escalón de fase, y la reducción en los componentes de frecuencias espaciales bajas en el MTF. También se puede ver que hay una inversión de contraste (un valor de PTF de 180°) para frecuencias espaciales altas con el cambio de fase más grande; en los otros casos hay un corrimiento en las componentes, que son función de la frecuencia espacial y el valor del cambio de fase. Éste cambio de fase está relacionado con la asimetría en el PSF.

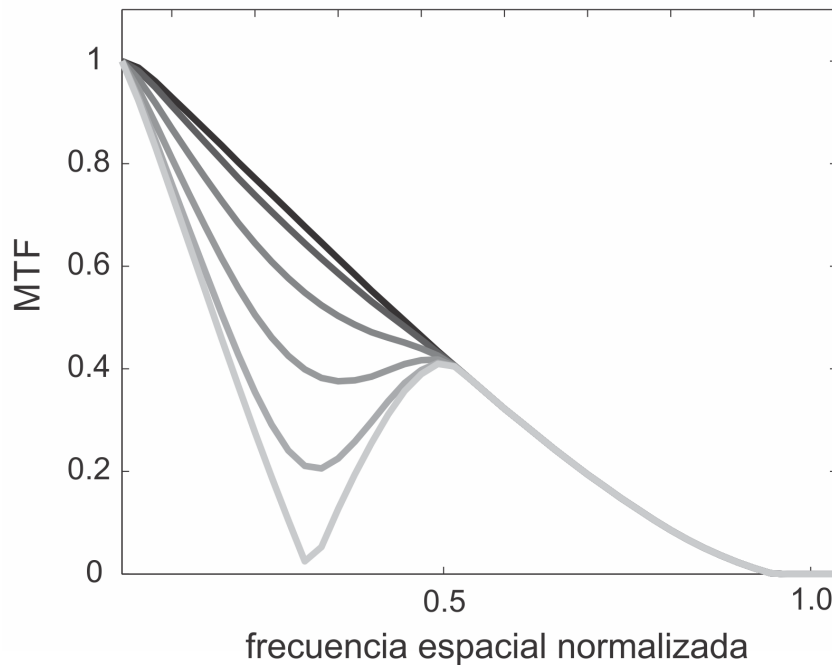


Figura 8.11: Gráficas del MTF para una abertura con un escalón de fase en $x = 0$. De la curva más oscura a la curva más clara, la fase tiene los valores $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$.

(ApodizacionMedioFaseCirc.m)

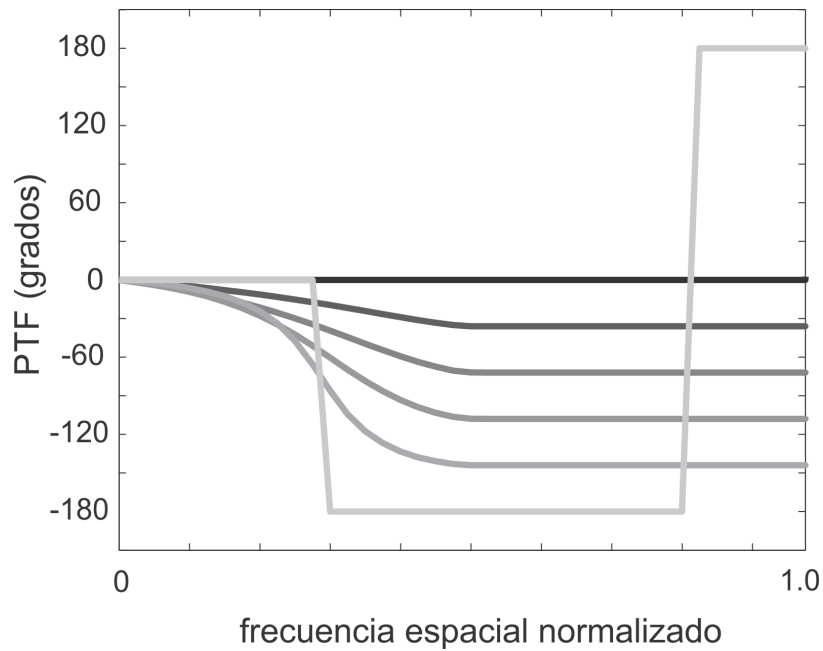


Figura 8.12: Gráficas del PTF en grados para una abertura con un escalón de fase en $x = 0$. De la curva más oscura a la curva más clara, la fase tiene los valores $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$.
(ApodizacionMedioFaseCirc.m)

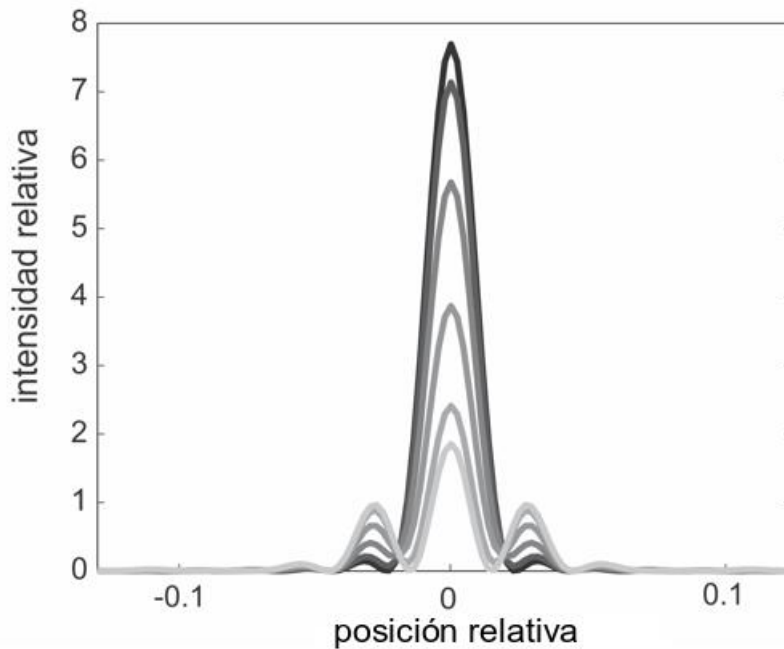


Figura 8.13: Gráficas del PSF para una abertura con un escalón de fase en la mitad central de la abertura circular. De la curva más oscura a la curva más clara, la fase tiene los valores $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$. (ApodizacionCircFaseCirc.m)

Otro ejemplo es con un escalón de fase en una región circular en el centro de la lente:

$$f(x_l, y_l) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \geq a/2, \\ e^{i\phi} & \sqrt{x_l^2 + y_l^2} < a/2, \end{cases} \quad (8.7)$$

donde a es el radio de la lente. Las figuras 8.13, 8.14 y 8.15 muestran los PSF, los MTF y los PTF, respectivamente, para valores de $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$. Se puede ver en éste caso que el efecto de la variación de la fase es el de reducir la energía en el centro de la PSF y aumentar la energía en los picos secundarios. En el MTF se tiene una reducción en las componentes de frecuencias medianas y hay una inversión de contraste para estas frecuencias para los casos de un cambio de fase más grande.

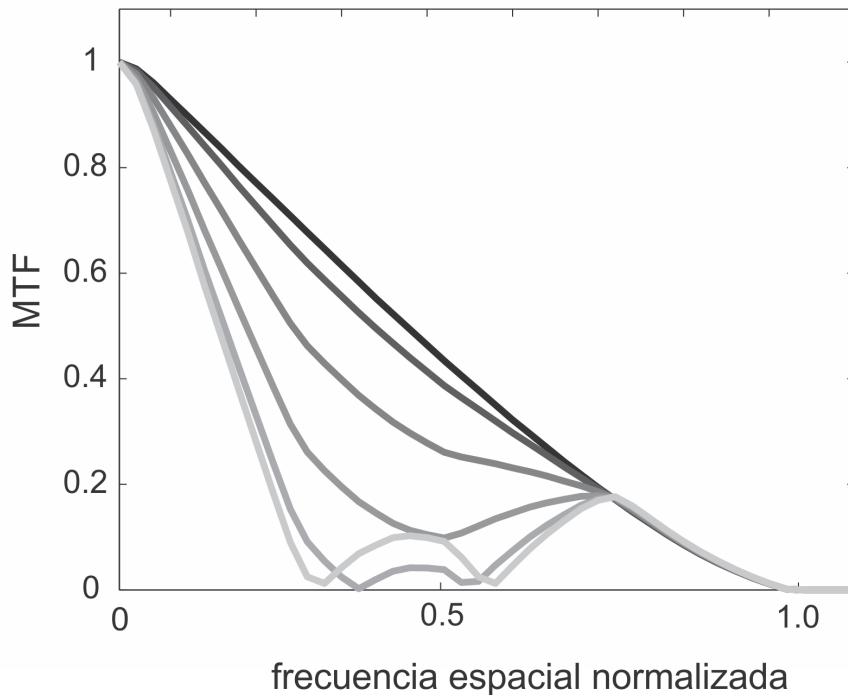


Figura 8.14: Gráficas del MTF para una abertura con un escalón de fase en la mitad central de la abertura circular. De la curva más oscura a la curva más clara, la fase tiene los valores $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$. (ApodizacionCircFaseCirc.m)

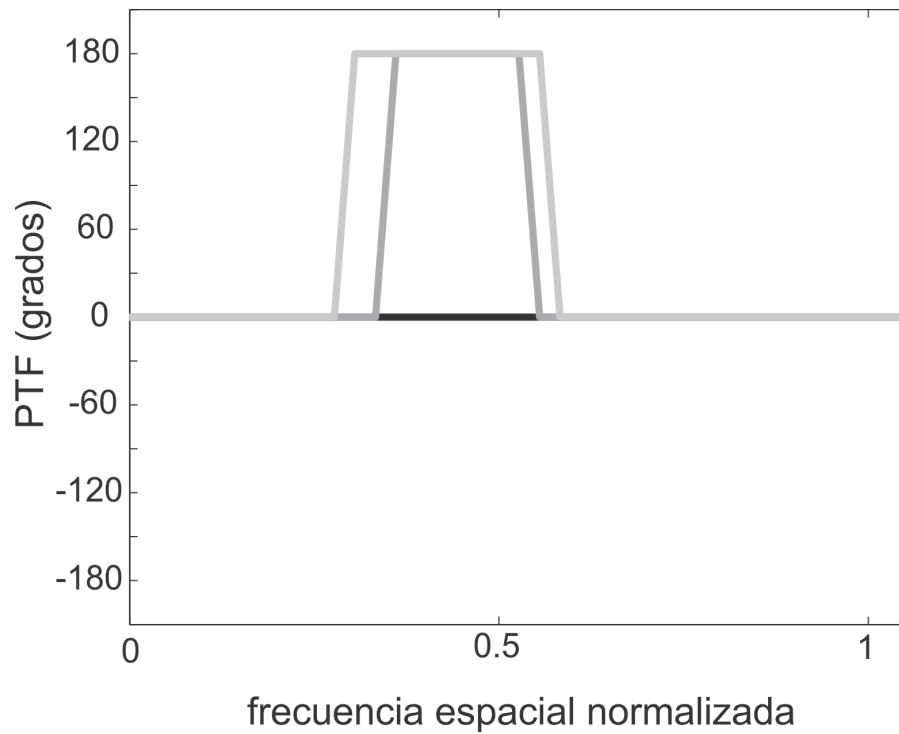


Figura 8.15: Gráficas del PTF en grados para una abertura con un escalón de fase en la mitad de la abertura circular de la lente. De la curva más oscura a la curva más clara, la fase tiene los valores $\phi = 0$, $\phi = \pi/5$, $\phi = 2\pi/5$, $\phi = 3\pi/5$, $\phi = 4\pi/5$, y $\phi = \pi$. Nótese que sólo las curvas con los valores más grandes de la fase tienen una PTF diferente a cero. (ApodizacionCircFaseCirc.m)

Capítulo 9

El efecto de aberraciones en una imagen

Cuando hay aberraciones, el frente de onda que sale del sistema no es perfectamente esférico, y por consecuencia, la imagen no es "perfecta". Si el sistema óptico tiene aberraciones, la función del frente de onda saliente es multiplicada por un factor $\exp(ik W(x_l, y_l))$ donde la función de aberración $W(x_l, y_l)$ describe la deformación del frente de onda (Wilson, 1995), y la función de la pupila es ahora $P(x_l, y_l)\exp(ik W(x_l, y_l))$.

9.1 El ejemplo de defoco

Como ejemplo de una aberración tomaremos el defoco. Para un defoco por el cual:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{f} = \epsilon, \quad (9.1)$$

la función de aberración es:

$$W(x_l, y_l) = \epsilon \frac{x_l^2 + y_l^2}{2}. \quad (9.2)$$

Con luz coherente la función de transferencia se convierte en:

$$H_{defoc}(u, v) = \tilde{h}P(-u\lambda d_i, -v\lambda d_i)e^{ik\frac{\epsilon}{2}\lambda^2 d_i^2(u^2+v^2)}, \quad (9.3)$$

es decir, un corrimiento de fase que es proporcional al cuadrado de la frecuencia espacial.

Con luz incoherente:

$$Q_{defoc}(u, v) = H_{defoc}(u, v) * H_{defoc}(u, v), \quad (9.4)$$

que se puede escribir, con un cambio de variables, como:

$$Q_{defoc}(u, v) = |\tilde{h}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P^*\left(x - \frac{u\lambda d_i}{2}, y - \frac{v\lambda d_i}{2}\right) \times P\left(x + \frac{u\lambda d_i}{2}, y + \frac{v\lambda d_i}{2}\right) e^{ik\epsilon\lambda d_i(xu+yv)} dx dy. \quad (9.5)$$

Ahora suponemos una abertura cuadrada para simplificar el cálculo, $P(x, y) = rect(x/a) rect(y/a)$, y obtenemos:

$$Q_{defoc}(u, v) = |\tilde{h}|^2 \Lambda\left(\frac{u\lambda d_i}{2a}\right) \Lambda\left(\frac{v\lambda d_i}{2a}\right) \int_{-(a-u\lambda d_i)/2}^{(a-u\lambda d_i)/2} e^{ik\epsilon\lambda d_i x u} dx \times \int_{-(a-v\lambda d_i)/2}^{(a-v\lambda d_i)/2} e^{ik\epsilon\lambda d_i y v} dy, \quad (9.5)$$

donde:

$$\Lambda\left(\frac{x}{2a}\right) = rect\left(\frac{x}{a}\right) \otimes rect\left(\frac{y}{a}\right) = rect\left(\frac{x}{a}\right) * rect\left(\frac{y}{a}\right). \quad (9.6)$$

Calculando las integrales, obtenemos:

$$Q_{defoc}(u, v) = |\tilde{h}|^2 \Lambda\left(\frac{u\lambda d_i}{2a}\right) \Lambda\left(\frac{v\lambda d_i}{2a}\right) \text{sinc}\left(\frac{\epsilon a u \lambda d_i}{2} \left[1 - \frac{u\lambda d_i}{2a}\right]\right) \\ \times \text{sinc}\left(\frac{\epsilon a v \lambda d_i}{2} \left[1 - \frac{v\lambda d_i}{2a}\right]\right). \quad (9.7)$$

La forma típica de estas curvas se muestran en la Figura 9.1. Es importante notar que, debido a los términos $\text{sinc}(\quad)$, la función de transferencia o el OTF pueden ser negativos, o lo que es equivalente, el $\text{PTF} = \pm\pi$. La figura 9.2 muestra un ejemplo de una imagen con defoco y se puede apreciar las inversiones de contraste que significan un cambio de signo en el OTF.

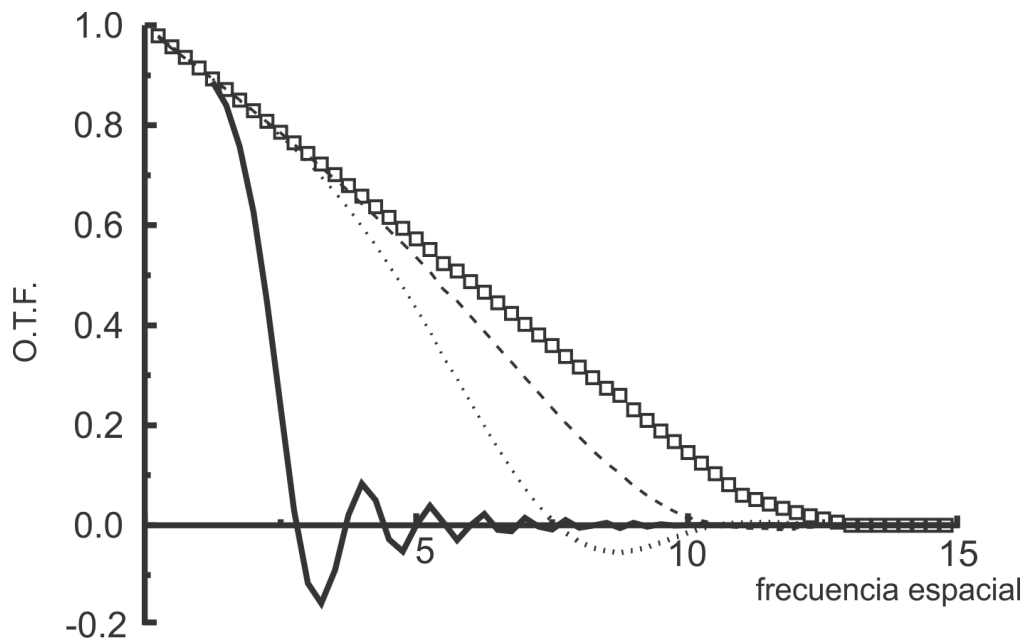


Figura 9.1: Variación de la MTF calculada con variaciones en el defoco. Las curvas son para los casos (de arriba hacia abajo) $\epsilon a^2/\lambda$ con los valores 0.031λ , 0.062λ , 0.31λ , 0.62λ

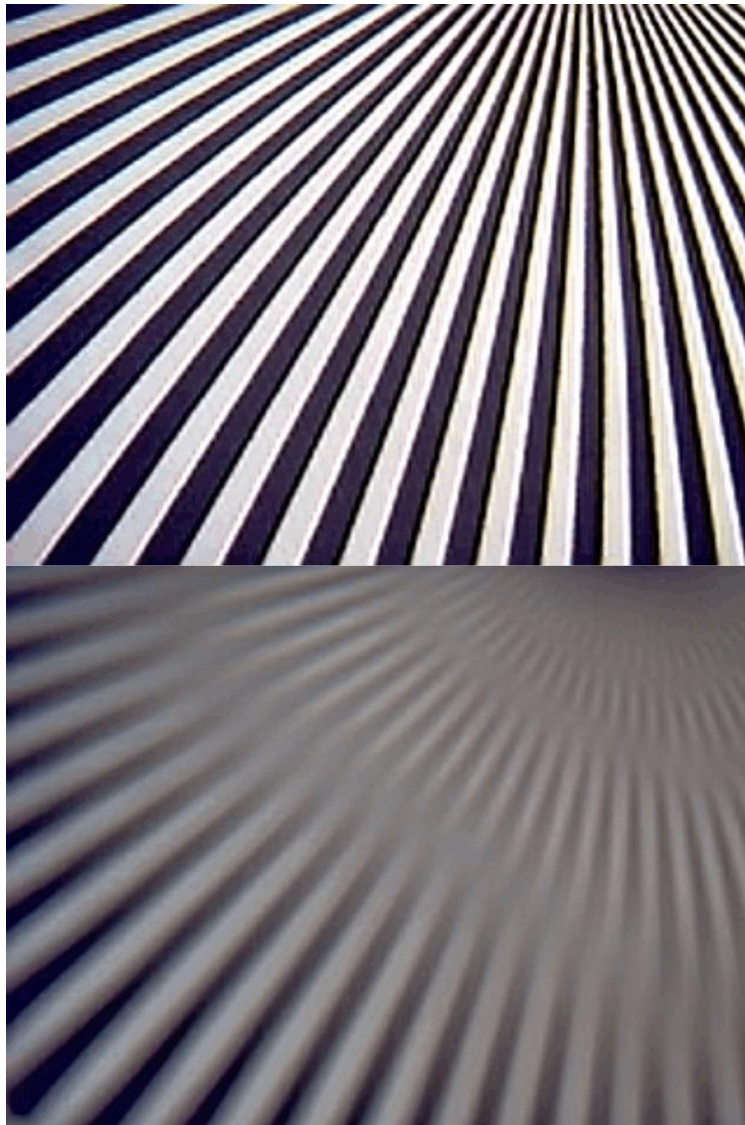


Figura 9.2: Imágenes experimentales de una muestra sin defoco (arriba) y con defoco (abajo). Se puede observar el cambio en contraste en las líneas blancas y negras en la imagen de abajo.

9.2 Cálculo numérico de la imagen de un objeto puntual con aberración

9.2.1 Aberraciones isoplanáticas

De las aberraciones de tercer orden, solo 2 son isoplanáticas: defoco, que vimos arriba, y aberración esférica. En estos casos la aberración es lo mismo para todos

los puntos del objeto. Las otras aberraciones: coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión varían con la posición del objeto puntual. En esta sección trataremos las aberraciones isoplanáticas, para las cuales sí podemos hablar de un PSF.

Se pueden tratar a las aberraciones como un filtro de fase en la abertura de la lente, como se hizo en la sección anterior para la apodización. Arriba vimos analíticamente cómo afecta un defoco al PSF; aquí lo veremos numéricamente para diferentes aberraciones. Empezamos con defoco otra vez, pero ahora escrito en la forma:

$$W(x_l, y_l) = A_d \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right), \quad (9.8)$$

donde A_d es la cantidad de defoco presente y r_l es el radio de la abertura de la lente. Los resultados se muestran en las Figuras 9.3-9.6. Se puede ver que el defoco reduce la contribución de las frecuencias espaciales medianas y altas, y para los casos de $A_d \geq 0.75\lambda$ hay una inversión de contraste como vimos arriba. También se puede ver como la energía es enviada a ángulos mayores conforme va aumentando la aberración.



Figura 9.3: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con defoco. El valor de A_d es igual a 0, izquierda; 0.5, centro; 1.0, derecha. ([AberacionesObjetoPuntual.m](#))

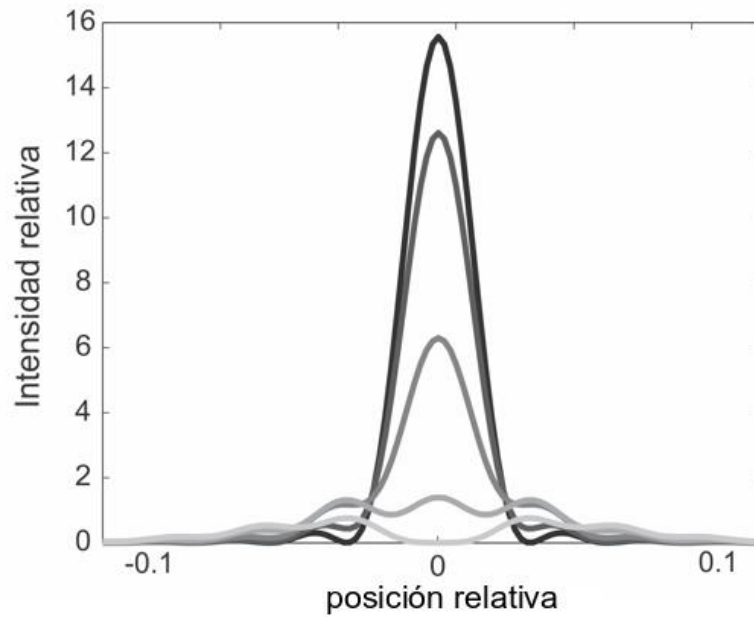


Figura 9.4: Gráficas del perfil de la PSF para un sistema óptico con defoco. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_d es $A_d = 0$, $A_d = 0.25$, $A_d = 0.5$, $A_d = 0.75$, y $A_d = 1.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

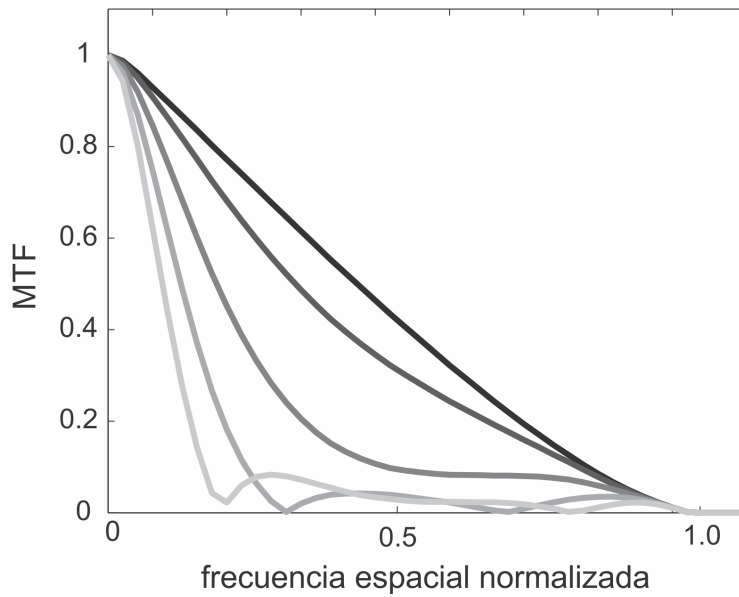


Figura 9.5: Gráficas de la MTF para un sistema óptico con defoco. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_d es $A_d = 0$, $A_d = 0.25$, $A_d = 0.5$, $A_d = 0.75$, y $A_d = 1.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

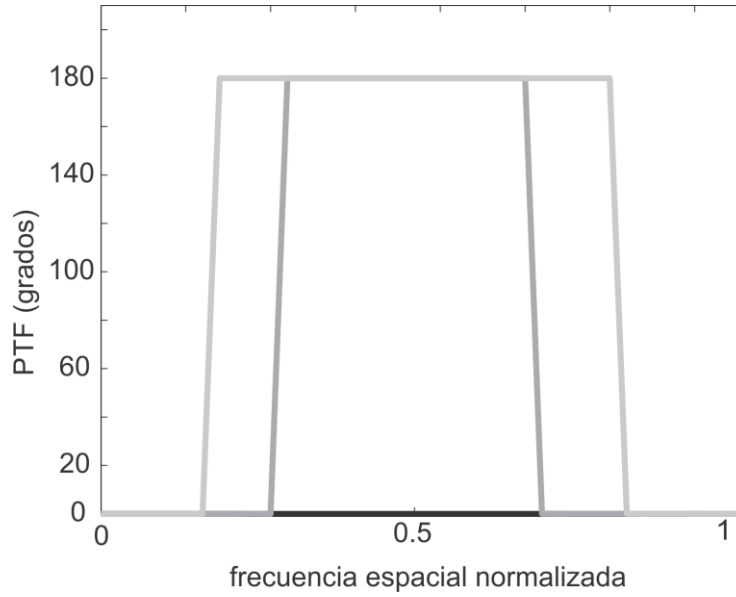


Figura 9.6: Gráficas de la PTF para un sistema óptico con defoco. Se muestra el valor absoluto de la PTF para reducir el ruido numérico en la figura. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_d es $A_d = 0$, $A_d = 0.25$, $A_d = 0.5$, $A_d = 0.75$, y $A_d = 1.0$. Nótese que sólo las curvas con los valores más grandes de la fase tienen una PTF diferente a cero. (AberacionesObjetoPuntual.m)

A continuación vemos el efecto de aberración esférica:

$$W(x_l, y_l) = A_s \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right)^2. \quad (9.9)$$

Los resultados para aberración esférica se muestran en las Figuras 9.7-9.10. Se puede ver resultados muy similares al caso de defoco; las frecuencias espaciales medianas y altas están reducidas, y hay inversión de contraste para frecuencias espaciales altas para los casos de la aberración más grande.

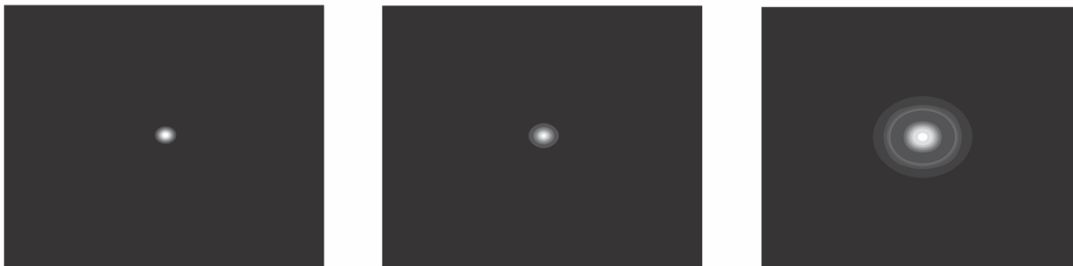


Figura 9.7: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con aberración esférica. El valor de A_s es igual a 0, izquierda; 0.5, centro; 1.0, derecha. (AberacionesObjetoPuntual.m)

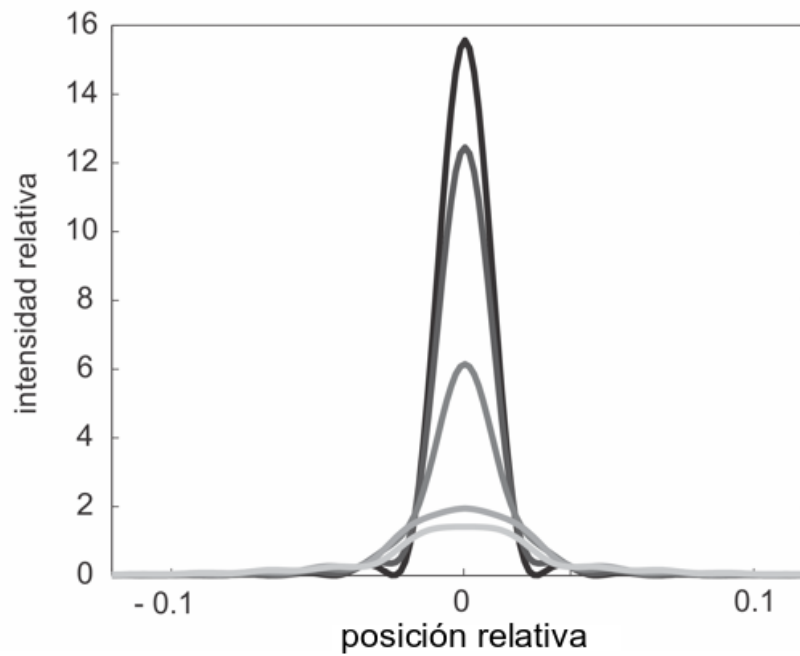


Figura 9.8: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con aberración esférica. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_s es $A_s = 0$, $A_s = 0.25$, $A_s = 0.5$, $A_s = 0.75$, y $A_s = 1.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

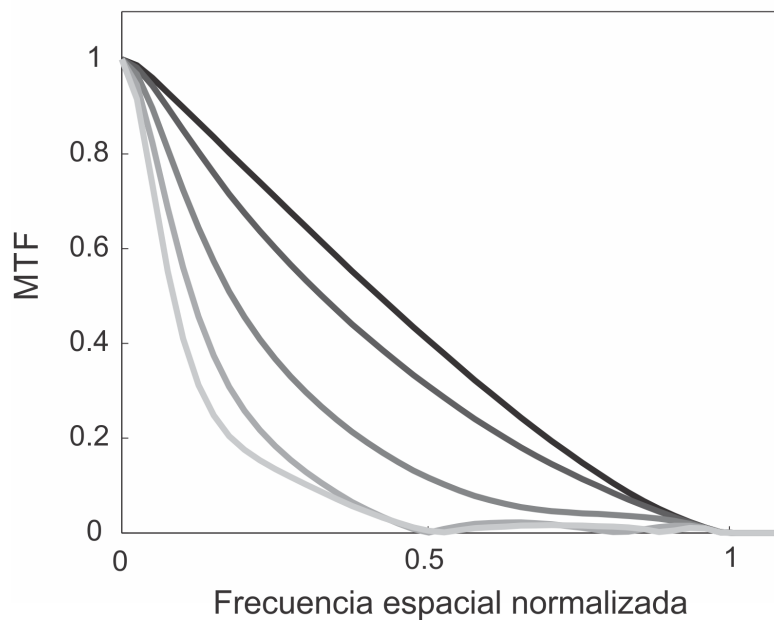


Figura 9.9: Gráficas de la MTF para un sistema óptico con aberración esférica. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_s es $A_s = 0$, $A_s = 0.25$, $A_s = 0.5$, $A_s = 0.75$, y $A_s = 1.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

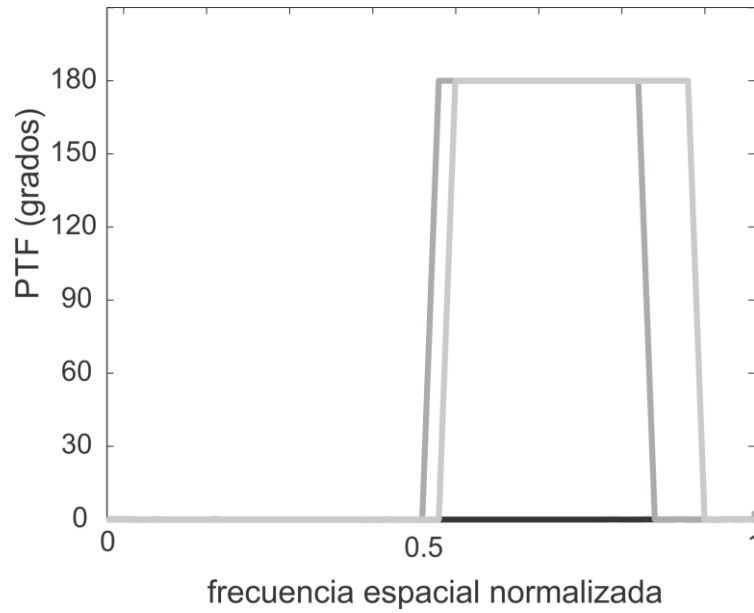


Figura 9.10: Gráficas de la PTF para un sistema óptico con aberración esférica. Se muestra el valor absoluto de la PTF para reducir el ruido numérico en la figura. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_s es $A_s = 0$, $A_s = 0.25$, $A_s = 0.5$, $A_s = 0.75$, y $A_s = 1.0$. Nótese que sólo las curvas con los valores más grandes de la fase tienen una PTF diferente a cero.
 (AberacionesObjetoPuntual.m)

9.2.2 Aberraciones no-isoplanáticas

En esta sección presentamos las imágenes que se obtienen con las aberraciones no-isoplanáticas: coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión. Todas estas aberraciones tienen la propiedad de que en el eje óptico (en el centro de la imagen en un sistema rotacionalmente simétrico) la aberración es cero y se da una imagen perfecta, pero cuanto más lejos se este del eje óptico, más grande es la aberración, entonces la respuesta a un impulso cambia con la posición del punto del objeto. Las gráficas presentadas en esta sección son para un punto del objeto en la posición más alejada del eje óptico en cada caso.

La siguiente aberración es coma en el eje x:

$$W(x_l, y_l) = A_c \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right) \left(\frac{x_l \sin(\theta) + y_l \cos(\theta)}{r_l} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right), \quad (9.10)$$

donde η es la distancia del punto del **objeto** al eje óptico y η_{max} es el valor máximo de este parámetro. También, el ángulo θ es el ángulo que forma la línea entre el eje óptico y el punto del **objeto** en el plano del objeto, con el eje y en este mismo plano (ver la Figura 9.11). Como se mencionó arriba, esto significa que **la aberración de coma no es isoplanática**, varía con la posición del objeto. Así sólo podemos hablar del PSF y OTF si consideramos una zona pequeña del objeto tal que la aberración no cambia significativamente sobre la imagen. Ésta es considerada una *zona isoplanática*. Sólo en este caso se pueden calcular la PSF y OTF para estas aberraciones.

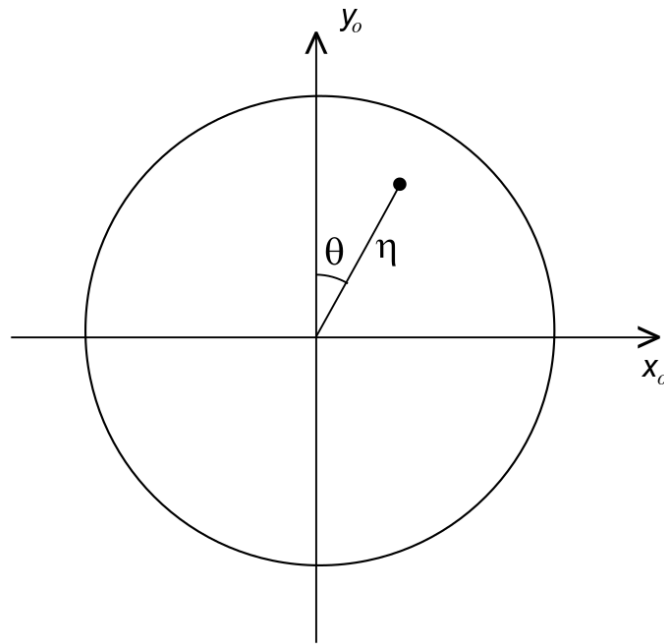


Figura 9.11: Definición de parámetros en el plano del objeto para las aberraciones no-isoplanáticas.

Suponiendo una zona isoplanática, para coma los resultados se muestran en las Figuras 9.12-9.15. Nótese que ésta aberración es asimétrica y que las figuras presentadas son perfiles en la dirección x de las gráficas tridimensionales. En este caso, se puede ver claramente la asimetría en el PSF con la introducción de coma. Otra forma de pensar estas curvas es, si aumenta la distancia del punto de interés del objeto del eje óptico, η , aumenta el valor de $W(x_l, y_l)$ de la coma, entonces un valor bajo de $W(x_l, y_l)$ es para un punto del objeto cerca del eje óptico y un valor grande $W(x_l, y_l)$ es para un punto del objeto lejos del eje óptico. Para calcular las figuras, se utilizó el valor de $\eta = \eta_{max}$, y se varió el valor de A_c . Coma también afecta los componentes de frecuencia espacial medianas y altas, pero

ahora, por la asimetría en el PSF, el PTF no sólo tiene inversión de contraste, sino también tiene valores intermedios del PTF que indican movimientos de los componentes intermedios entre el contraste del objeto y la inversión. También, en la figura del PTF se pueden ver los brinco debido a la forma de calcular el PTF que da resultados siempre entre -180° y 180° es decir,, en lugar de tener una curva continua se tiene una curva discontinua para tener valores siempre en este rango (esto se llama envolvimiento de fase, o "phase wrapping" en inglés).

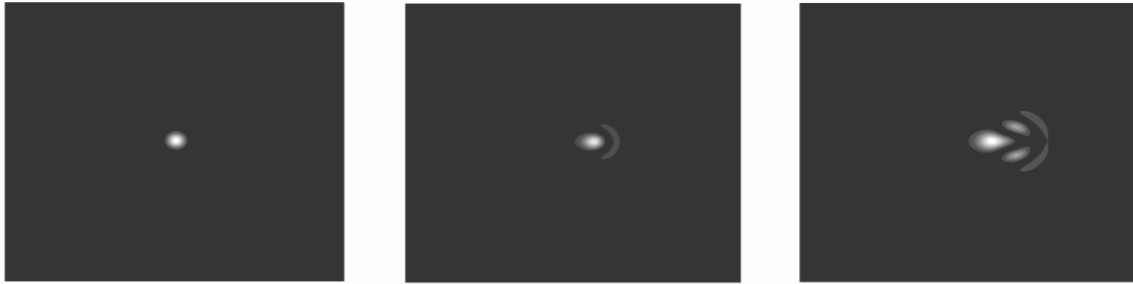


Figura 9.12: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con coma. El valor de A_c es igual a 0, izquierda; 1.0, centro; 2.0, derecha. (AberacionesObjetoPuntual.m)

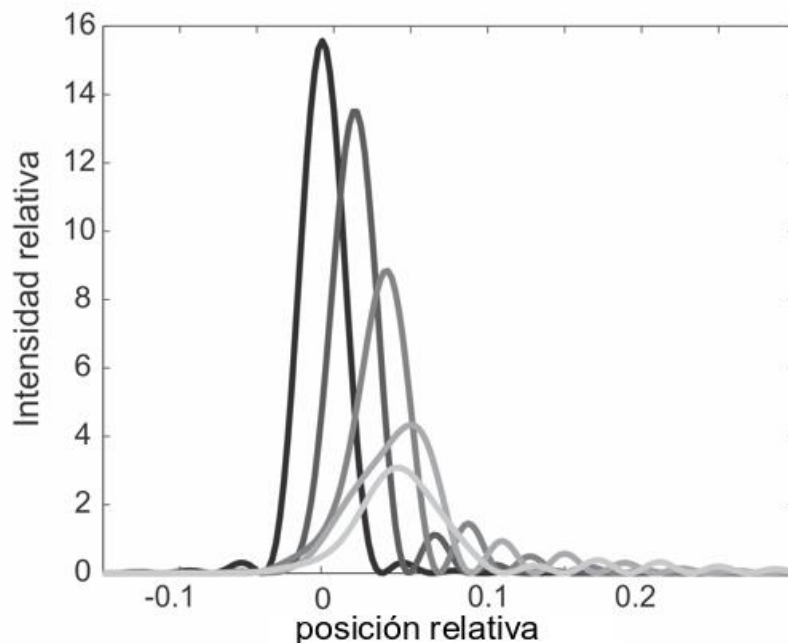


Figura 9.13: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con coma. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_c es $A_c = 0$, $A_c = 0.5$, $A_c = 1.0$, $A_c = 1.5$, y $A_c = 2.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

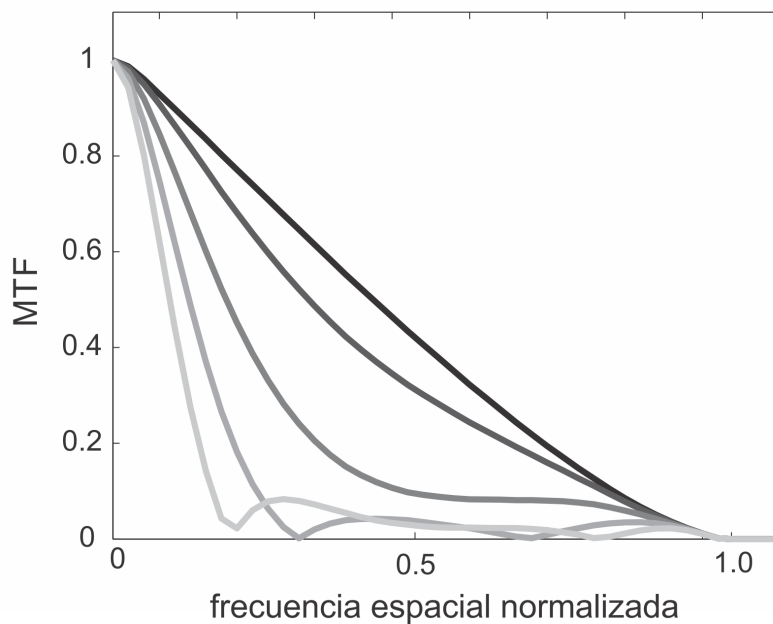


Figura 9.14: Gráficas de la MTF para un sistema óptico con coma. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_c es $A_c = 0$, $A_c = 0.5$, $A_c = 1.0$, $A_c = 1.5$, y $A_c = 2.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

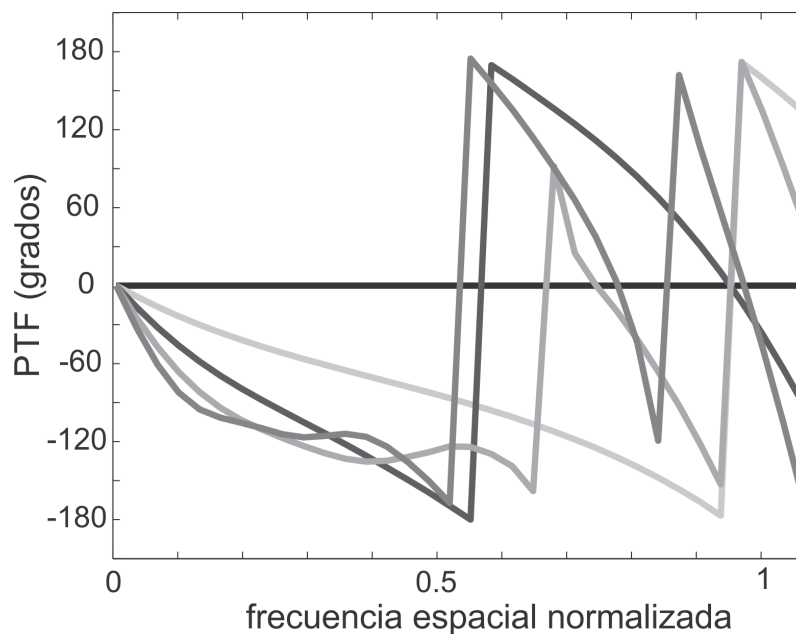


Figura 9.15: Gráficas de la PTF para un sistema óptico con coma. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_c es $A_c = 0$, $A_c = 0.5$, $A_c = 1.0$, $A_c = 1.5$, y $A_c = 2.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

La aberración de astigmatismo:

$$W(x_l, y_l) = A_a \left(\frac{x_l}{r_l} \right)^2 \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2, \quad (9.11)$$

es un defoco asimétrico, en este caso lo tomaremos en solo en el eje x. Los resultados se muestran en las Figuras 9.16-9.19.

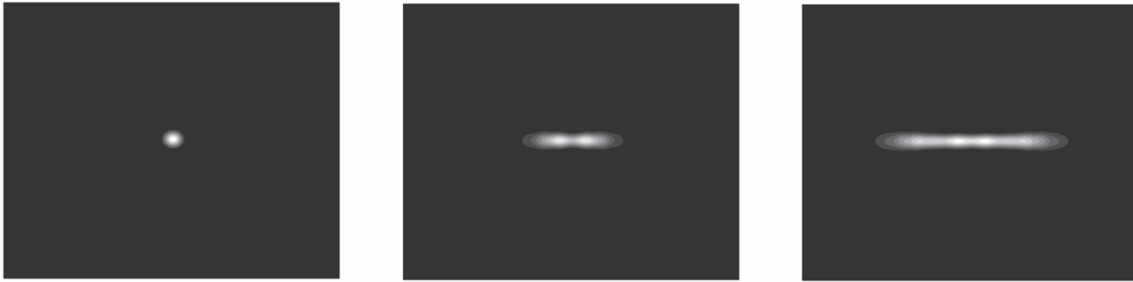


Figura 9.16: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con astigmatismo. El valor de A_a es igual a 0, izquierda; 1.0, centro; 2.0, derecha.

(AberacionesObjetoPuntual.m)

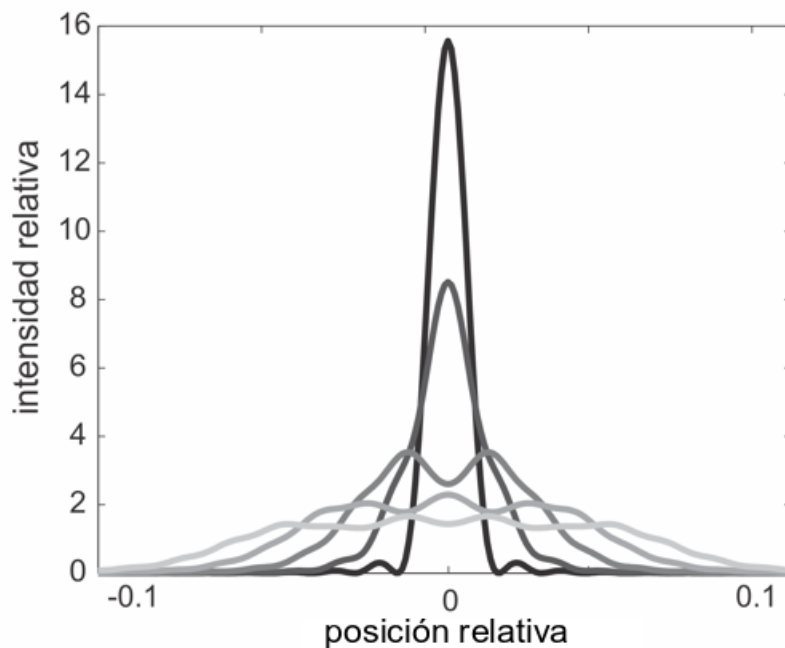


Figura 9.17: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con astigmatismo. El valor de A_a es igual a 0, curva oscura quebrada; 0.5, curva ligera quebrada; 1.0, oscura continua; 1.5, curva continua; 2.0 curva ligera continua.

(AberacionesObjetoPuntual.m)

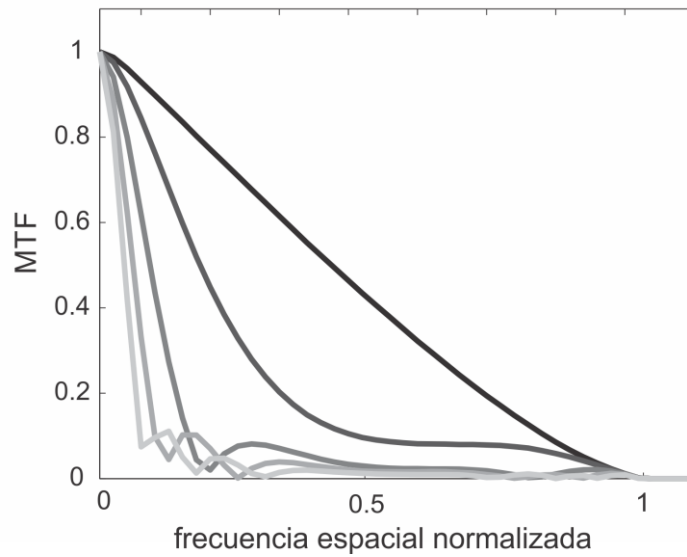


Figura 9.18: Gráficas de la MTF para un sistema óptico con astigmatismo. El valor de A_a es igual a 0, curva oscura quebrada; 0.5, curva ligera quebrada; 1.0, oscura continua; 1.5, curva continua; 2.0 curva ligera continua. Estas curvas son la MTF en el eje x del plano de la imagen, en el eje la luz siempre se enfoca en este caso.
(AberacionesObjetoPuntual.m)

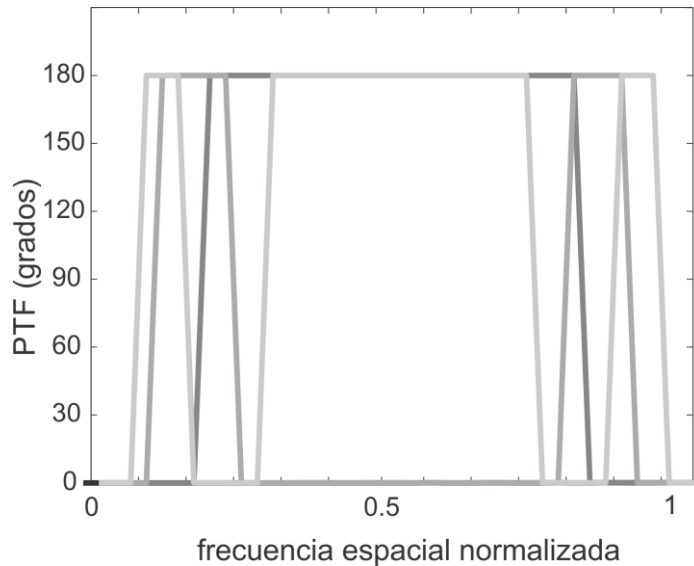


Figura 9.19: Gráficas de la PTF para un sistema óptico con astigmatismo. El valor de A_a es igual a 0, curva oscura quebrada; 0.5, curva ligera quebrada; 1.0, oscura continua; 1.5, curva continua; 2.0 curva ligera continua. Estas curvas son la PTF en el eje x del plano de la imagen, en el eje la luz siempre se enfoca en este caso.
(AberacionesObjetoPuntual.m)

La aberración de curvatura de campo usualmente se toma junto con astigmatismo, porque los dos tienen la misma forma; son defocos que dependen de la posición del objeto. Con un análisis de las contribuciones de las dos aberraciones en la fase, se encuentra que la función de fase tiene la siguiente combinación:

$$W(x_l, y_l) = \frac{1}{2} A_a \left(\frac{x_l}{r_l} \right)^2 \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2 + \frac{1}{4} (A_a + A_{cc}) \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2. \quad (9.12)$$

Este caso es similar al caso de astigmatismo, entonces sólo se presentan las imágenes de los PSF para tres casos en la Figura 9.20. Se puede ver que con la combinación correcta de astigmatismo y curvatura de campo se encuentra el foco horizontal, el foco vertical, o, en medio de los dos, la imagen más simétrica.

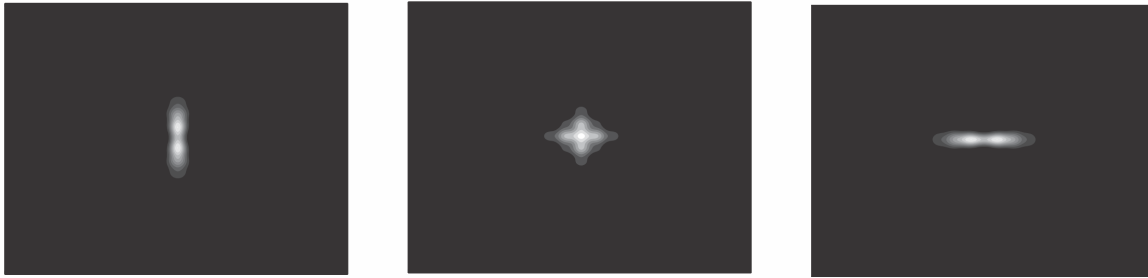


Figura 9.20: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con astigmatismo y curvatura de campo. El valor de A_a es igual a 2, y el valor de A_{cc} es igual a -6, izquierda; -4.0, centro; -2.0, derecha. (AberacionesObjetoPuntual.m)

Finalmente, la aberración de distorsión tiene la forma:

$$W(x_l, y_l) = A_{ds} \left(\frac{x_l}{r_l} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^3, \quad (9.13)$$

y es una inclinación que depende de la posición del objeto. Los resultados para este caso se muestran en las Figuras 9.21-9.24. En las Figuras se puede ver que la imagen se desplaza pero no cambia de forma. Esto se nota en el MTF, que es el mismo para todos los casos. Sin embargo, un cambio en la posición de la imagen corresponde a una fase en su transformada de Fourier (por el teorema de corrimiento), que es la OTF. Esta fase se ve en la PTF, donde, si hay un cambio de posición más grande, hay más oscilaciones (que viene, otra vez del hecho que la PTF está limitada a estar entre $\pm 180^\circ$) en la PTF, y más inversiones de contraste. Ésto es importante porque muestra que, aunque el MTF es perfecto, únicamente las variaciones en el PTF pueden afectar la imagen



Figura 9.21: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con distorsión. El valor de A_{ds} es igual a 0, izquierda; 1.0, centro; 2.0, derecha. (AberacionesObjetoPuntual.m)

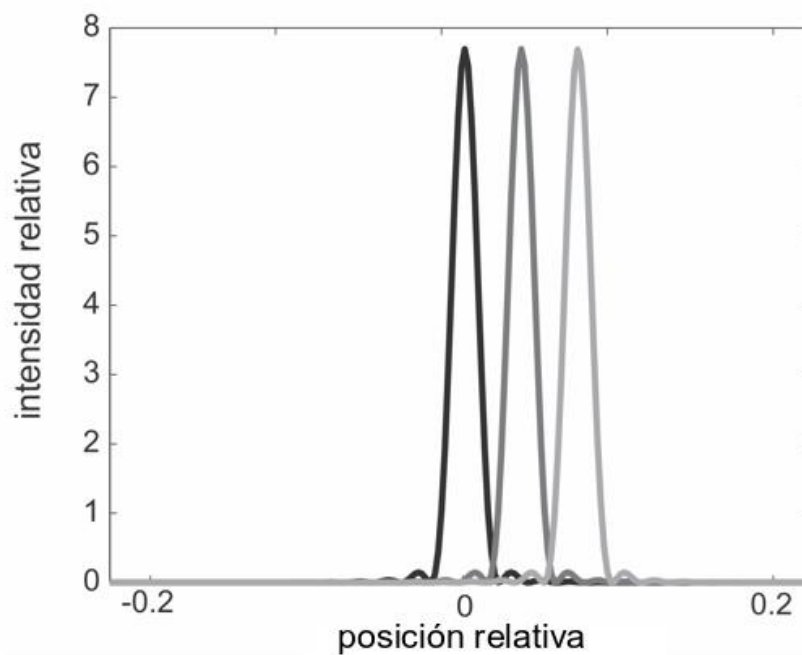


Figura 9.22: Gráficas de la PSF para un sistema óptico con distorsión. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_{ds} es $A_{ds} = 0$, $A_{ds} = 1.0$, y $A_{ds} = 2.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

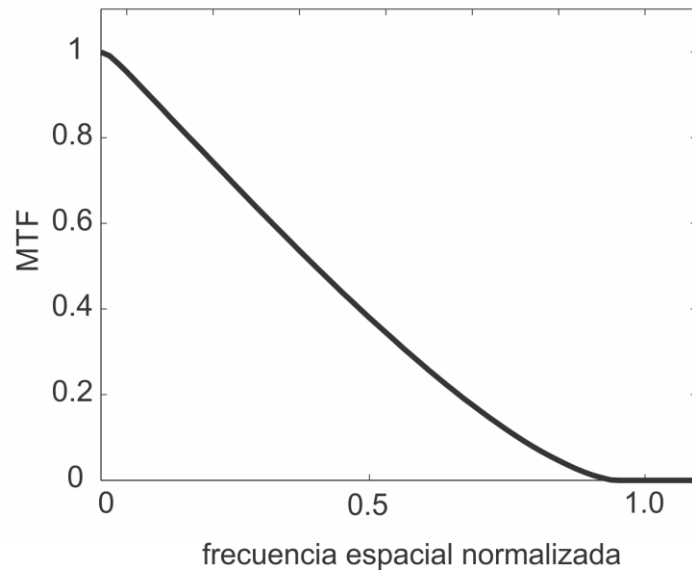


Figura 9.23: Gráficas de la MTF para un sistema óptico con distorsión. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_{ds} es $A_{ds} = 0$, $A_{ds} = 1.0$, y $A_{ds} = 2.0$. Nótese que todas las curvas se superponen en este caso. (AberacionesObjetoPuntual.m)

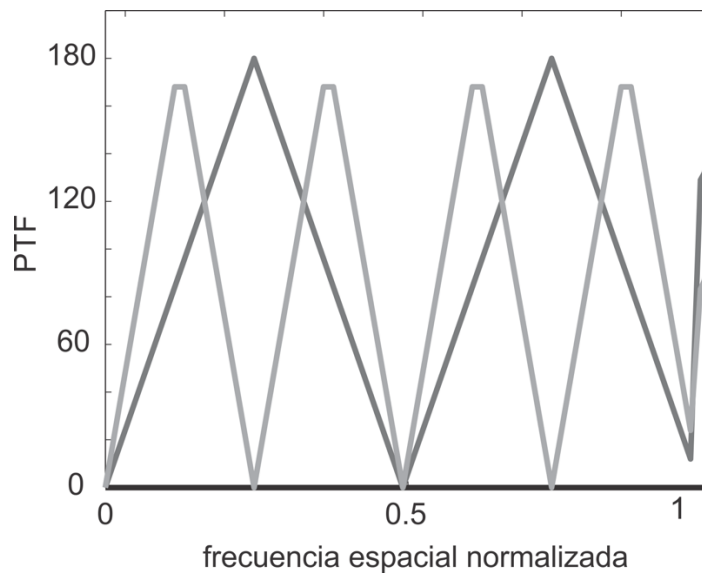


Figura 9.24: Gráficas de la PTF para un sistema óptico con distorsión. De la curva más oscura a la curva más clara, el valor de A_{ds} es $A_{ds} = 0$, $A_{ds} = 1.0$, y $A_{ds} = 2.0$. (AberacionesObjetoPuntual.m)

En general, se puede ver de los casos con aberraciones o con filtros de fase en la pupila del sistema óptico, que siempre se reduce el MTF del sistema, nunca lo aumenta. Esto significa que las aberraciones siempre empeoran la imagen, no pueden mejorarla (aunque se pueden balancear algunas aberraciones para que la imagen empeore menos). También, los filtros de fase pueden producir inversión de contraste, lo que no se puede hacer con filtros de amplitud (porque la correlación para formar la OTF siempre es positiva en este segundo caso).

9.3 Imágenes con aberraciones

De los resultados presentados en la sección anterior, es difícil imaginar el efecto de la aberraciones sobre una imagen, entonces en ésta sección calcularemos imágenes incluyendo el efecto de las aberraciones. Ya vimos que, para un sistema isoplanático, la intensidad de una imagen en un sistema incoherente se puede escribir como la convolución de la PSF con la distribución de intensidad del objeto:

$$I_i(x_i, y_i) = q(x, y) \otimes I_o(x_o, y_o). \quad (9.14)$$

Pero ya vimos que, para las aberraciones de coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión, el sistema no es isoplanático, porque la función de la pupila cambia cuando cambia la posición del objeto. Veremos en los ejemplos presentados abajo que no podemos suponer que estamos dentro de la zona isoplanática, y en estos casos la imagen se tiene que calcular como:

$$I_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x_o, y_o, x_i, y_i) I_o(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (9.15)$$

donde:

$$q(x_o, y_o, x_i, y_i) = |h(x, y)|^2 = \left| \tilde{h} \mathfrak{I} \left(P(x_l, y_l) e^{ikW(x_o, y_o, x_l, y_l)} \right)_{u=\frac{x_i}{\lambda d_i}, v=\frac{y_i}{\lambda d_i}} \right|^2, \quad (9.16)$$

donde hemos incluido explícitamente la dependencia de la función de aberración con la posición del objeto.

Las objetos originales sin aberraciones se presentan en las figuras 9.25 y 9.26. La segunda imagen será utilizada para los casos de aberraciones no-isoplanáticos.



Figura 9.25: El primer objeto original

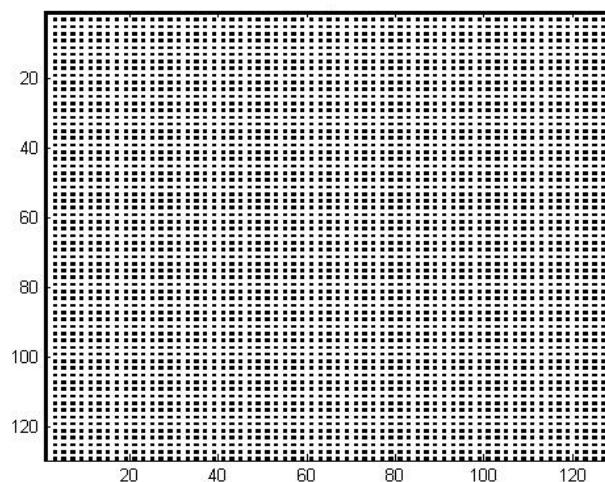


Figura 9.26: El segundo objeto original

El primer caso que veremos es una pupila sin aberraciones, pero con un tamaño de abertura que varía (Figura 9.27). Todas las aberturas están dadas en unidades de píxeles. Se puede ver el efecto de difracción, particularmente para las aberturas más pequeñas, que hace más borrosa a la imagen.

La Figura 9.28 muestra el efecto sobre una imagen de un aumento en el defoco. La fórmula para describir esta aberración es la ecuación (9.8):

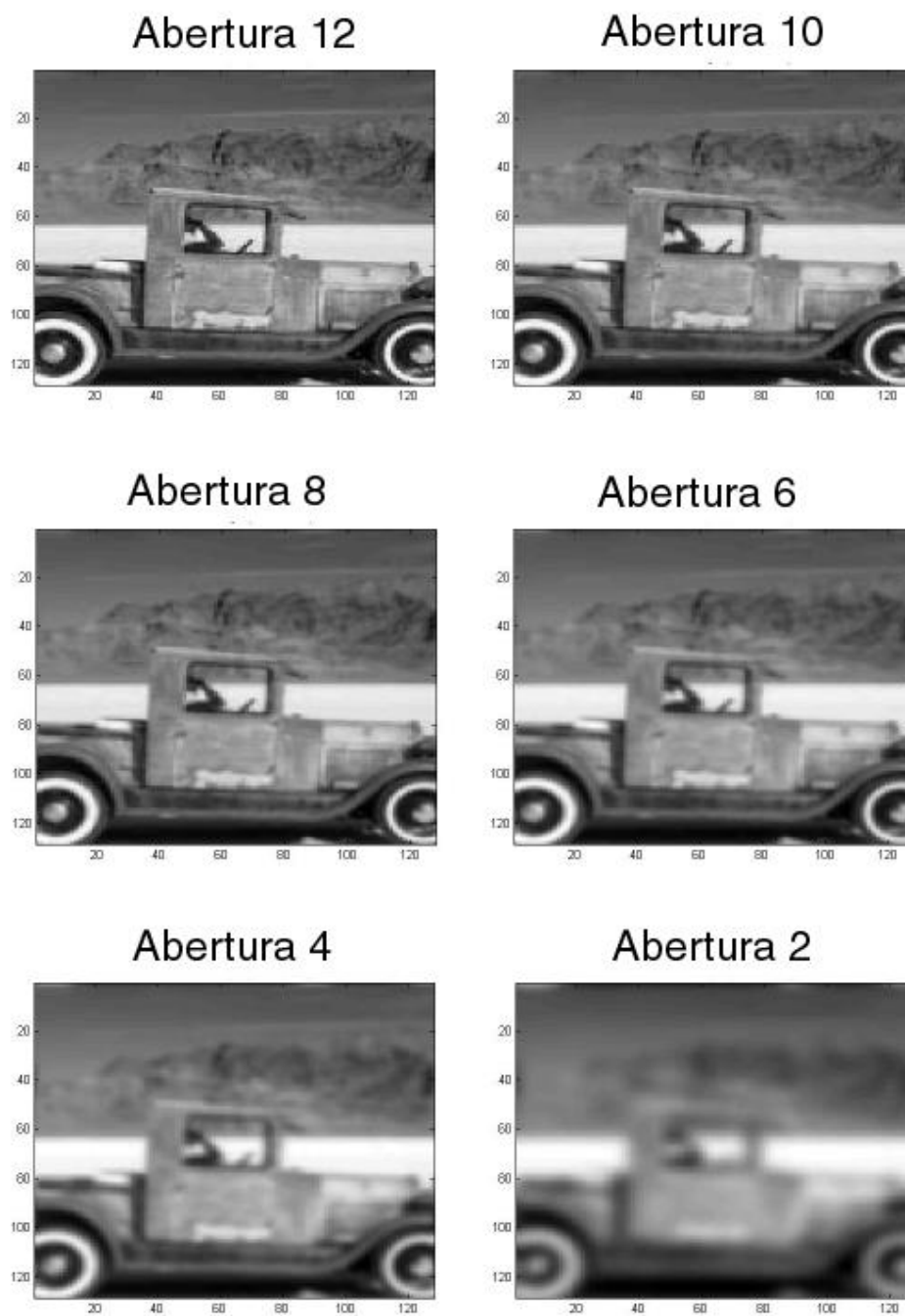


Figura 9.27: El efecto del tamaño de la abertura de una lente sobre una imagen. La abertura está dada en unidades de píxeles. (AberacionesIsoplanaticasImagen.m)

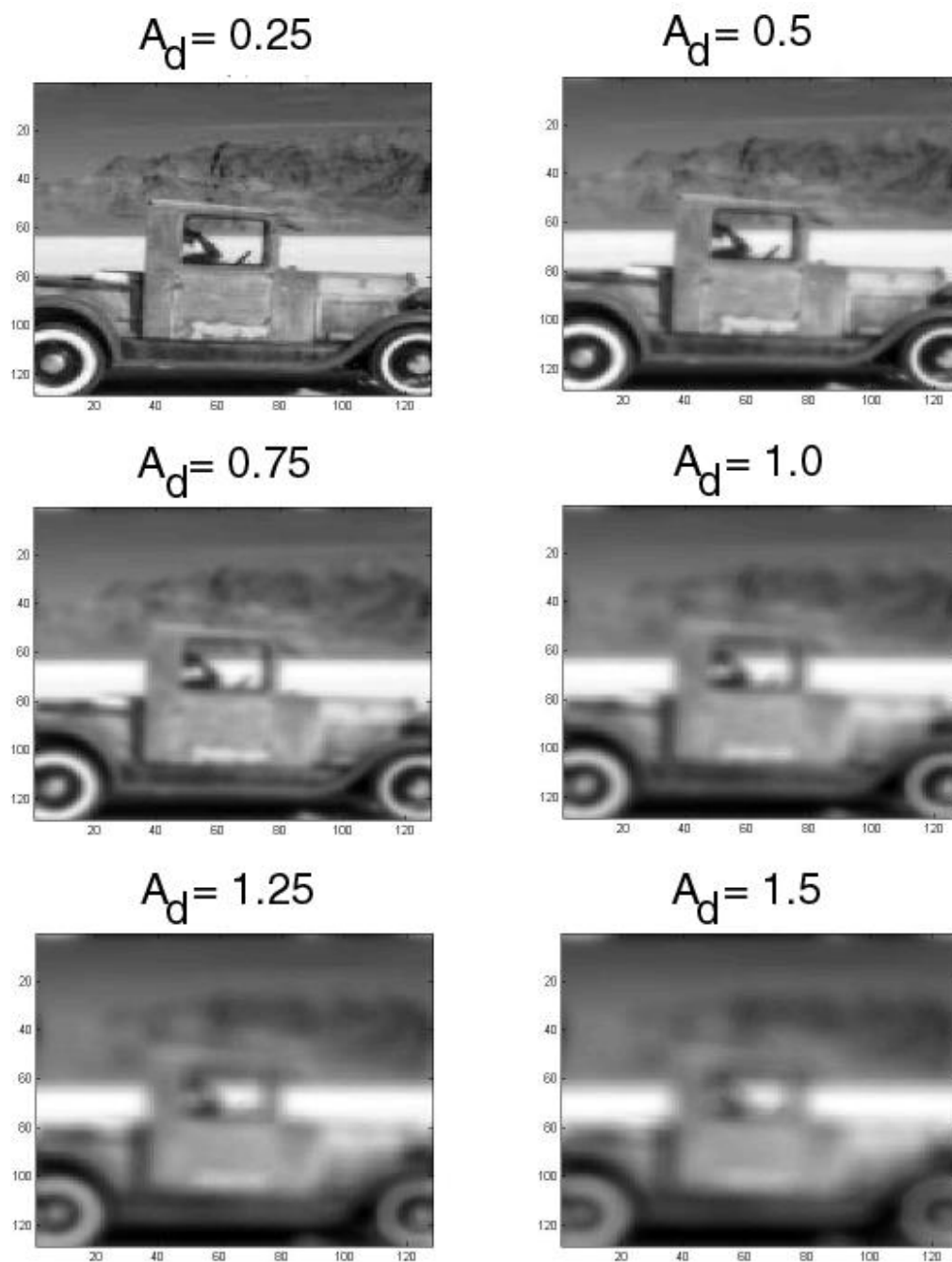


Figura 9.28: El efecto de la aberración de defoco sobre una imagen.
 (AberacionesIsoplanaticasImagen.m)

$$W(x_l, y_l) = A_d \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right). \quad (9.8)$$

La siguiente aberración es la de aberración esférica, dada por la ecuación (9.9):

$$W(x_l, y_l) = A_s \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right)^2. \quad (9.9)$$

Los resultados de este caso se muestran en la Figura 9.29.

Estos primeros tres casos son los casos isoplanáticos; la imagen de un objeto puntual es igual para todos los puntos del objeto. En los tres caso se puede ver como la imagen se vuelve más borrosa cuando aumenta la aberración, y se ensancha el PSF.

Los siguientes tres casos son los casos no-isoplanáticos. El caso de coma está dado por la ecuación (9.10):

$$W(x_l, y_l) = A_c \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right) \left(\frac{x_l \sin(\theta) + y_l \cos(\theta)}{r_l} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right), \quad (9.10)$$

donde (x_l, y_l) son las coordenadas del punto en la pupila de la lente y θ es el ángulo entre el eje y y este punto. El factor de θ indica que el efecto de coma no es igual para los puntos que están a la misma distancia del centro de la lente. La dirección de la "cola" de la imagen con coma, cambia dependiendo de este ángulo. Las imágenes para diferentes cantidades de coma se muestran en la Figura 9.30. En la figura se puede ver que el centro de la imagen no está alterada con coma, y que la imagen se ve más borrosa hacia los lados, porque la aberración aumenta cuando aumenta η . Para enfatizar: **no es isoplanática**. Este efecto es más claro en la Figura 9.31, donde en todos los casos se puede distinguir la malla cuadrada en el centro de la imagen, pero no la puedes distinguir más cerca a la orilla de la imagen.

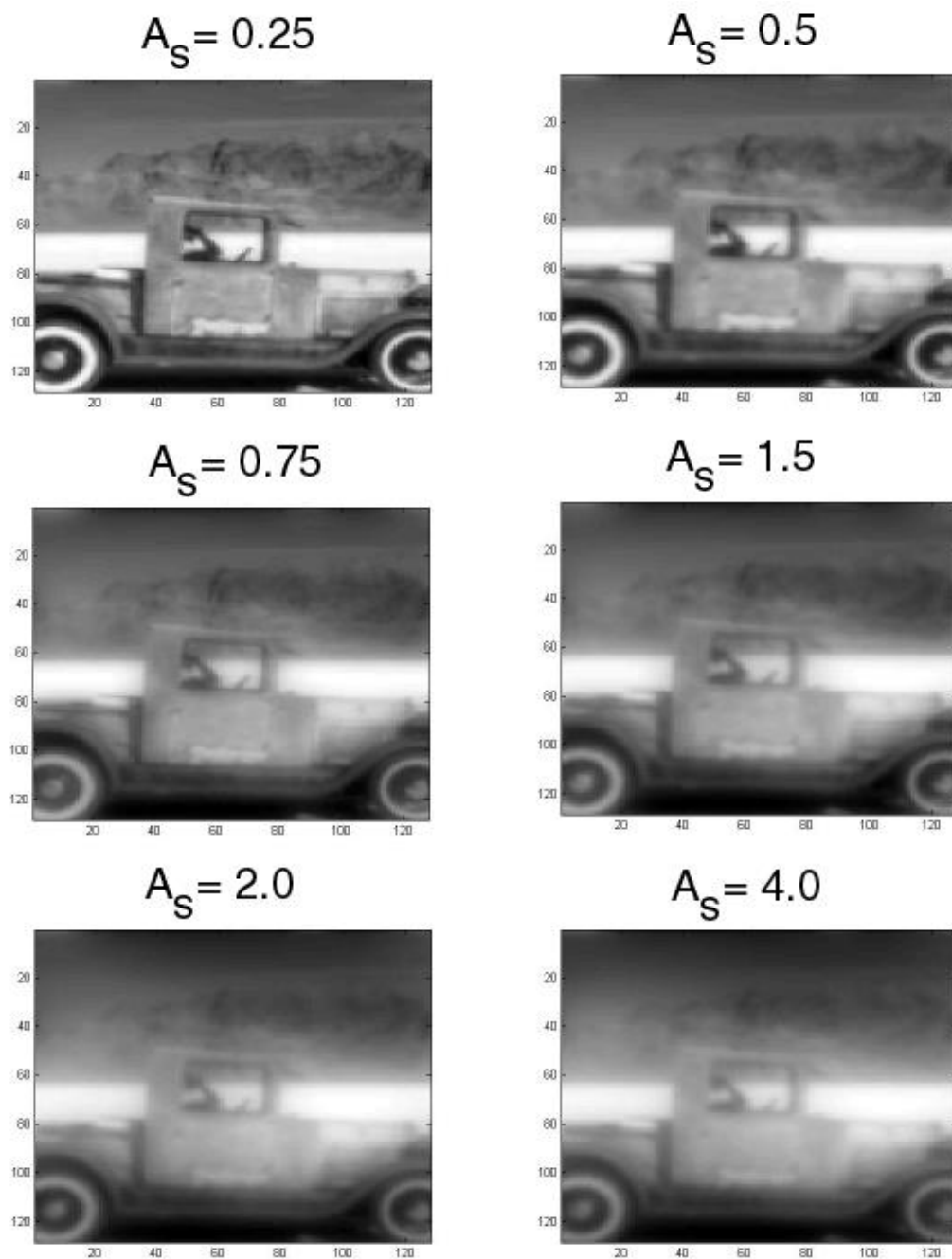


Figura 9.29: El efecto en una imagen de diferentes cantidades de aberración esférica. (AberacionesIsoplanaticasImagen.m)

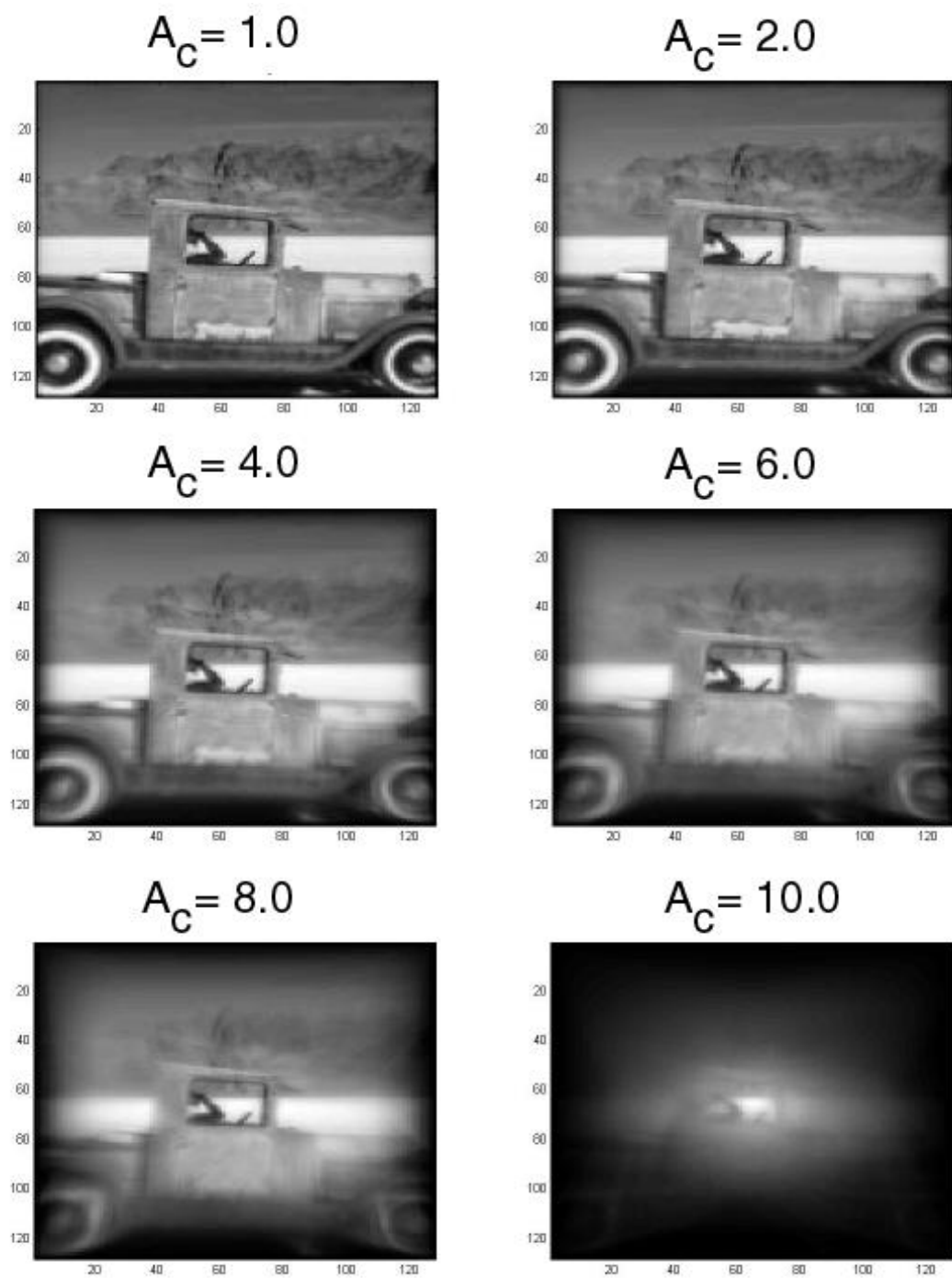


Figura 9.30: El efecto de coma en una imagen. (AberacionesTodasImagen.m)

Las aberraciones de astigmatismo y curvatura de campo para un objeto bidimensional tienen la fórmula:

$$W(x_l, y_l) = \frac{1}{2} A_a \left(\left(\frac{x_l}{r_l} \right)^2 \sin(\theta) + \left(\frac{y_l}{r_l} \right)^2 \cos(\theta) \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2 + \frac{1}{4} (A_a + A_{cc}) \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2. \quad (9.17)$$

Se muestra el efecto de un valor de astigmatismo y un valor variable de curvatura de campo en la Figura 9.32. En la figura se puede notar claramente que la formación de la imagen no es isoplanática. El efecto de que la curvatura de campo puede cambiar el enfoque entre líneas perpendiculares a los bordes de la figura con respecto a las líneas paralelas a los bordes de la figura se puede ver más claramente en la figura 9.33.

Finalmente, veremos el efecto de distorsión sobre una imagen:

$$W(x_l, y_l) = A_{ds} \left(\frac{x_l}{r_l} \sin(\theta) + \frac{y_l}{r_l} \cos(\theta) \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^3. \quad (9.18)$$

Los resultados de este caso se muestran en la Figura 9.34.

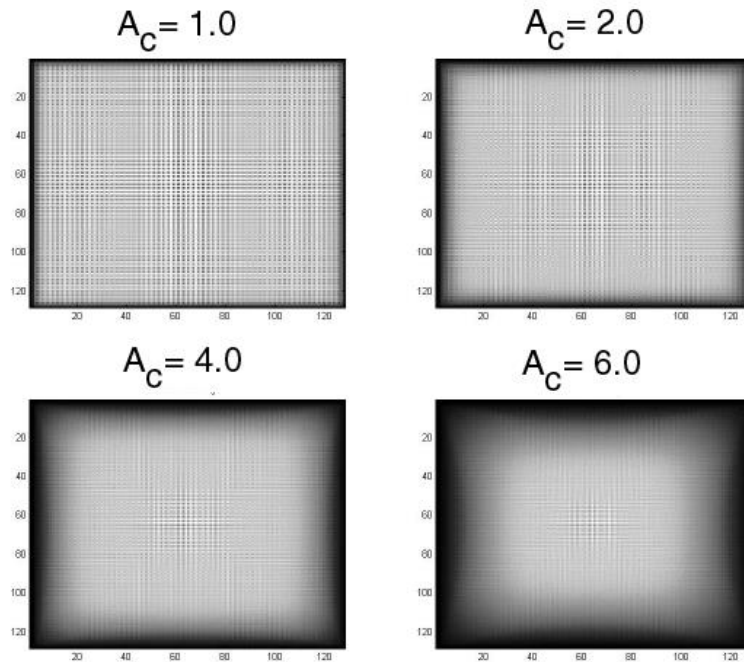


Figura 9.31: El efecto de coma sobre la imagen de una rejilla cuadriculada.
(AberacionesTodasImagen.m)

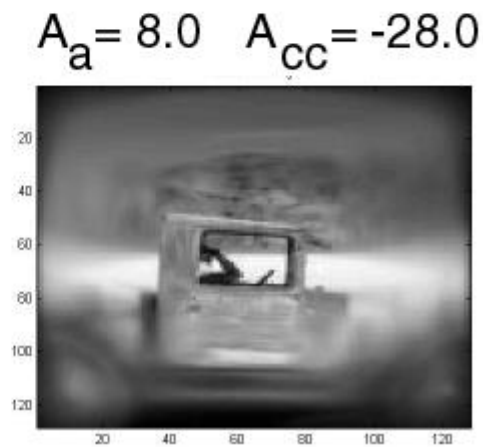
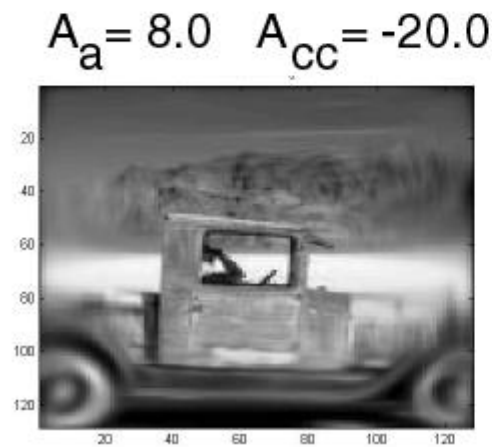
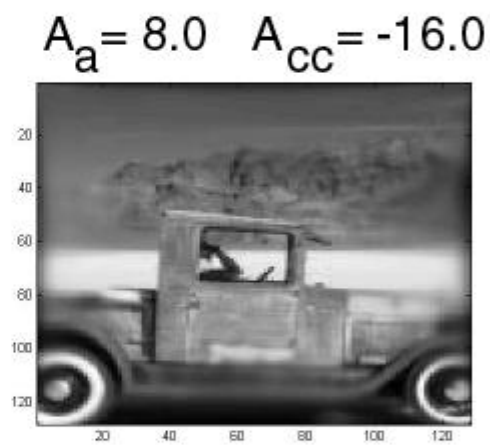
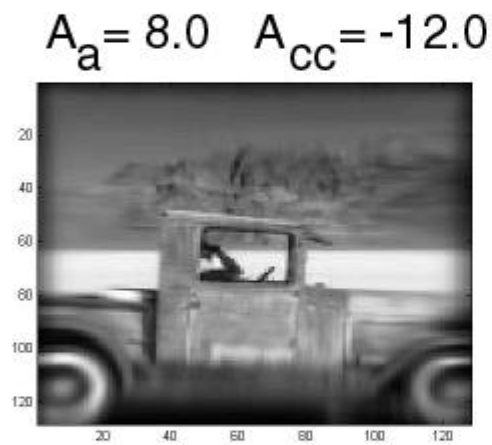
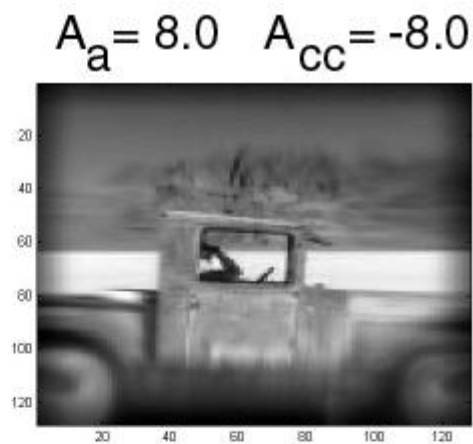
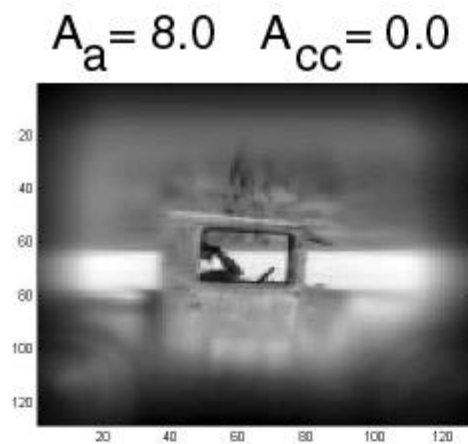


Figura 9.32: El efecto de un valor de astigmatismo y variaciones en la cantidad de curvatura de campo sobre una imagen. ([AberacionesTodasImagen.m](#))

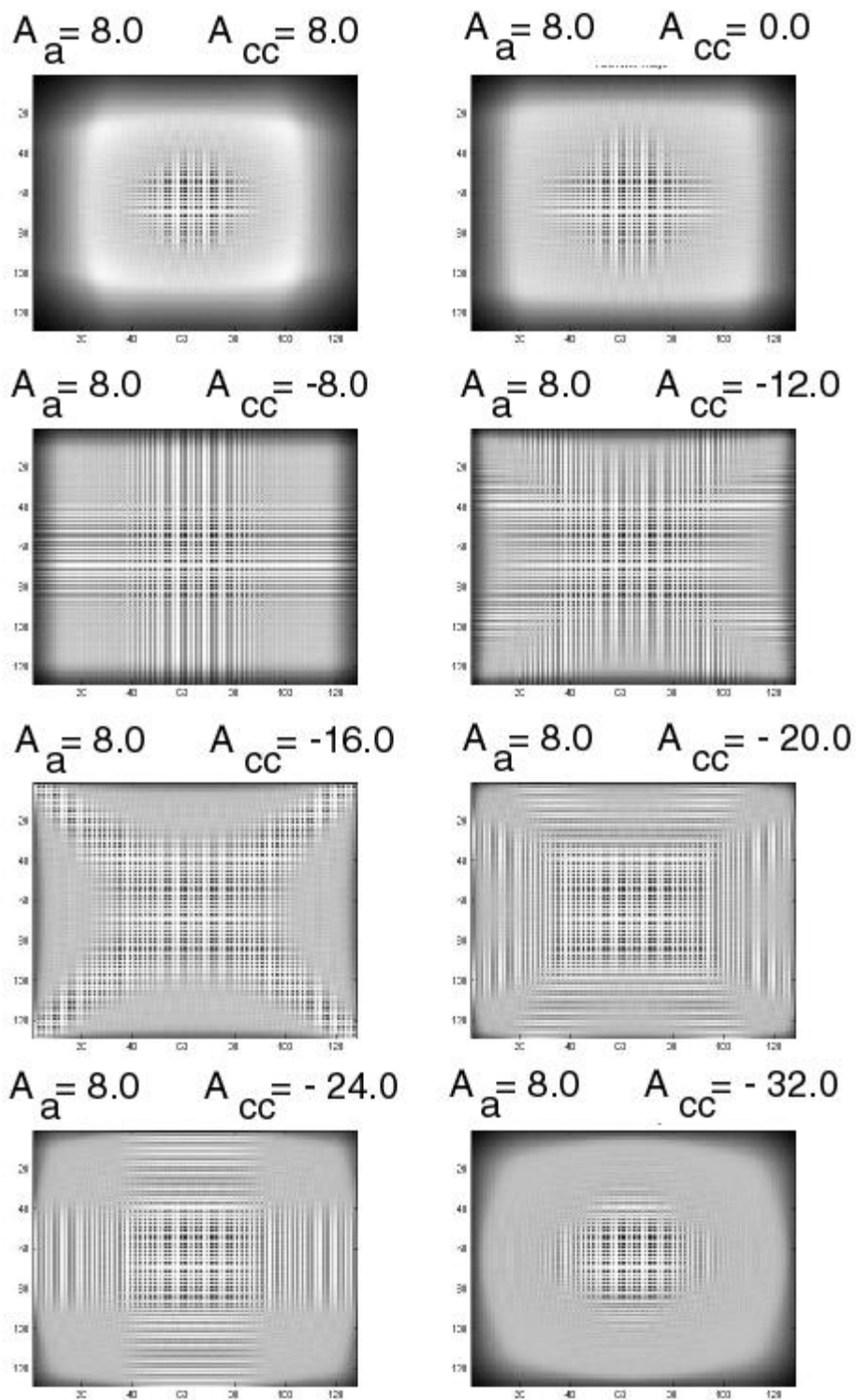


Figura 9.33: El efecto de un valor de astigmatismo y variaciones en la cantidad de curvatura de campo sobre una imagen cuadrículada. (AberacionesTodasImagen.m)

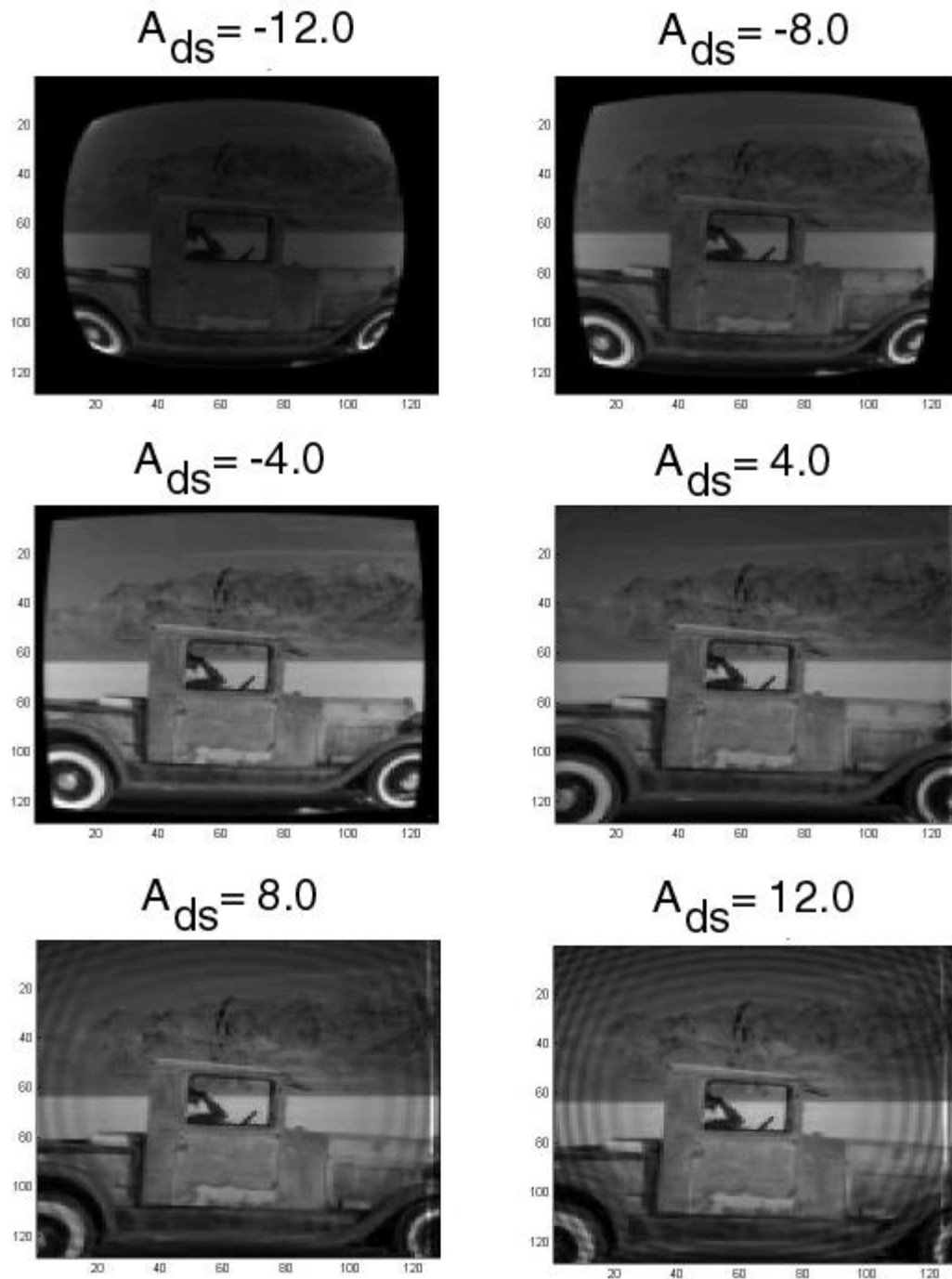


Figura 9.34: El efecto de distorsión sobre una imagen. Valores negativos de distorsión dan distorsión de barril y valores positivos dan distorsión de corset.
(AberacionesTodasImagen.m)

Capítulo 10

Detectores Pixelados

Hoy en día, muchos sistemas ópticos utilizan detectores pixelados, es decir, el detector utilizado es un arreglo de detectores más pequeños, usualmente en un arreglo cuadrado. El ejemplo más común de este tipo de detector es la CCD (por las siglas en inglés, Charge Coupled Device). En este capítulo veremos como calcular un MTF para un detector pixelado.

10.1 Isoplanicidad en detectores pixelados

La Figura 10.1 muestra un arreglo tipo CCD y los parámetros involucrados (Boreman, 2001).

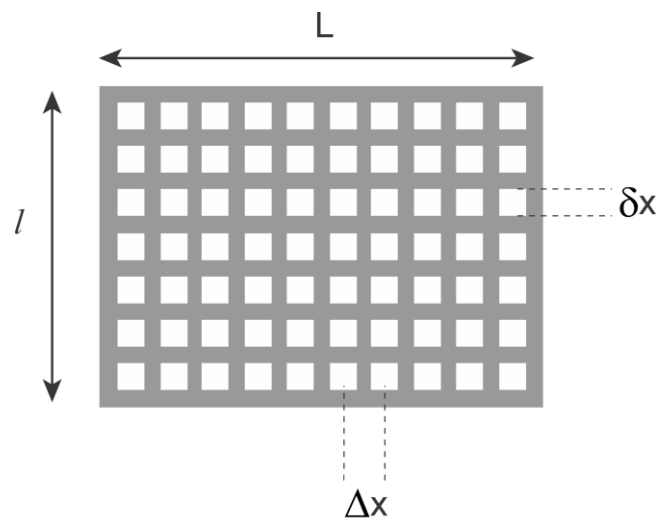


Figura 10.1: Geometría de una cámara CCD. Los píxeles (en blanco) son cuadrados con lado δx y separación centro a centro Δx . Los tamaños horizontales y verticales son L y l respectivamente.

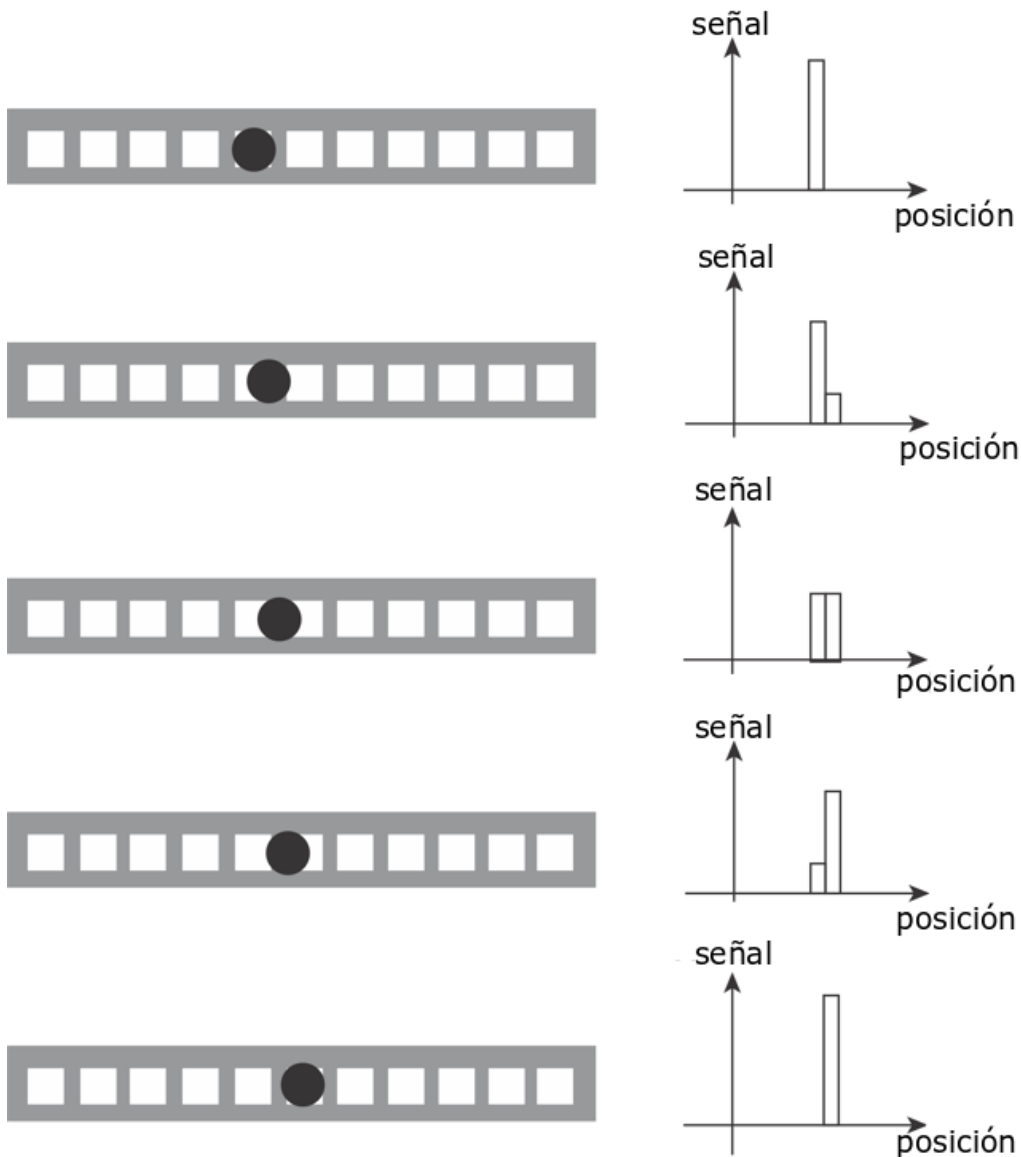


Figura 10.2: La falta de isoplanicidad en un detector pixelado. A la izquierda se muestran las posiciones de un objeto de luz (los círculos negros) sobre el arreglo de detectores (una línea de detectores para simplificar la figura), y a la derecha las imágenes para los diferentes casos. Notese como cambia la imagen cuando cambia la posición del objeto.

Las condiciones para poder utilizar el método de convolución para describir el proceso de formación de imágenes son que el sistema debe ser lineal e isoplanático. Aquí la CCD es lineal: si iluminamos con más intensidad, los detectores darán lecturas proporcionalmente mayores. Sin embargo, un CCD no es isoplanático. Se puede ver esto en la Figura 10.2. Recuerden que isoplanático

significa que la forma de la salida o imagen no debe cambiar con la posición del objeto puntual. En la Figura 10.2, se puede ver que si un objeto pequeño se mueve entre un pixel y otro adyacente, la imagen cambia dramáticamente: el ancho de la imagen varía por un factor de 2 dependiendo de la posición donde incide la luz. Esto significa que el sistema no es isoplanático.

Para permitir la utilización del método de convolución en sistemas con detectores pixelados, se requiere una respuesta a un impulso que sea invariante con la posición del objeto. Para lograr esto, se utiliza el promedio de las respuestas a un impulso para objetos puntuales incidentes sobre el detector (Park *et al*, 1984). Se puede imaginar la formación de la imagen de un objeto con muchas fuentes puntuales (por ejemplo las estrellas en el cielo nocturno) donde las posiciones de las fuentes son aleatorias. Cada fuente puntual estará en una posición aleatoria con respecto al arreglo de los detectores, y las imágenes de cada fuente puntual será diferente dependiendo de ésta alineación (como en la Figura 10.2). Las imágenes de las fuentes puntuales son las respuestas a un impulso que varían con la posición. Se toma el promedio de todas éstas respuestas a un impulso para encontrar una respuesta promedio a un impulso. Ésta respuesta promedio a un impulso es constante sobre todo el arreglo de detectores, esto es, ésta respuesta promedio a un impulso es isoplanática.

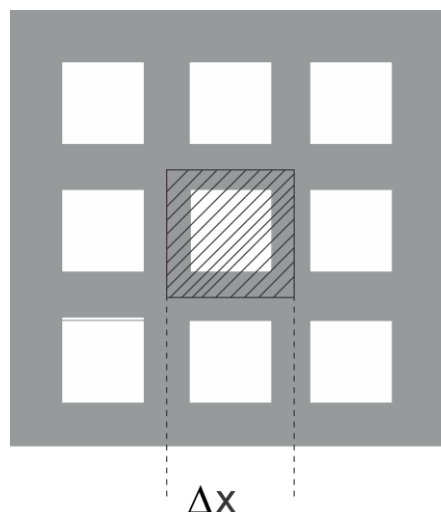


Figura 10.3: El área sobre el cual se realiza el promedio de las respuestas a un impulso para un pixel se muestra con el cuadrado con líneas diagonales.

Ahora, al tomar el promedio de las respuestas a un impulso sobre todo el arreglo de detectores es equivalente a tomar el promedio sobre todas las posiciones posibles de una fuente puntual sobre el espacio que ocupa un solo detector. La Figura 10.3 indica el área A sobre la cual se realiza el promedio. El área sobre la

cual hay que promediar es $A = \Delta x \times \Delta x$ (ver la Figura 10.1). Ésta respuesta promedio a un impulso se conoce como la respuesta de muestreo del arreglo de detectores.

10.2 PSF y MTF para un detector pixelado

Ahora vamos a ver cómo escribir el comportamiento del arreglo del detector en ecuaciones. Primero, la Figura 10.4 muestra la situación para uno de los pixeles del detector (analicemos el caso 2D para simplificar la discusión).

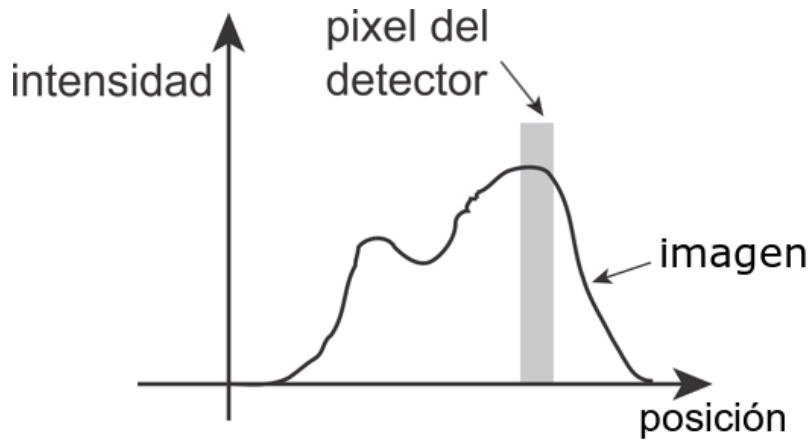


Figura 10.4: Un pixel del arreglo de detectores

La señal en el pixel mostrado es proporcional a:

$$I_p(x) = \int_{x-\frac{\delta x}{2}}^{x+\frac{\delta x}{2}} I(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x' - x}{\delta x}\right) I(x') dx', \quad (10.1)$$

donde δx es el tamaño del pixel (ver la Figura 10.1), x es la posición del centro del pixel, el subíndice p indica el pixel de interés y $I(x')$ es la intensidad de la luz proyectada sobre el arreglo de detectores. Ahora, como la función $\text{rect}(\)$ es simétrica, se puede escribir:

$$\text{rect}(x') = \text{rect}(-x'), \quad (10.2)$$

y con un corrimiento en posición, se puede escribir:

$$\text{rect}(x' - x) = \text{rect}(-x' - x). \quad (10.3)$$

Entonces, se puede escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x' - x}{\delta x}\right) I(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{-x - x'}{\delta x}\right) I(x') dx'. \quad (10.4)$$

Se puede ver que el término a la derecha de esta ecuación es una convolución (el signo negativo adentro de la función $\text{rect}(\quad)$ en el término $-x$ solo hace que el resultado de la convolución sea invertido en el eje x , lo que se puede corregir fácilmente para tener la imagen correcta final) :

$$I_p(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes I(x), \quad (10.5)$$

y ésta forma de escribir la ecuación simplificará la matemática posterior. Para formar el arreglo de detectores notamos que sólo se utilizan ciertos valores de x :

$$I_{CCD}(x) = \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes I(x) \right\}, \quad (10.6)$$

donde Δx es la separación de los pixeles (ver la Figura 10.1). Ahora, aquí incluimos la intensidad incidente sobre el detector, pero para poder utilizar el método de convolución, vimos arriba que hay que utilizar la intensidad muestreada. Esto significa que hay que promediar sobre la intensidad que llega sobre un área de $A = \Delta x \times \Delta x$ (aquí nos olvidamos de un factor constante $1/A$, que viene en el promedio y que no afecta el comportamiento relativo):

$$I_m(x) = \int_{x - \frac{\Delta x}{2}}^{x + \frac{\Delta x}{2}} I(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x' - x}{\Delta x}\right) I(x') dx'. \quad (10.7)$$

Otra vez, se puede escribir esta ecuación como una convolución:

$$I_m(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \otimes I(x), \quad (10.8)$$

y la señal detectada es:

$$I_d(x) = \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes I_m(x) \right\}. \quad (10.9)$$

Sustituyendo la ecuación (10.8) en la ecuación (10.9) da:

$$I_d(x) = \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \otimes I(x) \right\}. \quad (10.10)$$

Es importante enfatizar que la ecuación (10.10) no representa una señal real que se pueda obtener con la CCD, ya que se promedia sobre las posiciones de los haces incidentes para tener un sistema isoplanático, para permitir la definición de una función PSF.

Si la intensidad incidente sobre el arreglo de detectores es una función delta de Dirac:

$$I(x) = \delta(x),$$

la intensidad detectada es la respuesta a un impulso del arreglo de detectores (CCDPSF.m):

$$I_{PSF}(x) = \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \right\}. \quad (10.11)$$

Esta ecuación se grafica en la Figura 10.5. En la figura se puede ver que al final sólo tenemos una función delta en el centro del patrón. Físicamente, esto es correcto, porque una función delta de incidencia produce una señal sólo en uno de los pixeles, en una posición. La altura de esta función delta depende de la altura del promedio de las funciones de respuesta para obtener la respuesta de muestreo (recuerda que nos olvidamos de una constante en el promedio). Aparte de esta constante, la convolución de las dos funciones $\text{rect}(\)$ no contribuye a la respuesta a un impulso. Sin embargo, si tenemos una imagen incidente sobre nuestro detector, el efecto de la convolución es importante (ver la Figura 10.6). En este caso, la convolución de las dos $\text{rect}(\)$ se convuelve con la distribución de luz incidente y suaviza la señal detectada. Diferentes anchos de las dos $\text{rect}(\)$ se refleja en diferentes niveles de suavizado de la señal detectada.

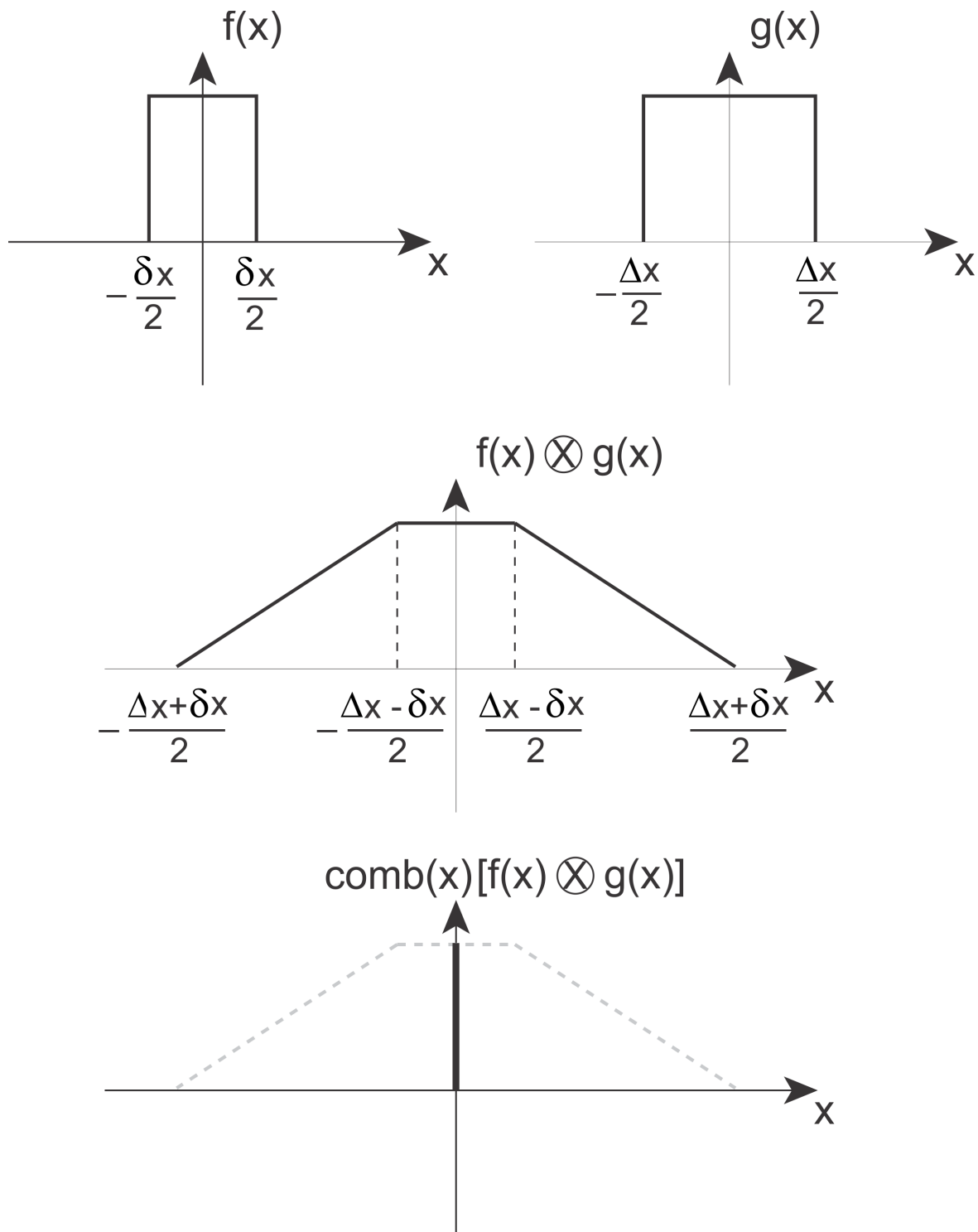


Figura 10.5: La respuesta a un impulso para un arreglo de detectores. Arriba izquierda, $\text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right)$; arriba derecha, $\text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$; centro, $\text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$; abajo, $\text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \right\}$

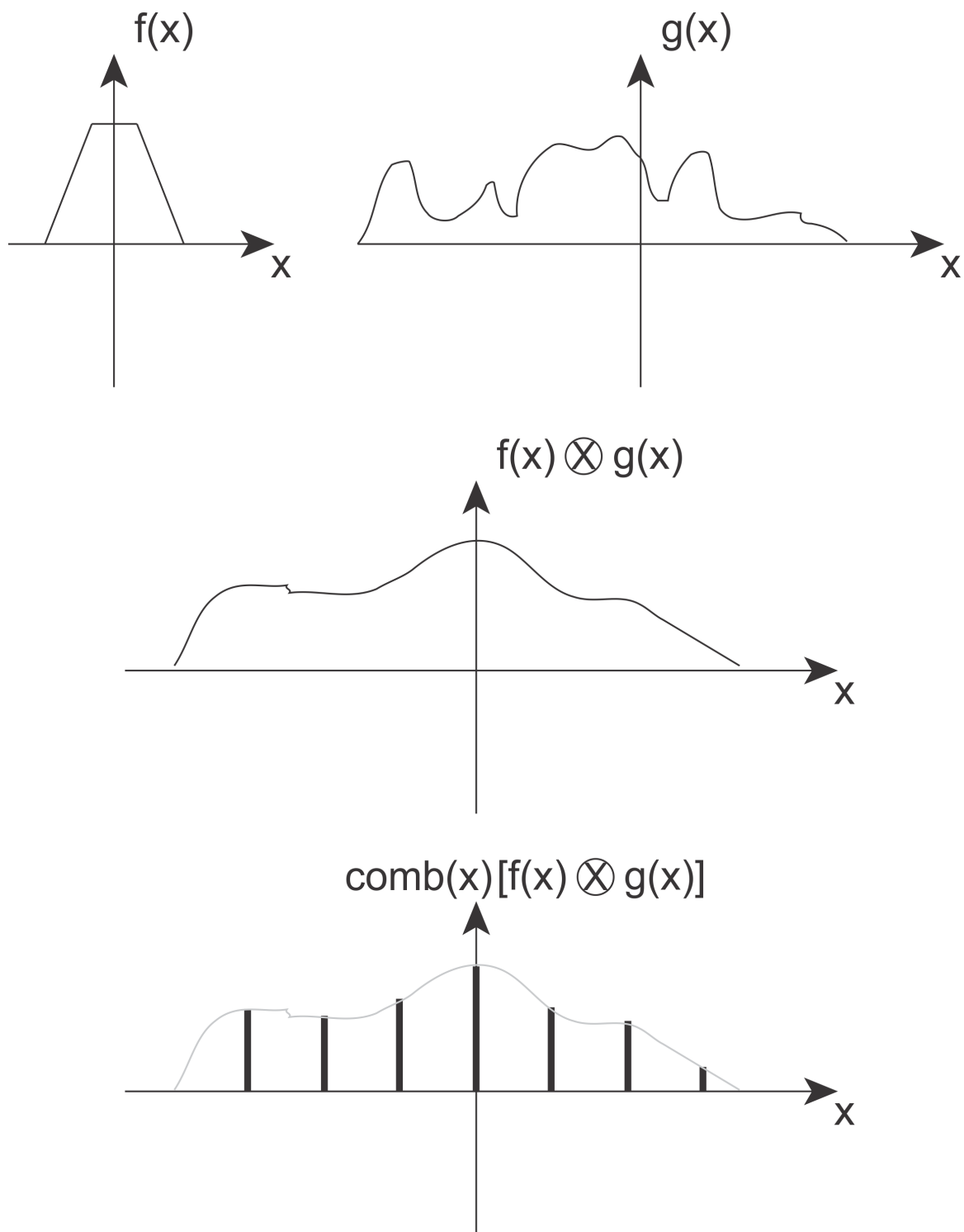


Figura 10.6: La formación de una imagen en un arreglo de detectores. Arriba izquierda, la respuesta a un impulso del arreglo de detectores; arriba derecha, distribución de la luz sobre el arreglo; centro, la convolución de la respuesta a un impulso y la distribución de la luz; abajo, la señal en el arreglo de detectores.

Finalmente, otro factor que se debe incluir es el tamaño del detector, que en la dirección x en la Figura 10.1 es L :

$$I_{PSF}(x) = \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \right\} \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right). \quad (10.12)$$

Ahora vemos qué pasa en el espacio de Fourier para este caso. La OTF es la transformada de Fourier de la PSF (ecuación 10.12):

$$\begin{aligned} OTF(u) &= \mathfrak{F}(I_{PSF}(x)) \\ &= \Delta x \text{comb}(\Delta x u) \otimes \mathfrak{F}\left(\text{rect}\left(\frac{x}{\delta x}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\right) \otimes L \text{sinc}(Lu), \end{aligned} \quad (10.13)$$

que se puede escribir como:

$$OTF(u) = \Delta x \text{comb}(\Delta x u) \otimes \delta x \Delta x \text{sinc}(\delta x u) \text{sinc}(\Delta x u) \otimes L \text{sinc}(Lu). \quad (10.14)$$

El término $\Delta x \text{sinc}(\Delta x u)$ describe el efecto de la respuesta de muestreo y se denomina la OTF de muestreo ("sampling OTF"), OTF_m ; el término $\delta x \text{sinc}(\delta x u)$ es la OTF del pixel, OTF_p porque viene de la integración sobre cada pixel. El término $L \text{sinc}(Lu)$ es un término de suavizado de la OTF por el tamaño finito de la CCD, y lo dejaremos a un lado para concentrarnos en los otros términos; usualmente, este último término es mucho más angosto que los otros términos, y tiene un efecto pequeño en el resultado final.

Los términos más importantes son los primeros tres a la derecha de la ecuación (10.14). Estos términos describen replicación (por la convolución con el $\text{comb}(\)$) de una función que es el producto de dos funciones $\text{sinc}(\)$ de diferentes anchos. La Figura 10.7 muestra el efecto de estos tres términos. Se puede ver de la Figura 10.7 que la multiplicación de las dos funciones $\text{sinc}(\)$ da una función más angosta, y que la replicación de esta función con el $\text{comb}(\)$ con separación de picos $1/\Delta x$ da varias copias de esta función, que se intersectan. En la discusión sobre el teorema de muestreo, encontramos algo similar: para poder reconstruir correctamente una función hay que muestrear la función con un paso lo suficientemente pequeño. Si no, las copias del espectro de la función se superponen y se tiene el efecto de **aliasing**. Esto es lo que tenemos aquí: **aliasing**.

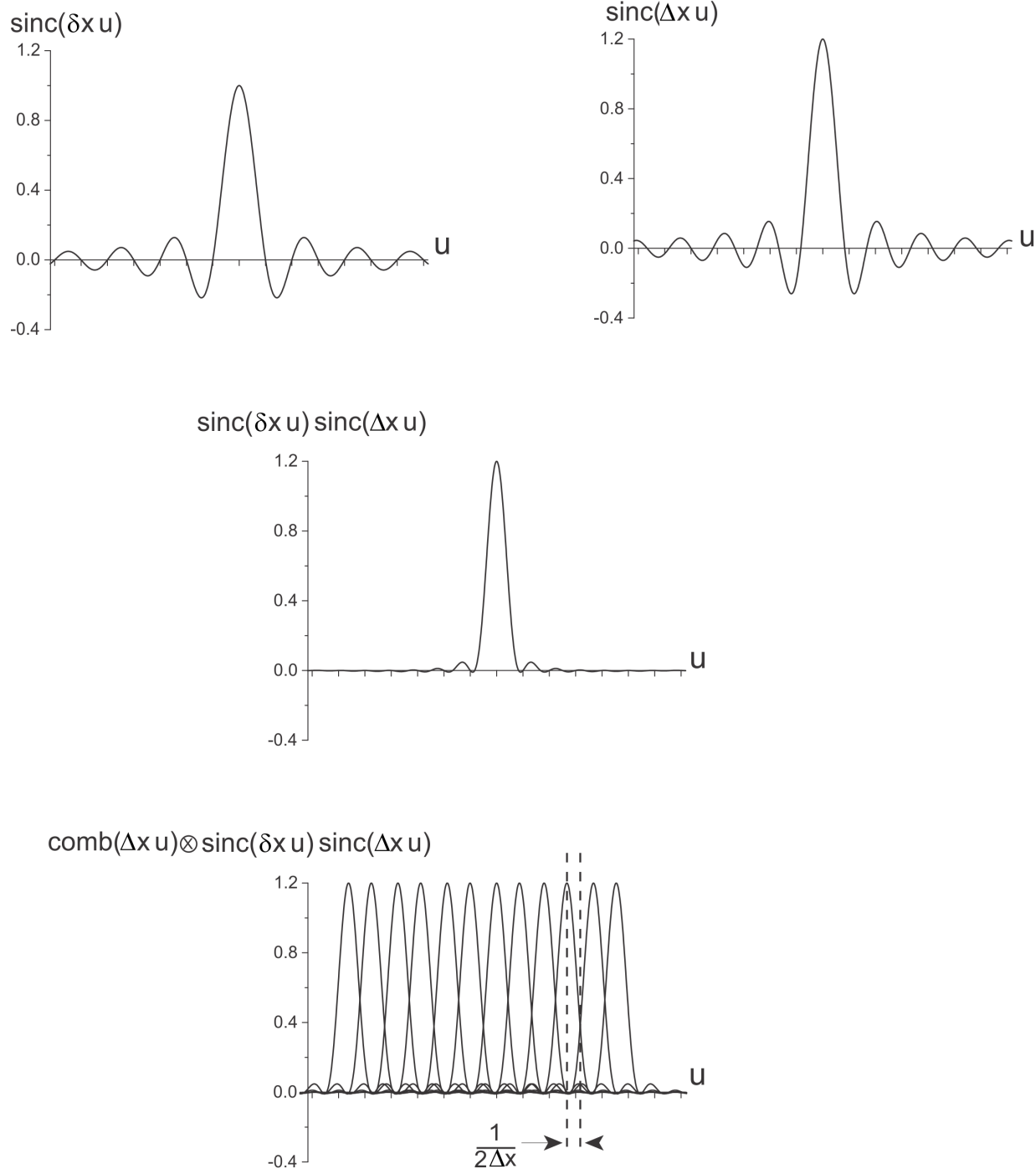


Figura 10.7: Los términos en la OTF para una cámara CCD. Arriba izquierda, $\text{sinc}(\delta x u)$; arriba derecha, $\text{sinc}(\Delta x u)$; centro, $\text{sinc}(\delta x u) \text{sinc}(\Delta x u)$; abajo, $\text{comb}(\Delta x u) \otimes \text{sinc}(\delta x u) \text{sinc}(\Delta x u)$. La escala en el eje x de todas las gráficas está marcada en intervalos de $1/\delta x$ para la comparación.

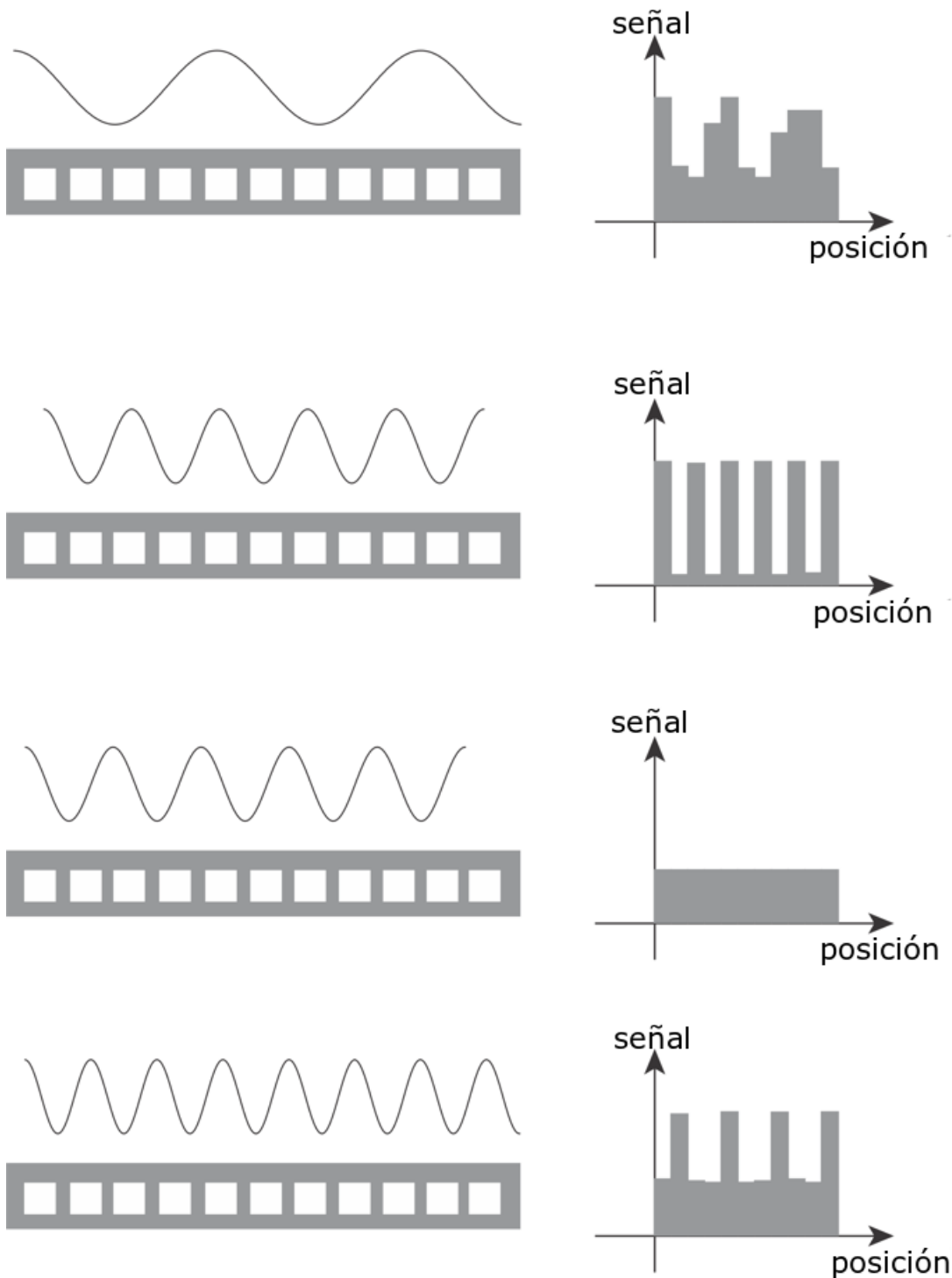


Figura 10.8: La señal detectada correspondiente a diferentes frecuencias de la intensidad óptica incidente sobre la CCD. Arriba, una frecuencia menor a la de Nyquist; las dos figuras en el centro son para la frecuencia de Nyquist, mostrando, otra vez, el hecho que este tipo de detector no es isoplanático y abajo, una frecuencia mayor que la de Nyquist.

En este caso sabemos la separación de los píxeles, entonces, utilizando la expresión para el límite de Nyquist, la frecuencia máxima que se puede detectar sin distorsión es:

$$u_{max} = \frac{1}{2\Delta x}, \quad (10.15)$$

que es la separación en u del centro de una de las copias de la función producto de los dos $\text{sinc}(\quad)$ y la intersección de ésta con la copia siguiente (ver la Figura 10.7). (N.B. Recuerda que el teorema de muestreo requiere una función limitada en banda para que se pueda reconstruir esta función. En el caso de la CCD la función no está limitada en banda. El efecto de esto se verá abajo.)

En este caso se puede ver el efecto que tiene la detección de una frecuencia mayor que el límite de Nyquist. La Figura 10.8 muestra la señal detectada para diferentes frecuencias de la intensidad óptica. Se puede ver que para una frecuencia de la intensidad óptica igual a o menor que la frecuencia de Nyquist, el detector registra la frecuencia espacial correctamente, pero para frecuencias mayores, la frecuencia detectada es diferente a la frecuencia espacial de la intensidad de la luz. Éste es el efecto de *aliasing*, es un error en la frecuencia detectada. Se muestra éste efecto en la Figura 10.9 donde se puede ver el efecto de reducir el número de píxeles en las frecuencias espaciales del arreglo radial de líneas. Se puede notar que las frecuencias espaciales más altas, en el centro de la rueda, son reproducidas peor cuando se reduce el número de píxeles, y que aparecen líneas "extras" en la imagen en estos casos.

Ahora, regresamos a la OTF del detector CCD. Consideramos sólo una de las copias de la función de la Figura 10.7 e indicamos el límite de Nyquist para las frecuencias detectadas. Graficamos en la Figura 10.10 la OTF para diferentes valores de la separación entre píxeles de la CCD. Para los casos mostrados en la Figura 10.10, las funciones OTF y los valores del límite de Nyquist son:

$$(a) \text{OTF} = \text{sinc}(2\delta x u) \text{sinc}(\delta x u), u_{max} = 1/(4\delta x),$$

$$(b) \text{OTF} = \text{sinc}(1.5\delta x u) \text{sinc}(\delta x u), u_{max} = 1/(3\delta x),$$

$$(c) \text{OTF} = \text{sinc}(\delta x u) \text{sinc}(\delta x u) = \text{sinc}^2(\delta x u), u_{max} = 1/(2\delta x).$$

Se puede ver que, cuando la separación entre píxeles se reduce, el OTF tiene un valor menor para la frecuencia del límite de Nyquist. Esto significa que las frecuencias mayores de este límite, y que por ende muestran el efecto de *aliasing*, tienen menor amplitud y se notarán menos.

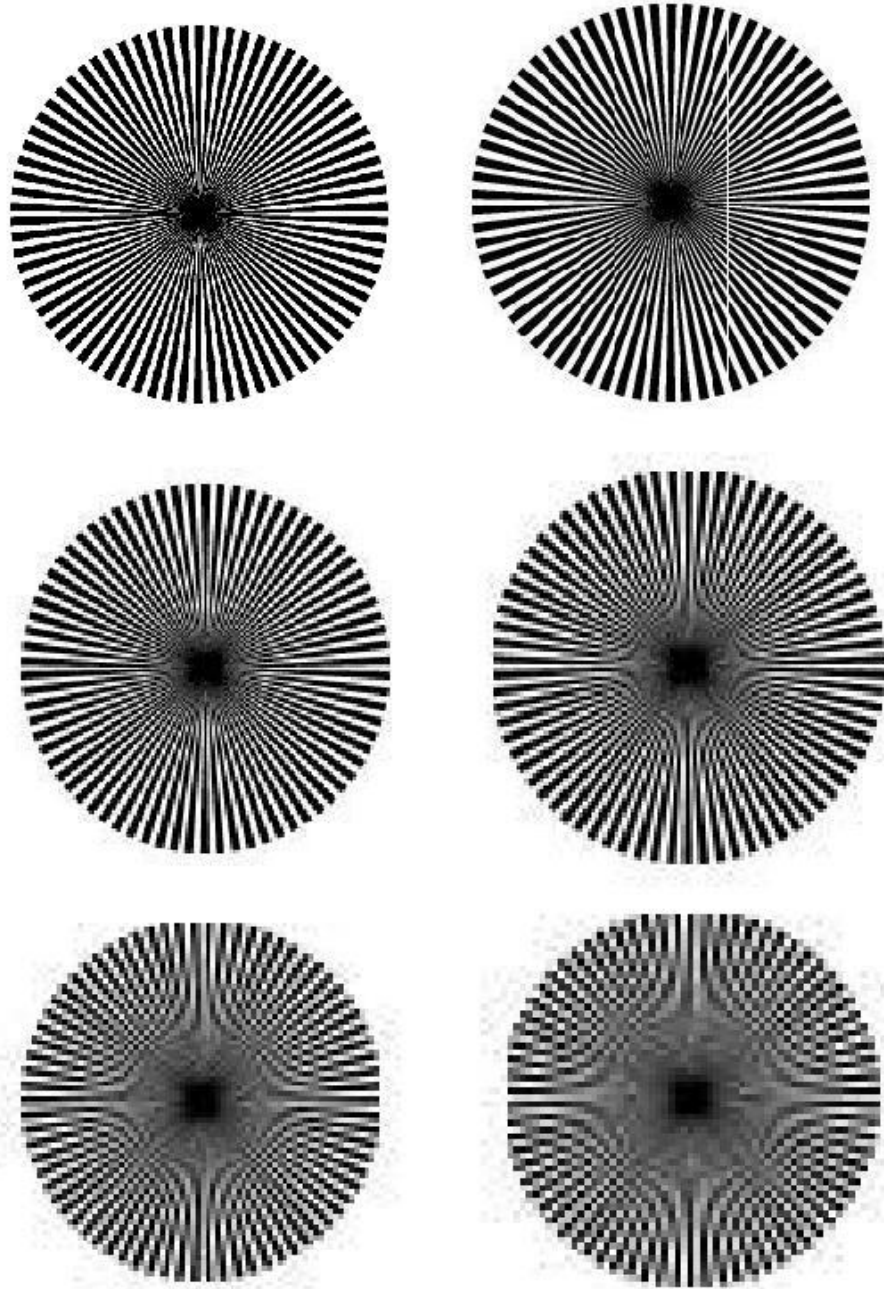


Figura 10.9: Comparación del mismo objeto capturado con diferentes números de pixeles. Arriba izquierda, 706×706 pixeles; arriba derecha, 235×235 ; centro izquierda, 141×141 ; centro derecha, 101×101 ; abajo izquierda, 70×70 ; abajo derecha, 60×60 . (CCDTamanoPixel.m)

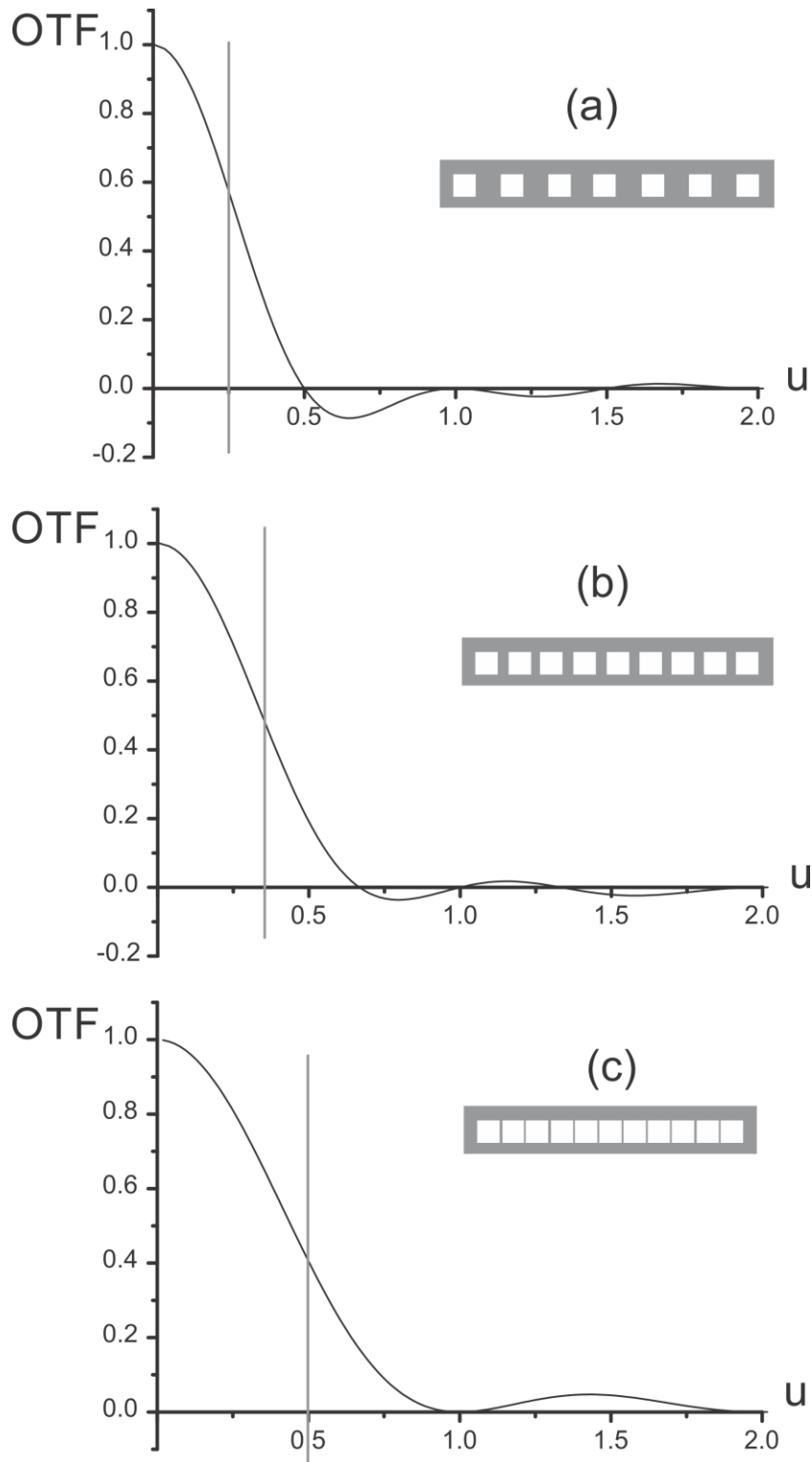


Figura 10.10: El OTF para un detector CCD para los casos de (a) $\Delta x = 2\delta x$ (b) $\Delta x = 1.5\delta x$; y (c) $\Delta x = \delta x$. Las unidades del eje u son $1/\delta x$. A la derecha de cada gráfica se muestra la forma del detector CCD y las líneas verticales indican los límites de Nyquist para cada caso.

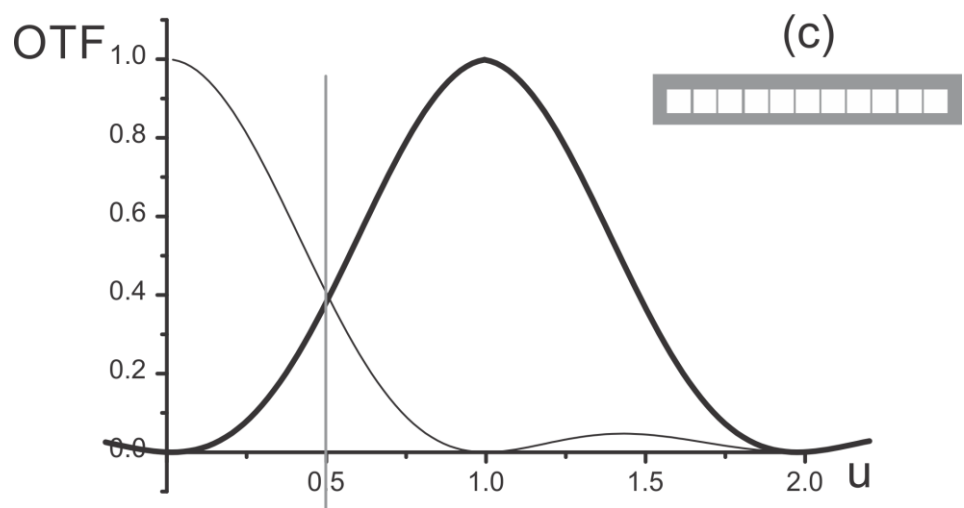
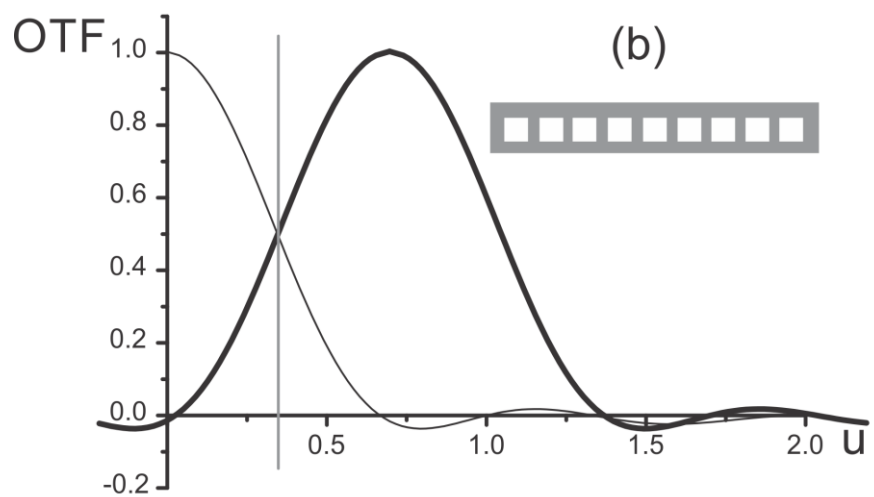
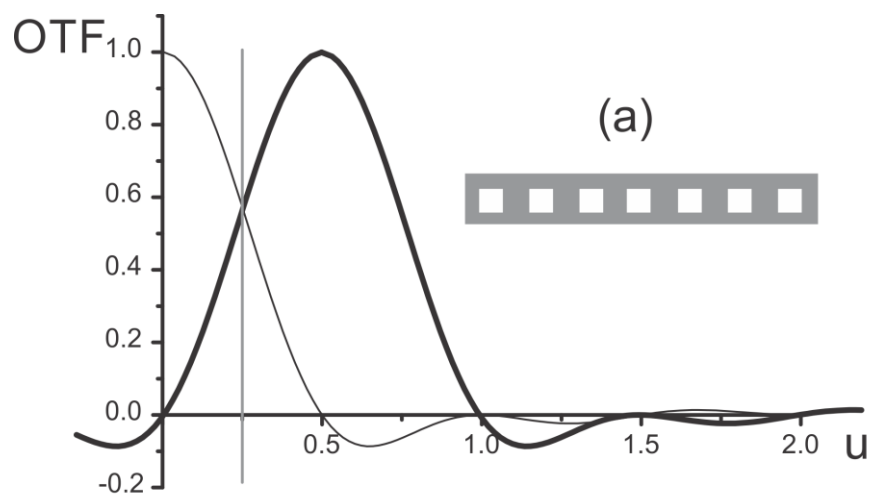


Figura 10.11: El aliasing que siempre está presente en un detector CCD.

Sin embargo, hay que recordar que el límite de Nyquist es válido para funciones que están limitadas en banda. Se puede ver aquí que las funciones de $\text{sinc}(\quad)$ no están limitadas en banda, tienen contribuciones de frecuencias altas. Esto significa que siempre hay aliasing, no importa la separación de los píxeles. Este aliasing viene de la integración sobre cada pixel, porque, aunque no estuviera el término de promedio, el término de integración quedaría y daría un factor $\text{sinc}(\quad)$. Este efecto se puede ver en la Figura 10.11. La conclusión es que siempre se debe utilizar un CCD para formar la imagen de estructuras que son lo más grande posible comparadas con el tamaño y la separación del pixel.

También, es importante notar que, en un sistema óptico, el OTF es la multiplicación del OTF del detector con el OTF óptico del sistema de lentes y otros componentes ópticos, antes de que la luz llegue al detector:

$$OTF = OTF_{optico} \times OTF_{CCD}. \quad (10.16)$$

Además, puede haber otros términos OTF que también contribuyen, e.g. electrónico, vibraciones o interferencia entre píxeles de la CCD. Para más información se puede ver (Boreman, 2001; Vollmerhausen y Diggers, 1998).

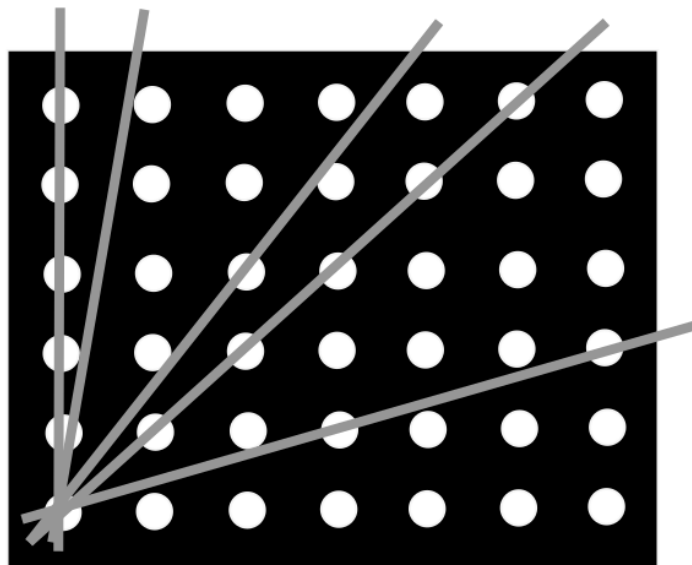


Figura 10.12: La variación de la resolución para diferentes direcciones de análisis sobre el CCD.

Finalmente, es importante notar que el comportamiento de un CCD (su MTF) depende de la orientación del objeto. La Figura 10.12 muestra un ejemplo de un detector y diferentes direcciones que se pueden utilizar para analizar un objeto. Se puede ver que la resolución, que depende de la separación de los píxeles a lo largo de cada línea varía enormemente para cada caso, incluso hay líneas que sólo intersectan un pixel, entonces no hay resolución en estas direcciones. Usualmente, las empresas constructoras de CCDs dan información de la MTF para los mejores casos, a lo largo de los ejes x e y , y hay que tener cuidado de alinear la dirección que se quiere medir con estos ejes al momento de analizar una imagen.

Capítulo 11

Filtraje Espacial

En este capítulo veremos un sistema óptico que permite alterar el contenido de las frecuencias espaciales de una imagen: el sistema $4f$ y ejemplos con diferentes tipos de filtros.

11.1 El sistema $4f$

Consideramos el arreglo experimental que se muestra en la Figura 11.1 (Goodman, 1996; Steward, 1983; Reynolds *et al*, 1989). Utilizamos luz coherente en este sistema. El objeto tiene la transmisión de amplitud $f(x, y)$, entonces, usando los resultados del Capítulo 6, si tenemos el objeto a la distancia focal de la lente y observamos también en la distancia focal, la distribución de amplitud en el plano a la distancia focal es:

$$f'(x', y') = \mathfrak{F}(f(x, y)), \quad \text{con } u = \frac{x'}{\lambda f}, v = \frac{y'}{\lambda f}. \quad (11.1)$$

Tomando la distancia focal de la segunda lente igual a la distancia focal de la primera lente, la imagen final es:

$$f''(x'', y'') = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(f(x, y))) = f(-x, -y), \quad (11.2)$$

es decir, nuestro sistema forma la imagen del objeto invertido y con magnificación 1. Esto no es muy interesante, pero lo que sí es interesante es que, en el plano intermedio, o el plano de Fourier, donde tenemos la transformada de Fourier del objeto, tenemos el contenido en términos de frecuencia espacial del objeto y lo podemos manipular, es decir, podemos cambiar el contenido del objeto en términos

de frecuencia espacial con la ayuda de filtros en el plano de Fourier. Aquí supusimos que la abertura finita de las lentes no afecta las imágenes, esto significa que las lentes son suficientemente grandes como para transmitir todas las frecuencias espaciales del objeto.

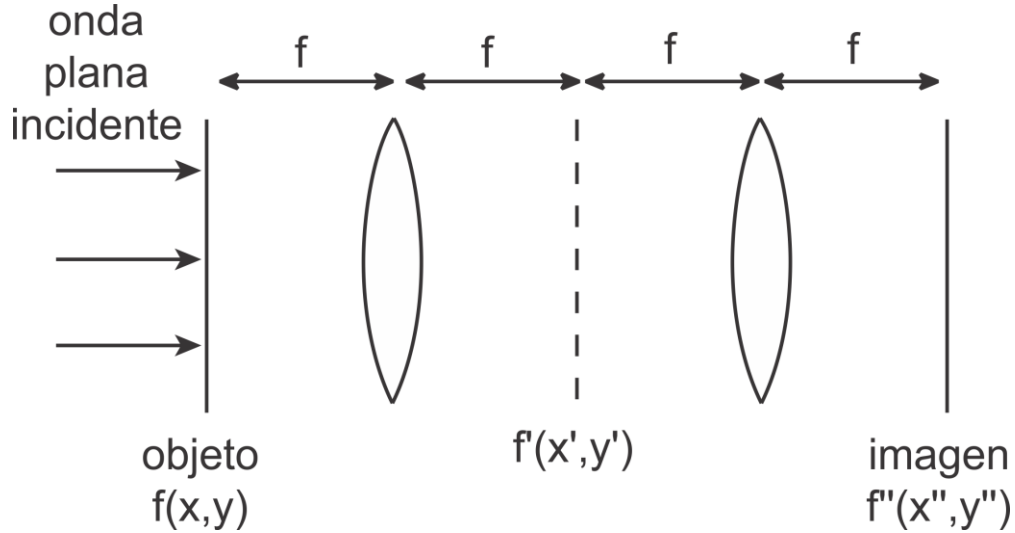


Figura 11.1: El arreglo experimental para filtraje espacial.

11.2 Filtrado de amplitud

Vamos a ver un ejemplo de filtrado espacial para que el proceso sea más claro. Tomamos el objeto mostrado en la Figura 11.2. En ecuaciones, la transmisión de amplitud de este objeto es:

$$f(x, y) = \left(\left\{ \text{comb} \left(\frac{x}{l} \right) \text{comb} \left(\frac{y}{l} \right) \right\} \otimes \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{a} \right) \right\} \right) \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{L} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{L} \right) \right\}, \quad (11.3)$$

y la transformada de Fourier de este objeto es:

$$F(u, v) = \{ l^2 \text{comb}(ul) \text{comb}(vl) \} \{ a^2 \text{sinc}(ua) \text{sinc}(va) \} \otimes \{ L^2 \text{sinc}(uL) \text{sinc}(vL) \}. \quad (11.4)$$

Suponiendo que los dientes del $\text{comb}(\quad)$ están lo suficientemente separados, la distribución de intensidad en el plano de Fourier del sistema de filtraje espacial será como en la Figura 11.3.

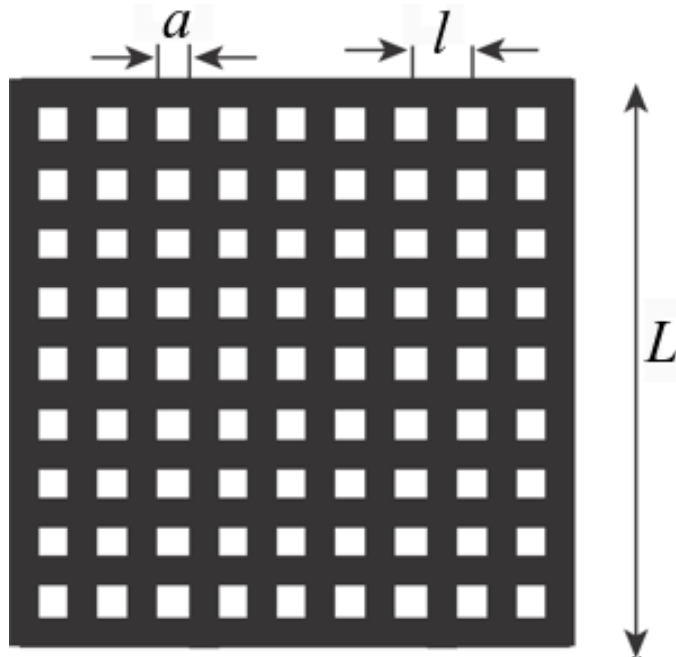


Figura 11.2: El objeto utilizado para filtraje espacial.

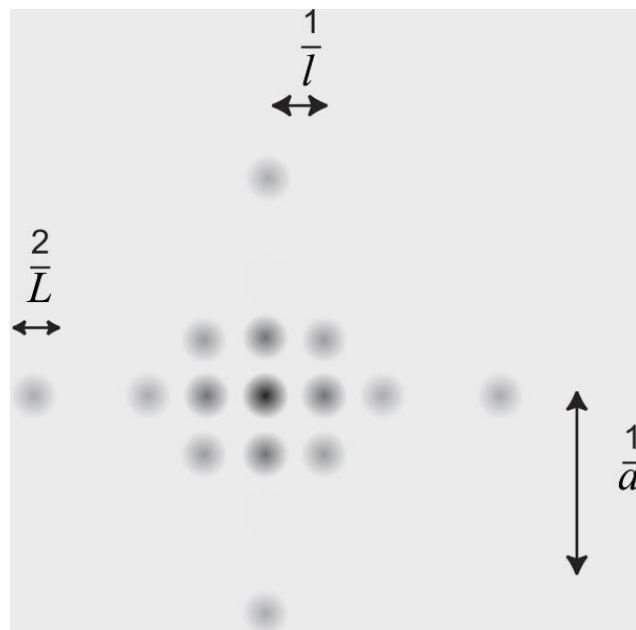


Figura 11.3: La transformada de Fourier del objeto de la Figura 11.2.

Ahora veremos qué pasa cuando ponemos filtros en el plano de Fourier. Primero ponemos un filtro de forma $rect(vl/2)$ como se muestra en la Figura 11.4a. La amplitud transmitida en el plano de Fourier es aproximadamente:

$$F(u, v) = (\{l^2 comb(ul)\}\{a^2 sinc(ua)\}) \otimes \{L^2 sinc(uL) sinc(vL)\}, \quad (11.5)$$

donde supusimos que la función $sinc(va)$ es aproximadamente constante adentro de la parte abierta del filtro. Al formar la imagen con la segunda lente, ignorando los signos negativos que significan una inversión de la imagen, tomamos la transformada de Fourier de esta ecuación para obtener:

$$f''(x'', y'') = \left(\left\{ l comb\left(\frac{x''}{l}\right) \right\} \otimes \left\{ a rect\left(\frac{x''}{a}\right) \right\} \right) \left\{ rect\left(\frac{x''}{L}\right) rect\left(\frac{y''}{L}\right) \right\}. \quad (11.6)$$

En la Figura 11.4b se muestra la forma de esta función. Se puede ver que se ha quitado la estructura en la dirección y'' en la imagen.

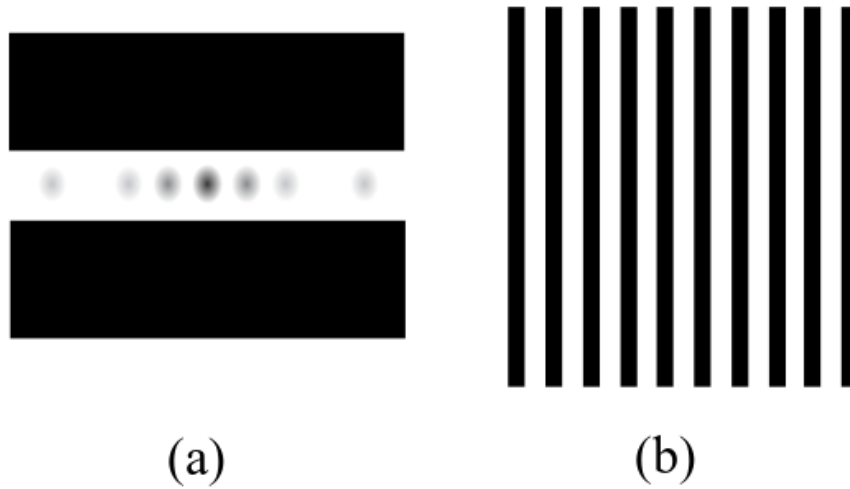


Figura 11.4: La transformada de Fourier filtrada (a) y la imagen resultante (b).
(FiltrajeEspacialRendijaEnX.m)

Si usamos un filtro $rect(ul/2)$ la amplitud en el plano de Fourier es:

$$F(u, v) = (\{l^2 comb(vl)\}\{a^2 sinc(va)\}) \otimes \{L^2 sinc(uL) sinc(vL)\}, \quad (11.7)$$

y la imagen es:

$$f''(x'', y'') = \left(\left\{ l \operatorname{comb} \left(\frac{y''}{l} \right) \right\} \otimes \left\{ a \operatorname{rect} \left(\frac{y''}{a} \right) \right\} \right) \left\{ \operatorname{rect} \left(\frac{x''}{L} \right) \operatorname{rect} \left(\frac{y''}{L} \right) \right\}. \quad (11.8)$$

En la Figura 11.5 se muestran estas funciones.

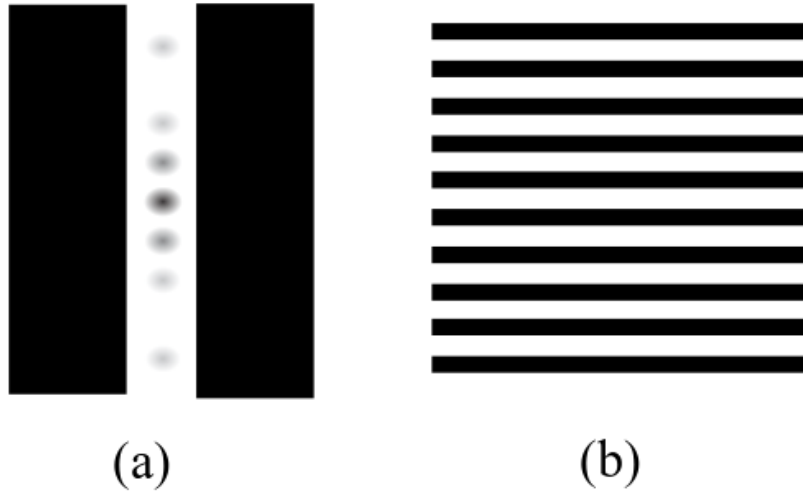


Figura 11.5: La transformada de Fourier filtrada (a) y la imagen resultante (b).
(FiltrajeEspacialRendijaEnY.m)

Si se selecciona sólo el centro del patrón en el plano de Fourier:

$$F(u, v) = (l^2 a^2 \operatorname{sinc}(ua) \operatorname{sinc}(va)) \otimes \{L^2 \operatorname{sinc}(uL) \operatorname{sinc}(vL)\}, \quad (11.9)$$

y, si $L \gg a$ los valores de $\operatorname{sinc}(ua)$ y $\operatorname{sinc}(va)$ serán aproximadamente constantes donde las funciones de $\operatorname{sinc}(uL)$ y $\operatorname{sinc}(vL)$ tienen valores significativos:

$$F(u, v) \approx l^2 a^2 L^2 \operatorname{sinc}(uL) \operatorname{sinc}(vL), \quad (11.10)$$

y la imagen final es:

$$f''(x'', y'') = l^2 a^2 \operatorname{rect} \left(\frac{x''}{L} \right) \operatorname{rect} \left(\frac{y''}{L} \right). \quad (11.11)$$

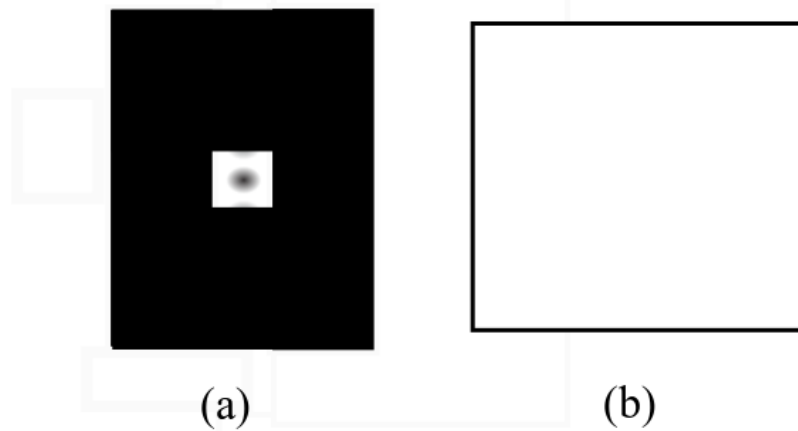


Figura 11.6: La transformada de Fourier filtrada (a) y la imagen resultante (b).
(FiltrajeEspacialAgujero.m)

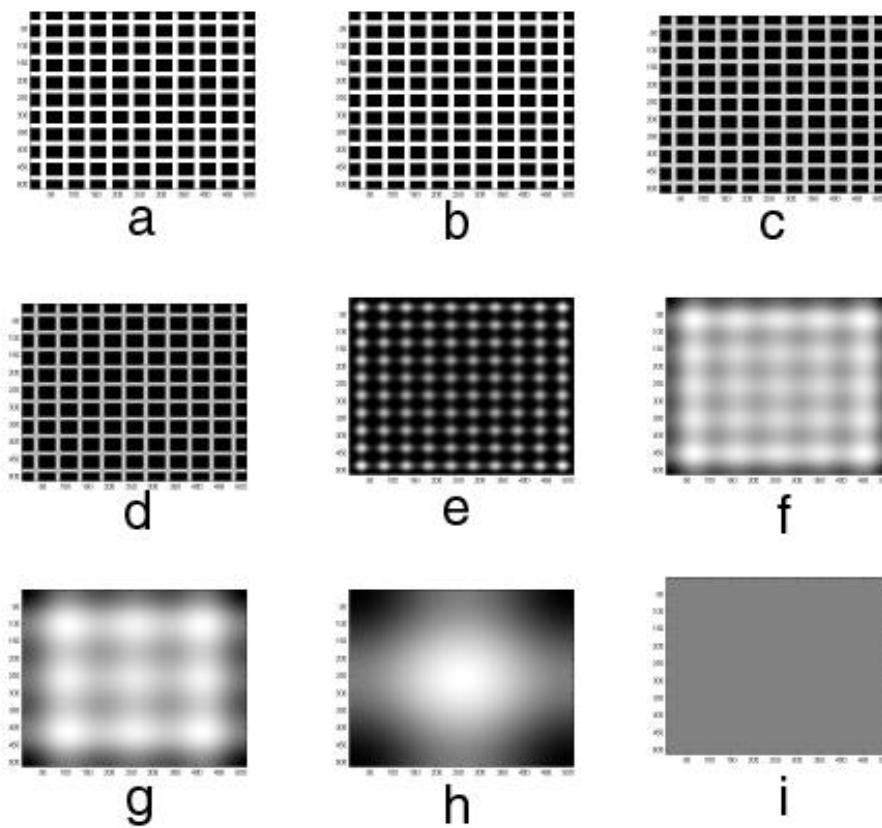


Figura 11.7: El resultado de filtrar con un agujero circular en el plano de Fourier. En unidades de píxeles, el objeto consiste en líneas de ancho 12 y separación 50, con un tamaño total de 512×512 . Los tamaños de los filtros son (en píxeles), a. el objeto original; b. filtro tamaño 501 píxeles; c. filtro tamaño 201 píxeles; d. filtro tamaño 101 píxeles; e. filtro tamaño 21 píxeles; f. filtro tamaño 11 píxeles; g. filtro tamaño 7 píxeles; h. filtro tamaño 3 píxeles e i. filtro tamaño 1 píxel.

(FiltrajeEspacialAgujero.m)

Entonces, no hay información en la imagen de la frecuencia espacial del objeto. Se muestran estas dos funciones en la Figura 11.6. Es importante notar que **cualquier** "punto" de luz en la transformada de Fourier que se deja pasar solo (es decir, se tapa todo el resto de la transformada de Fourier) dará la misma imagen. En la amplitud de la imagen, por el teorema de corrimiento, habrá un término de fase, pero esto desaparece en la intensidad, que es lo que se puede medir. La Figura 11.7 muestra el efecto de tener un filtro de la forma de la ecuación (11.10), de tamaño variable, calculado numéricamente. Dejando pasar muchas frecuencias se obtiene el objeto original, y se va distorsionando la imagen cuando se reduce el tamaño del filtro, para dejar pasar la contribución de solo una frecuencia para la última imagen, que es el caso descrito arriba.

La Figura 11.8a muestra otro caso, en el cual se bloquea sólo el orden central en la transformada de Fourier del objeto. En este caso la transformada de Fourier que pasa a la segunda lente se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= (\{l^2 \text{comb}(ul) \text{comb}(vl)\} \{a^2 \text{sinc}(ua) \text{sinc}(va)\}) \otimes \{L^2 \text{sinc}(uL) \text{sinc}(vL)\} \\
 &\quad - l^2 a^2 L^2 \text{sinc}(uL) \text{sinc}(vL),
 \end{aligned}
 \tag{11.12}$$

y por la linealidad de la transformada de Fourier, la imagen es:

$$\begin{aligned}
 f''(x'', y'') &= \left(\left\{ \text{comb}\left(\frac{x''}{l}\right) \text{comb}\left(\frac{y''}{l}\right) \right\} \otimes \left\{ \text{rect}\left(\frac{x''}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y''}{a}\right) \right\} \right) \\
 &\quad \times \left\{ \text{rect}\left(\frac{x''}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y''}{L}\right) \right\} - l^2 a^2 \text{rect}\left(\frac{x''}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y''}{L}\right),
 \end{aligned}
 \tag{11.13}$$

es decir, la amplitud en la imagen es la amplitud del objeto menos una constante. La Figura 11.9 muestra (a) la amplitud del objeto, (b) la amplitud del objeto menos una constante, y (c) la intensidad en la imagen, que es el módulo cuadrado de la amplitud en (b).

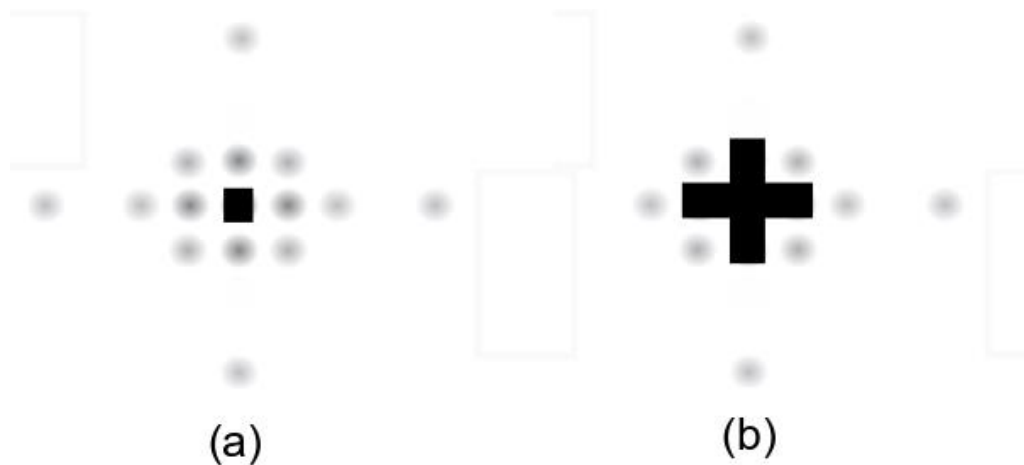


Figura 11.8: Filtros en la parte central de la transformada de Fourier del objeto.

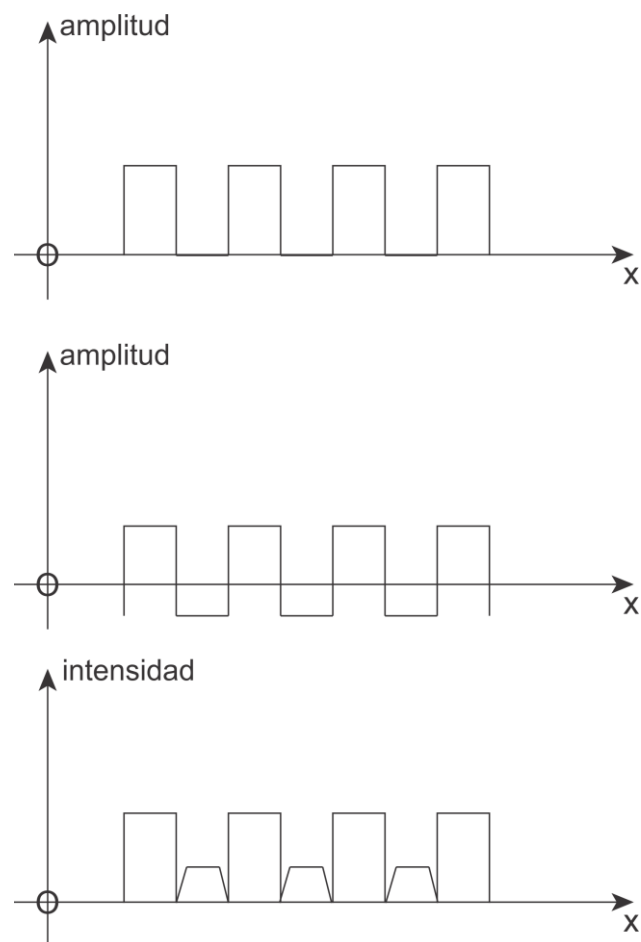


Figura 11.9: El efecto de quitar el orden central de la transformada de Fourier sobre la imagen final. Arriba, distribución de amplitud original; en medio, distribución de amplitud después de quitar una constante; y abajo, la intensidad correspondiente.

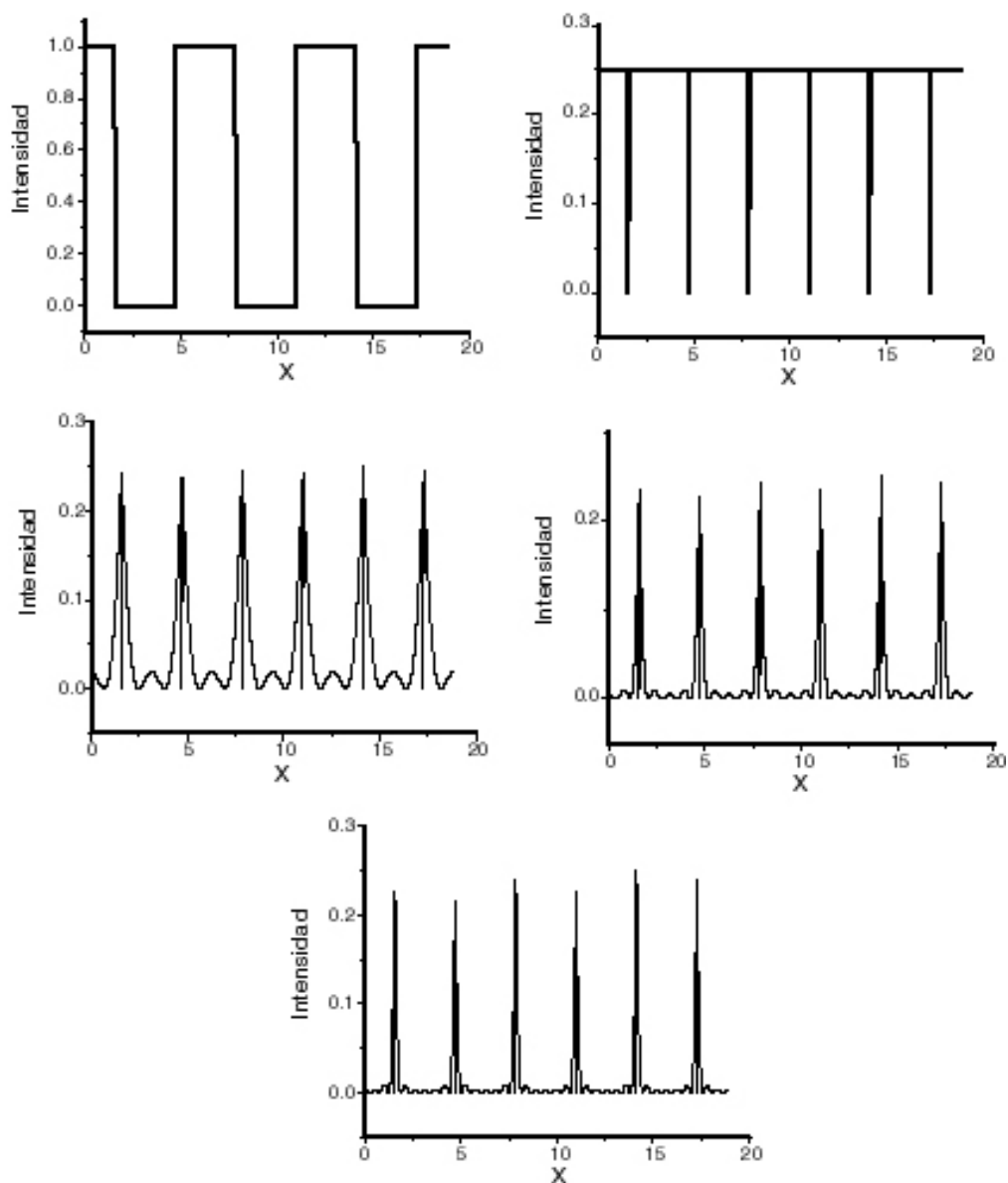


Figura 11.10: Simulación numérica para mostrar el efecto de quitar las frecuencias centrales del patrón de frecuencias espaciales. Arriba izquierda, objeto original; arriba derecha, restando una constante; centro izquierda, restando una constante y un $\cos(2\pi x/a)$; centro derecha, restando una constante, un $\cos(2\pi x/a)$ y un $\cos(2\pi 3x/a)$; abajo, restando una constante, un $\cos(2\pi x/a)$, un $\cos(2\pi 3x/a)$ y $\cos(2\pi 5x/a)$. Todos los términos multiplicados por los coeficientes de la serie de Fourier, que pueden ser negativos (ver el capítulo 1).

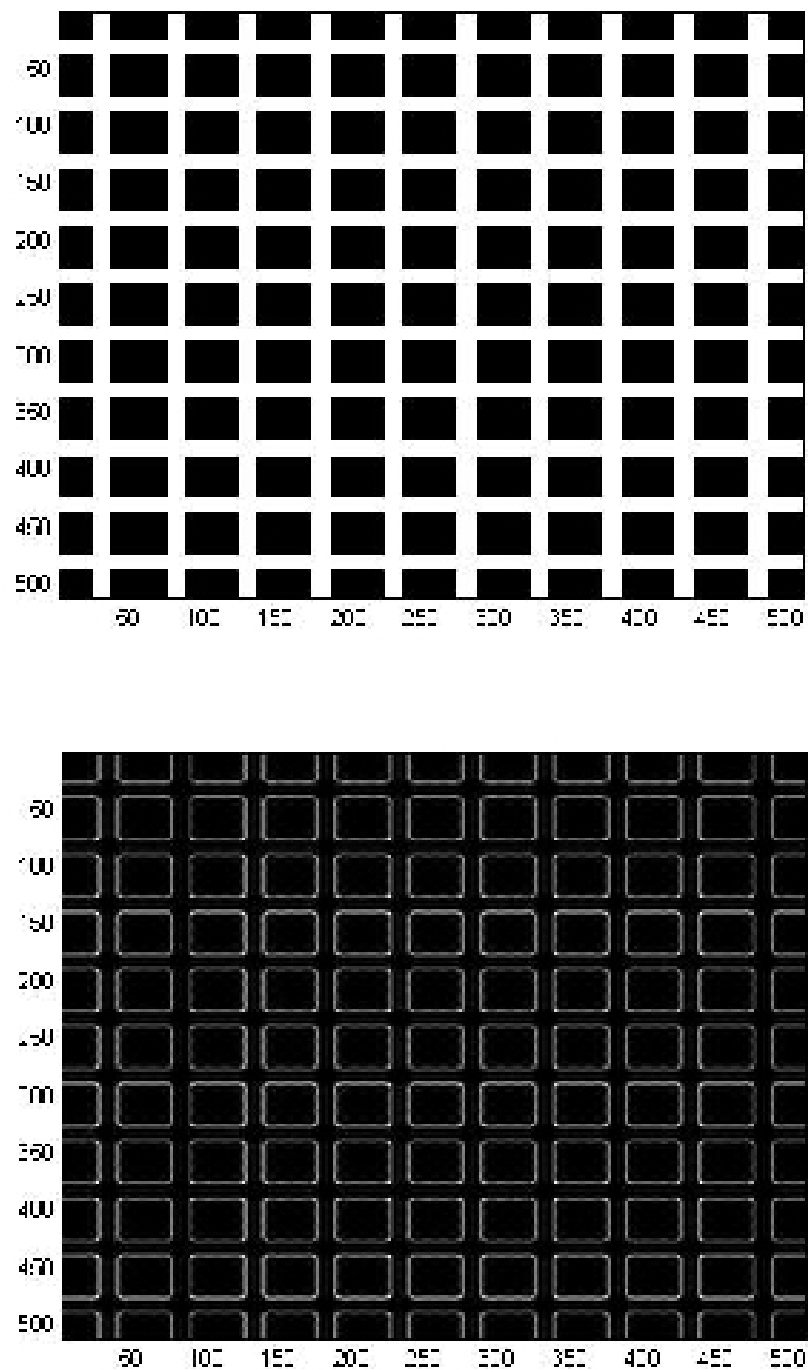


Figura 11.11: Simulación numérica de filtraje con un punto oscuro en el plano de Fourier. Imagen original, arriba; imagen filtrada, abajo. (FiltrajeEspacialPunto.m)

Se puede ver que la imagen tiene cero intensidad, menos en los bordes del objeto. Entonces, se están enfatizando los bordes del objeto. Si ahora bloqueamos un orden más en las direcciones u y v (ver la Figura 11.8b), tenemos que restar de la ecuación (11.12) los términos:

$$l^2 a^2 L^2 \text{sinc}(uL) \text{sinc}(vL) \otimes \{a^2 \text{sinc}(la) \text{sinc}(la)\} \\ \times [\delta(u+l) + \delta(u-l) + \delta(v+l) + \delta(v-l)], \quad (11.14)$$

y en la imagen hay que restar la transformada de Fourier de esta ecuación:

$$2l^2 a^4 \text{sinc}^2(la) \text{rect}\left(\frac{x''}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{y''}{L}\right) [\cos(2\pi x''l) + \cos(2\pi y''l)]. \quad (11.15)$$

La Figura 11.10 muestra un cálculo numérico de este caso y se puede observar que las líneas a cada lado de los bordes son relativamente más fuertes, es decir, se está enfatizando más a los bordes. En este caso, para obtener las líneas oscuras entre las dos líneas brillantes, se incluyeron puntos con altura de 0.5 en los bordes. Si no se incluyen estos puntos aparece una sola línea brillante en las posiciones de los bordes en los cálculos numéricos. La Figura 11.11 muestra el efecto de este tipo de filtraje en un objeto bidimensional. Nota que solo queda luz en las posiciones de los bordes.

11.3 Filtraje de Fase

En lo que hemos visto hasta ahora en este capítulo, se ha utilizado filtraje de amplitud: en el plano de filtraje la transmisión ha sido 0 o 1 en los diferentes puntos de este plano. Sin embargo, también es posible alterar la fase de la luz en el plano de filtraje. El mejor ejemplo de esto es el método de Zernike para la observación de objetos de fase (Born y Wolf, 1980; Goodman, 1996; Steward, 1983; Reynolds et al, 1989).

Suponemos que tenemos un objeto muy pequeño que es transparente (como muchas muestras biológicas). Éste objeto sólo alterará la fase de la luz incidente, no la amplitud. Si insertamos ésta muestra como el objeto en el sistema 4f de filtraje espacial, la transmisión del objeto será:

$$t(x, y) = e^{i\phi(x, y)}. \quad (11.16)$$

Como el objeto es pequeño, suponemos que la variación de fase que produce el objeto es pequeña:

$$\phi(x, y) \ll 1 \text{ radian}, \quad (11.17)$$

y podemos realizar una expansión binomial de la función de transmisión del objeto, despreciando el término cuadrado en la fase, para obtener:

$$t(x, y) \approx 1 + i \phi(x, y). \quad (11.18)$$

En el plano de Fourier, entonces, tenemos una distribución de amplitud como la transformada de Fourier de esta transmisión:

$$F(u, v) \approx \delta(u, v) + i \mathfrak{F}(\phi(x, y)). \quad (11.19)$$

En el plano de la imagen, la distribución de amplitud será la transformada de la amplitud en el plano de Fourier:

$$i(x, y) \approx 1 + i \phi(x, y), \quad (11.20)$$

donde se han omitido los cambios de signo en las variables que producen una doble transformada de Fourier. La intensidad en la imágenes es:

$$I(x, y) \approx (1 + i \phi(x, y))(1 - i \phi(x, y)) = (1 + \phi^2(x, y)) \approx 1, \quad (11.21)$$

donde se ha despreciado el término de la fase cuadrada porque ya dijimos que la fase es muy pequeña. Entonces la imagen es una distribución uniforme de intensidad y no hay ninguna información del objeto en la imagen. La razón de esto es por la relación de la fase entre los dos términos de la amplitud en la imagen. En la ecuación (11.21), los términos cruzados, que dan contribuciones de orden $\phi(x, y)$, desaparecen por el factor i en la amplitud. Si cambiamos el factor de fase en la posición (0,0) en la ecuación (11.19), cambiamos la fase de la función $\delta(u, v)$, y de la contribución en el punto (0,0) de $\mathfrak{F}(\phi(x, y))$. Sin embargo, si la transformada de Fourier de la fase es suficientemente ancha, este cambio en solo un punto casi no afectará a la transformada de Fourier de toda la función de la fase y podemos escribir:

$$F(u, v) \approx \delta(u, v)e^{i\theta} + i \mathfrak{F}(\phi(x, y)). \quad (11.22)$$

La amplitud en la imagen es ahora:

$$i(x, y) \approx e^{i\theta} + i \phi(x, y), \quad (11.23)$$

y la intensidad es:

$$\begin{aligned}
I(x, y) &\approx \left(e^{i\theta} + i \phi(x, y) \right) \left(e^{-i\theta} - i \phi(x, y) \right) \\
&= 1 + \phi^2(x, y) + i \phi(x, y) (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \\
&= 1 + \phi^2(x, y) + i \phi(x, y) (-2i \sin(\theta)) \\
&= 1 + \phi^2(x, y) + 2\phi(x, y) \sin(\theta) \\
&\approx 1 + 2\phi(x, y) \sin(\theta), \tag{11.24}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la misma aproximación sobre la fase que antes. Aquí se puede ver que el contenido de información sobre el objeto varía con la fase extra que se utiliza en el plano de filtraje de Fourier ([FiltrajeEspacialObjetoFase.m](#)):

- Si $\theta = \pi/2$, $\sin(\theta) = 1$, la intensidad queda como $I(x, y) = 1 + 2\phi(x, y)$, que se llama **contraste de fase positiva**.
- Si $\theta = 3\pi/2$, $\sin(\theta) = -1$, la intensidad queda como $I(x, y) = 1 - 2\phi(x, y)$ que se llama **contraste de fase negativa**.

Se puede combinar un filtro de fase y un filtro de amplitud para tener:

$$F(u, v) \approx a \delta(u, v) e^{i\theta} + i \Im(\phi(x, y)), \tag{11.25}$$

con $a < 1$. En este caso la intensidad en la imagen es:

$$I(x, y) \approx a^2 + 2a\phi(x, y) \sin(\theta). \tag{11.26}$$

La señal a ruido (en realidad señal a fondo) para este caso es:

$$\frac{\text{señal}}{\text{ruido}} = \frac{2a\phi(x, y) \sin(\theta)}{a^2} = \frac{1}{a} 2\phi(x, y) \sin(\theta), \tag{11.27}$$

que es $1/a$ veces mejor que el caso de $a = 1$, es decir, la variación de la fase es más visible si a es más pequeño. El caso límite es cuando $a = 0$. En este caso la amplitud transmitida en el plano de Fourier es:

$$F(u, v) \approx i \Im(\phi(x, y)) - i \operatorname{rect}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) \Im(\phi(x, y)), \quad (11.28)$$

donde el segundo término corresponde a la parte de la transformada de Fourier del objeto que está bloqueado por el filtro, y ε es el tamaño del filtro. La amplitud en la imagen en este caso es:

$$i(x, y) = i \phi(x, y) - i \varepsilon^2 \operatorname{sinc}(\varepsilon x) \operatorname{sinc}(\varepsilon y) \otimes \phi(x, y), \quad (11.29)$$

y la intensidad es:

$$I(x, y) = A^2 - 2A\phi(x, y) + \phi^2(x, y), \quad (11.30)$$

con $A = \varepsilon^2 \operatorname{sinc}(\varepsilon x) \operatorname{sinc}(\varepsilon y) \otimes \phi(x, y)$ y aquí, como A es muy pequeño, no se puede despreciar el término que está al cuadrado en la fase. La relación entre la intensidad y la fase aquí es no-lineal y la intensidad que no tiene relación con la fase es muy pequeña. Esta técnica se llama el **método de campo oscuro** y es una de las técnicas más importantes para la microscopía en biología. La Figura 11.12 muestra un ejemplo de cálculos de un objeto de fase usando contraste de fase positiva, negativa y campo oscuro ([FiltrajeEspacialObjetoFase.m](#)). Un ejemplo experimental de ésta técnica se presenta en la Figura 11.13, que es una huella digital (un objeto de fase por los aceites y sudor de la mano que deja en un acetato) que aparece en la imagen cuando se utiliza un punto oscuro en el centro del plano de Fourier.

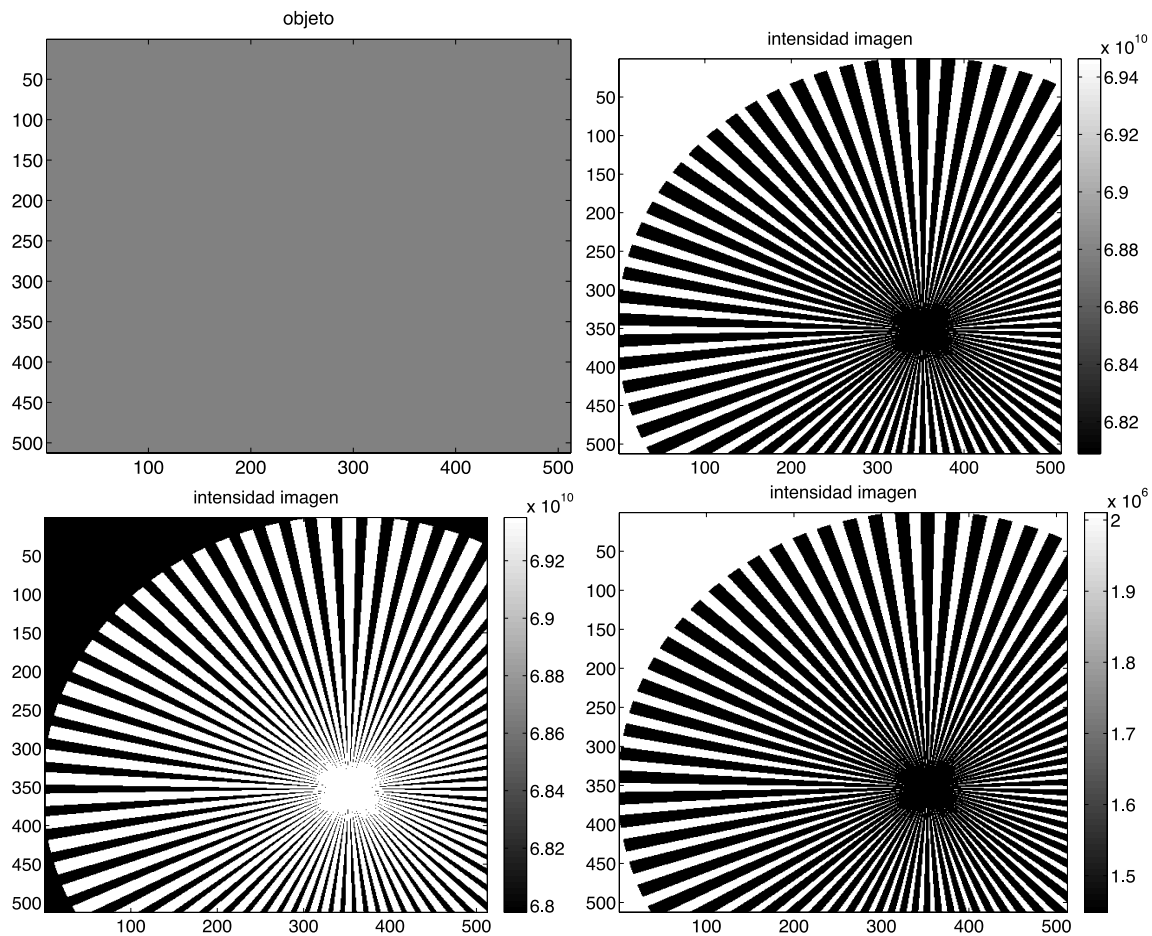


Figura 11.12: Ejemplos de filtraje espacial de un objeto de fase. Arriba izquierda: imagen del objeto de fase sin filtraje; Arriba derecha: imagen de contraste de fase positiva; Abajo izquierda: imagen de contraste de fase negativa; Abajo derecha: imagen de campo oscuro. Se puede ver un mejor contraste de los valores de intensidad indicado en los niveles de gris de las gráficas.

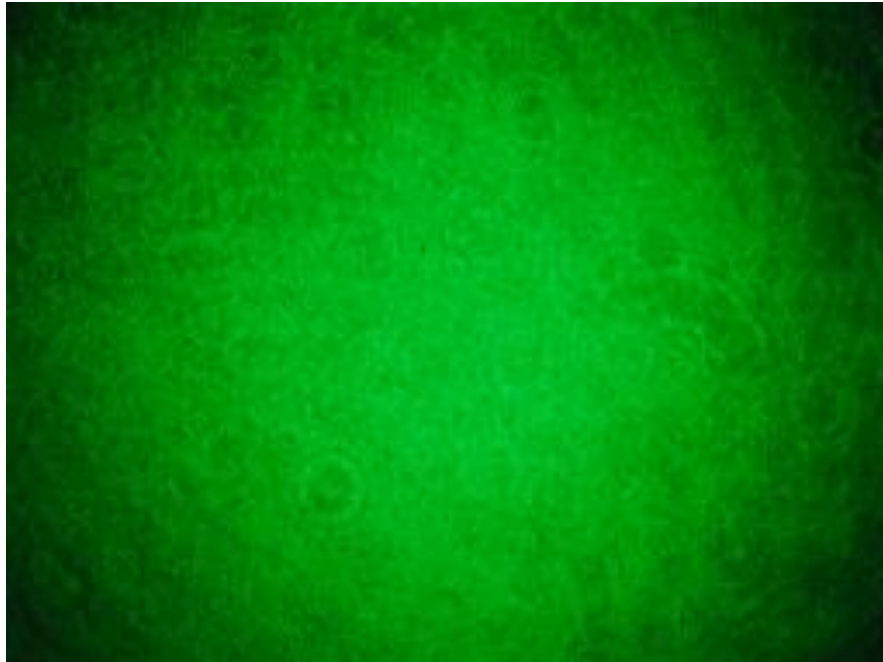


Figura 11.13: La imagen de una huella digital sobre un pedazo de acetato sin filtro (arriba) y con un punto oscuro en el plano de Fourier como filtro (abajo)

Capítulo 12

Holografía

En este capítulo veremos las técnicas de holografía. Primero introducimos la técnica de holografía para imágenes, y algunas variantes, para introducir la notación que utilizaremos, y posteriormente mostraremos como utilizar holografía de la transformada de Fourier para realizar reconocimiento de patrones.

12.1 Holografía

En fotografía se toma una imagen que representa la distribución de intensidad de la luz reflejada de un objeto proyectado sobre un plano, que es el plano de la fotografía. Se pierde la información de la "profundidad" del objeto, sólo tenemos la imagen de la proyección de la imagen sobre un plano. La técnica holográfica nos permite obtener una imagen que contiene información sobre la profundidad del objeto; de hecho, con este método, se reconstruye la **onda** (amplitud y fase) de la luz reflejada del objeto, entonces la imagen es una réplica del objeto (Smith, 1975; Collier *et al*, 1971). La Figura 12.1 muestra una geometría que permite grabar un holograma. Iluminamos un objeto con una onda coherente y captamos algo de la luz reflejada en la placa fotográfica. Al mismo tiempo iluminamos la placa con una onda de referencia de la misma fuente coherente. Tenemos un objeto que refleja la onda $o(x, y)e^{i\phi_o}$ en el plano de la placa fotográfica, donde $o(x, y)$ es la amplitud de la onda y ϕ_o es la fase de la onda en cada posición sobre el plano de la placa. De forma similar, podemos escribir la onda de referencia sobre la placa como $r(x, y)e^{i\phi_r}$. Dado que la luz es coherente, para calcular el campo total en la placa tenemos que sumar los campos:

$$a(x, y) = o(x, y)e^{i\phi_o} + r(x, y)e^{i\phi_r}, \quad (12.1)$$

y la intensidad de la luz incidente en la placa es:

$$I(x, y) = |a(x, y)|^2 = o^2(x, y) + r^2(x, y) + o(x, y) r(x, y) \{e^{i(\phi_o - \phi_r)} + e^{i(\phi_r - \phi_o)}\}. \quad (12.2)$$

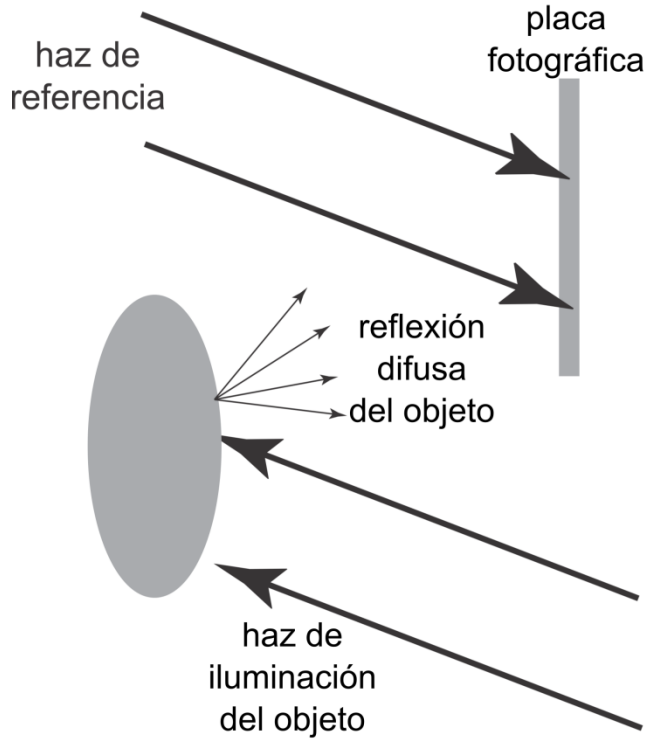


Figura 12.1: Geometría utilizada para grabar un holograma

Ahora suponemos que la transmisión de amplitud de la placa revelada, T , es proporcional a la energía incidente en la placa:

$$T = t_0 - \gamma I(x, y) \tau, \quad (12.3)$$

donde t_0 es la transmisión de la placa revelada cuando no hay luz incidente, γ es la sensibilidad de la placa a la energía incidente y τ es el tiempo de exposición de la placa. El signo $-$ es necesario porque la placa revelada es la negativa de la distribución de intensidad, igual que en una cámara de película normal.

La Figura 12.2 muestra la reconstrucción de la imagen. La placa revelada se regresa a su posición original y se ilumina con la onda de referencia original. La amplitud transmitida por la placa es:

$$T = t_0 r(x, y) e^{i\phi_r} - \gamma I(x, y) \tau r(x, y) e^{i\phi_r}, \quad (12.4)$$

y sustituyendo la ecuación (12.2) en la ecuación (12.4), obtenemos 5 términos en la expresión para la transmisión de la placa revelada:

$$T = \underbrace{t_0 r(x, y) e^{i\phi_r}}_I - \underbrace{\gamma \tau o^2(x, y) r(x, y) e^{i\phi_r}}_{II} - \underbrace{\gamma \tau r^2(x, y) r(x, y) e^{i\phi_r}}_{III} - \underbrace{\gamma \tau o(x, y) r^2(x, y) e^{i\phi_o}}_{IV} - \underbrace{\gamma \tau o(x, y) r^2(x, y) e^{i(2\phi_r - \phi_o)}}_V. \quad (12.5)$$

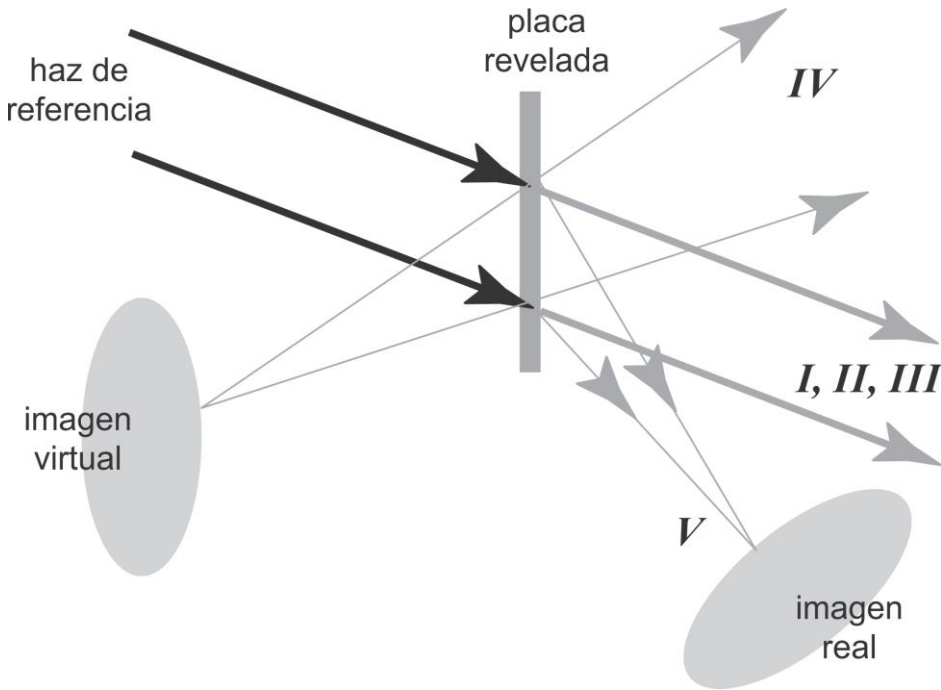


Figura 12.2: Reconstrucción de la imagen en un holograma

Vemos el significado de los diferentes términos en esta expresión:

- I. La onda de referencia disminuida.
- II. La onda de referencia modulada por la proyección de la intensidad del objeto.

- III. La onda de referencia modulada por la proyección de la intensidad de la onda de referencia.
- IV. La onda del objeto modulada por la proyección de la intensidad de la onda de referencia.
- V. La onda del objeto modulada por la proyección de la intensidad de la onda de referencia pero con la fase negativa y con una contribución de la fase de referencia.

Suponemos que la onda de referencia es una onda plana, su intensidad, $r^2(x, y)$, es una constante y la fase ϕ_r depende del ángulo de incidencia sobre la placa. Los términos I, II y III son copias de la onda de referencia y aparecerán en la misma dirección que la onda de referencia original (ver la Figura 12.2). El término IV es una copia de la onda del objeto y aparecerá en la dirección que seguía la onda reflejada del objeto (Figura 12.2). Si se observa la placa en la dirección de la onda IV hacia la posición del objeto original, se observará una copia del objeto, igual que el original, en tres dimensiones. Esta onda es la imagen virtual del objeto (no se puede proyectar sobre una pantalla directamente: se requiere una lente para formar la imagen). El término V contiene la distribución de amplitud del objeto pero con la fase negativa, $o(x, y)e^{-i\phi_o}$. El cambio de signo en la fase significa que una onda que estaba divergiendo se cambia a una onda convergente, es decir, se forma una imagen real del objeto, aunque lo que está más cerca a la placa en el objeto aparece más cerca a la placa en la imagen, entonces será más lejos del observador. La imagen está invertida o seudoscópica y se llama la imagen real del objeto. Además, el término V contiene la contribución de fase $e^{i2\phi_r}$ que es la fase de una onda plana que viaja a un ángulo para dar la fase $2\phi_r$, que, para ángulos pequeños, será dos veces el ángulo del haz de referencia. Esta fase está sumada a la fase negativa del objeto, entonces la imagen real aparecerá a un ángulo de 2 veces el ángulo de incidencia del haz de referencia de la dirección del haz del objeto, ver la Figura 12.2.

Notas

1. Por simetría, si iluminamos la placa revelada con el haz del objeto, obtendremos las imágenes real y virtual del haz de referencia.
2. Aquí supusimos una placa fotográfica infinitesimalmente delgada: sin efectos de películas delgadas ni de difracción de Bragg.
3. Necesitamos una separación en ángulo entre las diferentes imágenes; esto depende de la elección del ángulo de iluminación con el haz de referencia.

Un efecto interesante ocurre cuando iluminamos la placa revelada con la onda conjugada de la referencia, es decir, reconstruimos con $r(x, y)e^{-i\phi_r}$. La Figura 12.3 muestra esta onda de referencia conjugada. Siguiendo el mismo procedimiento como arriba, el campo transmitido por la placa revelada es:

$$\begin{aligned}
T = & \underbrace{t_0 r(x, y) e^{-i\phi_r}}_I - \underbrace{\gamma \tau o^2(x, y) r(x, y) e^{-i\phi_r}}_{II} \\
& - \underbrace{\gamma \tau r^2(x, y) r(x, y) e^{-i\phi_r}}_{III} - \underbrace{\gamma \tau o(x, y) r^2(x, y) e^{i(\phi_o - 2\phi_r)}}_{IV} \\
& - \underbrace{\gamma \tau o(x, y) r^2(x, y) e^{-i\phi_o}}_V. \quad (12.6)
\end{aligned}$$

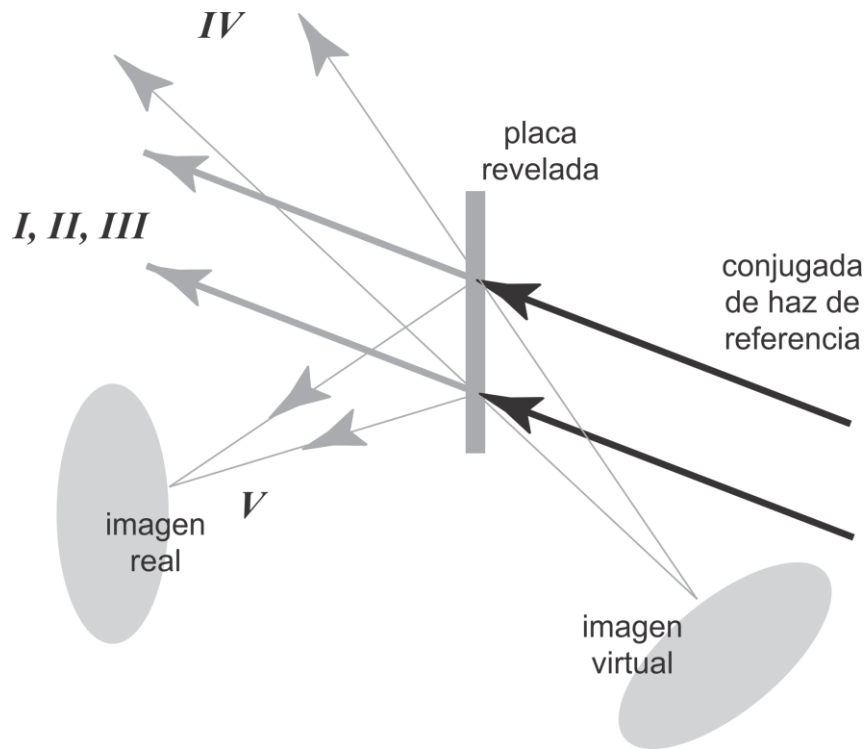


Figura 12.3: Reconstrucción con el haz de referencia conjugado.

En la Figura 12.3, también se muestran las direcciones de estos 5 términos. Lo más importante aquí es el término V, que es la conjugada de la onda del objeto, es decir, ésta es una onda que converge para formar la imagen del objeto. Ésta es una imagen real del objeto sin inversión (no tiene el signo negativo en la fase), que aparece en la posición del objeto original.

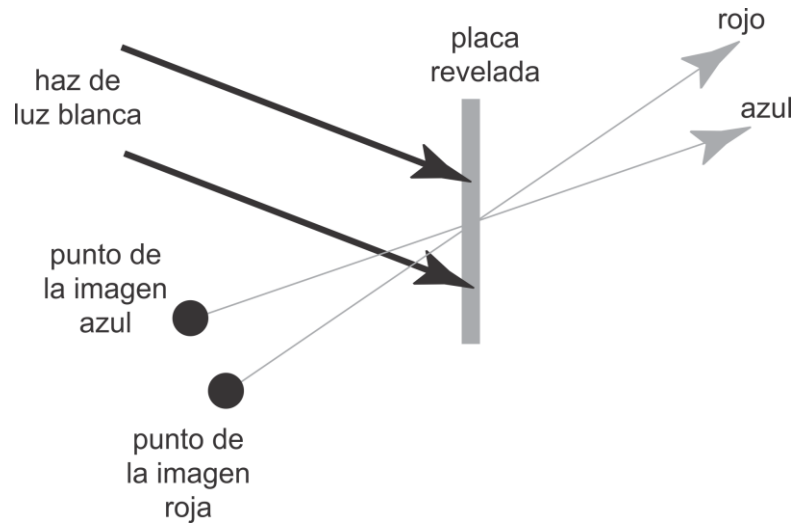


Figura 12.4: Reconstrucción de un holograma con luz blanca.

12.2 Hologramas de luz blanca

¿Qué pasa si intentamos iluminar la placa revelada con luz blanca? Cada color producirá una imagen, pero debido a que la fase depende de la longitud de onda, cada contribución tendrá un término de fase diferente. Suponiendo siempre ondas planas, esto significa que cada color producirá su imagen virtual en un ángulo diferente, o podemos decir que hay aberración cromática. Esto se muestra en la Figura 12.4. Entonces, ¿cómo podemos reducir esta aberración cromática? De la misma Figura 12.4 se puede ver que si se reduce la distancia entre la imagen y la placa (que es la misma que la distancia entre el objeto y la placa) el efecto de la aberración será reducido. Una forma de poner el objeto en el plano de la placa se muestra en la Figura 12.5(a). Aquí se forma la imagen del objeto original sobre la placa utilizando una lente. Al iluminar la placa revelada con la referencia original se forman las imágenes real y virtual que están separadas en ángulo, es decir, dependiendo de la posición del ojo se ve la imagen real o virtual (Figura 12.5(b)). Sin embargo, si se piensa en el objeto utilizado para tomar el holograma, sabemos que sólo lo podemos ver en ciertas posiciones del ojo, porque se está viendo a través de la lente. Éste efecto se llama viñeteo, y significa que sólo hay un rango pequeño de ángulos en el cual se puede ver la imagen.

Otro método que no tiene este problema se indica en la Figura 12.6. La técnica se llama "amo-esclavo" porque se utiliza la imagen real del holograma grabado en una placa revelada, como el objeto para otro holograma; para éste segundo holograma, la placa y el objeto están en el mismo plano. En este método no hay el problema de viñeteo.

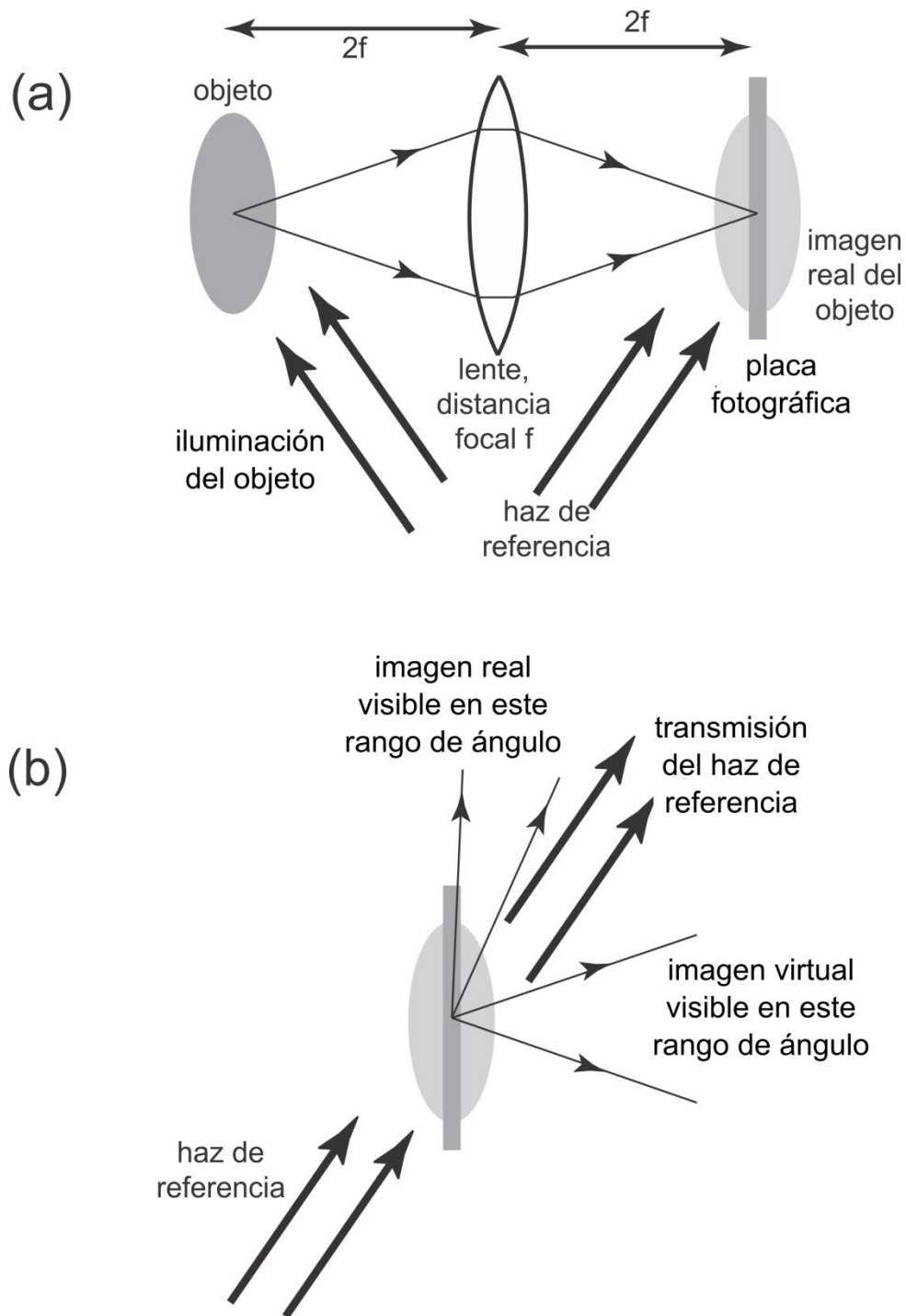


Figura 12.5: Formación de un holograma de luz blanca utilizando una lente.

12.3 Interferometría Holográfica

En una misma placa fotográfica se pueden grabar 2 hologramas con la misma referencia (Collier *et al*, 1971; Hariharan, 1985). La intensidad grabada por la placa será la suma de las intensidades de los dos hologramas, es decir, si los dos hologramas son:

$$\begin{aligned} I_1 &= o_1^2 + r^2 + o_1 r e^{i(\phi_1 - \phi_r)} + o_1 r e^{i(\phi_r - \phi_1)}, \\ I_2 &= o_2^2 + r^2 + o_2 r e^{i(\phi_2 - \phi_r)} + o_2 r e^{i(\phi_r - \phi_2)}, \end{aligned} \quad (12.7)$$

donde, por brevedad, no hemos escrito la dependencia con la posición.

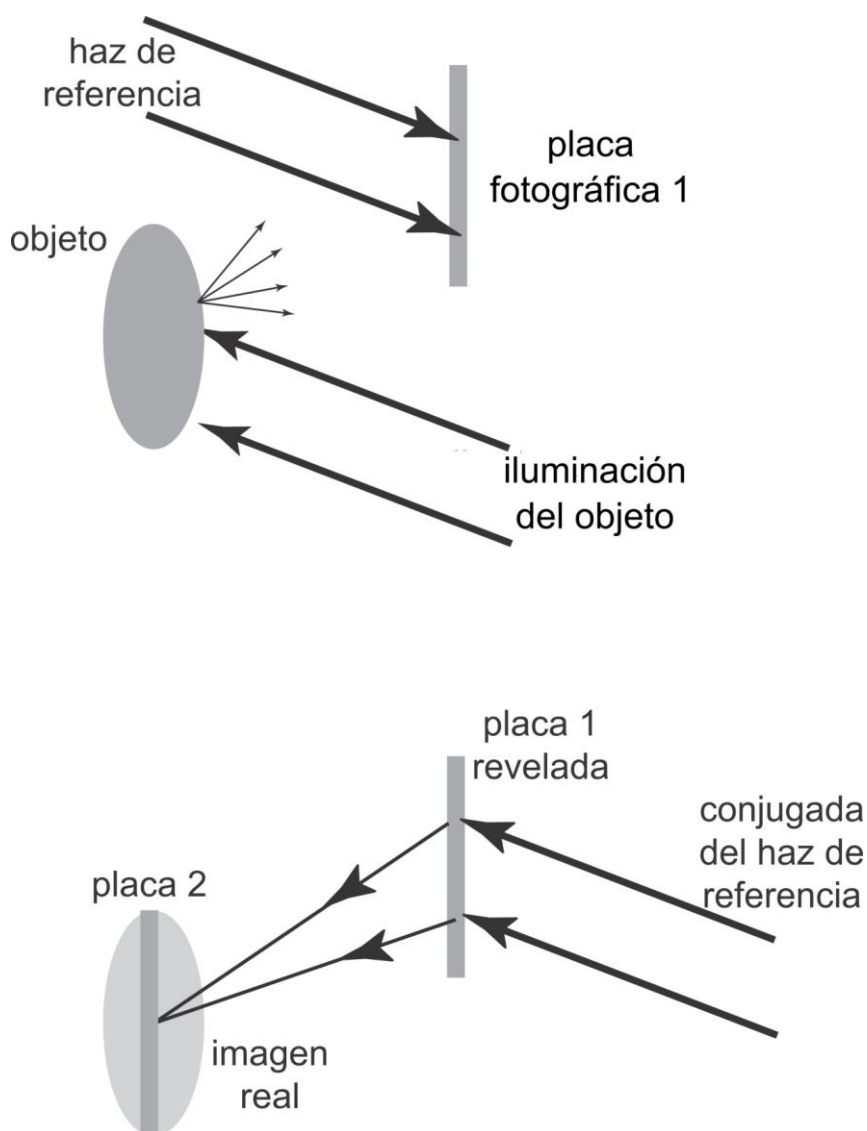


Figura 12.6: El método "amo-esclavo" para formar un holograma de luz blanca.

La intensidad total grabada en la placa es:

$$I = I_1 + I_2 = o_1^2 + o_2^2 + 2r^2 + (o_1 e^{i\phi_1} + o_2 e^{i\phi_2}) r e^{-i\phi_r} + (o_1 e^{-i\phi_1} + o_2 e^{-i\phi_2}) r e^{i\phi_r}. \quad (12.8)$$

La transmisión de amplitud de la placa revelada es, entonces:

$$T = \underbrace{t_0 r e^{i\phi_r}}_I - \underbrace{\gamma \tau o_1^2 r e^{i\phi_r} - \gamma \tau o_2^2 r e^{i\phi_r}}_{II} - \underbrace{2\gamma \tau r^2 r e^{i\phi_r}}_{III} + \underbrace{\gamma \tau (o_1 e^{i\phi_1} + o_2 e^{i\phi_2}) r^2}_{IV} + \underbrace{\gamma \tau (o_1 e^{-i\phi_1} + o_2 e^{-i\phi_2}) r^2 e^{i2\phi_r}}_V. \quad (12.9)$$

Aquí, en las imágenes real y virtual, los términos *IV* and *V*, respectivamente, tenemos la suma de las ondas (amplitud y fase) de los dos objetos, es decir, la interferencia entre las dos ondas, en 3 dimensiones, para cada punto de los dos objetos.

Un ejemplo de cómo se puede hacer esto será iluminar un objeto con dos pulsos de luz, uno después de otro, y utilizar los mismos pulsos como onda de referencia. Cualquier cambio en el objeto entre la iluminación con los dos pulsos dará franjas de interferencia en la imagen final que se reconstruye con la placa revelada.

Otro ejemplo será el de interferometría en tiempo real, y en la Figura 12.7 se muestra cómo se puede lograr. Aquí se graba un holograma en la forma normal, y la placa revelada se regresa a su lugar. Luego, se ilumina la placa con la referencia y el objeto con el haz utilizado para grabar el holograma. Esto produce la imagen virtual del holograma superpuesta sobre el objeto original. Cualquier cambio en la posición del objeto dará una variación entre el campo reflejado por el objeto y el campo de la imagen virtual del holograma, y estas variaciones producirán franjas de interferencia. Un problema con este método es que el holograma tiene que estar posicionado exactamente en la misma posición en que fue grabado. Un error en el posicionamiento de solo una longitud de onda dará franjas en la imagen final. Además, el proceso de revelación de la placa puede causar un cambio de tamaño en la placa y esto también dará franjas, aunque el objeto no ha sufrido ningún cambio.

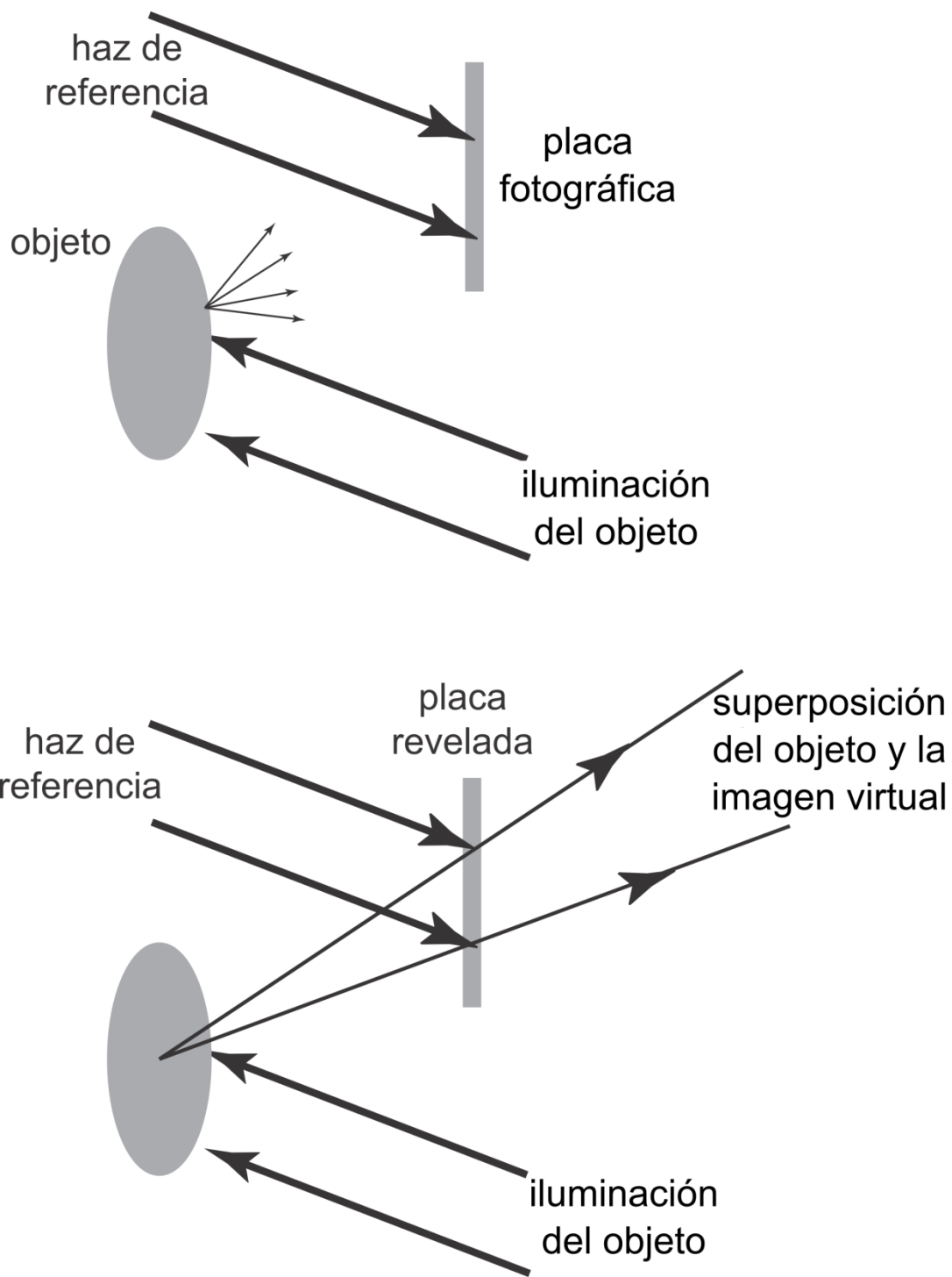


Figura 12.7: Interferometría holográfica en tiempo real.

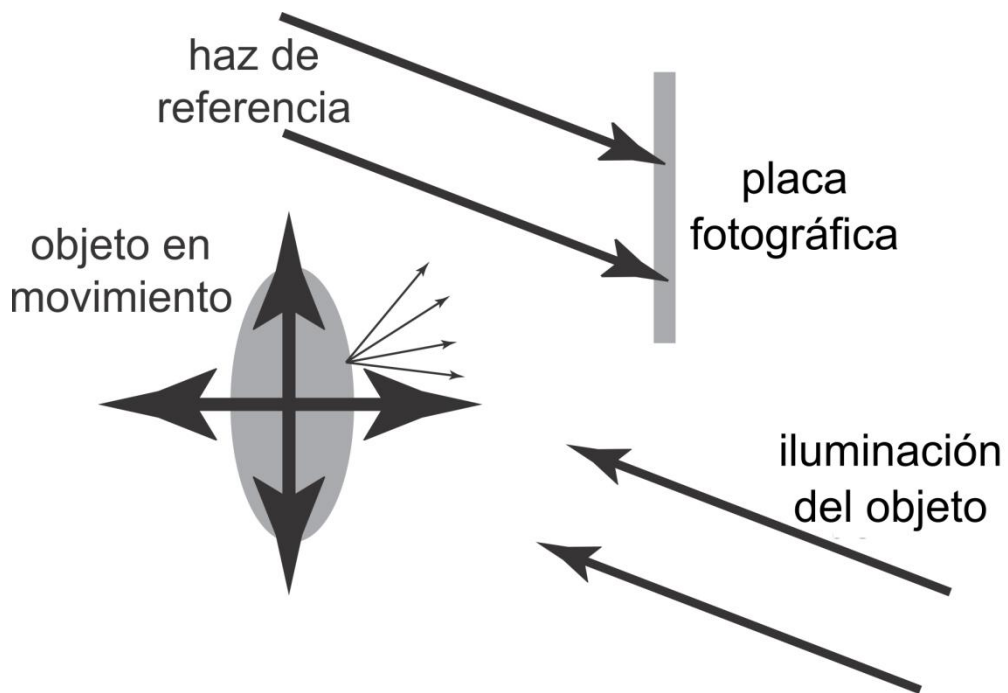


Figura 12.8: Interferencia holográfica promediada en el tiempo.

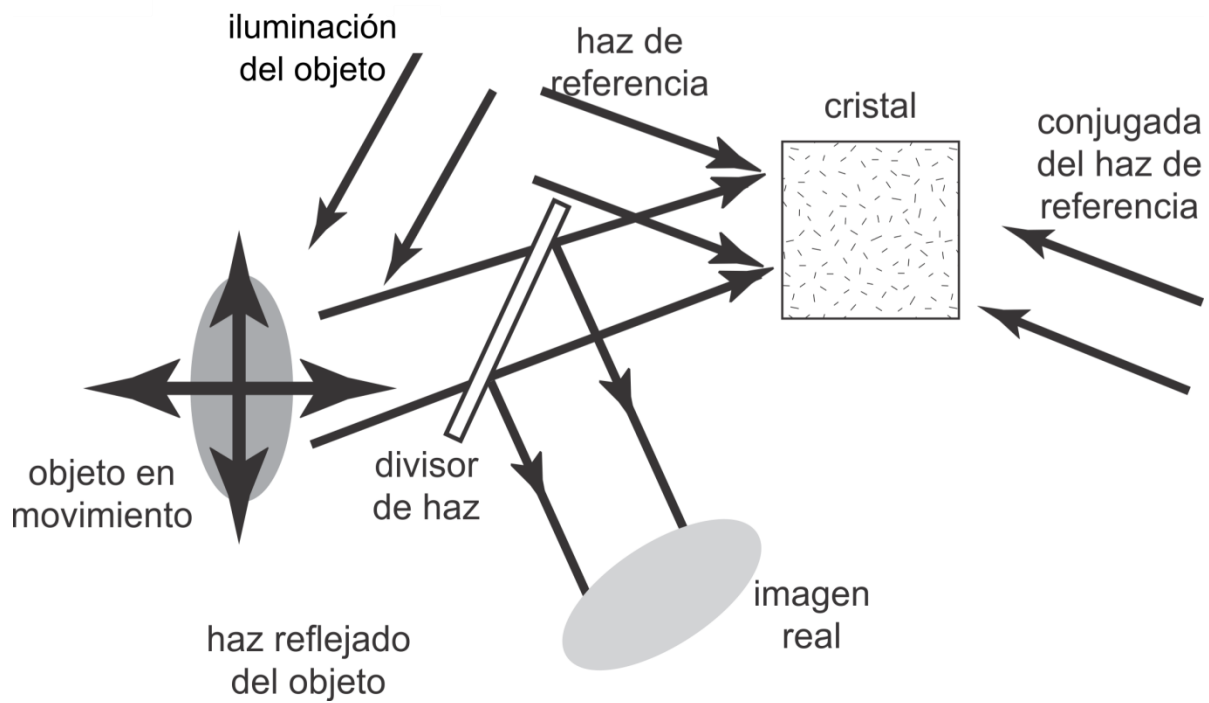


Figura 12.9: Interferencia holográfica con cristales fotorrefractivos.

También se han hecho hologramas de interferencia promediada en el tiempo. El esquema para esta técnica se muestra en la Figura 12.8. Se graba el holograma mientras el objeto está en movimiento. La intensidad que llega a la placa, que contribuye a la imagen virtual es:

$$I = \int_0^{\tau} o(x, y) r(x, y) e^{i(\phi_o(t) - \phi_r)} dt \approx o(x, y) r(x, y) \int_0^{\tau} e^{i(\phi_o(t) - \phi_r)} dt, \quad (12.10)$$

suponiendo que las amplitudes de los haces del objeto y referencia no cambian mientras se graba el holograma. Esto significa que la intensidad final depende del movimiento del objeto, y partes del objeto que tienen el mismo movimiento tendrán la misma intensidad final, es decir, habrán franjas de interferencia. Pero no se necesita una placa fotográfica para hacer esto; se puede hacer en cristales fotorrefractivos (e.g. BSO, BTO, etc.) (Troth y Dainty, 1991). Estos cristales muestran una variación en su índice de refracción dependiendo de la intensidad incidente. Utilizando la geometría mostrada en la Figura 12.9, la intensidad incidente en el cristal es de la forma que ya vimos para los hologramas normales. Ésta distribución de intensidad causa una distribución del índice de refracción adentro del cristal que actúa para variar la transmisión del haz de reconstrucción. Iluminando el cristal con la conjugada del haz de referencia produce una imagen real del objeto, que se puede separar del objeto utilizando un divisor de haz, como se muestra en la Figura 12.9. Estos cristales tienen un tiempo de respuesta que puede ser del orden de milisegundos, que representa el tiempo necesario para que el índice de refracción responda a un cambio en la intensidad incidente. Entonces, si el movimiento del objeto es más rápido que este tiempo de respuesta, el cristal integrará el movimiento y tendremos franjas de interferencia promediadas en el tiempo superpuestas sobre la imagen real del objeto. Si el movimiento es más lento que el tiempo de respuesta, sólo se vería el objeto en diferentes posiciones, no habrán franjas de interferencia. La ventaja con este método es que no hay que revelar placas, con los problemas de tener que regresarlas a la misma posición que en el proceso de grabado; la desventaja es que estos cristales suelen ser muy caros y pequeños por las dificultades involucradas en el proceso de crecerlos.

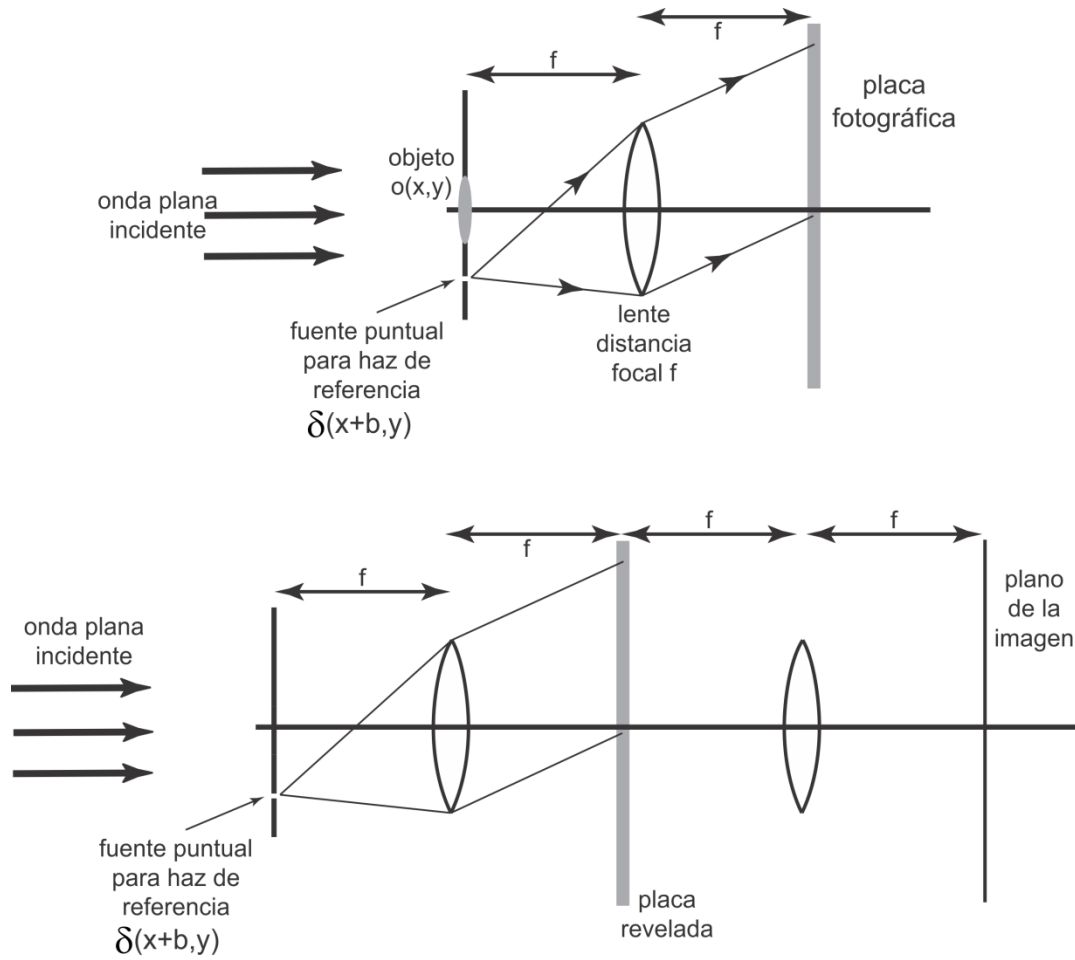


Figura 12.10: Grabación y reconstrucción de un holograma de la transformada de Fourier.

12.4 Hologramas de la Transformada de Fourier

Otra forma de grabar información es a través de la transformada de Fourier de un objeto (Collier *et al*, 1971). La Figura 12.10 muestra las geometrías de grabación y de reconstrucción en este método, utilizando las propiedades de lentes para producir la transformada de Fourier de un objeto. Escribiendo la transmisión de amplitud del objeto, que está centrado en el eje óptico, como $o(x, y)$ y la fuente puntual de referencia, que está fuera del eje óptico, como $\delta(x + b, y)$, la amplitud que llega a la placa es la suma de las transformadas de Fourier de estas dos amplitudes:

$$A(x_p, y_p) = \left(O(u, v) + e^{-i2\pi ub} \right)_{u=\frac{x_p}{\lambda f}, v=\frac{y_p}{\lambda f}} \quad (12.11)$$

donde $\mathfrak{S}(o(x, y)) = O(u, v)$ y hemos utilizado el teorema de corrimiento para la transformada de Fourier de la función de $\delta(x + b, y)$. En la ecuación (12.11) hemos notado explícitamente el escalamiento en la Transformada de Fourier de la lente y que relaciona los coordenadas del plano de la placa con las frecuencias espaciales; en las ecuaciones abajo no escribiremos este escalamiento explícitamente, para hacer las ecuaciones más claras. Noten que la transformada de Fourier de la $\delta(x + b, y)$ nos da una onda plana de referencia sobre la placa.

La intensidad grabada en la placa es el módulo cuadrado de la ecuación (12.11):

$$I(x_p, y_p) = |O(u, v)|^2 + 1 + O(u, v)e^{i2\pi ub} + O^*(u, v)e^{-i2\pi ub}. \quad (12.12)$$

La transmisión de la placa revelada será proporcional a esta intensidad. Entonces, iluminando con la onda plana generada por la fuente puntual de referencia original, $e^{-i2\pi ub}$, el campo transmitido por la placa será:

$$T(x_p, y_p) \propto |O(u, v)|^2 e^{-i2\pi ub} + e^{-i2\pi ub} + O(u, v) + O^*(u, v)e^{-i4\pi ub}, \quad (12.13)$$

y la imagen final es la transformada de Fourier de esta transmisión de amplitud:

$$A(x_i, y_i) \propto \underbrace{o(x + b, y) * o(x + b, y)}_I + \underbrace{\delta(x + b, y)}_{II} + \underbrace{o(x, y)}_{III} + \underbrace{o^*(x + 2b, y)}_{IV}. \quad (12.14)$$

Los términos de esta expresión representan:

- I. Esto es la autocorrelación del objeto original centrado en $x = -b$, la posición del punto de referencia original.
- II. Esto es la imagen de la fuente puntual de referencia, en la misma posición que el original.
- III. Esto es la imagen del objeto, en la misma posición que el original.
- IV. Esto es una imagen del objeto original, pero conjugada y en la posición $x = -2b$.

La Figura 12.11 muestra un ejemplo de un objeto y su imagen correspondiente utilizando este método de holografía. En general, para objetos razonablemente complicados (como, por ejemplo, letras) la autocorrelación de un objeto cae rápidamente de su máximo a un valor casi cero, entonces muchas veces la podemos aproximar como una función de $\delta(\quad)$. Se presenta un ejemplo numérico en las Figuras 12.12, 12.13 y 12.14, en las cuales se muestran el plano del objeto,

el plano de la imagen y el plano de la imagen con un máximo de intensidad adecuado para ver la estructura más fina, respectivamente. En la Figura 12.14 la imagen en blanco es la auto-correlación del objeto. La imagen en gris a la derecha de la auto-correlación corresponde a la imagen directa del objeto (en la misma posición que el objeto original). La imagen en gris a la izquierda es la imagen conjugada del objeto en la posición $x = -2b$, con el punto de referencia original en $x = -b$, $b = 80$ y el cero de posición en la posición (256, 256) en la figura.

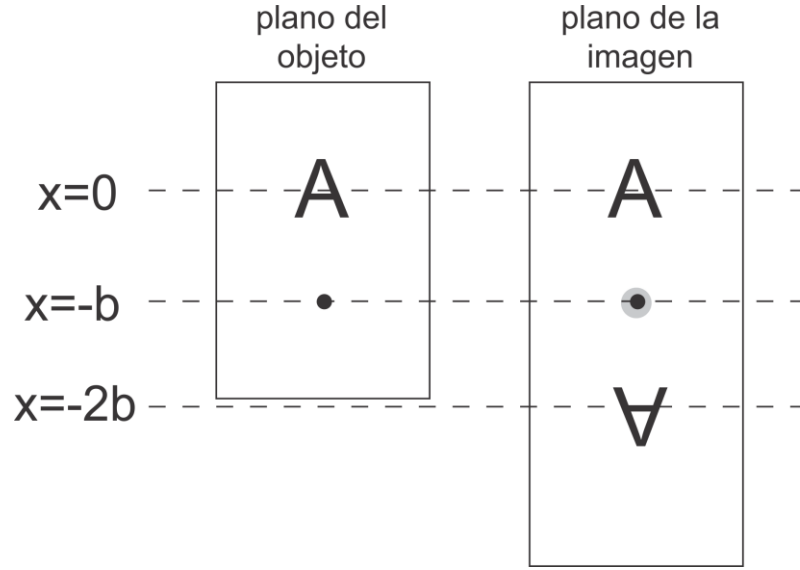


Figura 12.11: Un ejemplo de un objeto y su imagen reconstruida con un holograma de la transformada de Fourier.

12.5 Reconocimiento de patrones

Grabamos un holograma como se muestra en la Figura 12.15 (Goodman, 1996; Collier et al, 1971). Aquí utilizamos un objeto $o_2(x + b, y)$ como la onda de referencia. La amplitud que llega a la placa es:

$$A(x_p, y_p) = O_1(u, v) + O_2(u, v)e^{-i2\pi ub}, \quad (12.15)$$

y la intensidad grabada en la placa es:

$$I(x_p, y_p) = |O_1(u, v)|^2 + |O_2(u, v)|^2 + O_1(u, v)O_2^*(u, v)e^{i2\pi ub} + O_1^*(u, v)O_2(u, v)e^{-i2\pi ub}. \quad (12.16)$$

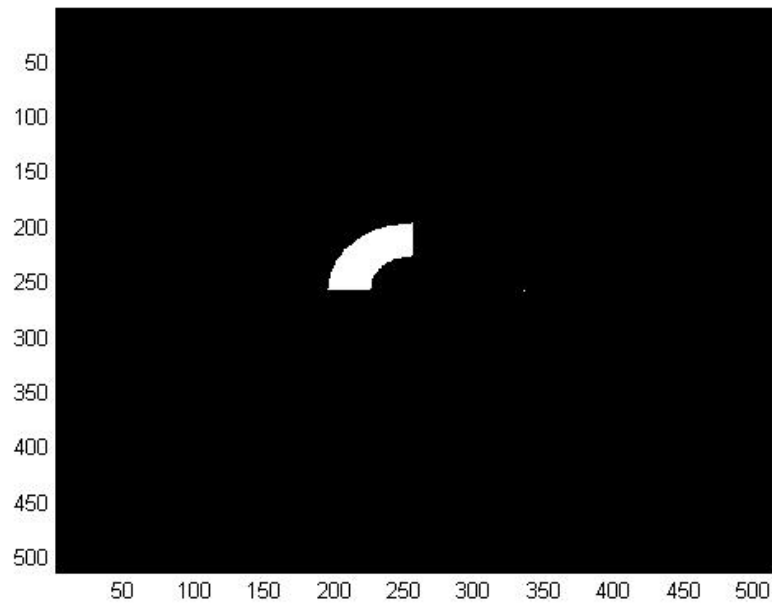


Figura 12.12: El plano del objeto para el holograma de la transformada de Fourier. Se puede ver el punto de referencia a la derecha del objeto.

(HolografiaTransformadaFourier.m)

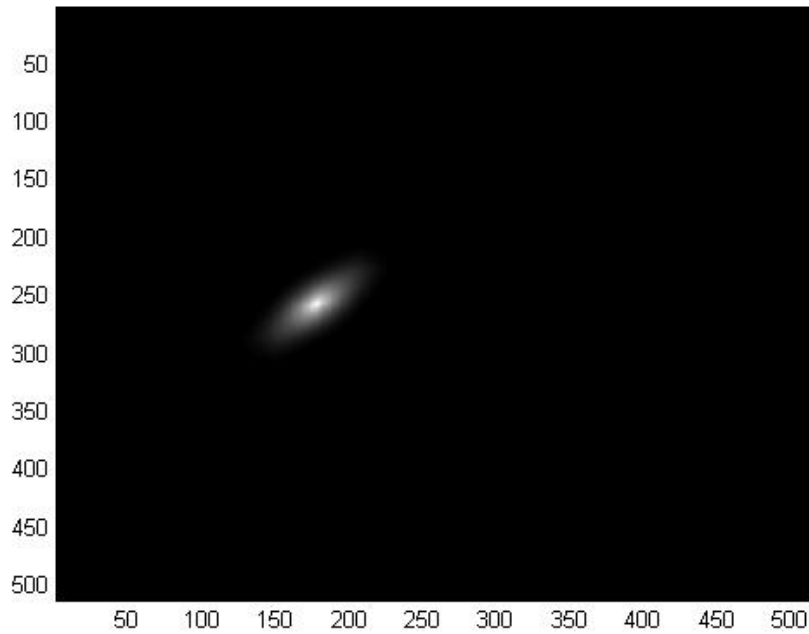


Figura 12.13: La intensidad en el plano de la imagen. Esta imagen está al revés comparada con el objeto, y la imagen es dominada por la auto-correlación del objeto, en la posición correspondiente a la posición del punto de referencia.

(HolografiaTransformadaFourier.m)

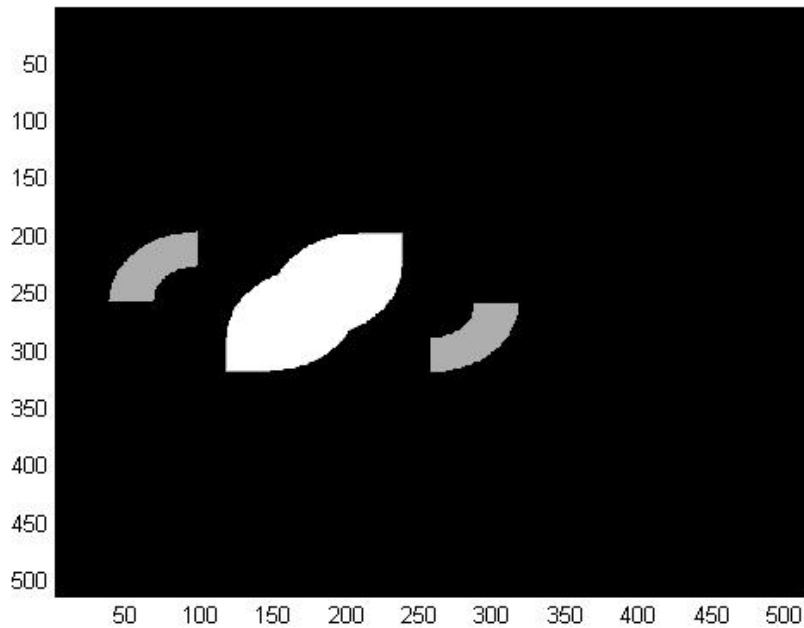


Figura 12.14: La imagen con una reducción en la intensidad máxima graficada. En esta figura el objeto en blanco es la auto-correlación del objeto. La imagen en gris a la derecha de la auto-correlación corresponde a la imagen directa del objeto (en la misma posición que el objeto original). La imagen en gris a la izquierda es la imagen conjugada del objeto en la posición $x = -2b$, con el punto de referencia original en $x = -b$ y el cero de posición en la posición (256, 256) en la figuras.

(HolografiaTransformadaFourier.m)

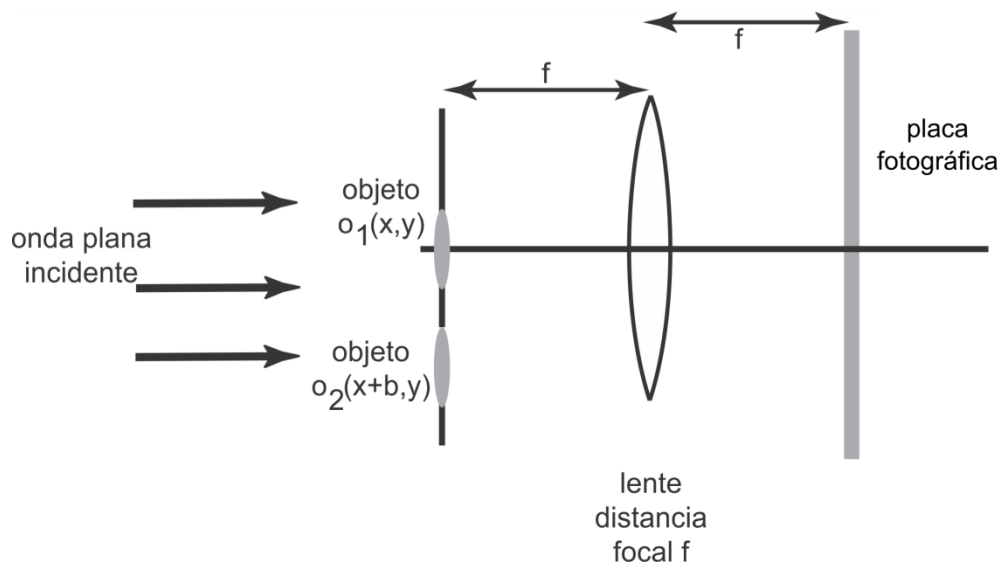


Figura 12.15: Grabación del holograma utilizado para reconocimiento de patrones.

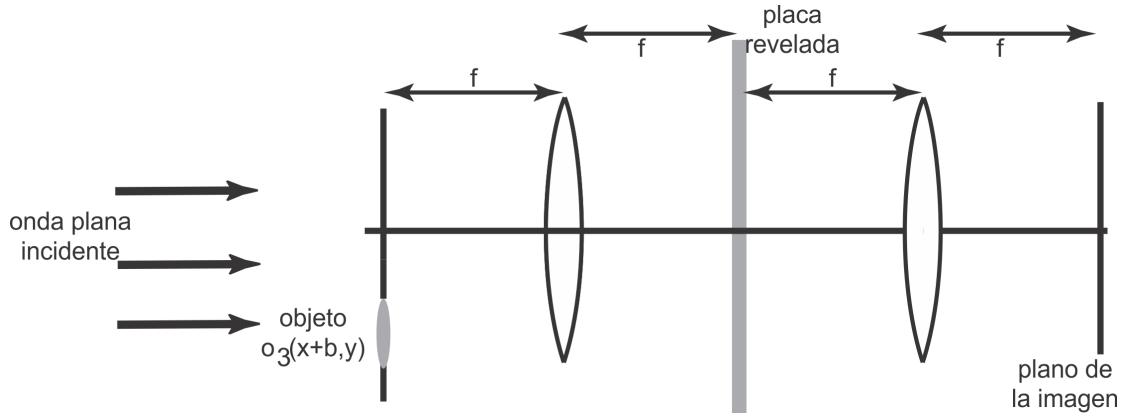


Figura 12.16: Sistema de filtraje espacial utilizado para reconocimiento de patrones.

Ahora, esta placa revelada se coloca en el sistema de la Figura 12.16, que es un sistema de filtraje espacial con la placa holográfica revelada como el filtro, y se ilumina con un objeto $o_3(x + b, y)$. La transmisión de amplitud de la placa es:

$$\begin{aligned}
 T(x_p, y_p) &\propto O_3(u, v) e^{-i2\pi ub} I(x_p, y_p) \\
 &= O_3(u, v) |O_1(u, v)|^2 e^{-i2\pi ub} + O_3(u, v) |O_2(u, v)|^2 e^{-i2\pi ub} \\
 &\quad + O_1(u, v) O_2^*(u, v) O_3(u, v) + O_1^*(u, v) O_2(u, v) O_3(u, v) e^{-i4\pi ub},
 \end{aligned} \tag{12.17}$$

y la imagen final es la transformada de Fourier de esta expresión (recuerden que $\mathfrak{F}(O_1^* O_2) = o_1 * o_2$, y $\mathfrak{F}(O_1 O_2) = o_1 \otimes o_2$):

$$\begin{aligned}
 A(x_i, y_i) &\propto \underbrace{o_3(x + b, y) \otimes \{o_1(x + b, y) * o_1(x + b, y)\}}_I \\
 &\quad + \underbrace{o_3(x + b, y) \otimes \{o_2(x + b, y) * o_2(x + b, y)\}}_{II} \\
 &\quad + \underbrace{o_1(x, y) \otimes \{o_3(x, y) * o_2(x, y)\}}_{III} \\
 &\quad + \underbrace{o_1(x + 2b, y) \otimes \{o_2(x + 2b, y) \otimes o_3(x + 2b, y)\}}_{IV}.
 \end{aligned} \tag{12.18}$$

Aquí, los términos *I* y *II* aparecen en $x = -b$, y , si los objetos $o_1(x, y)$ y $o_2(x, y)$ son lo suficientemente complicados, las autocorrelaciones que están en estos términos se pueden aproximar como funciones $\delta(\quad)$. En este caso los primeros dos términos dan replicas del objeto $o_3(x, y)$ en la posición $x = -b$, independientemente de si los tres objetos son lo mismo, similares o diferentes. El término *III* aparece en la posición $x = 0$, y el *IV* en $x = -2b$, y dependen de la correlación y la convolución, respectivamente, entre los objetos $o_2(x, y)$ y $o_3(x, y)$. Si los objetos son lo suficientemente diferentes, estas dos operaciones darán la respuesta 0 y no habrá imágenes en $x = 0$ ni en $x = -2b$. Pero, si $o_3(x, y) = o_2(x, y)$, la correlación y la convolución tendrán respuestas que no son cero y en las dos posiciones aparecerán imágenes del objeto $o_1(x, y)$. En este caso, si la autoconvolución y la autocorrelación de $o_3(x, y)$ son funciones con un pico grande, como una función $\delta(\quad)$ las imágenes *III* y *IV* serán replicas de $o_1(x, y)$, y si no, las imágenes serán versiones borrosas de $o_1(x, y)$. Sin embargo, recuerden que, para la convolución, hay que invertir una de las imágenes, entonces si el objeto no es simétrico (por ejemplo, la letra O es simétrica, pero la letra L no lo es), la convolución tendrá un valor más pequeño que la correlación. Entonces, aquí tenemos un sistema que podemos utilizar para identificar cuando un objeto desconocido, $o_3(x, y)$ es igual a un objeto conocido $o_2(x, y)$, es decir, tenemos reconocimiento de patrones.

Otra cosa que podemos hacer es detectar cuando un objeto desconocido es parte de un objeto conocido. Por ejemplo, tomamos el caso que acabamos de ver, pero con:

$$o_1(x, y) = o(x) = \sum_j c_j(x - x_j), \quad (12.19)$$

es decir, una colección de caracteres separados en la dirección x , y :

$$o_2(x, y) = \delta(x + b, y). \quad (12.20)$$

La intensidad grabada en la placa es:

$$I(x_p, y_p) = |O(u, v)|^2 + 1 + O(u, v)e^{i2\pi ub} + O^*(u, v)e^{-i2\pi ub}. \quad (12.21)$$

Ahora, ¿qué pasa si iluminamos sólo con el elemento (carácter) $c_l(x - x_l)$ en el arreglo de filtraje espacial (la Figura 12.16)?

El campo que llega a la placa revelada es:

$$A(x_p, y_p) = C_l(u, v) e^{i2\pi u x_l}, \quad (12.22)$$

y el campo transmitido en la placa es:

$$\begin{aligned} T(x_p, y_p) = & C_l(u, v) |O(u, v)|^2 e^{-i2\pi u x_l} + C_l(u, v) e^{-i2\pi u x_l} \\ & + C_l(u, v) O(u, v) e^{i2\pi u(x_l + b)} + C_l(u, v) O^*(u, v) e^{i2\pi u(x_l - b)}. \end{aligned} \quad (12.23)$$

El campo que llega al plano de la imagen final es la transformada de Fourier de este campo:

$$\begin{aligned} A(x_i, y_i) = & \underbrace{c_l(x - x_l) \otimes \{o(x - x_l) * o(x - x_l)\}}_I + \underbrace{c_l(x - x_l)}_{II} \\ & + \underbrace{c_l(x - x_l - b) \otimes o(x - x_l - b)}_{III} \\ & + \underbrace{c_l(x - x_l + b) * o(x - x_l + b)}_{IV}. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Vamos a analizar cada uno de estos términos. La Figura 12.17 muestra las posiciones de las diferentes imágenes:

- I. Centrado en $x = x_l$ esto es la autocorrelación del objeto total convuelto con el carácter c_l . Si la autocorrelación de $o(x)$ es una función que parece a un $\delta(\)$ (sólo tiene un valor cuando las dos funciones están superpuestas), este término es una copia del carácter c_l en la posición $x = x_l$, es decir, en la posición original de este carácter.
- II. Este término es una imagen directa del haz de reconstrucción. Otra vez es una replica del carácter c_l en la posición $x = x_l$.
- III. Esto es la convolución de c_l con todos los otros caracteres, centrada en $x = x_l + b$. Para la convolución hay que voltear una de las funciones, entonces en general para funciones que no son simétricas y son razonablemente complicadas (como letras), no dará un pico muy alto. Suponemos que los

diferentes caracteres son lo suficientemente diferentes para que no haya contribución a la imagen de las convoluciones entre c_l y los otros caracteres.

- IV. Esto es la correlación entre c_l y todos los otros caracteres. Para caracteres suficientemente diferentes, éste término dará un pico alto cuando el carácter c_l está correlacionado con sí mismo, es decir, cuando la diferencia de posición entre $c_l(x - x_l + b)$ y $o(x - x_l + b)$ es $\Delta x = x_l$, es decir, en $x = -b$, en la posición de la función de $\delta(\)$ original. Suponemos que la transmisión de los caracteres es real.

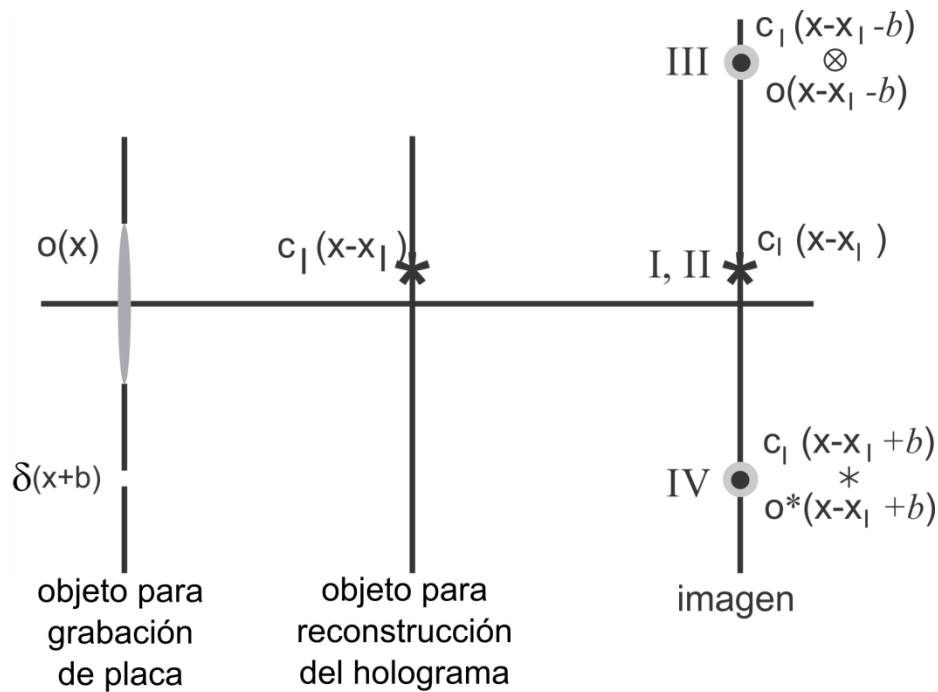


Figura 12.17: Izquierda: el plano del objeto para la grabación de la placa; centro: el objeto utilizado para la reconstrucción; y derecha: la imagen final de la reconstrucción.

Entonces tendremos un pico de luz en la posición $x = -b$ si el carácter presentado para la reconstrucción es uno de los caracteres originales, y no habrá este pico si el carácter es diferente. Aquí, la respuesta es la misma para todos los caracteres, sabemos que el carácter presentado es uno de los originales pero no sabemos cuál es.

Pero ¿qué pasa si, en la reconstrucción de la misma placa revelada, utilizamos el carácter $c_l(x)$, es decir, el mismo carácter, pero ubicado en el eje óptico del sistema? La placa es iluminada por el campo $C_l(u, v)$, y haciendo el mismo análisis para la imagen final, tenemos que:

$$\begin{aligned}
A(x_i, y_i) = & \underbrace{c_l(x) \otimes \{o(x + x_l) * o(x + x_l)\}}_I + \underbrace{c_l(x)}_{II} \\
& + \underbrace{c_l(x - b) \otimes o(x - b)}_{III} + \underbrace{c_l(x + b) * o(x + b)}_{IV}.
\end{aligned}
\tag{12.25}$$

Ahora, el término *IV* tendrá un pico alto cuando $x + b = -x_l$ o $x = -b - x_l$, es decir, la posición del pico de correlación permite identificar el carácter del conjunto original. Se muestra un ejemplo calculado de este efecto en las Figuras 12.18 y 12.19. ([HolografiaReconocimientoPatrones.m](#))

12.5.1 Método de Van der Lugt

En lugar de presentar los caracteres uno por uno en el sistema de reconocimiento, se puede hacer por “página”. La Figura 12.20 muestra el principio de este método. El objeto original contiene letras, y la separación entre las letras debe ser igual o mayor al tamaño de la página para obtener una separación de las señales para cada letra en la imagen final. Si la página desconocida se pone en la página correspondiente a la letra A, como se muestra en la figura, la posición de la imagen de la fuente puntual de referencia en la imagen, $x = -b$, corresponde a la posición de la letra A en el objeto original. Con el mismo razonamiento que en la sección anterior, la correlación entre el objeto original y la página desconocida dará una serie de picos de correlación en las posiciones alrededor de la posición $x = -b$ dependiendo de la letra y su posición, como se muestra en la Figura 12.18(c). Para cada letra habrá un pico de correlación en las posiciones:

$$\begin{aligned}
x &= x' - x_l - b, \\
y &= y' - y_l,
\end{aligned}
\tag{12.26}$$

donde x e y son la posición del pico de correlación, x' e y' son la posición de la letra en la página de prueba 12.18(b) relativa a la primera letra A, y x_l e y_l son la posición de las letras del objeto original relativo a la letra A. Esto permite determinar la distribución de cada letra en la página desconocida.

Hay varios problemas con todas estas técnicas: el valor de la correlación de un carácter y otra copia del mismo carácter depende de la escala, orientación y estilo de escritura de esta copia, si no son iguales al original puede dar una correlación de un valor de cerca de 0. También caracteres que son similares pueden dar identificaciones falsas, e.g. se pueden confundir las letras O y Q, si el valor de la correlación es suficientemente alta.

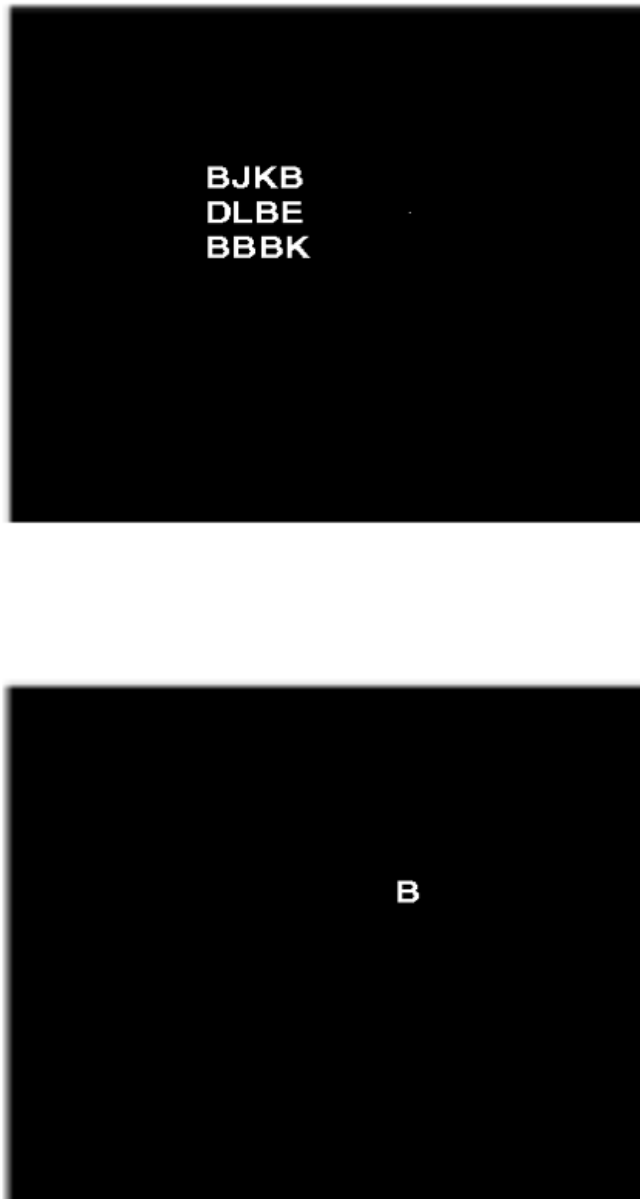


Figura 12.18: Reconocimiento de patrones. Arriba: el objeto original, que es una arreglo de letras a la izquierda, y un punto de referencia a la derecha. Abajo: el objeto utilizado para la reconstrucción, que en una letra "B" en la posición del punto de referencia original. ([HolografiaReconocimientoPatrones.m](#))

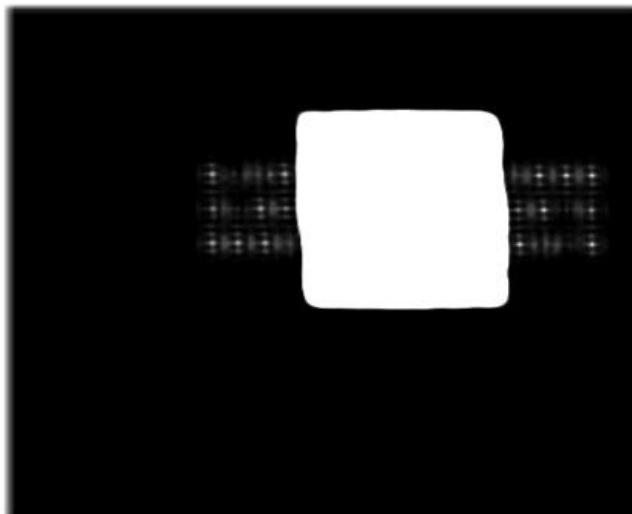
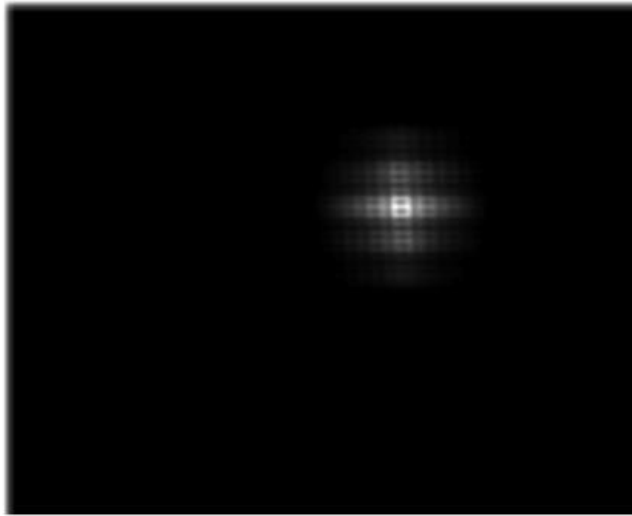


Figura 12.19: La imagen final para reconocimiento de patrones. Arriba: la imagen mostrando la correlación del objeto y el objeto de reconstrucción (términos I y II de la ecuación (12.25)). Abajo: Saturando la intensidad se encuentran los términos de convolución (término III de la ecuación (12.25), a la izquierda), y la correlación (término IV de la ecuación (12.25), a la derecha) entre "B" y el objeto original. Se ve que el término III está derecho, mientras el IV está invertido.

(HolografiaReconocimientoPatrones.m)

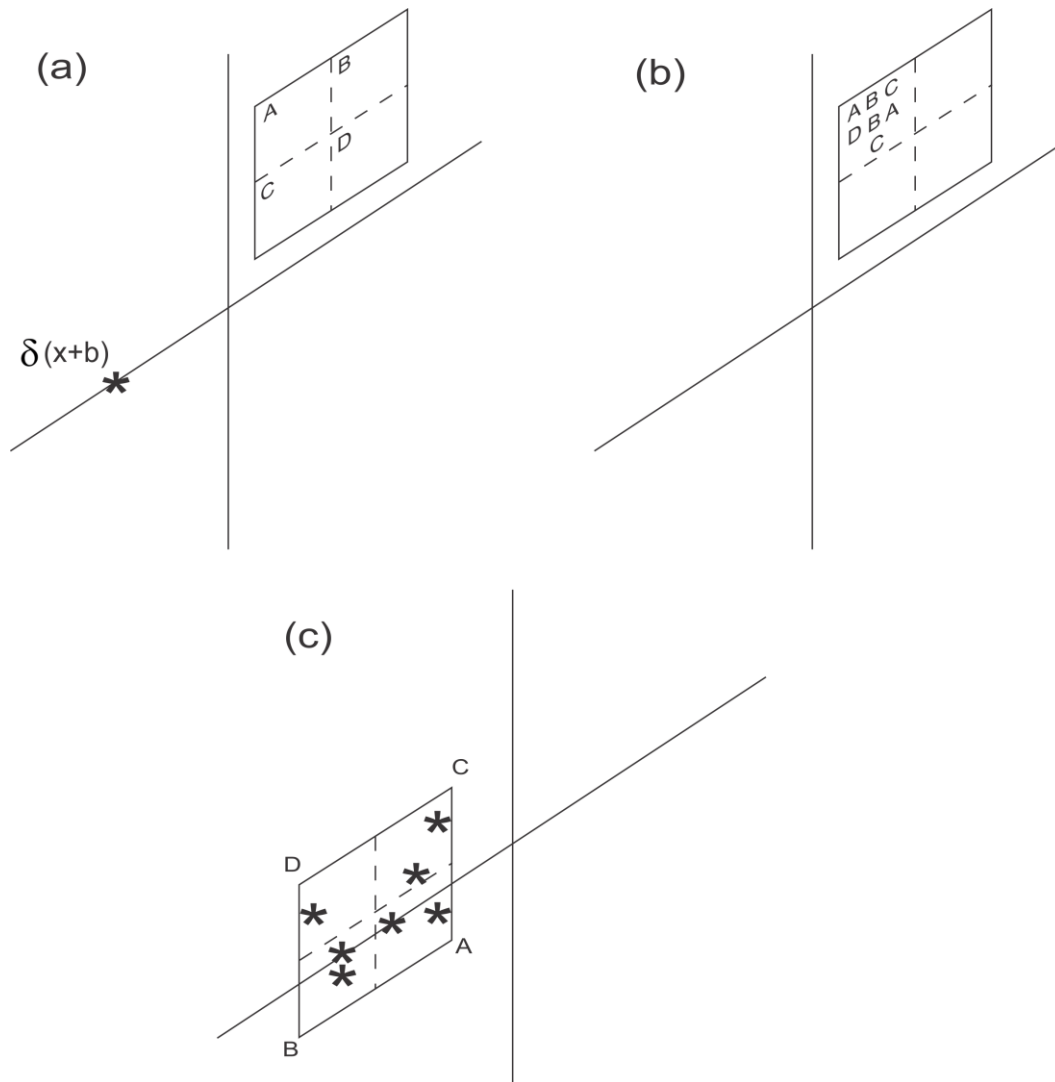


Figura 12.20: El método de Van der Lugt. (a) objeto original, (b) objeto desconocido, (c) imagen final.

12.6 La resolución del medio grabador

Una limitación a las técnicas de holografía es la resolución del medio que se utiliza para grabar el holograma (Collier *et al*, 1971). La Figura 12.21 muestra esta limitación; dos ondas que intersectan a un ángulo θ producen un patrón de interferencia con una separación entre franjas, d , dada por:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\theta)}. \quad (12.21)$$

Entonces, este patrón de interferencia se puede grabar en una placa, o en un cristal, que tiene una resolución (que puede grabar estructuras) de $1/d$ en líneas/mm. La resolución de placas fotográficas, por ejemplo, depende del tamaño del grano del material fotosensible que contiene la placa. Si el grano es grande, la resolución es menor, aunque el tiempo de exposición será menor; y si el grano es pequeño, la resolución es mayor, pero el tiempo de exposición aumenta. En el caso de los cristales fotorrefractivos, la resolución depende de la densidad de electrones libres en el cristal.

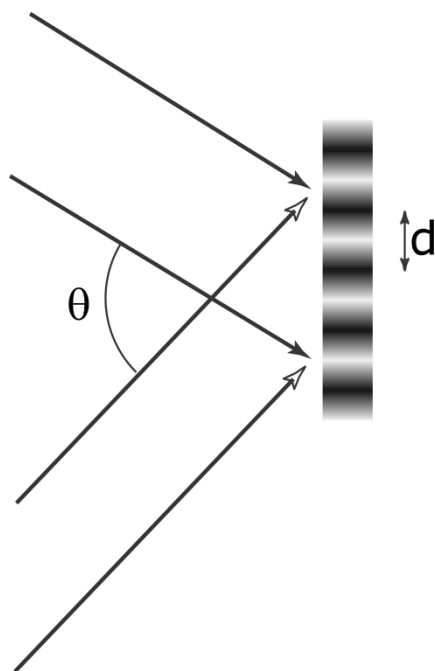


Figura 12.21: Interferencia entre dos haces.

Ahora ¿cómo afecta esto la resolución en holografía? Primeramente vemos el caso que se indica en la Figura 12.22, de holografía tradicional. Suponemos que la placa fotográfica es suficientemente grande como para interceptar todos los rayos que salen del objeto. Se puede ver que diferentes frecuencias espaciales en el objeto difractan la luz en diferentes ángulos; frecuencias espaciales más grandes difractan a ángulos mayores. Entonces la contribución de diferentes frecuencias espaciales llega a diferentes ángulos con respecto al haz de referencia, es decir, la separación entre las franjas de interferencia varía para diferentes frecuencias espaciales del objeto. Por la resolución de la placa fotográfica, hay un límite en el ángulo entre los dos haces que se puede grabar, entonces hay un máximo en la frecuencia espacial que se puede grabar en la placa. En la geometría de la Figura 12.22 la distribución de frecuencias espaciales que se puede grabar no es simétrica porque el haz de referencia llega a un ángulo no-normal. Es interesante notar que el tamaño de la placa también actúa como un límite en las frecuencias espaciales que se pueden

grabar; las frecuencias más altas difractan la luz a ángulos muy grandes que no intersectan la placa si ésta es más pequeña.

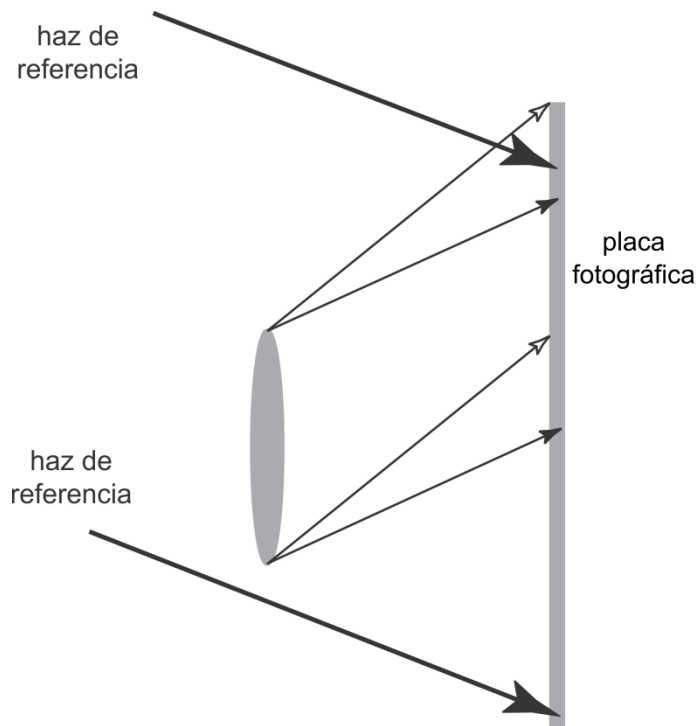


Figura 12.22: El efecto de la resolución de la placa fotográfica en holografía tradicional.

La situación es diferente para el caso de holografía de la transformada de Fourier, como se indica en la Figura 12.23. Por la geometría de esta forma de holografía, la luz difractada por una frecuencia espacial a un ángulo es enfocada en la placa fotográfica. Entonces, aquí el ángulo entre el haz de referencia y el haz del objeto, depende de la posición en el objeto. Como se puede ver en la Figura 12.23, si el objeto es más grande, los rayos de la orilla del objeto llegan a la placa a un ángulo más grande, y entonces producen franjas con una menor separación, es decir, el límite de resolución de la placa limita el tamaño del objeto, no las frecuencias espaciales que se pueden grabar. Otra vez, en este caso, si se reduce el tamaño de la placa fotográfica, se reduce la frecuencia espacial máxima que se puede grabar.

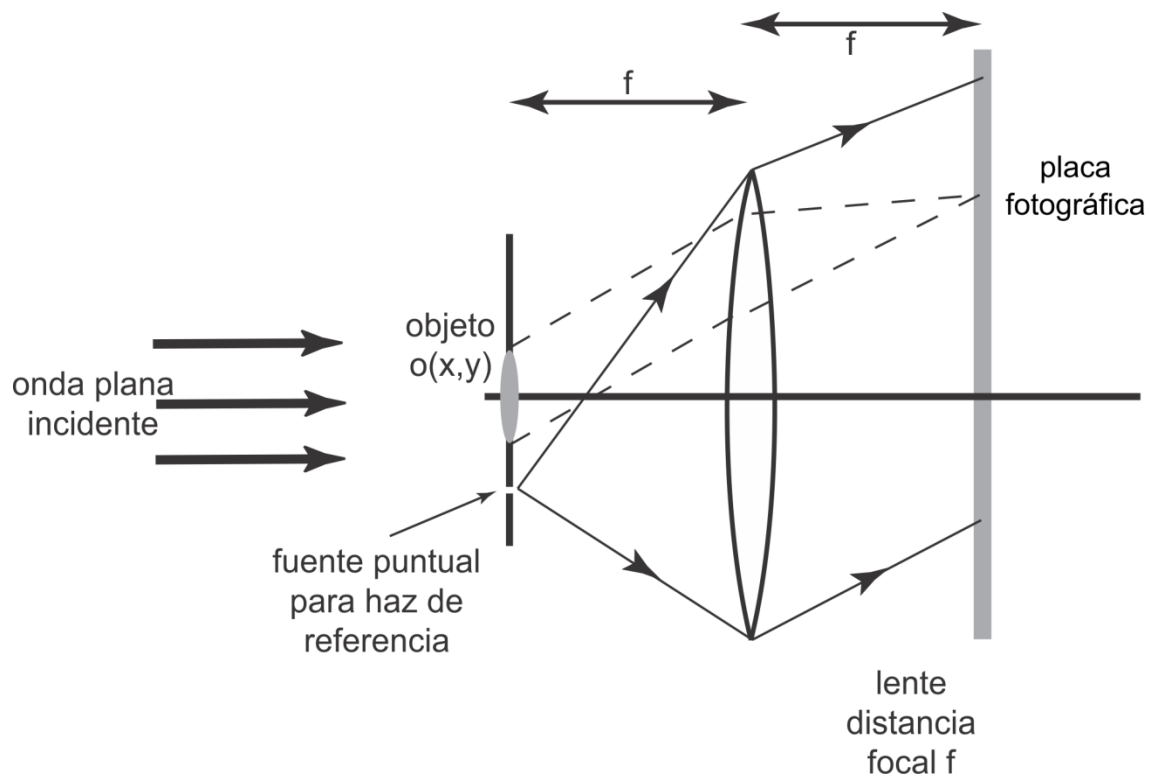


Figura 12.23: El efecto de la resolución de la placa fotográfica en la holografía de la Transformada de Fourier.

Capítulo 13

Teoría de Coherencia

Hasta ahora, hemos analizado dos casos extremos de la luz: luz completamente coherente y luz completamente incoherente. En general, cualquier fuente que utilizamos en el laboratorio no cabe en estas dos categorías: estamos en el rango de la coherencia parcial (Born y Wolf, 1980; Marathay, 1982). Este caso es el más general y es el que investigamos en este capítulo.

13.1 El experimento de Young

Vamos a analizar un experimento clásico y básico de la física: el experimento de Young, ver la Figura 13.1. El campo que llega al punto de observación P en tiempo t desde el agujero 1 es:

$$K_1 E_1(t - \tau_1), \quad (13.1)$$

donde K_1 es el factor que vimos en el capítulo 3 para la propagación de las ondas secundarias:

$$K_1 = -\frac{i}{\lambda}, \quad (13.2)$$

si suponemos ángulos de desviación pequeños. $E_1(t')$ es el campo en el agujero 1 en el tiempo t' , y τ_1 es el tiempo de viaje de la luz entre el agujero y el punto de observación, $\tau_1 = r_1/c$, entonces $t - \tau_1$ es el tiempo en el cual el campo que observamos en el punto P en el tiempo t estaba en el agujero 1. Así, la ecuación

13.1 es el campo que se propaga desde el agujero 1 para llegar a P en el tiempo t . De forma similar, para el agujero 2, la contribución en el punto P es:

$$K_2 E_2(t - \tau_2), \quad (13.3)$$

y el campo total en P es:

$$E_t(t) = K_1 E_1(t - \tau_1) + K_2 E_2(t - \tau_2). \quad (13.4)$$

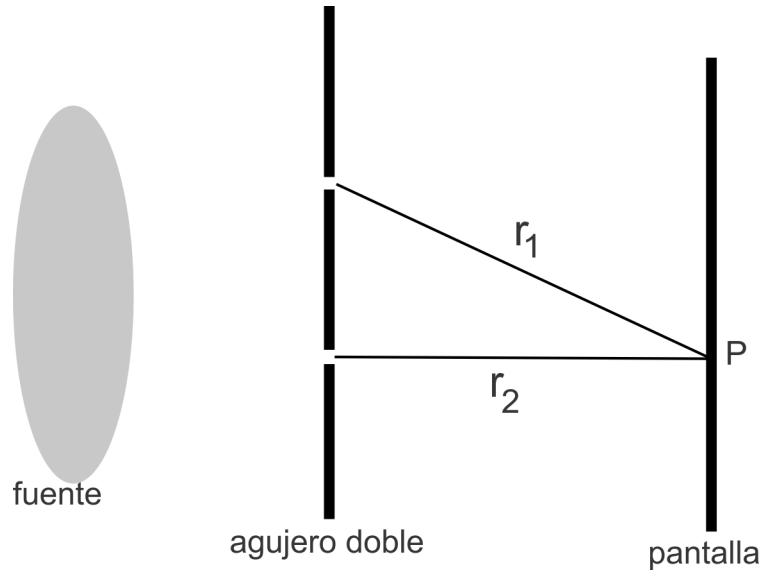


Figura 13.1: El experimento de Young.

La intensidad total es:

$$I(t) \propto \langle E_t(t) E_t^*(t) \rangle, \quad (13.5)$$

donde $\langle \rangle$ significa promedio en el tiempo. Sustituyendo la ecuación (13.4) en la ecuación (13.5), la intensidad se puede escribir como:

$$\begin{aligned} I(t) = & K_1 K_1^* \langle E_1(t - \tau_1) E_1^*(t - \tau_1) \rangle + K_2 K_2^* \langle E_2(t - \tau_2) E_2^*(t - \tau_2) \rangle \\ & + K_1 K_2^* \langle E_1(t - \tau_1) E_2^*(t - \tau_2) \rangle + K_2 K_1^* \langle E_2(t - \tau_2) E_1^*(t - \tau_1) \rangle, \end{aligned} \quad (13.6)$$

donde hemos reemplazado el signo de proporcionalidad con el signo de igualdad, porque siempre nos va a importar la intensidad relativa, y la constante de

proporcionalidad no nos afectará. Ahora, suponemos que los campos son estacionarios, es decir, que los promedios son constantes en el tiempo:

$$\begin{aligned}\langle E_1(t - \tau_1)E_1^*(t - \tau_1) \rangle &= \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle, \\ \langle E_2(t - \tau_2)E_2^*(t - \tau_2) \rangle &= \langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle, \\ \langle E_1(t - \tau_1)E_2^*(t - \tau_2) \rangle &= \langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle, \\ \langle E_2(t - \tau_2)E_1^*(t - \tau_1) \rangle &= \langle E_2(t)E_1^*(t + \tau) \rangle,\end{aligned}\tag{13.7}$$

donde $\tau = \tau_2 - \tau_1$. En estas ecuaciones podemos incluir la diferencia de tiempo $\tau_1 - \tau_2$ en el campo $E_2(\quad)$ y las conclusiones son las mismas. Sustituyendo las ecuaciones (13.7) en la ecuación (13.6), obtenemos:

$$\begin{aligned}I(t) &= |K_1|^2 \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle + |K_2|^2 \langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle \\ &\quad + K_1K_2^* \langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle + K_2K_1^* \langle E_2(t)E_1^*(t + \tau) \rangle.\end{aligned}\tag{13.8}$$

En los últimos dos términos de esta ecuación tenemos un número, más su conjugado complejo. Es fácil mostrar que esto es simplemente igual a dos veces la parte real del número original.

$$\begin{aligned}I(t) &= |K_1|^2 \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle + |K_2|^2 \langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}\{K_1K_2^* \langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle\},\end{aligned}\tag{13.9}$$

donde $\operatorname{Re}\{\quad\}$ indica que se toma la parte real de un número complejo.

Ahora, la función:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle,\tag{13.10}$$

tiene el nombre de **función de coherencia mutua** y es la función básica en la teoría de la coherencia. Los casos particulares:

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(t + \tau)E_1^*(t) \rangle,\tag{13.11}$$

$$\Gamma_{22}(\tau) = \langle E_2(t + \tau)E_2^*(t) \rangle,\tag{13.12}$$

representan la relación entre el campo en un punto pero en dos instantes de tiempo diferentes, es decir, es una medida de la **coherencia temporal**. Los casos:

$$\Gamma_{12}(0) = \langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle,\tag{13.13}$$

$$\Gamma_{21}(0) = \langle E_2(t)E_1^*(t) \rangle, \quad (13.14)$$

miden la relación entre los campos en dos posiciones diferentes pero en el mismo momento, es decir, es una medida de **coherencia espacial**.

Si bloqueamos el agujero 2 y sólo tenemos el agujero 1:

$$I(t) = |K_1|^2 \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle = |K_1|^2 \Gamma_{11}(0) = I_1, \quad (13.15)$$

que es la intensidad en el agujero 1. Si sólo tenemos el agujero 2:

$$I(t) = |K_2|^2 \langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle = |K_2|^2 \Gamma_{22}(0) = I_2, \quad (13.16)$$

entonces, se puede escribir:

$$I(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}, \quad (13.17)$$

donde:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}, \quad (13.18)$$

y tiene el nombre de **grado complejo de coherencia**.

Ahora veremos algunos ejemplos de esta ecuación. Para luz completamente incoherente tenemos que no hay ninguna relación entre el campo en un punto en un tiempo y el campo en otro punto en otro tiempo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= \langle E_1(t+\tau)E_2^*(t) \rangle = 0 \\ &\rightarrow \gamma_{12}(\tau) = 0 \\ &\rightarrow I(t) = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (13.19)$$

que es un resultado que ya utilizamos: con luz incoherente hay que sumar intensidades, no campos.

Para luz completamente coherente, la relación entre las fases es completamente determinada por la diferencia en el camino óptico entre los dos haces:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}(\tau) &= \langle e^{i(kx - \omega\tau)} e^{-ikx} \rangle = e^{i\omega\tau} \\
&\rightarrow \text{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} = \cos(\omega\tau) \\
&\rightarrow I(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\omega\tau),
\end{aligned} \tag{13.20}$$

que es la conocida ecuación para la interferencia entre dos haces coherentes. Para luz cuasimonocromática, es decir, luz con un contenido de frecuencias en una banda de frecuencias angosta, como en un láser, la diferencia de fase promedia entre los dos haces, ϕ , se puede escribir como:

$$\phi = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2 - r_1) = 2\pi\bar{\nu}\tau, \tag{13.21}$$

donde $\bar{\lambda}$ y $\bar{\nu}$ son los valores promedio del contenido de longitud de onda y frecuencia de la luz. Ahora se puede escribir:

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|e^{i\Phi_{12}(\tau)}, \tag{13.22}$$

donde $\Phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) - \phi$ es la variación de la diferencia de fase, $\alpha_{12}(\tau)$, con respecto al promedio (recuerda que es la diferencia de fase lo que es importante, no los valores de las fases). Entonces:

$$\text{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\} = |\gamma_{12}(\tau)|\cos(\alpha_{12}(\tau) - \phi), \tag{13.23}$$

y:

$$I(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|\cos(\alpha_{12}(\tau) - \phi), \tag{13.24}$$

y tenemos los casos:

$$\begin{array}{ll}
|\gamma_{12}(\tau)| = 0, & \text{para luz incoherente,} \\
|\gamma_{12}(\tau)| = 1, & \text{para luz coherente,} \\
0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1, & \text{para luz parcialmente coherente.}
\end{array}$$

Entonces, de la ecuación (13.24), se puede ver que el factor $|\gamma_{12}(\tau)|$ es el factor importante para la interferencia de luz parcialmente coherente. Otro aspecto importante es que esta ecuación significa que se puede medir $|\gamma_{12}(\tau)|$.

Por ejemplo, en el experimento de Young, la Figura 13.2 muestra un ejemplo de las franjas obtenidas. La visibilidad o contraste de las franjas se define como:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (13.25)$$

y con la ecuación (13.19) obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|, \\ I_{min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|, \end{aligned} \quad (13.26)$$

y la visibilidad es:

$$V = \frac{4\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|}{2(I_1 + I_2)}, \quad (13.27)$$

pero en la práctica, la intensidad en los dos agujeros será lo mismo, $I_1 = I_2$, entonces:

$$V = |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (13.28)$$

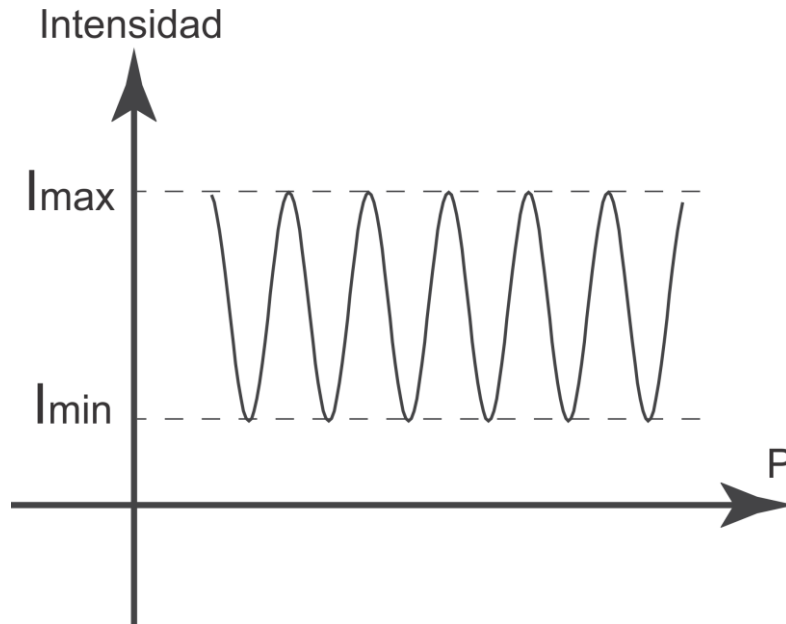


Figura 13.2: Las franjas obtenidas en un experimento de Young. P es la posición en la pantalla.

Ahora, suponiendo que la intensidad de cada agujero no cambia significativamente donde se puede medir la amplitud de las franjas de interferencia, midiendo la visibilidad para diferentes separaciones entre los agujeritos, podemos medir el *grado de coherencia espacial* de la onda incidente.

En el interferómetro de Michelson, ver la Figura 13.3, la intensidad depende de la diferencia de camino óptico, y, si $I_1 = I_2 = I_0$ y suponemos una fuente cuasimonocromática:

$$I(t) = 2I_0 \left(1 + |\gamma_{12}(\tau)| \cos(\bar{k}c\tau - \phi(\tau)) \right), \quad (13.29)$$

donde $\tau = 2\Delta s/c$ (ver la Figura 13.3, con M'_1 la imagen de M_1 proyectado sobre el brazo de M_2 , para enfatizar la diferencia de camino óptico en el interferómetro). Entonces, graficando la intensidad detectada contra el valor de la diferencia de camino óptico, podemos medir el *grado de coherencia temporal* de la fuente, como se indica en la Figura 13.4. En la figura, τ varía con cambios en la diferencia de camino óptico entre los dos brazos del interferómetro.

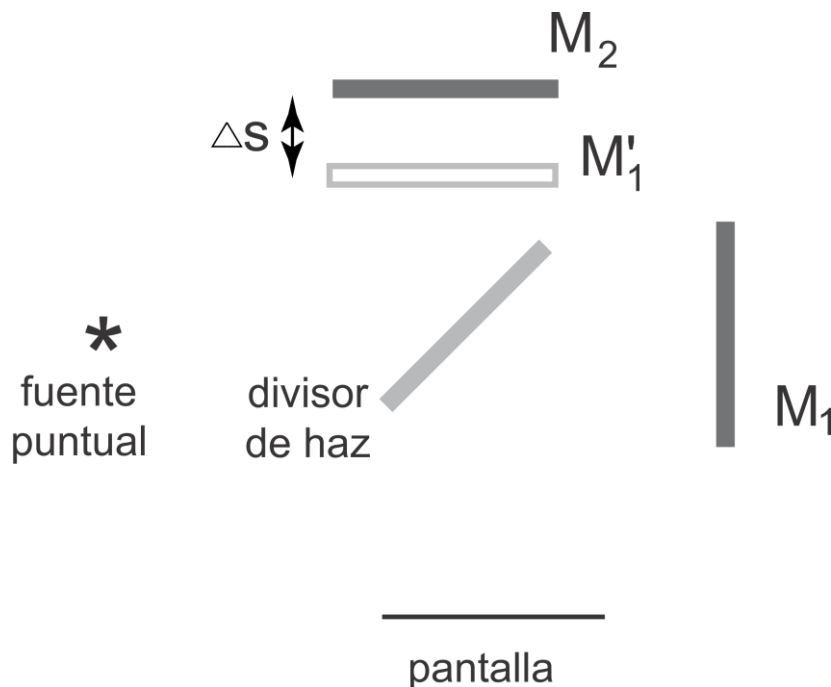


Figura 13.3: El interferómetro de Michelson.

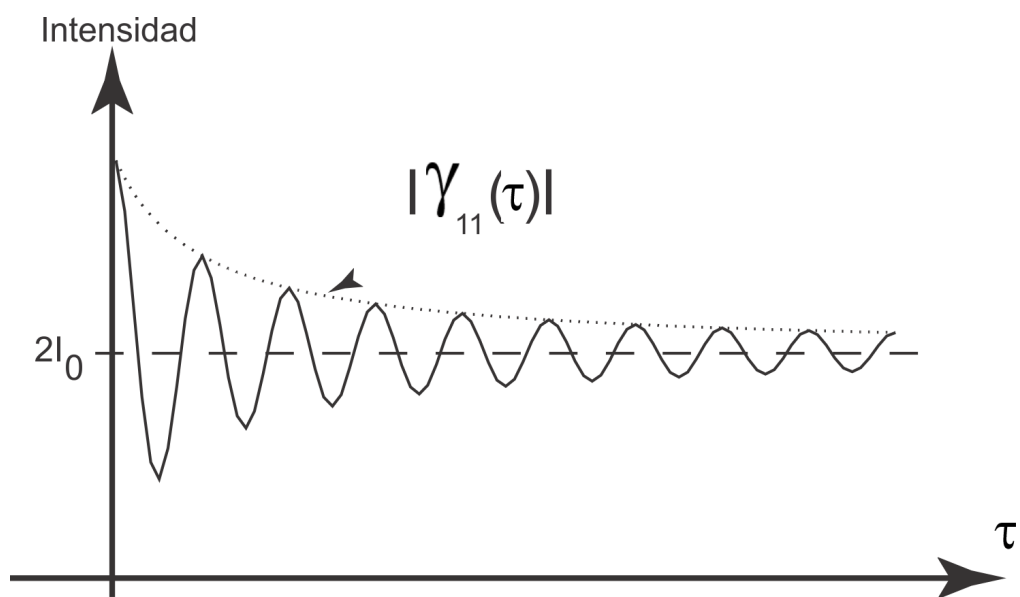


Figura 13.4: Las franjas en el interferómetro de Michelson.

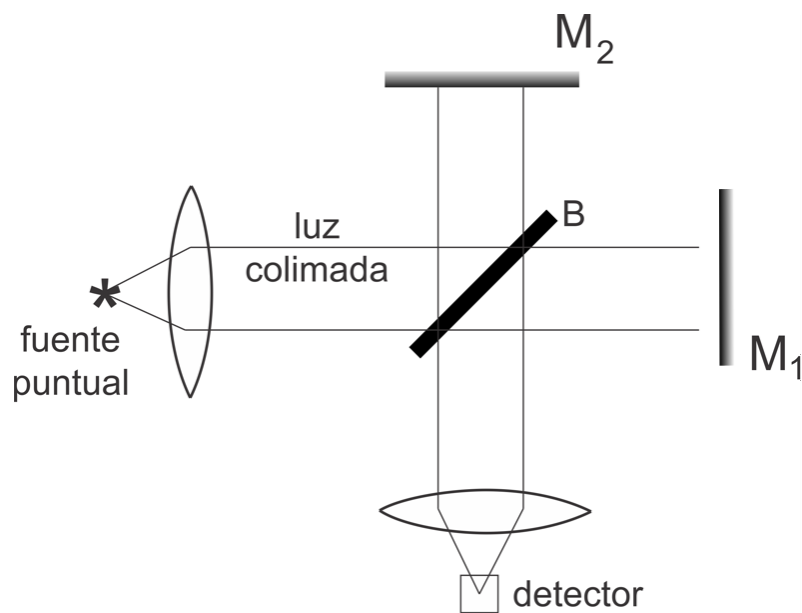


Figura 13.5: El arreglo del interferómetro de Michelson para espectroscopía.

Ahora, una pregunta importante es, ¿cuál es la relación entre lo que se detecta en un interferómetro de Michelson y el espectro de la luz utilizada? Analicemos el arreglo de la Figura 13.5. La diferencia de camino óptico entre los dos brazos es:

$$l = 2(BM_1 - BM_2), \quad (13.30)$$

donde BM_i es el camino óptico entre el divisor de haz B y el espejo M_i . El componente de la luz incidente de longitud de onda λ_1 tiene una amplitud $A_1 = 1$ y, suponiendo un divisor de haz que refleja 50% de la luz y que transmite 50% de la luz, de la ecuación (13.20):

$$I_1(l) = \frac{1}{2}(1 + \cos(k_1 l)), \quad (13.31)$$

donde $k_1 = 2\pi/\lambda_1$. Si la luz tiene un espectro que se puede escribir, como función de k ; $B(k)$:

$$I(l) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k)(1 + \cos(kl))dk = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k)dk + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k)\cos(kl)dk. \quad (13.32)$$

Si tenemos el caso de $l = 0$:

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k)dk + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k)dk = \int_0^{\infty} B(k)dk. \quad (13.33)$$

Entonces:

$$I(l) - \frac{1}{2}I(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k)\cos(kl)dk, \quad (13.34)$$

y podemos ver que al lado derecho tenemos una transformada cosenoidal de Fourier, y podemos escribir directamente la transformada inversa cosenoidal de Fourier para obtener el espectro de la luz:

$$B(k) = 2 \int_0^{\infty} \left(I(l) - \frac{1}{2} I(0) \right) \cos(kl) dk. \quad (13.34)$$

Esta técnica se llama espectroscopía de la transformada de Fourier.

13.2 El teorema de Van Cittert-Zernike

¿Cómo se propaga la coherencia de un campo? Suponemos que sabemos la función de coherencia mutua $\Gamma_{12}(0)_p$ en algún plano p , donde $\tau = 0$ indica que calculamos la coherencia sobre este mismo plano de interés. Refiriéndonos a la Figura 13.6, el problema que tenemos es el de calcular $\Gamma_{12}(0)_q$, suponiendo que conocemos $\Gamma_{12}(0)_p$. Asumiendo ángulos de propagación pequeños para despreciar factores de inclinación, podemos utilizar el principio de Huygens-Fresnel para calcular el campo en un punto en el plano q :

$$E_{q_1}(t) = \sum_m E_{p_m, q_1}(t), \quad (13.35)$$

donde los p_m son los puntos en el plano p , y $E_{p_m, q_1}(t)$ es el campo en el punto q_1 en el tiempo t debido al campo en el punto p_m . Ahora:

$$\Gamma_{12}(0)_q = \langle E_{q_1}(t) E_{q_2}^*(t) \rangle, \quad (13.36)$$

$$\Gamma_{12}(0)_q = \sum_m \langle E_{p_m, q_1}(t) E_{p_m, q_2}^*(t) \rangle + \sum_{m \neq n} \sum_n \langle E_{p_m, q_1}(t) E_{p_n, q_2}^*(t) \rangle. \quad (13.37)$$

Ahora vamos a suponer que la fuente, en el plano p , es una fuente incoherente (espacialmente) y cuasimonocromática. Entonces:

$$\langle E_{p_m, q_1}(t) E_{p_n, q_2}^*(t) \rangle = 0, \quad \text{si } m \neq n, \quad (13.38)$$

y:

$$\Gamma_{12}(0)_q = \sum_m \langle E_{p_m, q_1}(t) E_{p_m, q_2}^*(t) \rangle. \quad (13.39)$$

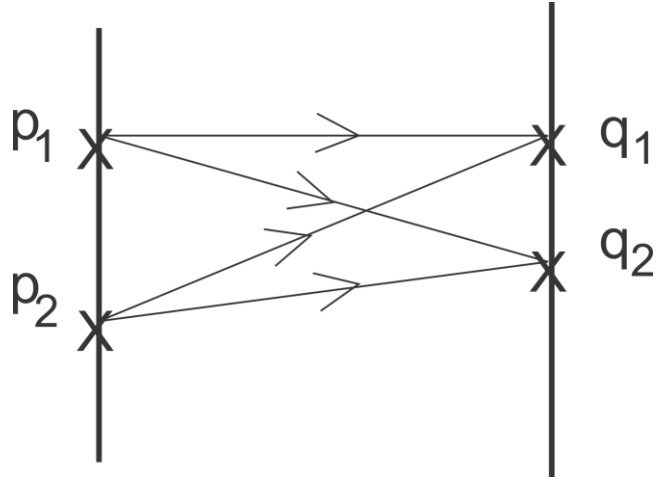


Figura 13.6: La geometría para el teorema de Van Cittert-Zernike.

Para luz cuasimonocromática:

$$E_{p_m, q_1}(t) = A_{p_m} \left(t - \frac{R_{p_m, q_1}}{c} \right) \frac{e^{i2\pi\bar{\nu} \left(t - \frac{R_{p_m, q_1}}{c} \right)}}{R_{p_m, q_1}}, \quad (13.40)$$

donde R_{p_m, q_1} es la distancia entre el punto p_m y el punto q_1 . Ahora:

$$\Gamma_{12}(0)_q = \sum_m \langle A_{p_m} \left(t - \frac{R_{p_m, q_1}}{c} \right) A_{p_m}^* \left(t - \frac{R_{p_m, q_2}}{c} \right) \rangle \frac{e^{i2\pi\bar{\nu} \left(\frac{R_{p_m, q_1}}{c} - \frac{R_{p_m, q_2}}{c} \right)}}{R_{p_m, q_1} R_{p_m, q_2}}. \quad (13.41)$$

Suponemos campos estacionarios y que $R_{p_m, q_1} - R_{p_m, q_2}$ es menor que la distancia de coherencia de la luz cuasimonocromática, para obtener:

$$\Gamma_{12}(0)_q = \sum_m \langle A_{p_m}(t) A_{p_m}^*(t) \rangle \frac{e^{i2\pi\bar{\nu} (R_{p_m, q_1} - R_{p_m, q_2})}}{R_{p_m, q_1} R_{p_m, q_2}}. \quad (13.42)$$

Pero, $\langle A_{p_m}(t) A_{p_m}^*(t) \rangle = I(p_m)$, la intensidad en el punto de interés en la fuente, y notando que la distribución de luz en la fuente es continua, tenemos que cambiar la sumación por una integral:

$$\Gamma_{12}(0)_q = \int I(p) \frac{e^{i\bar{k}(R(p,q_1)-R(p,q_2))}}{R(p,q_1)R(p,q_2)} dp. \quad (13.43)$$

Esta fórmula la podemos comparar con la fórmula de difracción de Huygens-Fresnel para ángulos pequeños:

$$U(q) = -\frac{i}{\lambda} \int A(p) \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} dS. \quad (13.44)$$

La similitud entre las ecuaciones (11.43) y (11.44) permitió a Van Cittert y Zernike llegar a la siguiente conclusión:

“La función de coherencia mutua, que describe la correlación de las vibraciones en un punto fijo q_2 y un punto variable q_1 , en una zona iluminada por una fuente extendida, incoherente y cuasimonocromática, es igual a la amplitud compleja en el punto q_1 en un patrón de difracción con su centro en q_2 . Este patrón se obtendría si se reemplaza la fuente con una abertura de difracción del mismo tamaño y forma que la fuente, y se llena esta abertura con una onda esférica convergente al punto q_2 , la distribución de amplitud en el frente de onda de la abertura siendo proporcional a la distribución de intensidad de la fuente.”

Esto es el teorema de Van Cittert-Zernike. Dice que podemos calcular la coherencia más adelante de una fuente incoherente utilizando el patrón de difracción de luz coherente de una abertura de la misma forma que la fuente. Para distancias grandes entre la fuente y el plano de observación (aproximación de Fraunhofer), esto significa que la coherencia en el plano de observación se calcula con la transformada de Fourier de la distribución de intensidad de la fuente.

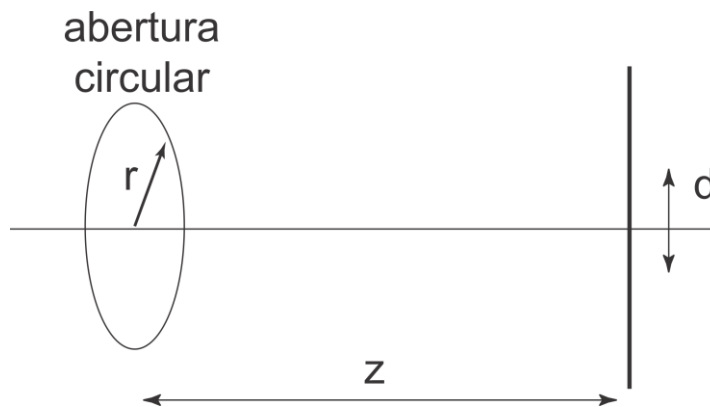


Figura 13.7: El teorema de Van Cittert-Zernike con una fuente circular

Por ejemplo, para una abertura circular, ver la Figura 13.7:

$$|\gamma_{12}(0)| \propto |\Gamma_{12}(0)| \propto \left| \frac{J_1\left(\frac{\bar{k}rd}{z}\right)}{\frac{\bar{k}rd}{z}} \right|. \quad (13.45)$$

Entonces, para el sol que tiene un radio de $r \approx 7 \times 10^5 km$, y que se encuentra a una distancia de $z \approx 1.5 \times 10^8 km$, la coherencia es igual a cero, es decir, no se ven franjas en el experimento de Young, cuando los dos agujeritos esten separados una distancia:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi r}{\bar{\lambda}} d &\approx 3.83, \\ d &\approx 130\bar{\lambda}, \end{aligned} \quad (13.46)$$

y, para un $\bar{\lambda} \approx 550 nm$ en el visible, $d \approx 0.07 mm$ para que no haya franjas de interferencia.

13.3 Interferómetro estelar de Michelson

El teorema de Van Cittert-Zernike se utiliza en el interferómetro estelar de Michelson, que sirve para medir los diámetros angulares de estrellas o la separación de pares de estrellas cercanas (Hariharan, 1985; Tango y Twiss, 1980). La Figura 13.8 muestra la geometría de este interferómetro. Los espejos M_1 y M_4 se pueden mover para variar su separación, pero se mantiene la igualdad de camino óptico en los dos brazos del interferómetro para permitir la medición de la coherencia espacial solamente. La interferencia de los dos haces incidentes sobre estos dos espejos produce un patrón de franjas cuya visibilidad (o contraste) está dada por $|\Gamma_{12}(0)|$, pero ésta variación de visibilidad está relacionada con el tamaño angular de la estrella a través del teorema de Van Cittert-Zernike, que depende de la distribución de intensidad sobre la fuente o fuentes, entonces se puede medir el tamaño angular de la estrella, o la separación angular de un par de estrellas.

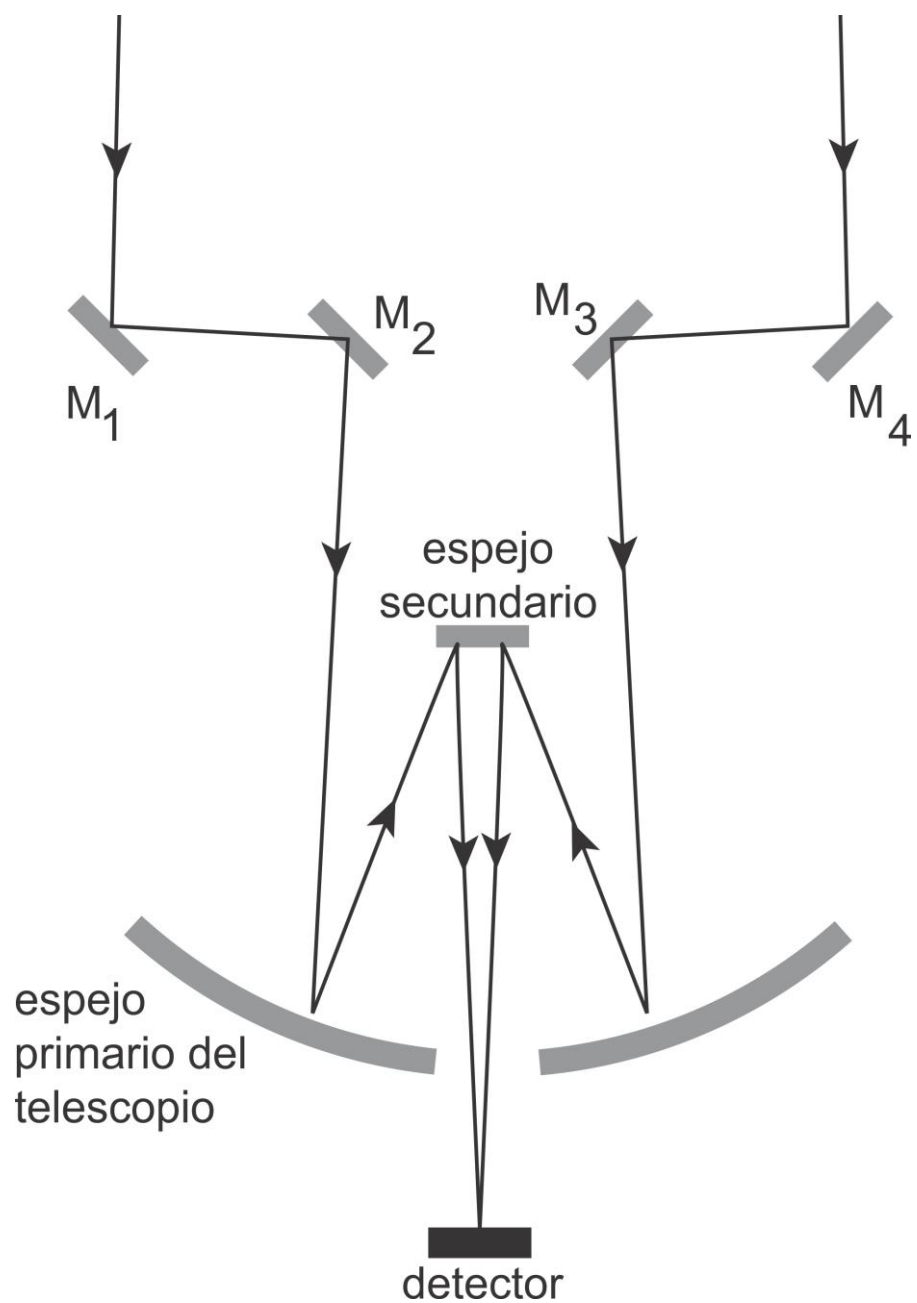


Figura 13.8: La geometría del interferómetro estelar de Michelson

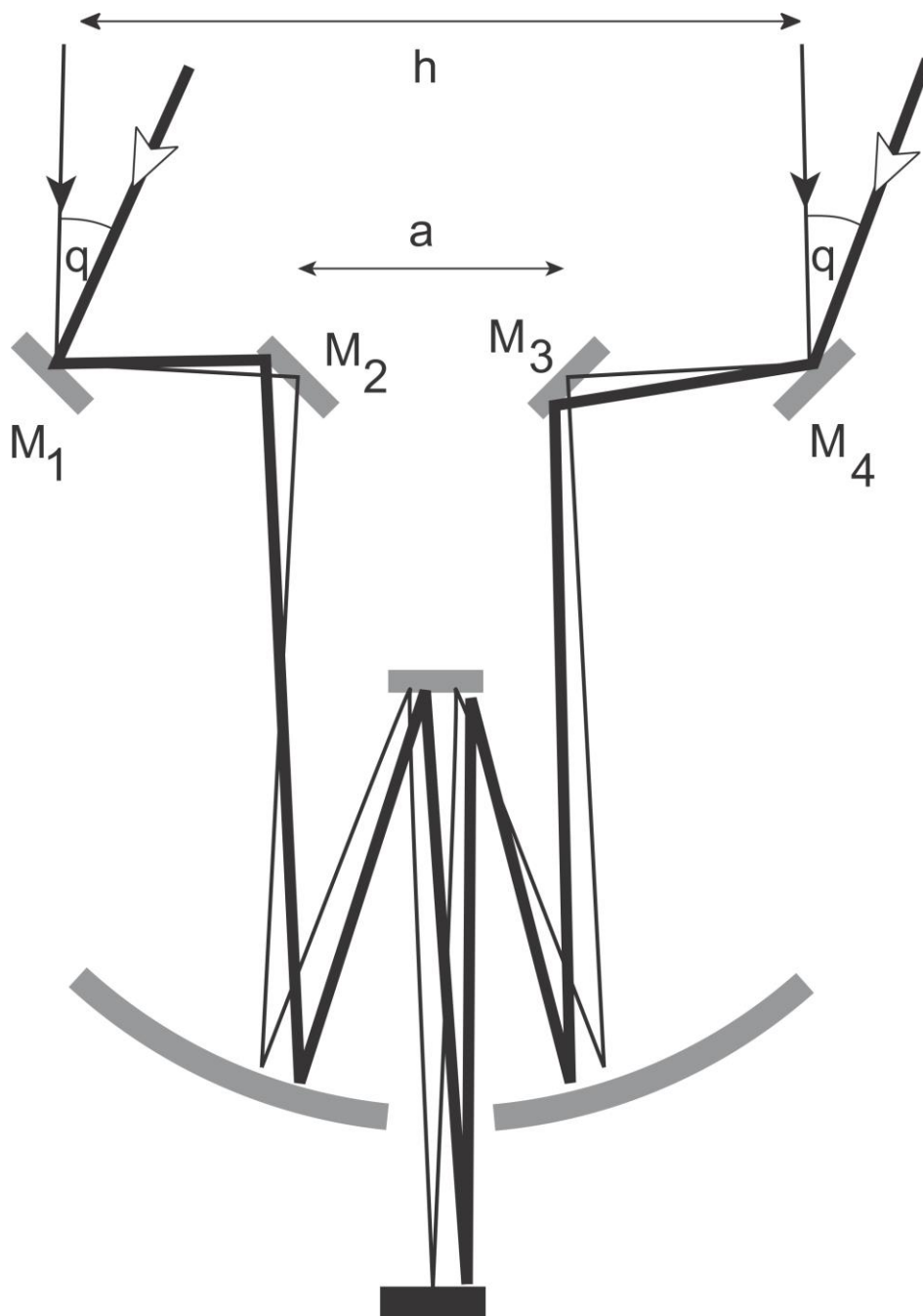


Figura 13.9: El interferómetro de Michelson con dos fuentes.

Se puede ver otra forma de entender cualitativamente cómo funciona el interferómetro estelar de Michelson. La Figura 13.9 muestra la geometría involucrada para la contribución de dos estrellas cercanas (en separación angular) en este interferómetro. Para los rayos indicados en la Figura 13.9, la diferencia de fase entre un par de rayos con incidencia normal y el otro par de rayos (que provienen de la otra estrella) a un ángulo θ es:

$$\Delta\phi = \bar{k}h\theta, \quad (13.47)$$

donde h es la separación de los primeros espejos y se ha utilizado la aproximación de ángulos pequeños. También, aquí se supone que hay un rango muy pequeño de longitudes de onda en la luz, esto se logra utilizando filtros de interferencia en los haces. En el plano del detector, esta variación de fase corresponde a un cambio de posición de las franjas, θ' , dado por:

$$\bar{k}h\theta = \bar{k}a\theta', \quad (13.48)$$

donde a es la separación de los espejos secundarios, M_3 y M_4 . El cambio de posición de las franjas para la segunda estrella con respecto a la primera es:

$$\theta' = \frac{h}{a} \theta. \quad (13.49)$$

Además, estos dos juegos de franjas son incoherentes, es decir,, hay que sumar las in-tensidades. Al cambiar el valor de h , las franjas de la segunda estrella se van moviendo con respecto a las franjas de la primera estrella. Llegará un momento en que los máximos de un juego de franjas estarán en las mismas posiciones que los mínimos del otro juego de franjas. La separación entre los máximos o entre los mínimos en un patrón de interferencia aquí es $\Delta\theta = \lambda/a$, entonces el valor de θ' para que coincidan los máximos de un patrón con los mínimos del otro es:

$$\theta' = \frac{\bar{\lambda}}{2a}. \quad (13.50)$$

Sustituyendo de la ecuación (13.49) para θ' , obtenemos:

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{2h_{min}}, \quad (13.51)$$

donde h_{min} es el valor de la separación de los espejos para el mínimo en la visibilidad de las franjas (cuando los máximos de un patrón están en la posición de los mínimos del otro). Así se puede medir la separación angular de dos estrellas muy lejanas. Para calcular el diámetro de una estrella hay que sumar todos los patrones de franjas de todos los puntos de la estrella y calcular cuándo se obtiene un mínimo en la visibilidad en este modelo. Este es el teorema de Van Cittert-Zernike.

Para saber si la falta de franjas de interferencia entre los dos haces en el interferómetro estelar de Michelson es debido a la coherencia de la estrella, se requieren dos condiciones: (i) que la diferencia de camino óptico entre los dos haces en el interferómetro sea mucho menor a la distancia de coherencia de la luz, y (ii) que la diferencia del camino óptico entre los dos haces sea estable hasta una fracción pequeña de una longitud de onda. Si esta segunda condición no se satisface, el patrón de interferencia va moviendo en el detector y el efecto es de borrar las franjas. Se puede satisfacer la primera condición con una construcción y alineación del interferómetro adecuados. Sin embargo, la segunda condición es muy difícil de satisfacer debido a la turbulencia de la atmósfera que produce variaciones en la fase de los dos haces, independientemente de la rigidez de la estructura del interferómetro. La Figura 13.10 muestra como se puede superar el problema de la turbulencia de la atmósfera. Además de variar la fase de los dos haces llegando a los espejos, la turbulencia causa variaciones en las ángulos de los haces que llegan, es decir, la posición de la estrella puede ser diferente para los dos brazos del interferómetro. Esto se corrige detectando las posiciones de la estrella en cada brazo y utilizando dos espejos con inclinación variable para que haya un ángulo constante entre los dos haces y la separación de las franjas sea una constante.

Ahora ¿cómo se puede superar el problema de la fase aleatoria entre los dos haces que están interfiriendo? De la ecuación (13.29), la intensidad medida en el detector es proporcional a:

$$I \propto \left(1 + |\gamma_{12}(0)| \cos(\phi(\tau))\right), \quad (13.52)$$

cuando la diferencia de camino es igual a cero. Aquí el factor $\phi(\tau)$ es la variación de fase aleatoria introducida por la atmósfera. El interferómetro permite la variación del largo de los dos brazos para introducir un cambio de fase de $\pi/2$ entre los dos haces que están interfiriendo. Por supuesto, para realizar esto se requiere que la luz sólo contenga un rango muy pequeño de longitud de onda, para controlar el cambio de fase. Con esta variación de fase, la intensidad es proporcional a:

$$I' \propto \left(1 + |\gamma_{12}(0)| \cos\left(\phi(\tau) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(1 + |\gamma_{12}(0)| \sin(\phi(\tau))\right). \quad (13.53)$$

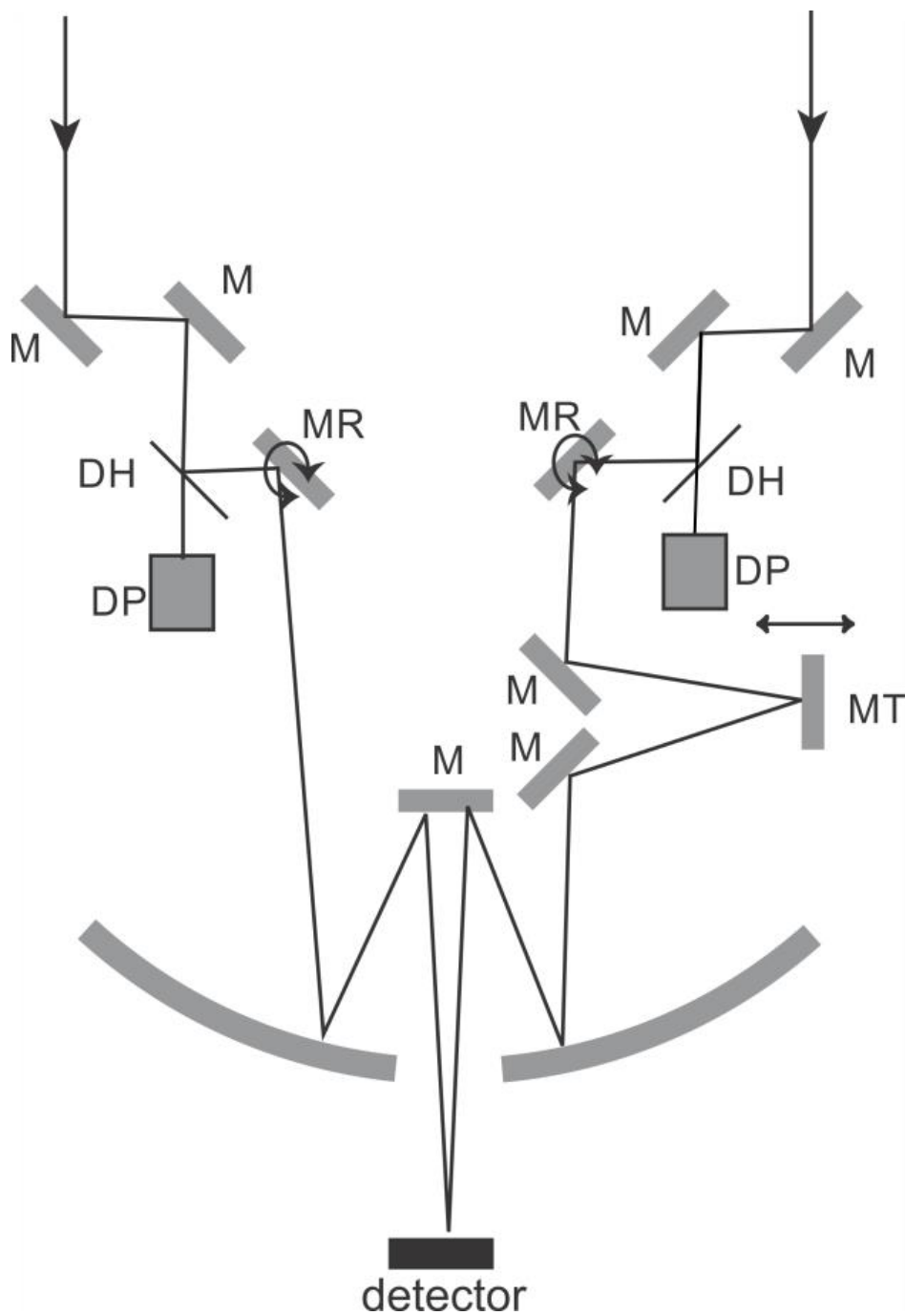


Figura 13.10: El interferómetro estelar de Michelson modificado. *M* indica un espejo, *MR* es un espejo que gira para corregir la posición de la estrella, *DH* es un divisor de haz, *DP* es un detector de posición y *MT* es un espejo que se puede trasladar para controlar la fase en uno de los brazos.

El promedio en el tiempo de la suma de los cuadrados de las señales: $\langle I^2 + I'^2 \rangle$ da:

$$\begin{aligned}\langle I^2 + I'^2 \rangle &= \langle \left(1 + |\gamma_{12}(0)| \cos(\phi(\tau))\right)^2 + \left(1 + |\gamma_{12}(0)| \sin(\phi(\tau))\right)^2 \rangle \\ &= 2 + |\gamma_{12}(0)|^2,\end{aligned}\quad (13.54)$$

donde se ha utilizado el hecho de que los promedios del $\cos(\phi(\tau))$ y el $\sin(\phi(\tau))$ en el tiempo son iguales a cero para un tiempo de promedio lo suficientemente largo. Entonces, utilizando este método, se puede tener una medición directa del grado de coherencia espacial de la luz en la entrada del interferómetro, independiente de la turbulencia de la atmósfera.

13.4 El interferómetro de Intensidad

Otra forma de superar el problema de la turbulencia es con el interferómetro de intensidad. En este interferómetro se detecta la intensidad en dos telescopios. La intensidad en telescopio 1 será:

$$I_1(t) = V_1(t)V_1^*(t), \quad (13.55)$$

y en telescopio 2:

$$I_2(t) = V_2(t)V_2^*(t), \quad (13.56)$$

donde $V(\)$ es el campo total llegando al detector. La correlación entre estas dos señales, con una diferencia de τ en los tiempos de las dos señales será:

$$\langle I_1(t) + I_2(t) \rangle = \langle V_1(t)V_1^*(t)V_2(t+\tau)V_2^*(t+\tau) \rangle. \quad (13.57)$$

Aquí, las señales medidas tendrán ruido del instrumento, pero esto no está correlacionado, entonces no contribuye a la señal de correlación final. Además, como las variaciones en el campo siguen estadísticas Gaussianas, se puede mostrar que:

$$\begin{aligned}\langle V_1(t)V_1^*(t)V_2(t+\tau)V_2^*(t+\tau) \rangle &= \langle V_1(t)V_1^*(t) \rangle \langle V_2(t+\tau)V_2^*(t+\tau) \rangle \\ &+ \langle V_1(t)V_2^*(t+\tau) \rangle \langle V_1^*(t)V_2(t+\tau) \rangle.\end{aligned}\quad (13.58)$$

Esto se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\langle V_1(t)V_1^*(t)V_2(t+\tau)V_2^*(t+\tau) \rangle &= I_1 I_2 + |\langle V_1(t)V_2^*(t+\tau) \rangle|^2 \\ &= I_1 I_2 + |\Gamma_{12}(\tau)|^2 = I_1 I_2 (1 + |\gamma_{12}(\tau)|^2). \quad (13.59)\end{aligned}$$

Aquí, lo que se mide es la magnitud cuadrada del grado de coherencia, y la fase no es importante para esta cantidad, entonces, la turbulencia, cuyo efecto principal es la de variar aleatoriamente la fase de las dos ondas en los dos telescopios, no es tan importante para este interferómetro. Lo que sí es un problema es que esta técnica requiere un ancho del espectro muy pequeño, para tener la correlación en las intensidades, entonces hay poca luz que llega a los detectores y hay que integrar las señales sobre mucho tiempo.

13.5 Interferometría de Speckle estelar

En telescopios grandes, cuando se observa una estrella y se toma una imagen en un tiempo muy corto comparado con el tiempo de movimiento de la atmósfera (del orden de 20 ms), la imagen que se obtiene es un patrón de moteado (speckle en inglés). Para obtener speckles claros se utiliza un filtro de un ancho de longitud de onda de alrededor de 20 nm (Hariharan, 1985).

Ahora, la función $h(x, y)$ es la función de transmisión de amplitud de la atmósfera en un instante de tiempo. La intensidad de la imagen en el telescopio de esta distribución de amplitud es:

$$|\mathfrak{I}(h(x, y))|^2 = |H(x_i, y_i)|^2, \quad (13.60)$$

y, si la distribución de intensidad de una estrella es $o(x, y)$, la imagen de la estrella es (ignorando difracción por el tamaño y forma del telescopio y sus aberraciones):

$$I(x_i, y_i) = o(x, y) \otimes |H(x_i, y_i)|^2. \quad (13.61)$$

Ahora se calcula la transformada de Fourier de esta distribución de intensidad, en la computadora, u ópticamente con un sistema de $2f$, para obtener la distribución de amplitud:

$$a(u, v) = O(u, v) \mathfrak{I}(|H(x_i, y_i)|^2) = O(u, v) (h(x, y) * h^*(x, y)), \quad (13.62)$$

y la distribution de intensidad final será:

$$I(u, v) = |O(u, v)|^2 |h(x, y) * h^*(x, y)|^2. \quad (13.63)$$

Para mejorar la imagen se puede promediar sobre muchas de las imágenes de speckle:

$$I_t(u, v) = \langle I(u, v) \rangle = |O(u, v)|^2 \langle |h(x, y) * h^*(x, y)|^2 \rangle. \quad (13.64)$$

Aquí el término a la derecha es el promedio de la función de transferencia de la atmósfera que se puede medir con una estrella que no se puede resolver (que sería un objeto puntual para el telescopio) cerca a la estrella de interés. Se puede dividir la ecuación (13.64) por esta función para obtener $|O(u, v)|^2$, que es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la estrella.

Un aspecto interesante aquí es que se podrían tomar el efecto de las aberraciones del telescopio junto con la función de transferencia de la atmósfera y, al final, obtener una imagen limitada por difracción (como si el telescopio fuera perfecto).

La técnica de óptica adaptativa, donde se mide y corrige el frente de onda distorsionado por la atmósfera en tiempo real ha reemplazado estas técnicas para obtener imágenes astronómicas, pero son aplicaciones muy interesantes de la transformada de Fourier.

Capítulo 14

Temas Selectos

En este capítulo veremos algunos temas breves, asociados a la transformada de Fourier.

14.1 La Transformada de Fourier Discreta

Muchas veces se resuelven problemas físicos utilizando cálculos numéricos en una computadora. Para realizar esto, se debe discretizar el problema, esto es, como no se pueden describir las funciones continuamente, se muestrean las funciones de interés y se realizan las operaciones necesarias. La pregunta aquí es: ¿cómo se relaciona la transformada de Fourier digital (realizada en la computadora) con la transformada de Fourier continua? (Press *et al*, 1992).

Empezamos con una función $f(x)$ y su transformada de Fourier $F(u)$, ver la Figura 14.1(a). Para tener la forma de la función en la computadora hay que discretizar la función original:

$$f_a(x) = f(x) \text{comb}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (14.1)$$

y su transformada de Fourier es:

$$F'(u) = \frac{1}{a} F(u) \otimes \text{comb}(au), \quad (14.2)$$

que es la replicación de la función $F(u)$ en posiciones separadas por $\Delta u = 1/a$. Se muestran estas dos funciones en la Figura 14.1(b). Ahora, igual que para el teorema del muestreo, si el muestreo de la función original no es lo suficientemente fino, si a no es suficientemente pequeño, las copias de la transformada de Fourier se mezclan y se produce el error en el espectro que se llama **aliasing**. Si suponemos que muestreamos acorde al teorema de muestreo, entonces:

$$f(x) = \sum_m f_d(x_m) u_{max} \text{sinc}((x - x_m)u_{max}) \Delta x, \quad (14.3)$$

donde $x_m = m/u_{max}$, $\Delta x = 1/u_{max}$ es la separación entre x_m y x_{m+1} y u_{max} es el rango total de las frecuencias espaciales presentes en $f(x)$. Ahora, la transformada de Fourier de esta función es:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int f(x) e^{-i2\pi x u} dx \\ &= \int \sum_m f_d(x_m) u_{max} \text{sinc}((x - x_m)u_{max}) \Delta x e^{-i2\pi x u} dx \\ &= \sum_m f_d(x_m) u_{max} \Delta x \int \text{sinc}((x - x_m)u_{max}) e^{-i2\pi x u} dx \\ &= \sum_m f_d(x_m) \text{rect}\left(\frac{u}{u_{max}}\right) e^{-i2\pi x_m u} \Delta x, \end{aligned} \quad (14.4)$$

$$F(u) = \begin{cases} \sum_m f_d(x_m) e^{-i2\pi x_m u} \Delta x, & -\frac{u_{max}}{2} \leq u \leq \frac{u_{max}}{2}, \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases} \quad (14.5)$$

Sin embargo, aquí la función $F(u)$ es continua. Para tener esta función en la computadora necesitamos discretizarla, es decir, hay que multiplicar por $\text{comb}(u/b)$. Esto nos da replicación de la función $f_d(x_m)$ y requerimos que esta función esté limitada en posición, y que la separación de los datos discretos, es decir, $\Delta u = b$ sea suficientemente pequeña para satisfacer el teorema de muestreo. Entonces:

$$F(u) = \sum_m F_d(u_n) x_{max} \text{sinc}((u - u_n)x_{max}) \Delta u, \quad (14.6)$$

donde $u_n = n/x_{max}$, $\Delta u = 1/x_{max}$ y x_{max} es el valor máximo de posición donde la función $f_d(x_m)$ tiene un valor significativo. Se muestran las funciones $f_d(x_m)$ y $F_d(u_n)$ en la Figura 14.1(c).

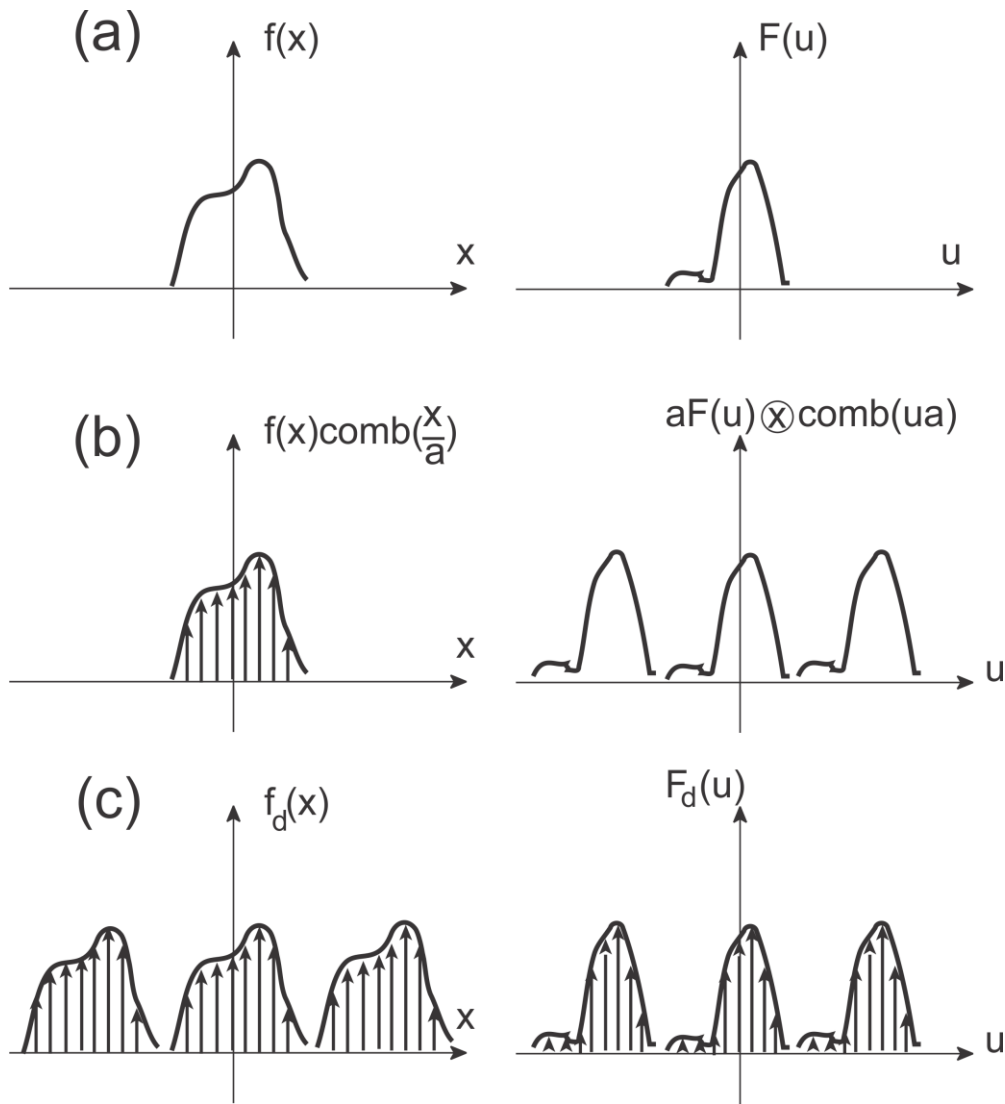


Figura 14.1: Las funciones involucradas en la transformada de Fourier (a) continua, (b) la función original discreta y (c) ambas funciones discretas.

Utilizando la ecuación (14.4) se puede escribir el par de la transformada de Fourier digital:

$$\begin{aligned} F_d(u_n) &= \sum_m f_d(x_m) e^{-i2\pi x u_m} \Delta x, & -\frac{u_{max}}{2} \leq u \leq \frac{u_{max}}{2}, \\ f_d(x_m) &= \sum_m F_d(u_n) e^{i2\pi x u_m} \Delta u, & -\frac{x_{max}}{2} \leq x \leq \frac{x_{max}}{2}. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Si ahora escribimos $x_m = m\Delta x$, $x_{max} = N\Delta x$, $u_n = n\Delta u$, $u_{max} = N\Delta u$, donde Δx y Δu son los pasos en el muestreo de x y u respectivamente, obtenemos:

$$\begin{aligned} F_d(n\Delta u) &= \sum_m f_d(m\Delta x) e^{-i2\pi \frac{n m}{N}} \Delta x, \\ f_d(m\Delta x) &= \sum_m F_d(n\Delta u) e^{i2\pi \frac{n m}{N}} \Delta u. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Ahora, ¿cómo están relacionadas Δx y Δu ? Por el teorema de muestreo sabemos que $u_{max} = N\Delta u = 1/\Delta x$, entonces $\Delta u = 1/(N\Delta x)$. Incluyendo el factor Δx con el término $F_d(n\Delta u)$, $F_d(n\Delta u)/\Delta x \rightarrow F_d(n\Delta u)$, obtenemos finalmente para la transformada de Fourier digital:

$$\begin{aligned} F_d(n\Delta u) &= \sum_m f_d(m\Delta x) e^{-i2\pi \frac{n m}{N}}, \\ f_d(m\Delta x) &= \frac{1}{N} \sum_m F_d(n\Delta u) e^{i2\pi \frac{n m}{N}}, \end{aligned} \quad (14.9)$$

y es importante notar que, por el muestreo de las funciones originales, **las dos funciones involucradas en la transformada de Fourier discreta son implícitamente periódicas**.

14.1.1 Escalamiento en la transformada de Fourier

En la sección anterior vimos que, al calcular una transformada de Fourier en la computadora, todo se realiza en términos de los pixeles del objeto y de la transformada de Fourier, dados por los índices de los vectores o matrices utilizados para hacer el cálculo. Pero, también vimos que el paso en frecuencias, Δu , está relacionado con el paso en posición, Δx (o tiempo o cualquier otra variable), como:

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}, \quad (14.10)$$

donde N es el número total de puntos en el arreglo que describe el objeto. Esto significa que la escala que escogimos en la digitalización del objeto (distancia por pixel en el objeto) fija la escala de la digitalización de la transformada de Fourier, donde el paso es $1/(\text{tamaño total del objeto})$. Esto significa que al realizar una transformada de Fourier en la computadora con alguna forma del objeto, estamos calculando la transformada de Fourier de cualquier objeto con esta misma forma; solo tenemos que calcular la escala correcta, dada por la ecuación (14.10), para calcular correctamente la transformada de Fourier.

14.1.2 Escalamiento en difracción de Fraunhofer

Al calcular la transformada de Fourier en la computadora, para calcular un patrón de difracción de Fraunhofer, es importante relacionar las frecuencias en la transformada calculada con las posiciones reales sobre una pantalla en un experimento en el laboratorio. Para esto se requiere un escalamiento de la transformada de Fourier. Como se explicó arriba, la frecuencia espacial de un elemento n en el arreglo de la transformada de Fourier corresponde con una frecuencia espacial:

$$u = n\Delta u = \frac{n}{N\Delta x}. \quad (14.11)$$

También vimos en el capítulo 4 que, al calcular un patrón de difracción de Fraunhofer, la frecuencia espacial de la transformada de Fourier se puede escribir en términos de la posición sobre la pantalla, x , como:

$$u = \frac{x}{\lambda z}, \quad (14.12)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz incidente y z es la distancia entre la abertura y la pantalla. Para calcular el escalamiento entre el número de pixel y la

posición real sobre una pantalla de este patrón de difracción de Fraunhofer, igualamos estas dos ecuaciones y rearrreglamos términos para tener:

$$x = \frac{n\lambda z}{N\Delta x}, \quad (14.13)$$

como la distancia real sobre la pantalla para cada elemento n del arreglo de la transformada de Fourier. Se puede ver que un cambio en la longitud de onda, λ , o en la distancia entre la abertura y la pantalla, z , solo cambia el factor de escalamiento, el cálculo de la transformada de Fourier es el mismo. También, un cambio en el tamaño de la abertura corresponde con un cambio en el factor Δx , y el resto del cálculo queda igual, solo hay que cambiar este factor. Esto significa que el cálculo de la transformada de Fourier con una abertura de una forma dada da el cálculo para los patrones de difracción de todas las aberturas con la misma forma, solo ajustando el factor de escalamiento de la ecuación (14.13).

Por ejemplo, una abertura rectangular se puede describir, en una dimensión, como un arreglo de largo N que contiene N' valores de 1 para denotar la parte donde pasa la luz y $N - N'$ valores de 0 donde tapa la luz. Si esta abertura corresponde a una rendija de un ancho de $200 \mu m$ en el laboratorio, el factor de escala es:

$$\Delta x = \frac{200 \mu m}{N'}, \quad (14.14)$$

y se puede utilizar la ecuación (14.13) para calcular el tamaño del patrón real sobre una pantalla en el laboratorio, utilizando los parámetros del experimento λ y z .

Cambiando el ancho de la rendija a $400 \mu m$, por ejemplo, da un factor de Δx el doble del valor para una abertura de Δx . También, cambiando el número de píxeles describiendo la parte abierta de la rendija, por ejemplo, utilizando el doble de puntos, $2N'$, da un valor de Δx que es la mitad del valor original, aún cuando el valor de N no cambia.

14.1.3 Convolución discreta

Utilizando la definición $h_d(m\Delta x) = h_m$, la definición de la convolución discreta es:

$$h_m = f \otimes g = \sum_{n=1}^N f_n g_{m-n}, \quad (14.15)$$

que es equivalente a la definición de la convolución continua.

Una propiedad importante de la convolución discreta es su transformada de Fourier discreta:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}\left(\sum_{n=1}^N f_n g_{m-n}\right) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N f_n g_{m-n} e^{-i2\pi \frac{p m}{N}} \\
 &= \sum_{n=1}^N f_n \sum_{m=1}^N g_{m-n} e^{-i2\pi \frac{p m}{N}} \\
 &= \sum_{n=1}^N f_n G_p e^{-i2\pi \frac{p n}{N}} \\
 &= G_p \sum_{n=1}^N f_n e^{-i2\pi \frac{p n}{N}} = G_p F_p.
 \end{aligned}
 \tag{14.16}$$

Esto es:

$$\mathfrak{F}(f \otimes g) = FG, \tag{14.17}$$

es decir, la transformada de Fourier discreta de la convolución discreta es igual al producto de las transformadas de Fourier discretas de las dos funciones involucradas en la convolución discreta.

14.1.4 Correlación Discreta

La definición de la correlación discreta es:

$$h_j = f * g = \sum_{i=1}^N f_i g_{j+i}, \tag{14.18}$$

y la transformada de Fourier discreta de una correlación discreta está dada por:

$$\mathfrak{F}(f * g) = F^* G. \tag{14.19}$$

14.1.5 La Transformada de Fourier de Cosenos y Senos

En esta sección veremos lo que parecería ser un cálculo muy sencillo: la transformada de Fourier numérica de la función coseno (o seno). Teóricamente este caso es muy sencillo:

$$\mathfrak{T}(\cos(2\pi f x)) = \frac{1}{2}(\delta(u + f) + \delta(u - f)), \quad (14.20)$$

que es dos funciones $\delta(\quad)$ distribuidas simétricamente alrededor de la frecuencia cero. La Figura 14.2 muestra el resultado del cálculo de la transformada de Fourier con la fft en MatLab de la función:

$$f(x) = 1 + \cos(2\pi f x). \quad (14.21)$$

Como se puede ver en la Figura 14.2, la transformada de Fourier calculada son los tres picos de un pixel de ancho cada uno, con las alturas relativas de 1 para la frecuencia cero en el centro, y 0.5 para las frecuencias $\pm f$, como indica la ecuación (14.20). Es muy importante observar que el cálculo para la Figura 14.2 se hizo con un número total de pixeles en los arreglos de 1024, y con periodo del $\cos(\quad)$ de 16 pixeles (o una frecuencia de $1/16$ pixeles⁻¹). Esto significa que hay un número entero de ciclos del $\cos(\quad)$ en el arreglo completo de $f(x)$, de hecho hay 64 periodos completos del $\cos(\quad)$.

¿Qué pasa si **no** hay un número completo de ciclos del $\cos(\quad)$? Esto se muestra en la Figura 14.3 para el caso de arreglos de 1024 pixeles de largo, y un periodo de 13 pixeles. Es muy claro que la transformada de Fourier no es lo mismo para el caso de un número entero de ciclos, ahora hay más frecuencias alrededor de los picos en la frecuencia del $\cos(\quad)$. Además, las amplitudes máximas de los picos no son 1 en frecuencia cero a 0.5 para la frecuencia del coseno. En este caso es 1 a 0.44, entonces midiendo solo la amplitud en la transformada de Fourier en la frecuencia del $\cos(\quad)$ da un valor erróneo para la contribución en la función original.

¿Porqué pasa esto? Arriba vimos que la digitalización de la función $f(x)$ y su transformada de Fourier $F(u)$, implica que las dos funciones son periódicas. Si hay un número completo de ciclos en una función $\cos(\quad)$, la periodicidad de la función será una función $\cos(\quad)$ continua, mientras si no hay un número entero de ciclos habrá un brinco en la función en los bordes de los periodos, y la función total no se podrá describir con la ecuación (14.21). Esto se muestra en la Figura 14.4. Los brincos en la función requieren más frecuencias para describirlos bien, entonces la transformada de Fourier tendrá más frecuencias.

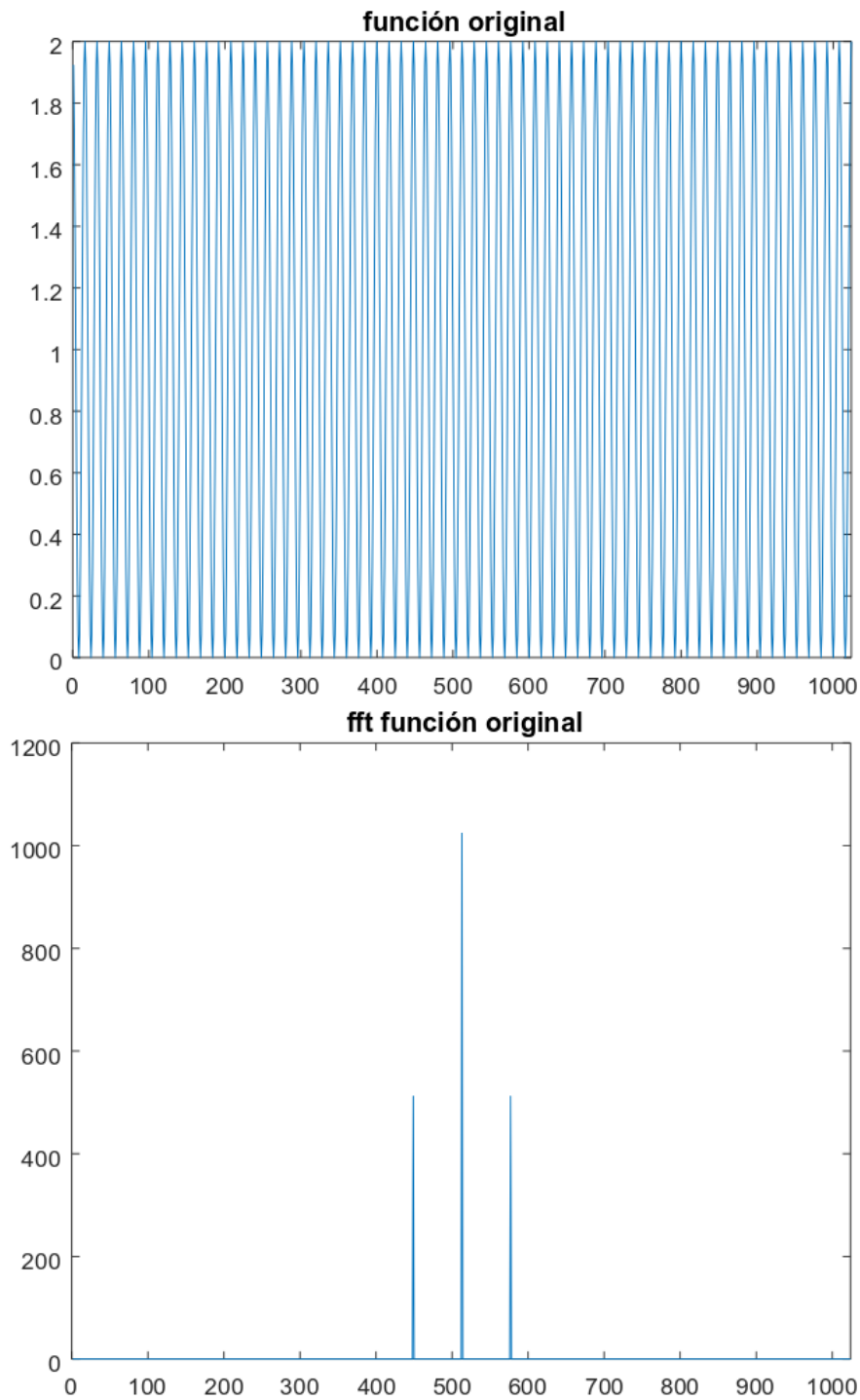


Figura 14.2: Arriba: función $1 + \cos(2\pi f x)$, donde el $\cos(\quad)$ tiene un periodo de 16 pixeles en 1024 pixeles total, esto es hay 64 ciclos completos en la gráfica. Abajo: la transformada de Fourier de esta función muestra 3 picos de 1 pixel de ancho cada uno, y con las amplitudes dadas por la ecuación (14.20).

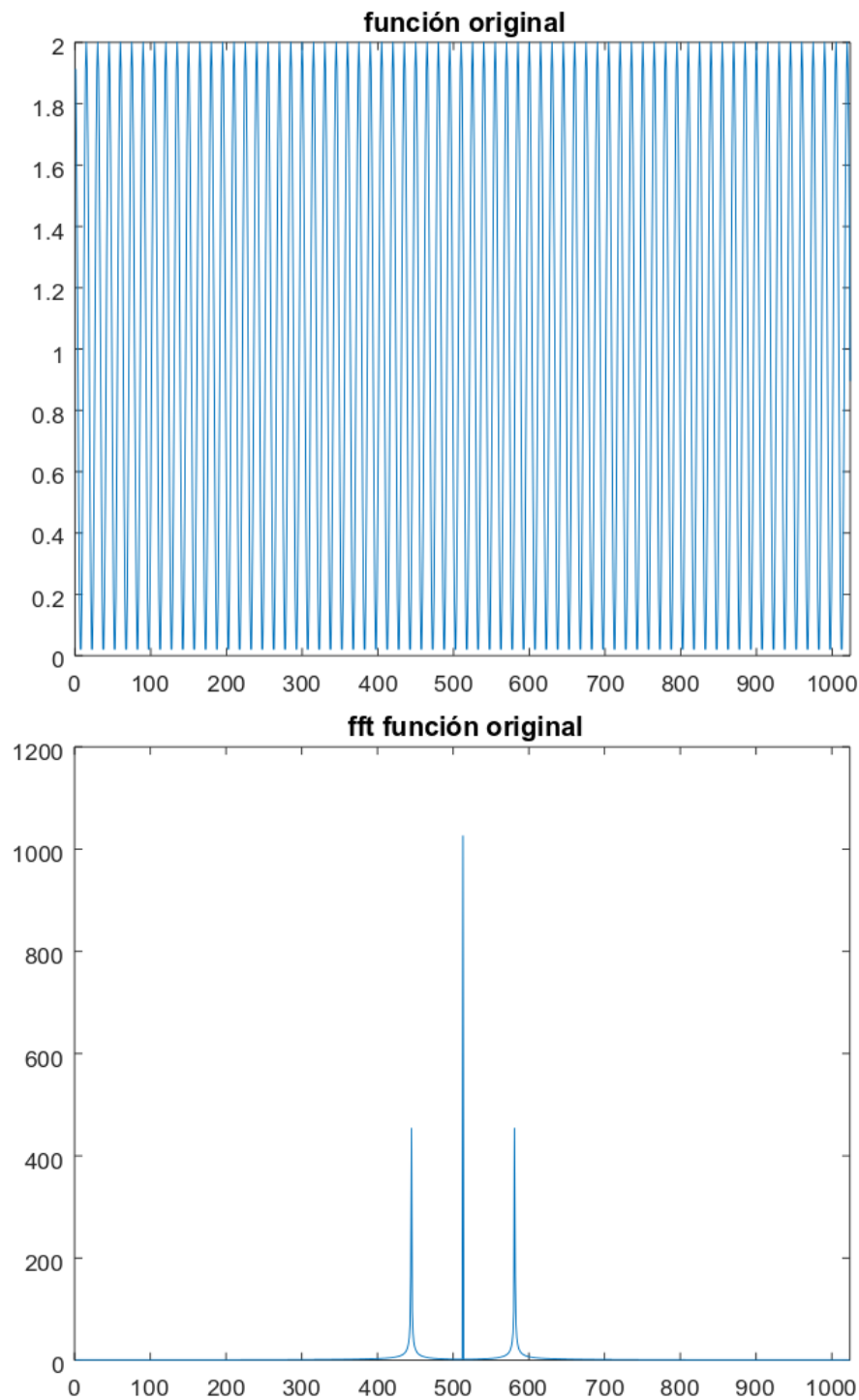


Figura 14.3: Arriba: función $1 + \cos(2\pi f x)$, donde el $\cos(\quad)$ tiene un periodo de 15 pixeles en 1024 pixeles total, esto es hay 68.27 ciclos completos en la gráfica. Abajo: la transformada de Fourier de esta función muestra que los 3 picos ya no son de 1 pixel de ancho cada uno, y con las amplitudes diferentes a la ecuación (14.20).

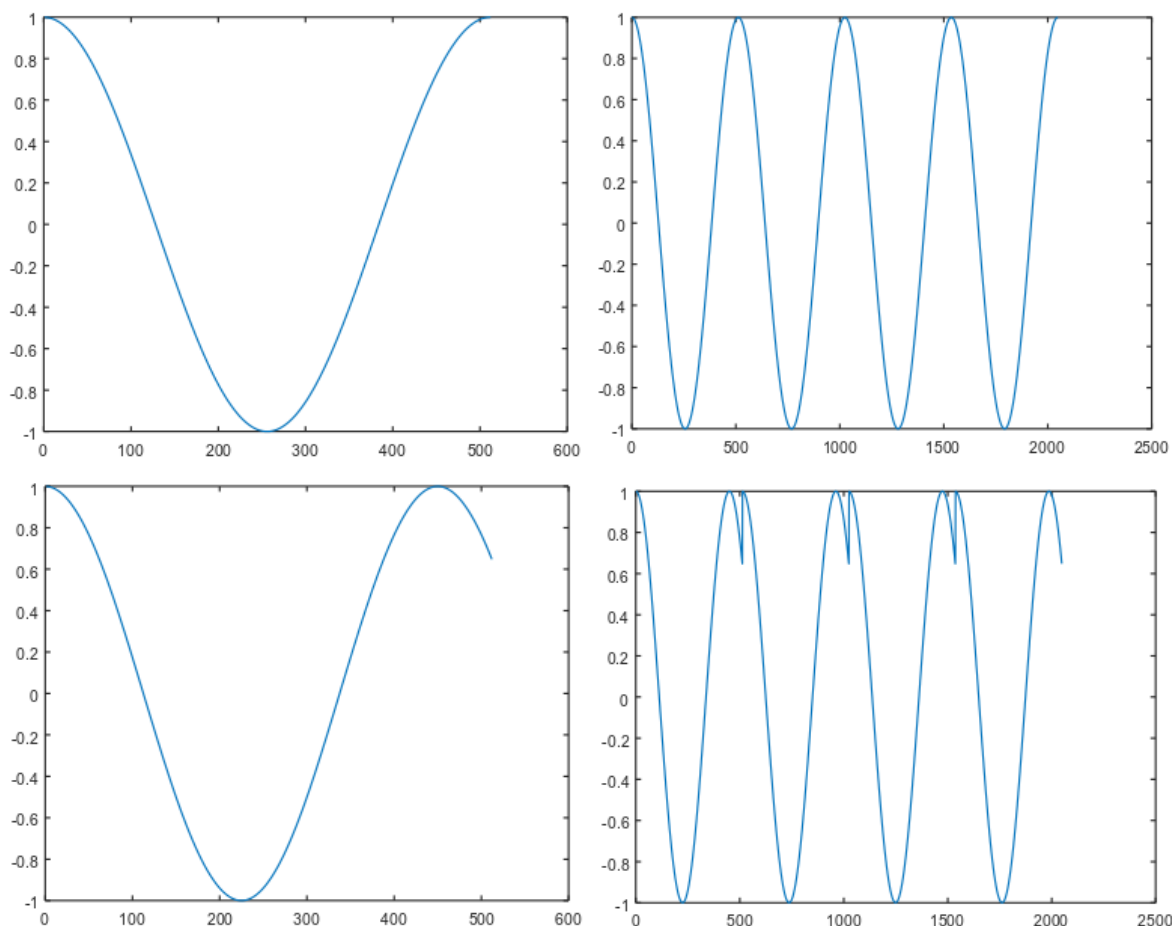


Figura 14.4: Arriba izquierda: un periodo de una función $\cos(\quad)$ con un periodo de 512 pixeles en 512 pixeles largo total; arriba derecha: 4 periodos del $\cos(\quad)$ de un periodo completo; abajo izquierda: un periodo de una función $\cos(\quad)$ con un periodo de 450 pixeles en 512 pixeles largo total; abajo derecha: 4 periodos del $\cos(\quad)$ de periodo 450 pixeles mostrando los brincos en la función.

Una forma de reducir este efecto es usando un filtro, para quitar los brincos en la función de $\cos(\quad)$, multiplicando por cero en los límites del arreglo. Por ejemplo, la función de Hanning:

$$w(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{N} \right) \right), \quad (14.22)$$

donde n es el índice en el arreglo, y N es el número total de puntos en el arreglo. La Figura 14.5 muestra el ejemplo de la Figura 14.3, incluyendo el filtro de Hanning, y su transformada de Fourier. Se puede ver que se recupera mucho mejor el ancho (1 pixel) y las amplitudes (1 a 0.48) de los picos en la transformada de Fourier.

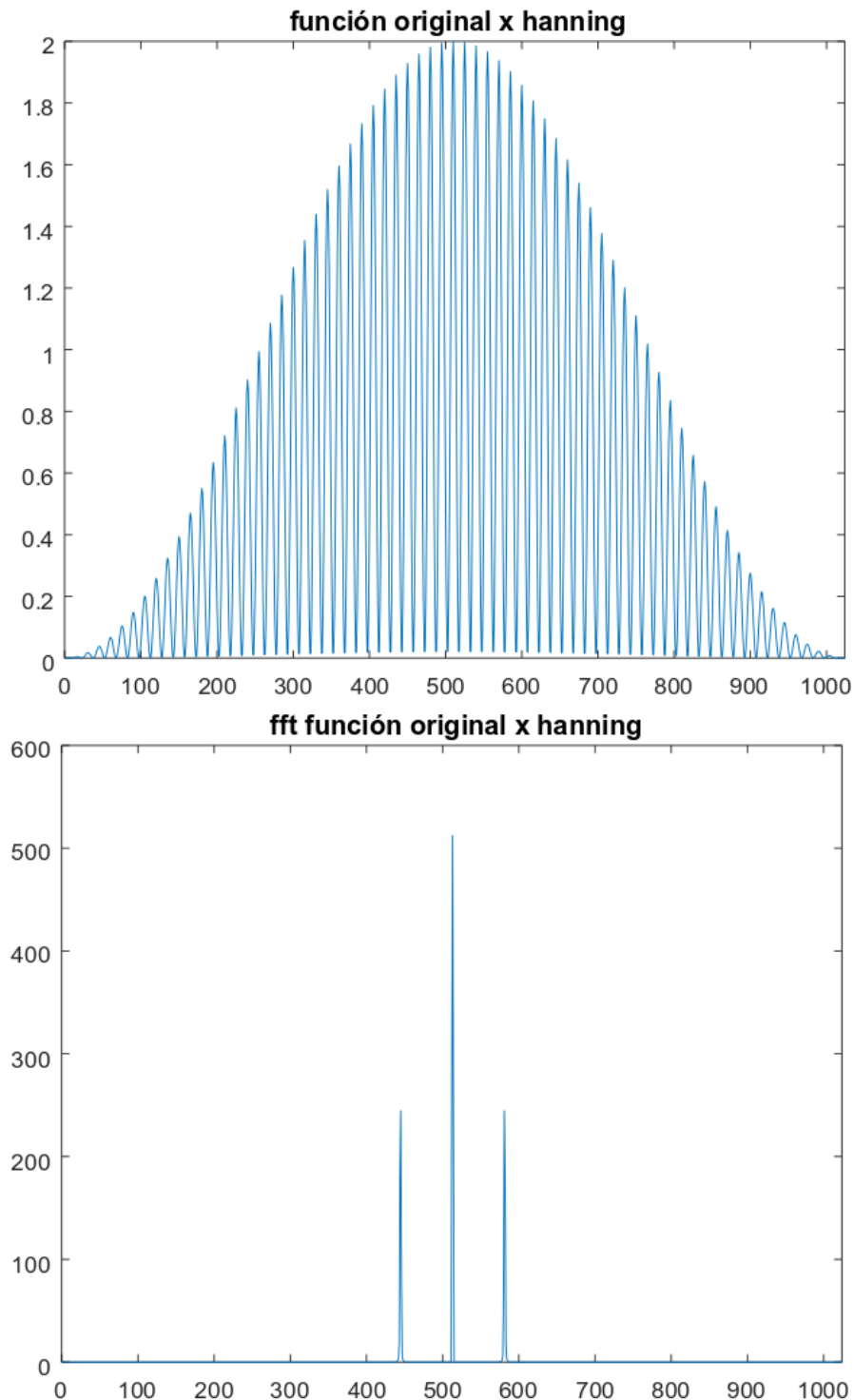


Figura 14.5: Arriba: función $1 + \cos(2\pi fx) \times \text{Hanning}$, donde el $\cos(\)$ tiene un periodo de 15 pixeles en 1024 pixeles total, esto es hay 68.27 ciclos completos en la gráfica. Abajo: la transformada de Fourier de esta función muestra que los 3 picos otra vez son de 1 pixel de ancho cada uno, y con las amplitudes cercanas a la ecuación (14.20).

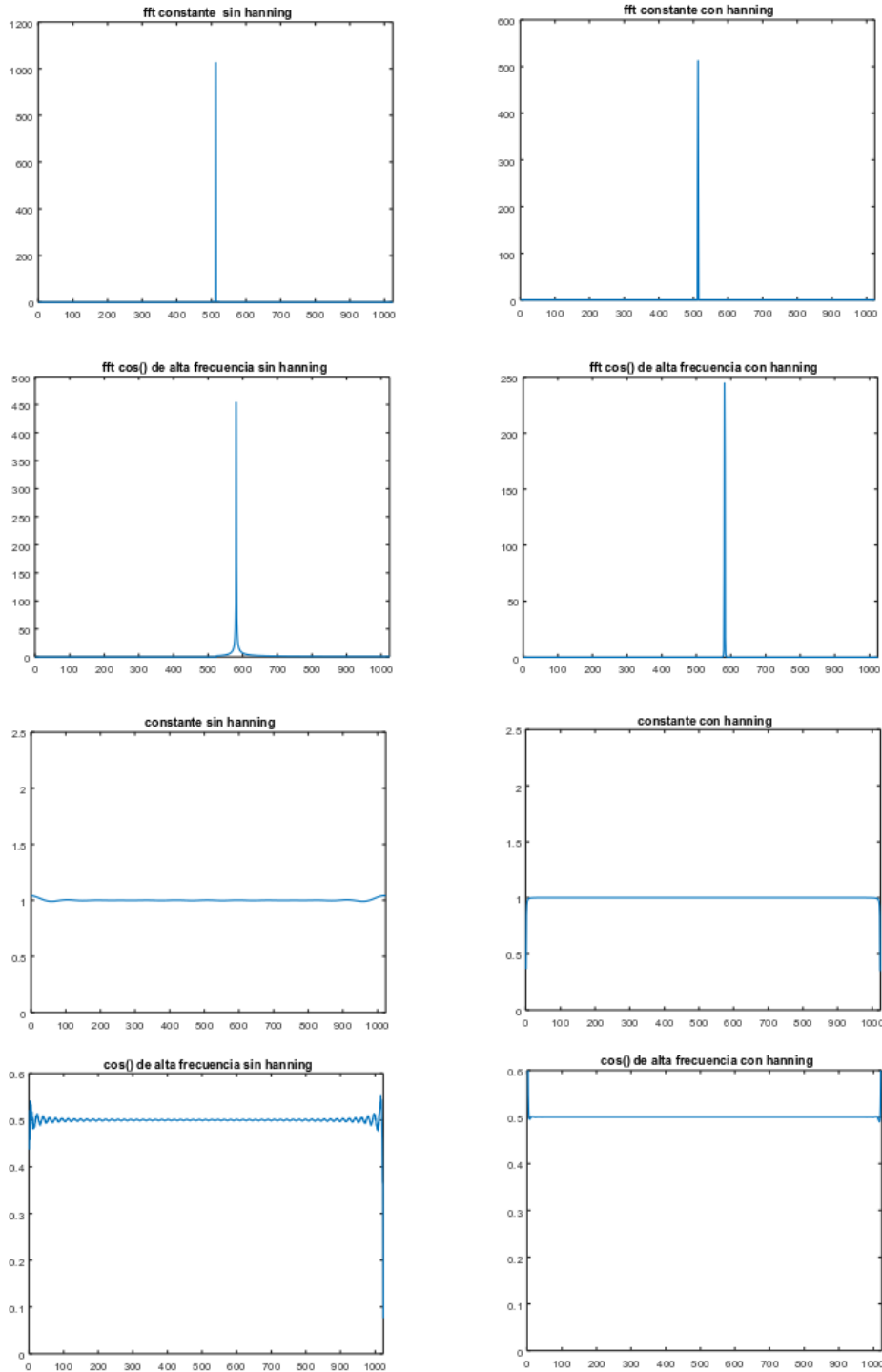


Figura 14.6: Recuperación de los dos componentes de la función $1 + \cos(2\pi f x)$, donde el $\cos(\quad)$ tiene un periodo de 15 pixeles en 1024 pixeles total, esto es hay 68.27 ciclos completos en la gráfica. Izquierda: sin utilizar el filtro de Hanning; Derecha: con el filtro de Hanning. De arriba a abajo: el componente solo de la frecuencia cero; el componente solo de la frecuencia f ; la amplitud del componente de frecuencia cero; la amplitud del componente de frecuencia f .

Ahora, por ejemplo, si queremos recuperar la amplitud de los dos componentes de la función original (la constante 1 y el término $\cos(\quad)$) en todo el rango de píxeles, tenemos que separar el pico central de la transformada de Fourier para la constante, y uno de los picos en la frecuencia del $\cos(\quad)$ para el segundo término (solo será la mitad de la amplitud del término porque no tomemos en cuenta el otro pico de la transformada del $\cos(\quad)$). Luego se hace la transformada de Fourier inversa para cada término. En el caso de utilizar el filtro de Hanning, la función inicial es:

$$f(x) = (1 + \cos(2\pi f x))w(x), \quad (14.23)$$

con $w(x)$ dado por la ecuación (14.22). La transformada de Fourier de esta ecuación es:

$$F(u) = \left(\delta(u) + \frac{1}{2}(\delta(u + f) + \delta(u - f)) \right) \otimes W(u), \quad (14.24)$$

entonces aislando solo uno de las funciones $\delta(\quad)$ y haciendo la transformada de Fourier inversa da:

$$F_0(u) = \delta(u) \otimes W(u), \quad f_0(x) = 1 w(x), \quad (14.25)$$

$$F_1(u) = \frac{1}{2} \delta(u - f) \otimes W(u), \quad f_1(x) = \frac{1}{2} \exp(-i2\pi f x) w(x), \quad (14.26)$$

que significa que hay que dividir punto a punto por el valor del filtro de Hanning para recuperar la amplitud de cada componente. En el caso de la ecuación (14.26), también hay que tomar el valor absoluto de $f_1(x)$ para obtener la amplitud. Esto se muestra en la Figura 14.6 para los casos de las Figuras 14.3 y 14.5. Se puede ver que hay mucho menos ruido en los resultados finales cuando se utiliza el filtro de Hanning.

14.2 Transformada de Fourier Rápida (FFT)

En la sección anterior vimos que la transformada de Fourier discreta se puede definir como:

$$F_n = \sum_{m=1}^N f_m e^{-i2\pi \frac{n m}{N}}. \quad (14.27)$$

Para calcular esta transformada de Fourier se requieren N multiplicaciones dentro de la suma sobre m y hay N diferentes valores de n requeridos. Esto da un total de N^2 multiplicaciones para calcular la transformada de Fourier. Aproximadamente, el tiempo requerido para realizar esta operación en la computadora será del orden de las multiplicaciones, que es la operación que requiere más tiempo. Entonces, el tiempo requerido para realizar este cálculo será aproximadamente proporcional a N^2 , es decir, el tiempo de cálculo aumenta rápidamente con el número de puntos en la discretización de la función.

Sin embargo, hay una forma de reducir el número de multiplicaciones necesarias en este cálculo (Press *et al*, 1992; Cochran *et al*, 1967). Primero se divide la suma en la ecuación (14.16) en dos partes; una que incluye los valores de m pares y la otra que incluye los valores de m nones:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \sum_{p=1}^{N/2} f_{2p} e^{-i2\pi \frac{n 2p}{N}} + \sum_{p=1}^{N/2} f_{(2p+1)} e^{-i2\pi \frac{n (2p+1)}{N}} \\
 &= \sum_{p=1}^{N/2} f_{2p} e^{-i2\pi \frac{2}{N} np} + e^{-i2\pi \frac{n}{N}} \sum_{p=1}^{N/2} f_{(2p+1)} e^{-i2\pi \frac{2}{N} np}.
 \end{aligned}
 \tag{14.27}$$

Aquí, cada uno de los términos requiere $N/2$ multiplicaciones y, ambos son periódicos en $N/2$ (por el factor $N/2$ que aparece en los exponenciales). Entonces, cada término a la derecha requiere de $N/2$ multiplicaciones y hay $N/2$ valores de n que hay que calcular, que dan un total de $N/2 \times N/2 = N^2/4$ multiplicaciones. Hay dos de estos términos a la derecha de la ecuación, entonces el total de multiplicaciones es $2 \times N^2/4 = N^2/2$. Lo único que se ha hecho aquí es revelar los cálculos repetidos en la suma original por la simetría del cálculo. Pero, ahora, se puede repetir este proceso en cada una de las dos partes de la suma, renumerando cada una y dividiendo en partes pares e impares, para reducir las multiplicaciones más, y luego se puede repetir el proceso sobre estas sumas, etc. Si el valor $N = 2^x$ (que será 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...), se puede mostrar que el número de multiplicaciones requeridas es del orden de:

$$N \log_2 N = Nx, \tag{14.28}$$

y, por ejemplo, para $N = 512 = 2^9$, $N^2 = 262144$ y $N \log_2 N = 4608$ y:

$$\frac{N^2}{N \log_2 N} \approx 57, \quad (14.29)$$

es decir, utilizando el algoritmo de FFT se reduce el tiempo de cálculo 57 veces. (Esta es aproximadamente la diferencia entre minutos y horas de tiempo corrido; lo que tardaría 2 horas, con el FFT tarda 2 minutos). Es importante que, para que funcione este método, N debe ser una potencia de 2.

14.3 Wavelets

Para analizar una señal con la transformada de Fourier, necesitamos esperar a detectar toda la señal. La transformada de Fourier de esta señal nos da información sobre el contenido de frecuencias de toda la señal; no hay información sobre la evolución de los componentes de frecuencias. Un ejemplo donde la evolución de las señales es importante es en la música, donde la variación de la frecuencia de la señal con el tiempo es lo que nos da las notas tocadas en cada momento. En la óptica, los pulsos de luz que se producen en láseres en muchas ocasiones contienen *chirp*, esto es una variación de la frecuencia con el tiempo dentro del pulso (Siegman, 1986).

Una idea para analizar la variación en el tiempo es utilizar la transformada de Fourier con una ventana en el tiempo (o posición), para que sólo una sección de la señal contribuya al resultado final. En este caso, si la función original es $f(x)$, la función con ventana se escribe $w(x - x_0)f(x)$, donde $w(x - x_0)$ es una función angosta que tiene un valor no-cero en el rango $x_0 - \tau < x < x_0 + \tau$, y cuyo centro está en la posición $x = x_0$. Ejemplos de una función de ventana son una función Gaussiana o la función:

$$w(x) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi x), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{para otros casos.} \end{cases} \quad (14.30)$$

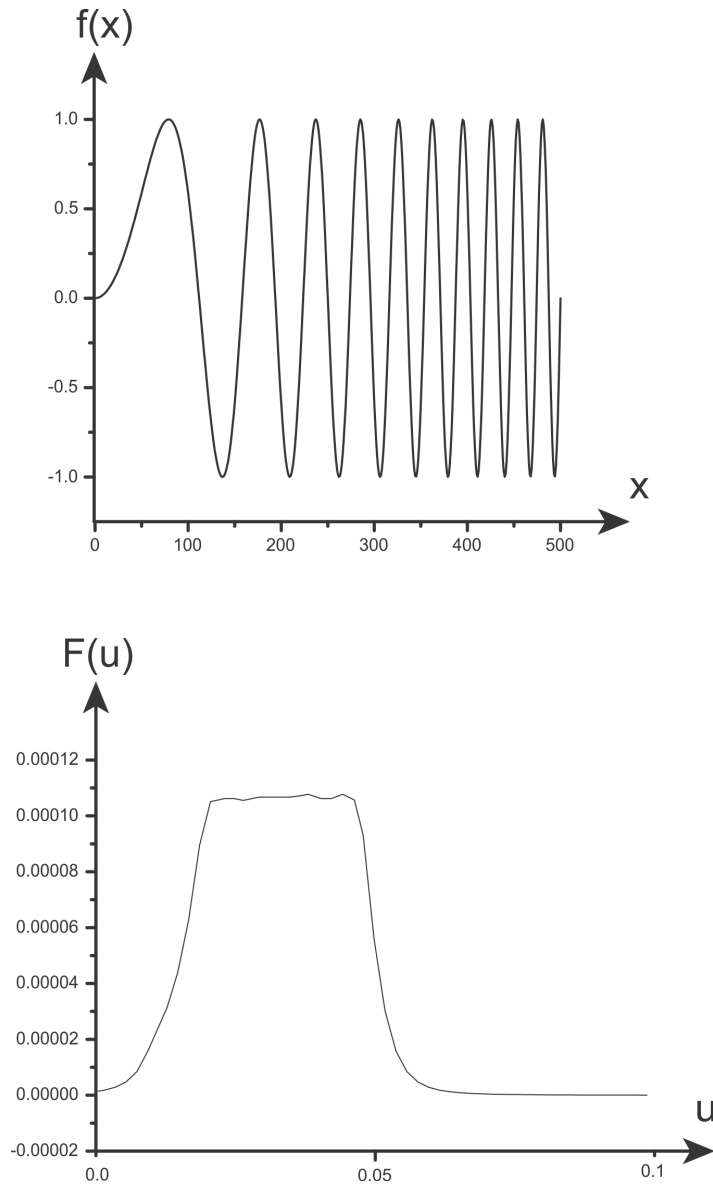


Figura 14.7: Una función chirp (arriba) y su transformada de Fourier (abajo)

La transformada de Fourier de la función con ventana es:

$$F_w(u, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x - x_0) f(x) e^{-i2\pi ux} dx. \quad (14.31)$$

La Figura 14.7 (en la parte de arriba) muestra una función *chirp* donde la frecuencia cambia con la posición:

$$f(x) = \text{sen} \left(2\pi \left[0.1 \frac{x}{500} \right] x \right), \quad (14.32)$$

donde x va de 0 a 500. La Figura 14.7 (en la parte de abajo) es la transformada de Fourier sin ventana de la función con *chirp*, mostrando el rango de frecuencias presentes en la señal total. La Figura 14.8 muestra la forma Gaussiana de la función de la ventana:

$$w(x) = e^{-\frac{x^2}{[30]^2}}. \quad (14.33)$$

Las Figuras 14.9 y 14.10 muestran las funciones con las ventanas centradas en $x = 100$ y $x = 400$, respectivamente, y sus transformadas de Fourier. Se puede ver que la transformada de Fourier se mueve a frecuencias más altas a posiciones más grandes. Así se puede obtener información sobre la evolución de las frecuencias presentes en la señal.

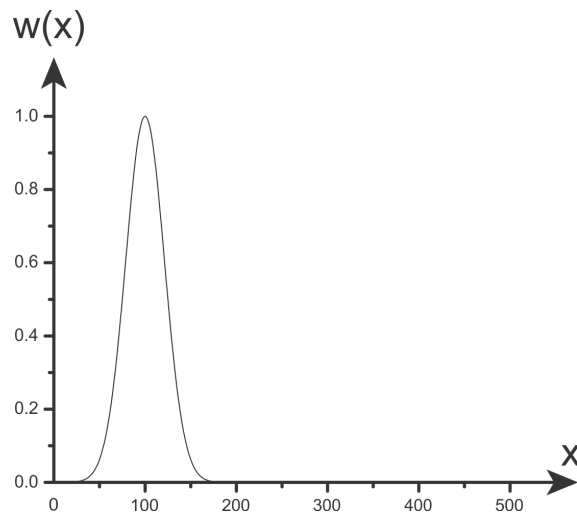


Figura 14.8: La forma de la función de la ventana

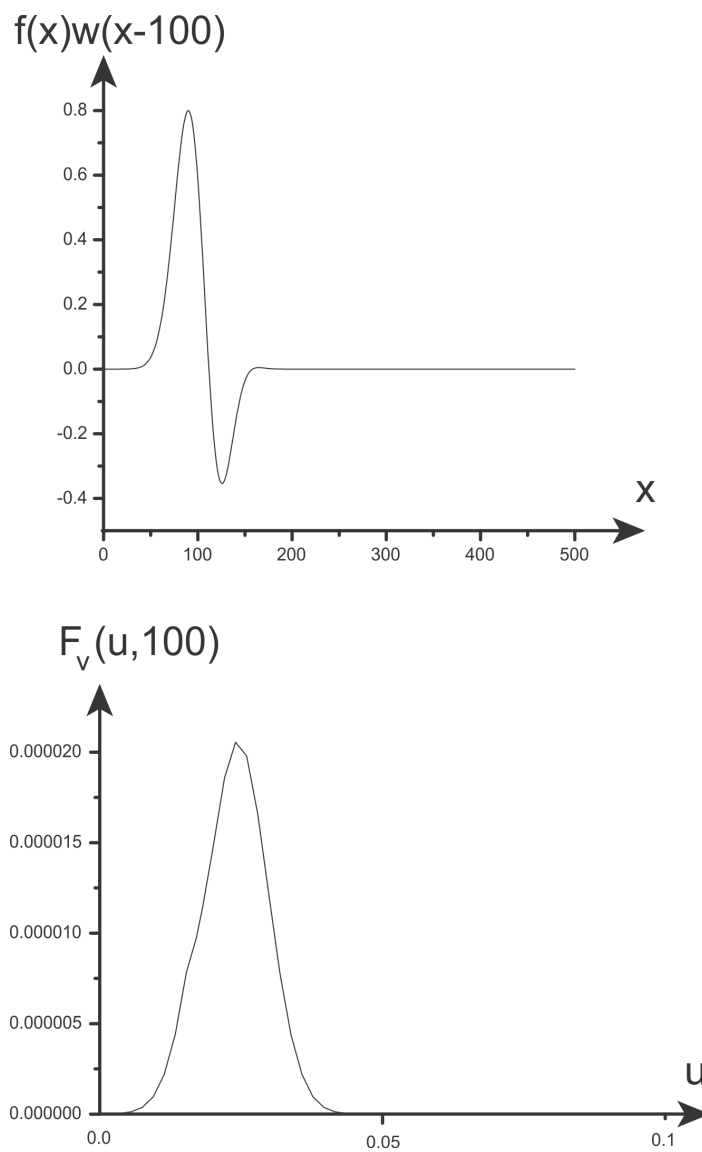


Figura 14.9: La función chirp con la ventana en $x = 100$ (arriba) y su transformada de Fourier (abajo).

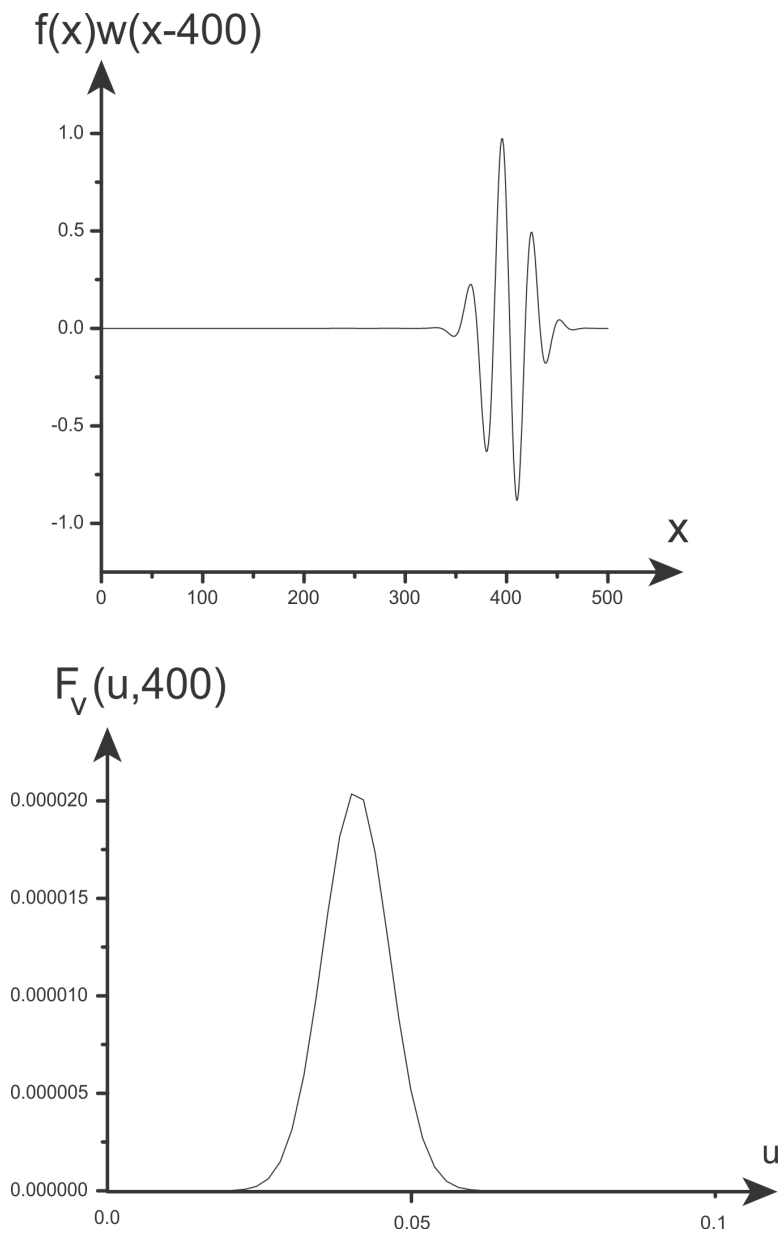


Figura 14.10: La función chirp con la ventana en $x = 400$ (arriba) y su transformada de Fourier (abajo).

Ahora, ¿cómo se puede reconstruir la función original desde las transformadas de Fourier de la función original con la ventana? Tenemos:

$$F_w(u, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x - x_0) f(x) e^{-i2\pi ux} dx, \quad (14.34)$$

entonces, utilizando la transformada de Fourier inversa:

$$w(x - x_0) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_w(u, x_0) e^{i2\pi ux} du. \quad (14.35)$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $w(x - x_0)$, e integrando sobre x_0 , obtenemos:

$$\int w^2(x - x_0) f(x) dx_0 = \iint w(x - x_0) F_w(u, x_0) e^{i2\pi ux} du dx_0, \quad (14.36)$$

$$f(x) = \frac{1}{C_w} \iint w(x - x_0) F_w(u, x_0) e^{i2\pi ux} du dx_0, \quad (14.37)$$

donde $C_w = \int w^2(x - x_0) dx_0$ y que depende solamente de la función de la ventana. Entonces, como era de esperarse, hay que integrar sobre todas las posiciones de las ventanas, además de las frecuencias para reconstruir la función original.

Ahora, la función con la ventana es $w(x - x_0) f(x)$ y la transformada de Fourier de esta función es:

$$F_w(u, x_0) = (W(u) \otimes F(u)) e^{-i2\pi ux_0}, \quad (14.38)$$

entonces la función de la ventana define el ancho de las funciones en ambos espacios. Ahora, sabemos que, si la función en el espacio original es angosta, la función en el espacio de Fourier es ancha, y viceversa. También podemos asociar el ancho de la función en el espacio original con la resolución en este espacio (si la ventana es más angosta, la función es más localizada en este espacio), y el ancho de la función en el espacio de Fourier con la resolución en este espacio. Ahora,

para describir un pico muy angosto en el tiempo, se requiere de muchas frecuencias: $W(u)$ tiene que ser muy ancho, y $w(x)$ tiene que ser muy angosto; mientras que, para describir variaciones lentas en la señal, se requiere de una función $w(x)$ muy ancha y, por ende, una función $W(u)$ angosta. Esto es, estos dos casos son exclusivos, no se pueden hacer los dos al mismo tiempo.

La definición de un *wavelet* es (Mix y Olejniczak, 2003; Foufoula-Georgiou y Kumar, 1994; Van den Berg, 1999):

$$\varphi_{s,t}(x) = |s|^{-p} \varphi\left(\frac{x-t}{s}\right), \quad (14.39)$$

donde t es la posición en el eje x donde está centrada la función del *wavelet* $\varphi(\quad)$, y s es la escala del *wavelet*. La Figura 14.11 muestra dos ejemplos de posibles funciones del *wavelet*; se puede ver que son funciones oscilatorias limitadas en el espacio, entonces son como las transformadas de Fourier con ventana. La transformada del *wavelet* es la descomposición de la función de interés en una suma de estos *wavelets* en diferentes posiciones y con diferentes escalas:

$$\tilde{f}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{s,t}(x) f(x) dx. \quad (14.40)$$

Cuando s es grande tenemos una función del *wavelet* ancho que da información de frecuencias bajas, y que significa una resolución espacial pobre y una resolución en frecuencia buena. Cuando s es pequeño tenemos una función del *wavelet* angosta que da información sobre frecuencias altas, y una resolución espacial buena y una resolución en frecuencia pobre. Esta situación: frecuencias altas con buena resolución espacial y frecuencias bajas con una pobre resolución espacial, es una situación importante en muchas áreas, e.g., percepción remota donde se requiere localizar la estructura fina (altas frecuencias) con mucha precisión y las frecuencias bajas no son de mucho interés, o, en general, una señal de frecuencias altas sobrepuesta sobre un fondo que varía lentamente que no es de interés.

En resumen, los *wavelets* permiten la buena localización de frecuencias altas y una pobre localización de frecuencias bajas. La fórmula para recuperar la función original desde las transformadas del *wavelet* es:

$$f(x) = \iint \tilde{f}(s, t) \varphi_{s,t}(x) ds dt. \quad (14.41)$$

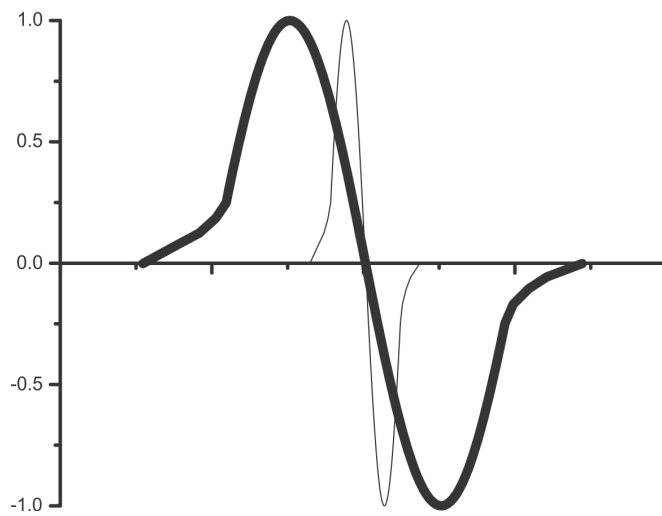
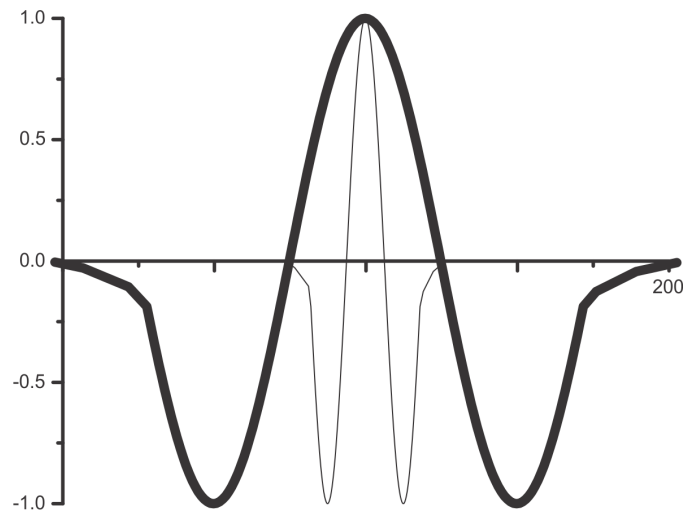


Figura 14.11: Dos funciones del wavelet. Arriba: la función del sombrero Mexicano. Abajo: una segunda función del wavelet. Las líneas fuertes son para una escala s grande y las líneas claras para una escala pequeña.

14.4 Deconvolución

Para sistemas ópticos con luz incoherente espacialmente, sabemos que:

$$i(x, y) = s(x, y) \otimes o(x, y), \quad (14.36)$$

donde $i(x, y)$ es la imagen, $s(x, y)$ es el efecto del sistema (el PSF) y $o(x, y)$ es el objeto original. Lo que medimos es la imagen $i(x, y)$, y muchas veces sabemos el actuar del sistema $s(x, y)$, entonces, podemos recuperar el objeto original. Primero tomamos la transformada de Fourier para obtener (Gaskill, 1978):

$$I(u, v) = S(u, v)O(u, v), \quad (14.37)$$

y podemos despejar el espectro del objeto:

$$O(u, v) = \frac{I(u, v)}{S(u, v)}, \quad (14.38)$$

es decir, tenemos que filtrar con una función $1/S(u, v)$.

Pero:

- $S(u, v)$ es una función limitada en su ancho, fuera de un cierto rango tendremos $S(u, v) = 0$ y el inverso no está bien definido. Además, puede haber puntos donde $S(u, v) = 0$ dentro de este rango.
- Una imagen siempre tiene ruido. Este ruido es más importante donde la señal es pequeña, entonces, en estas zonas, el filtraje amplificará el ruido. Esto significa que habrá mucho ruido en los resultados finales.

Para reducir el ruido en el resultado final se puede utilizar el filtro de Wiener (Helstrom, 1967). Tenemos:

$$i(x, y) = s(x, y) \otimes o(x, y) + n(x, y), \quad (14.39)$$

donde $n(x, y)$ representa el ruido en la señal. Definiendo el espectro de potencia como:

$$\Phi_o(u, v) = \frac{|O(u, v)|^2}{\iint |O(u, v)|^2 du dv},$$

$$\Phi_N(u, v) = \frac{|N(u, v)|^2}{\iint |N(u, v)|^2 du dv},$$

el filtro que minimiza el error entre el objeto original y el objeto obtenido por el proceso de filtraje es:

$$H(u, v) = \frac{S^*(u, v)}{|S(u, v)|^2 + \{\Phi_N(u, v)/\Phi_o(u, v)\}}, \quad (14.40)$$

que es el filtro de Wiener.

Para mejorar el resultado se puede utilizar un método iterativo para recuperar el objeto (Morris *et al*, 1987):

1. Se propone una aproximación al objeto $o'(x, y)$
2. Se calcula la imagen con la propuesta del punto 1. $i'(x, y) = o'(x, y) \otimes s(x, y)$.
3. Se compara $i'(x, y)$ con $i(x, y)$. Si son suficientemente similares, se termina el proceso, si no, se continua al punto 4.
4. Se calcula $o''(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}(I(u, v)/H(u, v))$ (el filtro de Wiener).
5. Se toma el promedio de $o''(x, y)$ y $o'(x, y)$ como una nueva estimación del objeto.
6. Se regresa al punto 2.

14.4.1 Deconvolución a ciegas

¿Qué pasa si no sabemos $s(x, y)$ ni $o(x, y)$?, por ejemplo, en el problema de distorsión de las imágenes de estrellas por la turbulencia en la atmósfera. En este caso hay que recurrir a métodos iterativos (Ayers y Dainty, 1988). La Figura 14.7 muestra un esquema del método Ayers-Dainty para este problema. Es importante notar que se utiliza el espacio real y el espacio de Fourier en este método.

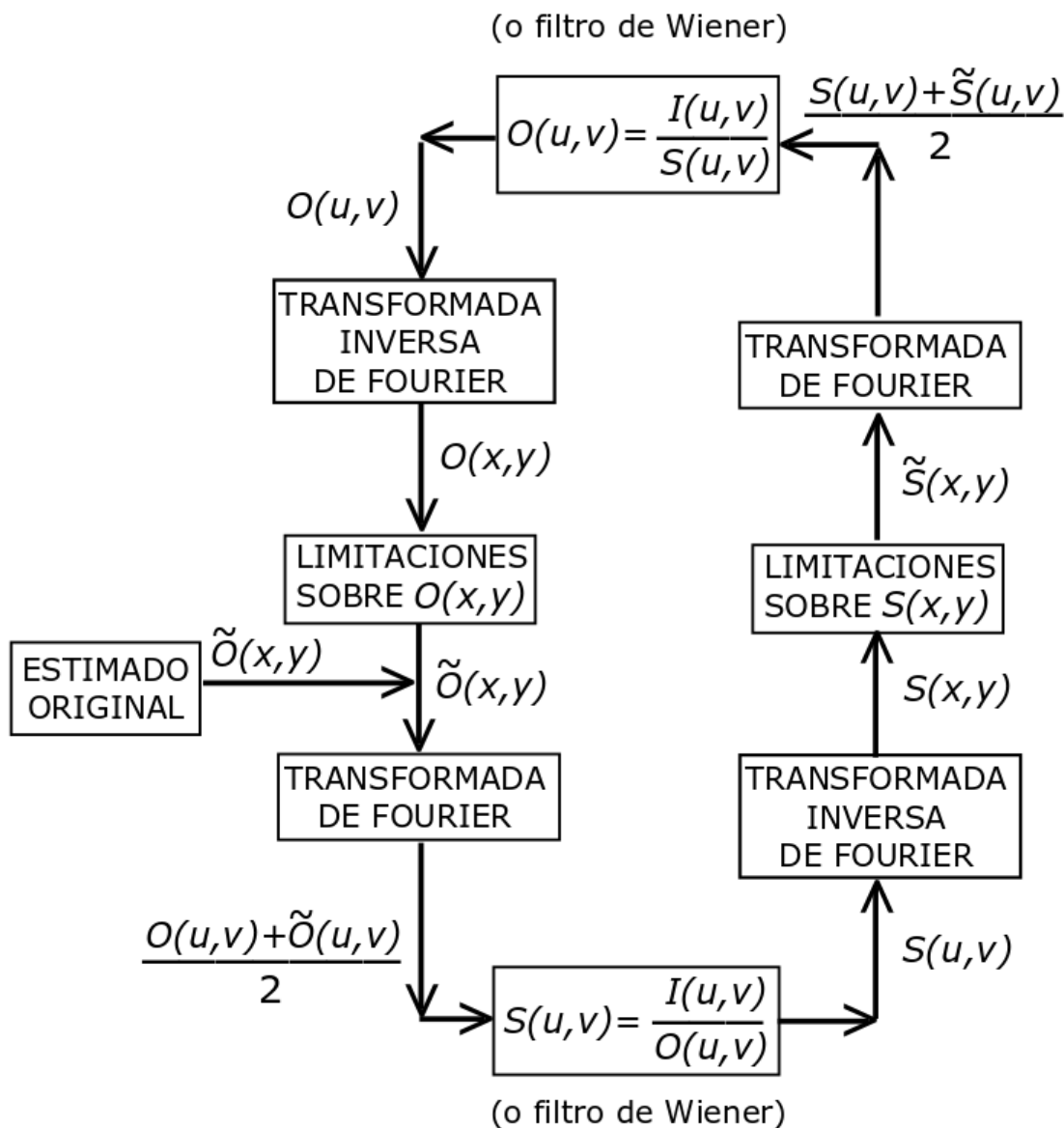


Figura 14.7: El método de Ayers-Dainty para deconvolución a ciegas.

Se mide la intensidad de la imagen $i(x, y)$, y se propone una solución para el objeto $\tilde{o}(x, y)$. Se utiliza esta estimación del objeto para obtener una estimación de la función del sistema $S(u, v)$. Se regresa al espacio real y se imponen condiciones sobre la función $s(x, y)$. Ejemplos de estas condiciones son: como intensidades, la función $s(x, y)$ debe ser positiva, o, el soporte o el tamaño de la función en el plano (x, y) está limitado a un cierto rango. Se utiliza ésta versión limitada de la función para calcular $\tilde{S}(u, v)$ y se toma el promedio de ésta y de $S(u, v)$ para calcular una estimación de $O(u, v)$. Se imponen las condiciones sobre $o(x, y)$ para obtener

una nueva estimación del objeto y se empieza el ciclo otra vez. Se continua con el ciclo hasta que los cambios en $s(x, y)$ y $o(x, y)$ son lo suficientemente pequeños.

Hoy en día no se utilizan estas técnicas en astronomía. Ahora se utiliza la técnica de óptica adaptativa para corregir el frente de onda antes de detectar la imagen de la estrella. Pero la deconvolución a ciegas ha encontrado nuevas aplicaciones, como se describe a continuación.

14.4.2 Recuperación de fase

Tenemos que:

$$F(u) = \mathfrak{F}(f(x)) = |F(u)|e^{i\phi(u)}. \quad (14.41)$$

La pregunta aquí es ¿si sabemos $|F(u)|$ podemos saber $f(x)$? es decir, hay que recuperar la fase $\phi(u)$ de la transformada de Fourier de la función $f(x)$.

Podemos escribir la autocorrelación de la función $f(x)$:

$$a(x') = \int f(x)f(x+x')dx = \mathfrak{F}^{-1}(|F(u)|^2), \quad (14.42)$$

entonces, conociendo $|F(u)|$, sabemos $a(x')$ y tenemos un problema de deconvolución (decorrelación) de las dos funciones $f(x)$ y $f(-x)$ y se puede utilizar el método descrito en la sección anterior (Seldin y Feinup, 1990).

14.4.3 Compuerta Óptica Resuelta en Frecuencia

Por sus siglas en inglés, esta técnica se conoce como FROG (Frequency Resolved Optical Gating) (Kane y Trebino, 1993; Trebino y Kane, 1993). Se utiliza este método para medir la forma de pulsos de luz ultracortos; son tan cortos que no se pueden medir directamente con detectores normales porque estos no responden lo suficientemente rápido. La Figura 14.8 muestra el arreglo experimental para esta técnica.

Escribiendo la amplitud del pulso directo como $E(t)$ y el pulso con retraso como $E(t - \tau)$, la salida del medio no-lineal dependerá de la forma del medio. Suponiendo un medio Kerr, la salida será proporcional a:

$$E_{sig}(t, \tau) \propto E(t)|E(t - \tau)|^2. \quad (14.43)$$

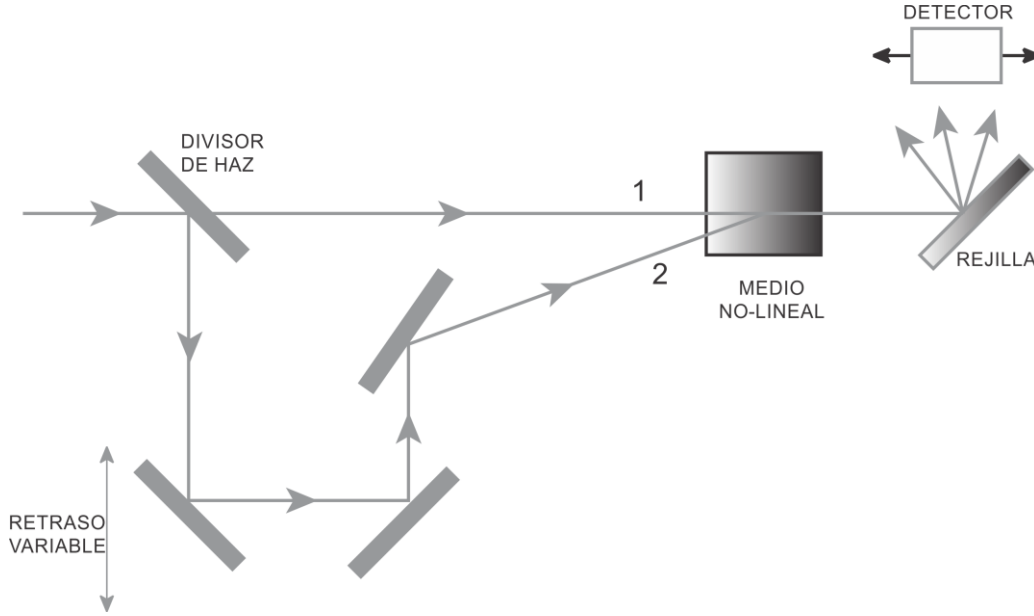


Figura 14.8: El arreglo experimental para la técnica de FROG.

La señal que llega al detector es la intensidad difractada en la rejilla, dada por la transformada de Fourier de la salida del medio no-lineal:

$$I_{FROG}(\omega, \tau) \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_{sig}(t, \tau) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (14.44)$$

Entonces, podemos escribir este problema como un problema de deconvolución a ciegas:

$$\mathfrak{F}^{-1}(I_{FROG}(\omega, \tau)) = \mathfrak{F}^{-1}\left(\left|\mathfrak{F}(E_{sig}(t, \tau))\right|^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{sig}(t, \tau) E_{sig}^*(t + t', \tau) dt, \quad (14.45)$$

donde se ha utilizado el teorema de correlación otra vez. Una vez que sabemos $E_{sig}(t, \tau)$, se puede calcular $E(t)$, amplitud y fase, de la ecuación (14.43), que es la forma original del pulso.

14.5 Óptica difractiva

En los capítulos 4 y 5 vimos cómo calcular el patrón de difracción si sabes la forma de la abertura. En esta sección veremos el problema inverso: dado un patrón de difracción deseado, cómo se puede calcular y construir la abertura necesaria. Esto es, cómo obtienes un patrón de difracción deseado. Para estas aplicaciones se han utilizado muchos medios diferentes para construir las aberturas, desde impresión sobre películas transparentes y photorreducción, a técnicas más precisas, como técnicas litográficas. Hoy en día se utilizan moduladores de luz, que son más flexibles en su uso y que se pueden utilizar para patrones dinámicos. Estos aparatos pueden estar basados en cristales líquidos, efectos electroópticos, efectos magnetoópticos, espejos deformables, entre otras técnicas. Un aspecto común entre estos moduladores es que pueden controlar o la fase o la intensidad de la luz que transmite, *pero no las dos al mismo tiempo*. Entre las aplicaciones más importantes de este tipo de técnicas es la de producción de haces de luz con propiedades especiales, o la producción de distribuciones de luz para ser utilizado en el atrapamiento y/o manipulación de partículas (pinzas ópticas).

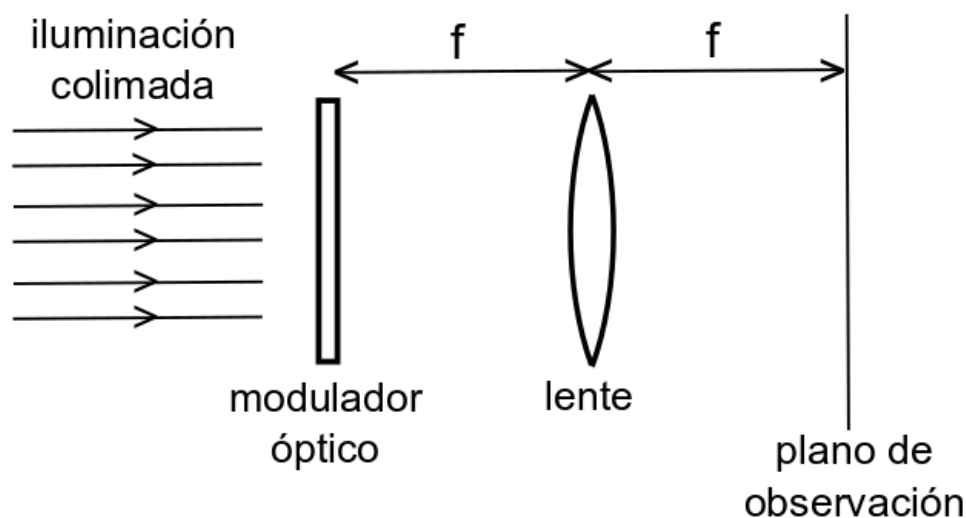


Figura 14.9: El arreglo experimental para la técnica de óptica difractiva utilizando un modulador óptico.

El arreglo experimental para utilizar un modulador óptico para producir un patrón de luz deseado se muestra en la Figura 14.9. Un haz de luz, $A_0(x', y')$, incide sobre el modulador en el plano $(x', y', 0)$. Después del modulador hay una lente posicionada a su distancia focal, f , del modulador. El plano de Fourier, donde queremos tener la distribución de intensidad deseada, está a la distancia focal de la lente en el plano $(x, y, 2f)$. Sabemos que la relación entre la intensidad en el plano de Fourier, $I(x, y, 2f)$, y la distribución de amplitud en el plano del modulador es:

$$I(x, y, 2f) = I_0 |\mathfrak{F}(A_0(x', y')m(x', y'))|^2, \quad (14.46)$$

donde $m(x', y')$ es la modulación de la amplitud por el modulador óptico. Ahora, suponiendo una onda plana de amplitud 1 incidente normalmente sobre el modulador, $A_0(x', y') = 1$, podemos reorganizar los términos de la ecuación (14.46), para obtener:

$$m(x', y') = \frac{1}{I_0} \mathfrak{F}^{-1} \left(\sqrt{I(x, y, 2f)} \right), \quad (14.47)$$

esto es, la modulación es simplemente la transformada de Fourier inversa de la raíz cuadrada de la distribución de intensidad que queremos en el plano de Fourier. La Figura 14.10 muestra un ejemplo de la aplicación de la ecuación (14.47). La distribución de intensidad deseada es un cuadrado, la raíz cuadrada de la intensidad, en este caso, también es un cuadrado, y la transformada inversa de Fourier de un cuadrado es una función $\text{sinc}()$, como se muestra en la Figura 14.10. Ahora, como pueden ver, la función $\text{sinc}()$ va negativa para algunos valores de la variable de posición. Sin embargo, ya indicamos que los moduladores controlan o la fase o la intensidad del haz transmitido, no las dos. Esto significa que no podemos cambiar el signo de la amplitud, si solo controlamos la intensidad; y si controlamos la fase, podemos obtener los cambios de signo en la amplitud (que son cambios de 180° en la fase), pero no podemos modular la intensidad (o amplitud) para obtener la distribución del $\text{sinc}()$ en la Figura 14.10. No se puede utilizar la ecuación (14.47) para calcular las aberturas requeridas debido a las limitaciones de los moduladores, y se requiere otro método de cálculo.

Otra forma de calcular la abertura es con un método numérico. El campo en el plano de Fourier es:

$$U(x, y, f) = \frac{iAe^{i2kf}}{\lambda f} e^{kdn\Delta_0} \mathfrak{F}(m(x', y'))_{u=\frac{x}{\lambda f}, v=\frac{y}{\lambda f}}, \quad (14.48)$$

y expandiendo la transformada de Fourier, obtenemos:

$$U(x, y, f) = \frac{iAe^{i2kf}}{\lambda f} e^{kdn\Delta_0} \iint_{-\infty}^{\infty} m(x', y') e^{-i2\pi\left(\frac{x'x}{\lambda f} + \frac{y'y}{\lambda f}\right)} dx' dy'. \quad (14.49)$$

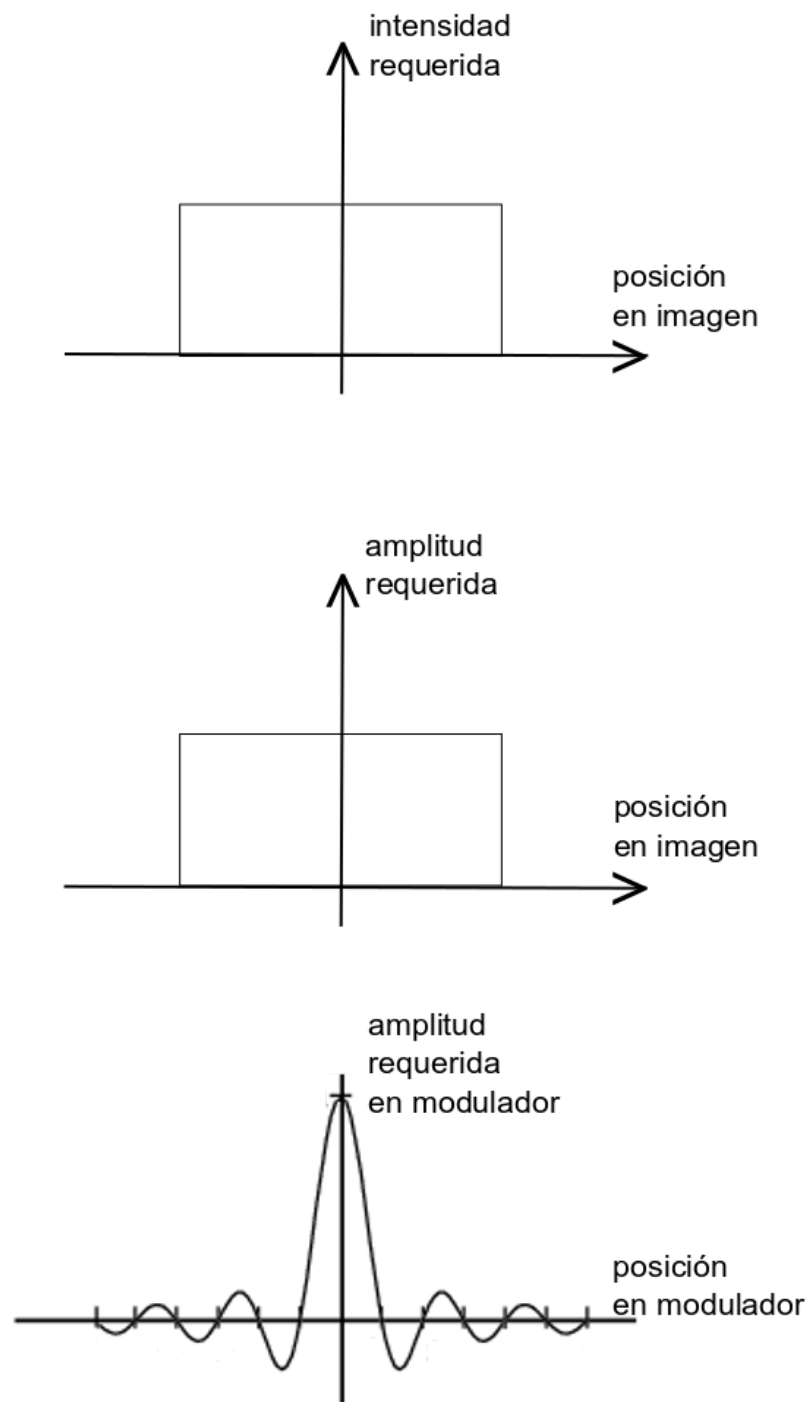


Figura 14.10: La intensidad requerida en el plano de Fourier (arriba); la amplitud requerida en el plano de Fourier (centro); la amplitud requerida en el plano del modulador de luz (abajo).

En el siguiente paso, suponemos un modulador de fase, pero también funciona para un modulador de intensidad o amplitud. La función de modulación se supone como:

$$m(x', y') = e^{i\delta(x', y')}. \quad (14.50)$$

Sin embargo, el modulador está dividido en pixeles, y la modulación es constante sobre cada pixel, entonces discretizando la función de la modulación da,

$$m(x', y') = e^{i\delta_{ij}} \text{rect}\left(\frac{x' - i\Delta x'}{\delta x'}\right) \text{rect}\left(\frac{y' - j\Delta y'}{\delta y'}\right), \quad (14.51)$$

donde δ_{ij} es el valor de fase en el pixel (i, j) del modulador, $\Delta x'$ y $\Delta y'$ son las separaciones de los pixeles en los ejes x' y y' , respectivamente, y $\delta x'$ y $\delta y'$ son los tamaños de los pixeles en los ejes x' y y' , respectivamente. Sustituyendo la ecuación (14.51) en la ecuación (14.49):

$$U(x, y, f) = \frac{iAe^{i2kf}}{\lambda f} e^{kdn\Delta_0} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta_{ij}} \text{rect}\left(\frac{x' - i\Delta x'}{\delta x'}\right) \text{rect}\left(\frac{y' - j\Delta y'}{\delta y'}\right) e^{-i2\pi\left(\frac{x'x}{\lambda f} + \frac{y'y}{\lambda f}\right)} dx' dy', \quad (14.52)$$

que se puede escribir como:

$$U(x, y, f) = \frac{iAe^{i2kf}}{\lambda f} e^{kdn\Delta_0} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} e^{i\delta_{ij}} \iint_{-\frac{\delta x'}{2}, -\frac{\delta y'}{2}}^{\frac{\delta x'}{2}, \frac{\delta y'}{2}} \text{rect}\left(\frac{x' - i\Delta x'}{\delta x'}\right) \text{rect}\left(\frac{y' - j\Delta y'}{\delta y'}\right) e^{-i2\pi\left(\frac{x'x}{\lambda f} + \frac{y'y}{\lambda f}\right)} dx' dy', \quad (14.53)$$

o:

$$U(x, y, f) = \frac{iAe^{i2kf}}{\lambda f} e^{kdn\Delta_0} \delta x' \delta y' \text{sinc}\left(\frac{\delta x' x}{\lambda f}\right) \text{sinc}\left(\frac{\delta y' y}{\lambda f}\right) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} e^{i\delta_{ij}} e^{-i2\pi\left(\frac{i\Delta x' x}{\lambda f} + \frac{j\Delta y' y}{\lambda f}\right)}. \quad (14.54)$$

En la práctica, debido a que los pixeles de los moduladores son tan pequeños, se supone que los términos $\text{sinc}()$ en esta ecuación son constantes sobre la zona del plano de observación donde hay intensidad del patrón de difracción:

$$U(x, y, f) = \frac{iAe^{i2kf}}{\lambda f} e^{kdn\Delta_0} \delta x' \delta y' \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} e^{i\delta_{ij}} e^{-i2\pi\left(\frac{i\Delta x' x}{\lambda f} + \frac{j\Delta y' y}{\lambda f}\right)}. \quad (14.55)$$

La ecuación (14.55) es utilizada en un programa iterativo para dar la intensidad deseada en el plano de observación, utilizando las fases en cada pixel del modulador δ_{ij} como variables en el ajuste. Más información de este y otros métodos de producción de patrones de difracción deseados se encuentra en (Soifer, 2013).

14.6 Función de Wigner

Una forma muy útil de analizar señales que es muy importante en la física cuántica, y que está teniendo más aplicación en la óptica, es la función de Wigner (Bastiaans, 1978; Bastiaans, 1979; Bartelt *et al*, 1989; Lohmann, 1993). La definición de esta función de una función original $f(x)$ es:

$$W(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) f^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) e^{-i2\pi x' v} dx'. \quad (14.56)$$

Se puede ver que esta función está relacionada con la transformada de Fourier, y que depende de las variables en el espacio original y en el espacio de Fourier. Podemos escribir la función de Wigner en términos de la transformada de Fourier de la función original $F(v)$. Primero, utilizando:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(v) e^{i2\pi x v} dv, \quad (14.57)$$

podemos escribir la definición de la función de Wigner como:

$$\begin{aligned}
W(x, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v') e^{i2\pi\left(x+\frac{x'}{2}\right)v'} dv' \int_{-\infty}^{\infty} F^*(v'') e^{-i2\pi\left(x-\frac{x'}{2}\right)v''} dv'' e^{-i2\pi x'v} dx'.
\end{aligned}
\tag{14.58}$$

Se puede escribir esta ecuación como:

$$\begin{aligned}
W(x, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi x' \left(\frac{v'}{2} + \frac{v''}{2} - v\right)} dx' F(v') e^{-i2\pi x v'} F(v'') e^{-i2\pi x v''} dv' dv''.
\end{aligned}
\tag{14.59}$$

Realizando la integral sobre x' obtenemos:

$$W(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{v'}{2} + \frac{v''}{2} - v\right) F(v') e^{-i2\pi x v'} F(v'') e^{-i2\pi x v''} dv' dv'',
\tag{14.60}$$

que se puede simplificar a:

$$W(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} F(2v - v'') e^{-i2\pi x(2v - v'')} F(v'') e^{-i2\pi x v''} dv''.
\tag{14.61}$$

Ahora, realizando el cambio de variables $v'' \rightarrow v - v'/2$, obtenemos:

$$W(x, v) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(v + \frac{v'}{2}\right) F\left(v - \frac{v'}{2}\right) e^{i2\pi x v'} dv'.
\tag{14.62}$$

Esta es la definición de la función de Wigner en términos de la transformada de Fourier de la función original.

La integral de la función de Wigner con respecto a v nos da:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} W(x, v) dv &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) f^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi x'v} dv dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) f^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) \delta(x') dx' = |f(x)|^2,
\end{aligned}
\tag{14.63}$$

que es la distribución de energía de la función en el espacio de x . De forma similar se puede mostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, v) dx = |F(v)|^2,
\tag{14.64}$$

que es la distribución de energía en el espectro de la función original, y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, v) dx dv = \text{energía total en la función de Wigner.}
\tag{14.65}$$

Tomando la ecuación (14.46) y buscando valores particulares de los parámetros, tenemos:

$$W(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{x'}{2}\right) f^*\left(x - \frac{x'}{2}\right) dx' = f(x) * f(-x) = f(x) \otimes f(x),
\tag{14.66}$$

es decir, en el eje x tenemos la correlación de la función $f(x)$ con sí misma pero con una inversión, que es la autoconvolución. Igualmente, sobre el eje v , de la ecuación (14.62):

$$W(0, v) = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(v + \frac{v'}{2}\right) F^*\left(v - \frac{v'}{2}\right) dv' = F(v) * F(-v) = F(v) \otimes F(v),
\tag{14.67}$$

que es la misma correlación, o la autoconvolución con la transformada de Fourier de la función $F(v)$.

Otra forma de pensar en la función de Wigner es: tomando la transformada de Fourier de la función corresponde al rotar la función de Wigner 90° para llegar desde el eje x al eje v . También, se puede mostrar que la transformada fraccional de Fourier de orden p ($0 < p < 1$) corresponde a una rotación de $(90 \times p)^\circ$ de la función de Wigner (Bartelt *et al*, 1980), es decir, se pueden representar todos los patrones de difracción (o sus correlaciones) de una abertura, obtenida con una onda incidente convergente, con una sola función, la función de Wigner.

Apéndice: Problemas y Proyectos

En este apéndice se incluyen algunos problemas y proyectos de programación que he utilizado para mis clases, como ejemplos para tareas y proyectos.

A.1 La Serie de Fourier y la Transformada de Fourier

- 1.1 Calcular los términos a_n y b_n en las series de Fourier de las funciones periódicas de periodo 1:

$$(i) f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 0.5, \\ 0 & 0.5 < x < 1, \end{cases}$$

$$(ii) g(x) = x + 1, \quad -0.5 < x < 0.5.$$

- 1.2 En un programa de computadora, graficar las series de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de la pregunta 1.1 para los casos de:

- (i) $n = 0$ y 1,
- (ii) $n = 0, 1$ y 2,
- (iii) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5,
- (iv) $n = 0, 1, 2, \dots$, y 10,
- (v) $n = 0, 1, 2, \dots$, y 50,
- (vi) $n = 0, 1, 2, \dots$, y 100.

- 1.3 Mostrar que, si una función es real y par, su transformada de Fourier es real y par. De la misma forma, describa la transformada de Fourier de una función que es real e impar.
- 1.4 Escribir una expresión para la transformada de Fourier de $f(x)\cos(\omega x)$ (una modulación de una señal cosenoidal) en términos de la transformada de Fourier de $f(x)$ que es $F(u)$.
- 1.5 Utilizar un programa de computadora para calcular y graficar la transformada de Fourier de la función $\cos(\omega x)$ para diferentes rangos de la variable x de la función (por ejemplo, calcular la transformada de Fourier de la función $\cos(\omega x)$ para dos periodos de esta función, para 4 periodos, para 10 periodos, etc., y observa si hay cambios en el resultado). Comentar sus resultados.

1.6 Calcular analíticamente las transformadas de Fourier de las funciones:

$$(i) \quad \frac{1}{2}(\delta(x-a) + \delta(x+a)),$$

$$(ii) \quad \text{sen}(2\pi vx).$$

1.7 Dado que la transformada de Fourier de la función $f(x) = \text{rect}(x)$ es $F(u) = \text{sinc}(u)$, calcular las transformadas de Fourier de las funciones:

$$(i) \quad g(x) = \text{rect}\left(\frac{x+a}{b}\right) + \text{rect}\left(\frac{x-a}{b}\right),$$

$$(ii) \quad h(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{2a+b}\right) + \text{rect}\left(\frac{x}{2a-b}\right).$$

1.8 Utilizar algún programa de computadora para calcular y graficar las funciones $g(x)$ y $h(x)$ del problema 1.7 y sus transformadas de Fourier.

A.2 Convolución

2.1 Mostrar que $\mathfrak{F}(g(x)h(x)) = G(u) \otimes H(u)$, donde $\mathfrak{F}(\)$ significa la transformada de Fourier.

2.2 La función $\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$, donde $\otimes$ significa convolución. Escribir expresiones para $\mathfrak{F}\left(\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ y $\mathfrak{F}\left(\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\right)$.

2.3 Utilizar algún programa de computadora para calcular y graficar las dos transformadas de Fourier de la pregunta 2.2.

2.4 Dibujar las funciones:

$$(i) \quad \left(\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \otimes \text{comb}\left(\frac{x}{b}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{x}{c}\right), \text{ con } a < b < c,$$

$$(ii) \quad \left(\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{comb}\left(\frac{x}{b}\right)\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{c}\right), \text{ con } a > b > c,$$

Calcular y dibujar expresiones para la transformada de Fourier de cada función.

- 2.5 Para medir una cantidad que varia en x como la función $\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$, según el teorema de muestreo, ¿con qué separación en el variable x se debe muestrear está función para poder recuperar correctamente la función $\text{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)$ original?
- 2.6 Escribir expresiones, usando convolución, para describir las aberturas mostradas en la Figura A.2.1, y calcular y dibujar sus transformadas de Fourier.

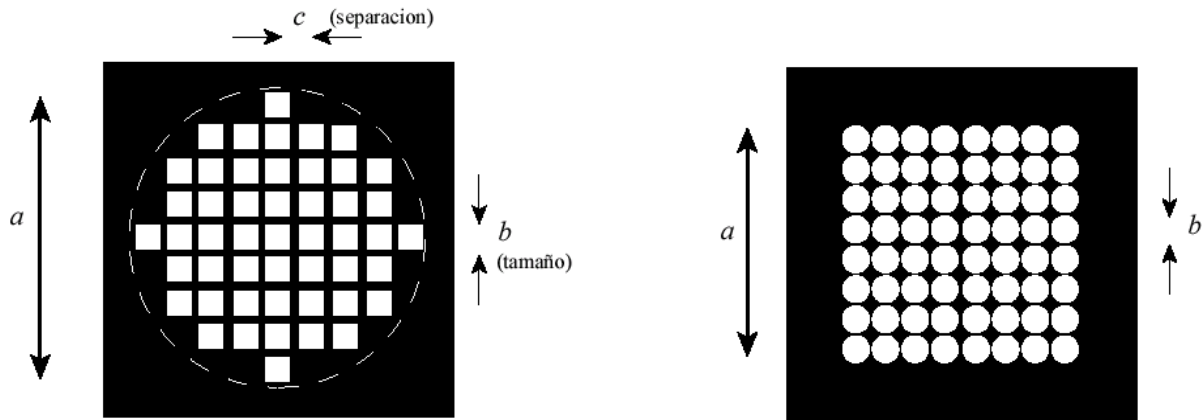


Figura A.2.1

- 2.7 Programar las aberturas de la Figura A.2.1 para el caso $b = a/8$ y $c = a/6$ en una computadora, y calcular y graficar las transformadas de Fourier.

A.3 Difracción de Fraunhofer

- 3.1 Escribir una expresión para describir la abertura de la Figura A.3.1, y calcular la transformada de Fourier y la intensidad difractada en la aproximación de Fraunhofer. Suponer que la onda incidente es una onda plana de amplitud 1 que incide normalmente y que $c > b > a$.
- 3.2 Escribir una expresión para describir la abertura mostrada en la Figura A.3.2, y calcular y dibujar su transformada de Fourier y la intensidad en el patrón de difracción de Fraunhofer. El diámetro de los círculos es igual al tamaño de un lado de los cuadrados.

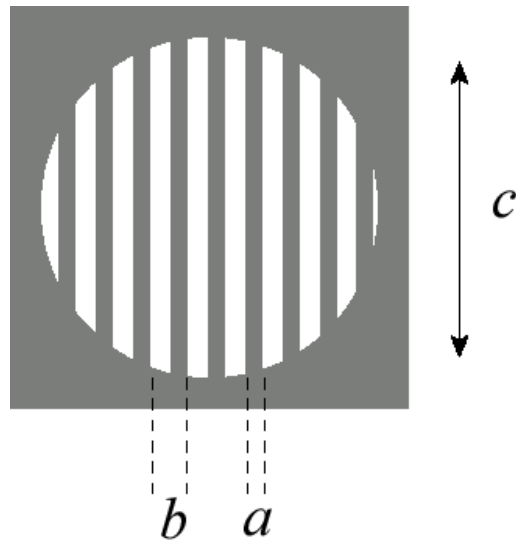


Figura A.3.1

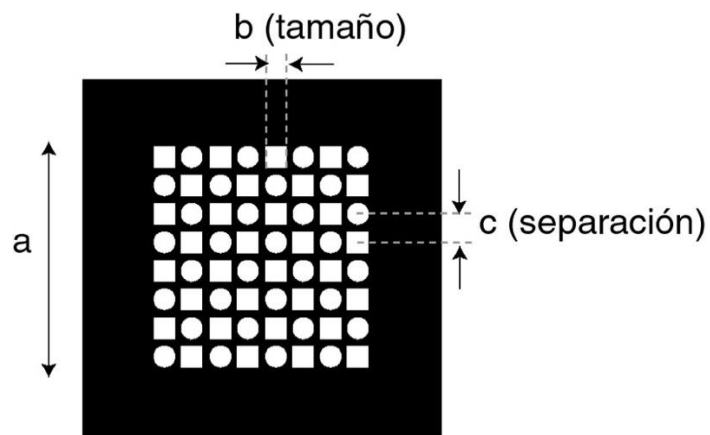


Figura A.3.2

- 3.3 Usando una programa de computadora, calcular y graficar el patrón de difracción de Fraunhofer de la abertura mostrada en la Figura A.3.2.
- 3.4 Escribir expresiones para la intensidad difractada por las aberturas dibujadas en la Figura A.3.3, usando expresiones para las transformadas de Fourier ya conocidas.

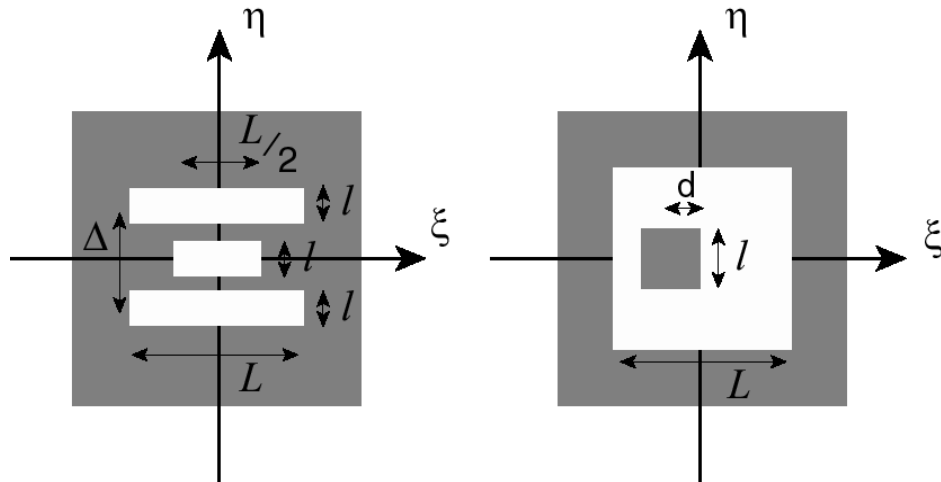


Figura A.3.3

- 3.5 Calcular y graficar en un paquete de computadora los patrones de difracción de las aberturas de la Figura A.3.3.
- 3.6 Usando la convolución en dos dimensiones, escribir una expresión para describir la abertura que se muestra en la Figura A.3.4, y calcular la transformada de Fourier y la intensidad difractada en el régimen de Fraunhofer.

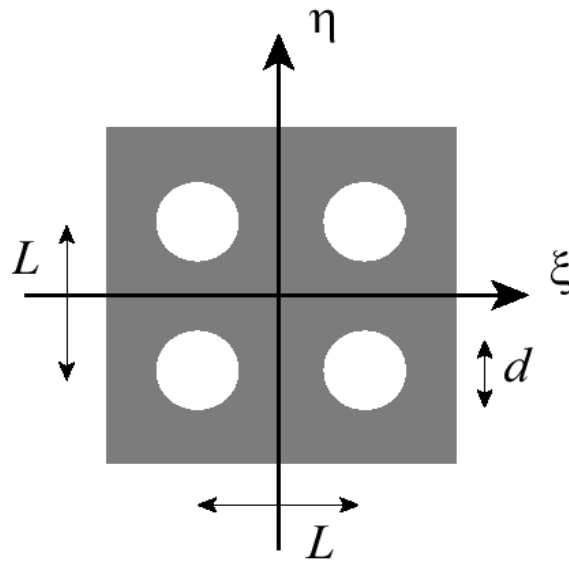


Figura A.3.4

- 3.7 Calcular y graficar en un paquete de computadora el patrón de difracción de Fraunhofer de la abertura de la Figura A.3.4.

3.8 Dibujar la abertura que tiene la función de transmisión:

$$P(\xi, \eta) = \left[\text{rect}\left(\frac{\xi}{l_\xi}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{l_\eta}\right) \right] \otimes \left[\frac{1}{\Delta} \text{comb}\left(\frac{\eta}{\Delta}\right) \delta(\xi - \xi_0) \right],$$

donde $\Delta > l_\xi, l_\eta$. Encontrar una expresión para la intensidad difractada de esta abertura con incidencia normal de una onda plana de amplitud 1. Dibujar (o graficar en un paquete de computadora), en los ejes u y v , el patrón de difracción de ésta abertura. ¿Qué pasa con las componentes del patrón de difracción cuando cambia el parámetro Δ ?

3.9 Una abertura se puede escribir como:

$$\left\{ \text{comb}\left(\frac{\xi}{a}\right) \otimes \Lambda\left(\frac{\xi}{b}\right) \right\} \text{rect}\left(\frac{\xi}{c}\right),$$

donde:

$$\Lambda\left(\frac{\xi}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{b}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{\xi}{b}\right),$$

y $\otimes$ significa convolución. Dibujar la abertura para un caso donde $c > a > 2b$. Calcular la transformada de Fourier de esta abertura y luego escribir la expresión para la intensidad de la luz difractada por la abertura si la onda incidente es una onda plana de amplitud 1 que incide normalmente y dibujar este patrón de difracción.

3.10 Utilizar un programa de computadora para calcular y graficar el patrón de difracción de la abertura de la pregunta 3.9 para el caso $b = a/4$, $c = 5a$.

A.4 Difracción de Fresnel

4.1 Calcular el patrón de difracción de Fresnel de una rendija cuadrada de lado 5 (en unidades normalizadas por el factor $\sqrt{\frac{k}{\pi z}}$), utilizando:

- (i) La espiral de Cornu (dibujar el patrón de difracción).
- (ii) Un programa de computadora, calcular la ecuación de la intensidad difractada con los integrales de Fresnel.

- 4.2 Usando una programa de computadora, calcular el patrón de difracción de Fresnel en la orilla de una placa semi-infinita (ver la Figura A.4.1), con las integrales de Fresnel. ¿Cómo cambia el patrón de difracción si, en lugar de utilizar una fuente de longitud de onda λ , se utiliza una longitud de onda $\lambda/2$?

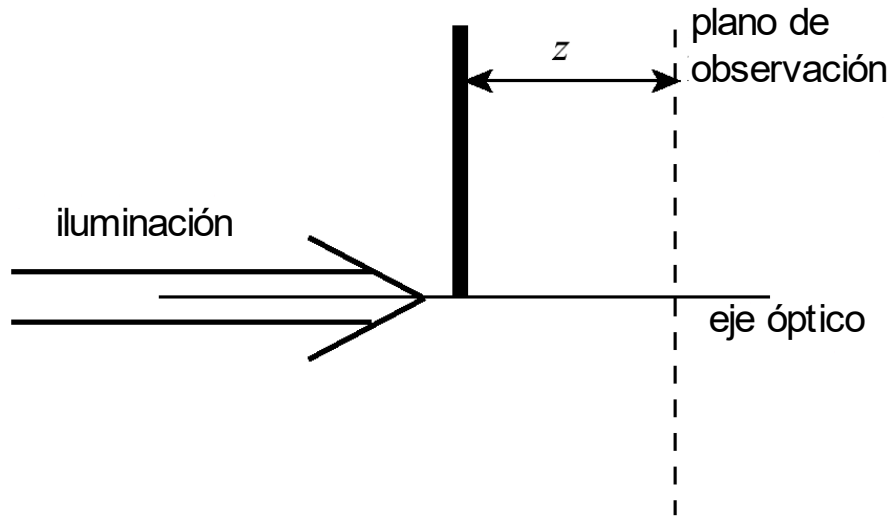


Figura A.4.1

- 4.3 Calcular, usando un programa de computadora, el patrón de difracción de Fresnel de una abertura circular, suponiendo una onda plana incidiendo normalmente, y utilizando la ecuación:

$$U(x, y) \propto \Im \left(P(x', y') \exp \left(i \frac{\pi}{\lambda z} (x'^2 + y'^2) \right) \right)_{u=\frac{x}{\lambda z}, v=\frac{y}{\lambda z}},$$

con los siguientes parámetros:

- (i) $\lambda = 632 \text{ nm}$, $z = 20 \text{ }\mu\text{m}$, diámetro de la abertura $1 \text{ }\mu\text{m}$.
- (ii) $\lambda = 632 \text{ nm}$, $z = 1 \text{ }\mu\text{m}$, diámetro de la abertura $1 \text{ }\mu\text{m}$.

A.5 Formación de Imágenes

5.1 La intensidad que se puede medir está dada por $I = \langle A A^* \rangle$ donde A es la amplitud, $*$ es el conjugado complejo y $\langle \ \rangle$ significa promedio en el tiempo. Si tenemos la combinación de dos ondas: A y $A \exp(i\varphi)$, escribir una expresión para la intensidad de la suma de estas dos ondas. Ahora, si la luz es coherente ¿cómo cambia φ con el tiempo? ¿Y si la luz es incoherente? Mostrar que para la luz incoherente la intensidad resultante es la suma de las intensidades de los dos haces.

5.2 Un objeto tiene una transmisión de amplitud $t(\xi) = \cos(2\pi f \xi)$ de frecuencia $f = 1000$ ciclos/cm. La longitud de onda es $\lambda = 1 \mu m$, la distancia focal de la lente es 10 cm y la distancia del objeto es 20 cm.

¿Qué diámetro debe tener la lente para poder resolver la estructura del objeto usando luz:

- (i) coherente espacialmente,
- (ii) incoherente espacialmente?

Describir la imagen en los dos casos.

Con los diámetros de las lentes, la distancia focal de las lentes y la distancia del objeto todos fijos, describir la imagen para los casos de luz coherente e incoherente para los siguientes combinaciones de f y λ :

- (i) $f = 999$ ciclos/cm, $\lambda = 1 \mu m$,
- (ii) $f = 1001$ ciclos/cm, $\lambda = 1 \mu m$,
- (iii) $f = 1000$ ciclos/cm, $\lambda = 0.9 \mu m$,
- (iv) $f = 1000$ ciclos/cm, $\lambda = 1.1 \mu m$.

5.3 Dibujar la respuesta a un impulso y la función de transferencia para luz coherente espacialmente y la PSF y MTF para luz incoherente espacialmente de la abertura mostrada en la Figura A.5.1, en las direcciones de los ejes x y y , anotando en su dibujo las frecuencias espaciales máximas transmitidas.

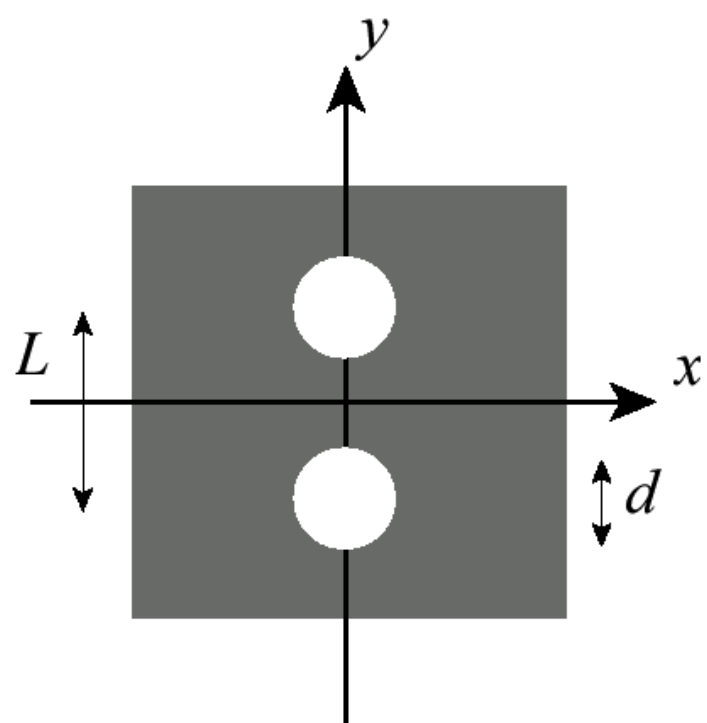


Figura A.5.1

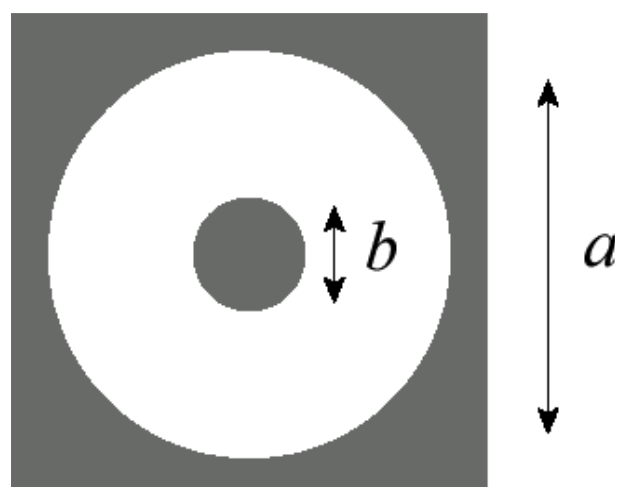


Figura A.5.2

5.4 Dibujar la función de transferencia, en el eje u , usando la forma de abertura de la lente mostrada en la Figura A.5.2 para:

- (i) un sistema coherente,
- (ii) un sistema incoherente.

Esta forma es similar a la forma de la abertura de los telescopios astronómicos reflectores.

5.5 Utilizar un programa de cómputo para graficar las intensidades en las imágenes y las funciones de transferencia, para luz coherente e incoherente cuando cambias los parámetros a y b de la pupila de la Figura A.5.2 para los casos:

- (i) $a = 10, b = 2$,
- (ii) $a = 6, b = 2$,
- (iii) $a = 10, b = 6$.

5.6 Un objeto tiene una transmisión de amplitud $t(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\pi f\xi))$. Este objeto está iluminado por una onda plana coherente a un ángulo de incidencia θ . Dibujar la transformada de Fourier del objeto. Si usamos una lente de diámetro a y de distancia focal f para formar la imagen del objeto y tenemos las distancias objeto-lente y lente-imagen igual a $2f$, ¿Cuál es el ángulo máximo θ_{max} que nos da información (variación de intensidad) en la imagen? En este caso (del ángulo máximo) ¿Cuál es la frecuencia espacial máxima que nos da información en la imagen y como se compara esta frecuencia con la frecuencia máxima para el caso $\theta = 0$?

5.7 La figura A.5.3 muestra el ojo de un gato, con una pupila alargada verticalmente.

Suponiendo una forma más sencilla, un rectángulo, cero aberraciones en el ojo del gato, y luz incoherente espacialmente, escribir expresiones para:

(a) la PSF:

- (i) en el eje x ,
- (ii) en el eje y ,

(puedes estimar el tamaño del ojo y utilizar la figura para estimar la diferencia en tamaños de la pupila en x y y .) Dibujar estas dos expresiones.

(b) el OTF:

- (i) en el eje x
- (ii) en el eje y

Dibujar estas dos expresiones.

¿Cómo es la resolución del ojo de gato en el eje x comparado con la resolución en el eje y ?



Figura A.5.3: el ojo de un gato

5.8 La figura A.5.4 muestra el ojo de un Tokay Gecko, con una pupila alargada verticalmente.

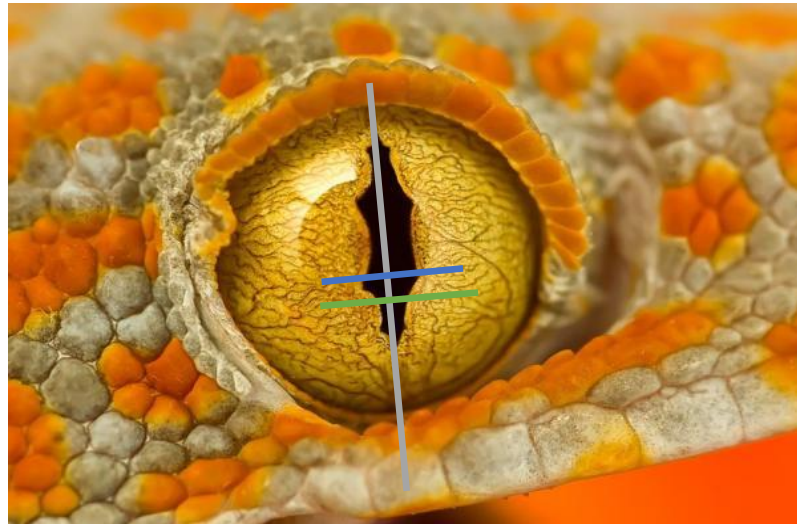


Figura A.5.4: el ojo de un Tokay Gecko

<http://scribol.com/environment/animals-environment/staring-into-the-beautiful-cold-blooded-eyes-of-reptiles/>

Para los 3 perfiles mostrados en la figura (en color gris, azul y verde), y suponiendo cero aberraciones, y luz incoherente espacialmente:

- (i) Dibujar la imagen 1D de un objeto puntual (1D-PSF) para cada perfil, manteniendo la escala entre los tres casos (cual es más ancha y cual más angosta).
- (ii) Dibujar la 1D-OTF para cada perfil, manteniendo la escala entre los tres casos (cual es más ancha y cual más angosta).
- (iii) ¿En cual de los perfiles, el gris, el azul o el verde, tiene mejor resolución el ojo del gecko?

A.6 Apodización

6.1 Utilizar un programa de computadora para calcular y graficar el PSF, MTF y PTF para las siguientes funciones de apodización:

$$\text{i.} \quad f_1(x_l, y_l) = \frac{\sin\left(\frac{\pi r_l}{R}\right)}{\frac{\pi r_l}{R}} = \text{sinc}\left(\frac{r_l}{R}\right),$$

$$\text{ii.} \quad f_2(x_l, y_l) = \exp\left(i2\pi \frac{r_l}{R}\right),$$

$$\text{iii.} \quad f_3(x_l, y_l) = f_1(x_l, y_l)f_2(x_l, y_l).$$

En estas ecuaciones $r_l = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}$, donde el subíndice l indica la lente, y R es el radio de la abertura de la lente. Dado que todas las funciones son simétricas, graficar perfiles de las funciones solo en el eje x .

A.7 Proyecto de programación sobre resolución de dos objetos puntuales en sistemas con aberraciones

Este proyecto es para investigar la resolución en la formación de imágenes de dos objetos puntuales, y relacionarla con el MTF del sistema, utilizando la luz incoherente espacialmente y para las aberraciones isoplanáticas (defoco y aberración esférica). Aquí, hay que calcular la PSF:

$$q(x, y) = |h(x, y)|^2 \propto \left| \mathfrak{F}(P(x_l, y_l) \exp(ik W(x_l, y_l))) \right|^2, \quad (\text{A.7.1})$$

donde $P(x_l, y_l)$ es la pupila circular de la lente, y $\exp(ik W(x_l, y_l))$ es el término de la fase extra por la aberración, y con:

$$W_{\text{defoco}}(x_l, y_l) = A_d \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right), \quad (\text{A.7.2})$$

$$W_{\text{esférica}}(x_l, y_l) = A_s \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right)^2, \quad (\text{A.7.3})$$

donde A_d y A_s son las amplitudes de las aberraciones. La OTF es:

$$OTF(u, v) = \mathfrak{I}(q(x, y)), \quad (\text{A.7.4})$$

y:

$$MTF(u, v) = |OTF(u, v)|. \quad (\text{A.7.5})$$

Es importante ver que la MTF cambia con diferentes cantidades de la aberración. Ahora, el objetivo de este proyecto es utilizar un objeto total que tenga dos objetos individuales de un ancho de un pixel, con una separación variable. La Figura A.7.1 muestra un ejemplo de un posible objeto total. Este objeto está formado por dos líneas rectas con un ángulo de 10° entre ellas, entonces va cambiando su separación con la posición en y . Este objeto total es $o(x, y)$.

La intensidad en la imagen es, entonces, la convolución del PSF con la intensidad de la imagen:

$$I(x, y) = q(x, y) \otimes o(x, y). \quad (\text{A.7.6})$$

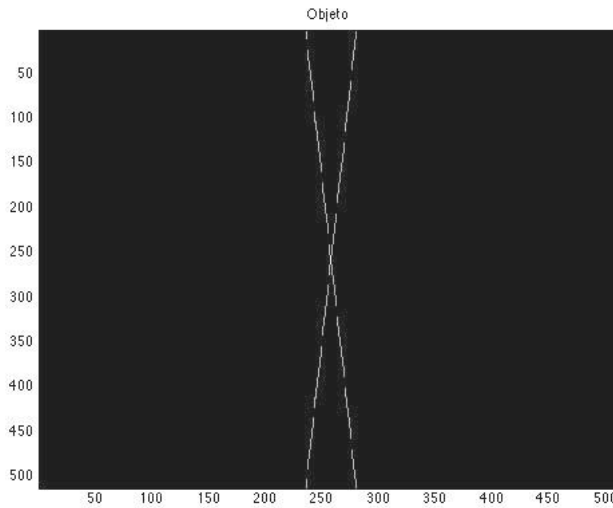


Figura A.7.1: un objeto que se puede utilizar para investigar la resolución de dos puntos. Consiste en dos líneas de un ancho de un pixel y con un ángulo total de 10° entre ellas.

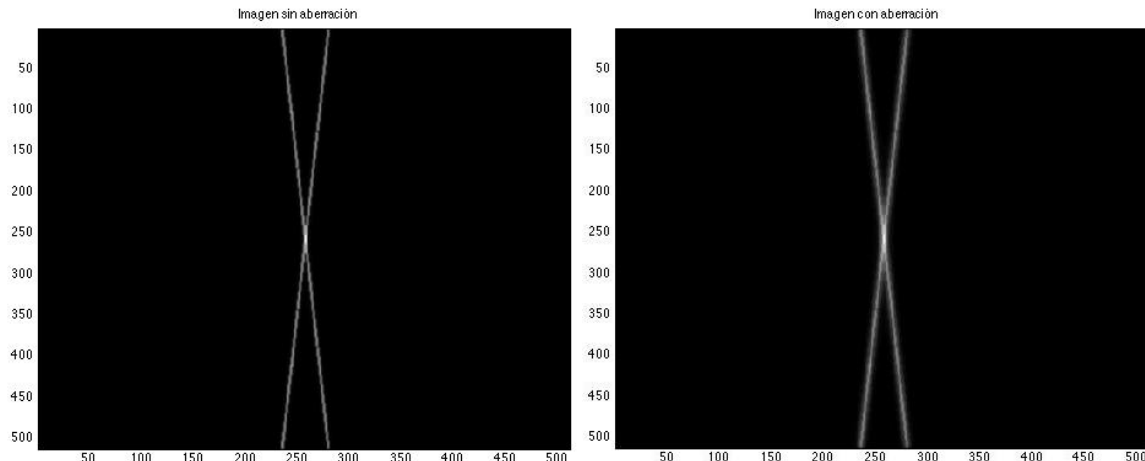


Figura A.7.2: La imagen del objeto de la Figura A.7.1 sin aberración (izquierda), y con aberración de defoco $A_d = 0.5$ (derecha). Nota que la imagen a la izquierda no es tan nitida que el objeto debido a la difracción de la pupila de la lente, que se incluye en ambos casos.

La Figura A.7.2 muestra la imagen para un diámetro de 200 píxeles en un número total de 512 píxeles, y una aberración de defoco con $A_d = 0.0$ (izquierda), y $A_d = 0.5$ (derecha).

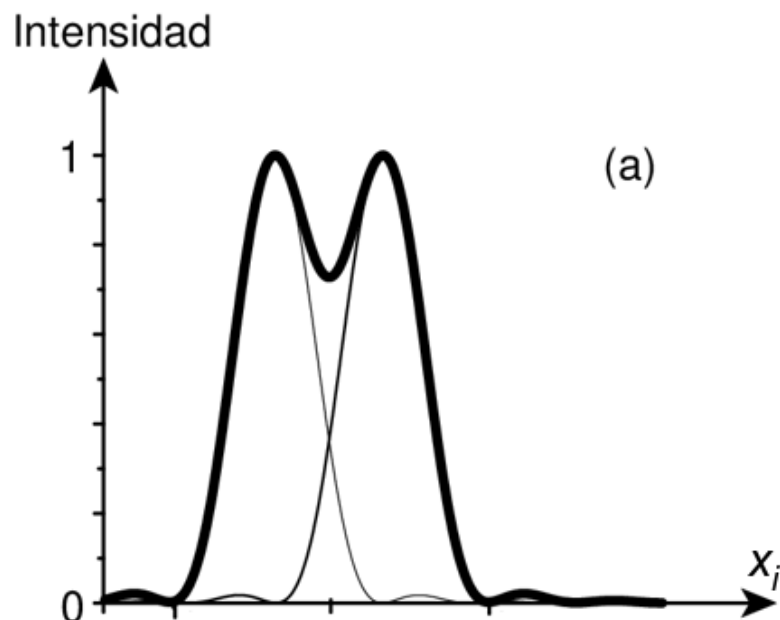


Figura A.7.3: El límite de resolución de Rayleigh. Normalizando al máximo, la intensidad en medio de los dos máximos de intensidad baja a aproximadamente 0.8.

El criterio de Rayleigh es el criterio más utilizado para estimar la resolución en un sistema óptico. La Figura A.7.3 es una representación gráfica al límite de Rayleigh, cuando el máximo de uno de los patrones de Airy está en la posición del primer mínimo del segundo patrón de Airy. Normalizando las curvas al máximo, como se muestra, el mínimo en el centro del patrón total, sumando los dos patrones de Airy, es aproximadamente 0.8. Este valor de la disminución de la intensidad en el centro, entre las dos imágenes individuales, es utilizado como un equivalente del criterio de Rayleigh cuando el PSF no tiene mínimos como el patrón de Airy, o es de otra forma.

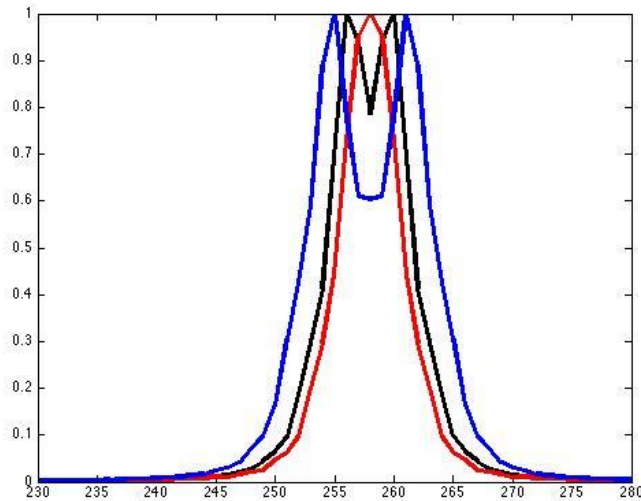


Figura A.7.4: perfiles de la Figura A.7.2 con aberración, donde no se puede distinguir dos imágenes (rojo), en el límite de Rayleigh (negro), y con buena resolución de los dos objetos (azul).

Tomando perfiles de las gráficas en la Figura A.7.2, podemos encontrar la posición en y , desde el centro de la imagen, donde este criterio de 0.8 de intensidad en medio de las dos imágenes individuales es satisfecho. La Figura A.7.4 muestra tres ejemplos de perfiles de la Figura A.7.2 con aberración, la primera donde no se puede resolver los dos objetos, y el segundo en el límite de Rayleigh (intensidad 0.8 en el centro), y el tercero con una separación muy clara entre las dos imágenes (intensidad 0.6 en el centro). Las posiciones de estos perfiles es: sin resolución (rojo) es 10 píxeles arriba del centro de la figura; límite de Rayleigh (negro) es 21 píxeles arriba del centro de la figura; y con buena resolución (azul) es 42 píxeles arriba del centro de la figura. En el ejemplo de la Figura A.7.1, 21 píxeles arriba del punto de intersección corresponde a una separación de objetos de $s = 2 * 21 * \tan(5^\circ)$, con la función de MatLab para calcular el tangente de un ángulo en grados, y el ángulo de cada línea con respecto a la vertical es 5° . El factor 2 da el total para la separación entre las dos líneas.

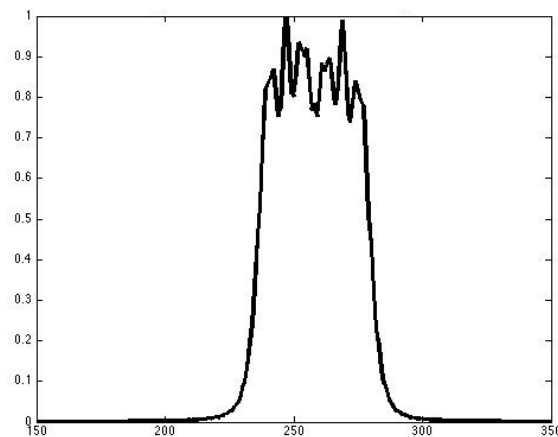
Ahora, para relacionar esta separación en píxeles con una frecuencia espacial en el MTF, notamos que, una separación de s píxeles corresponde a una frecuencia espacial de $u = 1/s$ píxeles^{-1} . También, en la transformada de Fourier $u = m/N$, donde m es el índice

del arreglo de la transformada de Fourier, y N es el número total de puntos en el arreglo. Igualando estas dos ecuaciones para la frecuencia espacial:

$$\frac{1}{s} = \frac{m}{N} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{N}{s}, \quad (\text{A.7.7})$$

que da el índice en el arreglo de la transformada de Fourier (la MTF) m correspondiendo a la separación de píxeles s . Recuerda que la frecuencia cero está en el centro del arreglo de la MTF, entonces el valor de m calculado en la ecuación (A.7.7) es la posición en el arreglo apartir del centro, esto es, la posición real de la frecuencia espacial es $m + N/2$. Con esta información, graficar el límite de resolución en términos del valor de la MTF en la posición m contra el valor de la aberración A_d o A_s . También hacer lo mismo para combinaciones de las dos aberraciones, por ejemplo, se puede fijar A_s en un valor y graficar el valor de la MTF contra el valor de A_d , y comparar con los otros casos corridos.

Una cosa muy importante es verificar que la imagen es “razonable”. Por ejemplo, la Figura A.7.5 muestra un caso del límite de resolución de Rayleigh (0.8 intensidad en el centro del patrón) para el caso de $A_d = 1.5$. Sin embargo, la imagen total tiene 6 máximos de intensidad, entonces parece que hay 6 objetos, y no 2. Esto pasa cuando el PSF es demasiado diferente al patrón de Airy y aparece más estructura que da más estructura en la imagen final. Entonces, se debe graficar hasta el valor límite de la aberración para que la imagen final sea todavía “razonable”, que es cuando solo contiene 2 máximos de intensidad.



*Figura A.7.5: la intensidad total en el límite de Rayleigh (intensidad 0.8 en el centro).
Notese que hay mucha estructura en la imagen con 6 máximos de intensidad.*

El caso de aberración esférica es un poco diferente. En 1870 Abbe notó que la aberración esférica no afecta tanto la calidad de la imagen en términos de resolución, y que es importante controlar otras aberraciones antes que la esférica. ¿Qué se puede concluir para la aberración esférica de las imágenes obtenidas aquí?

A.8 Proyecto de programación sobre el efecto de aberraciones sobre una imagen

Cuando hay aberraciones el frente de onda que sale de un sistema óptico no es perfectamente esférico, y por consecuencia, la imagen no es perfecta. Si el sistema óptico tiene aberraciones la función del frente de onda saliente es multiplicado por un factor $\exp(ikW(x_l, y_l))$, donde la función de aberración $W(x_l, y_l)$ describe la deformación del frente de onda en la pupila de la lente.

Entonces, la imagen de un objeto puntual para luz coherente es:

$$h(x, y) \propto \mathfrak{I} \left(P(x_l, y_l) \exp(ikW(x_l, y_l)) \right)_{u=\frac{x}{\lambda d_i}, v=\frac{y}{\lambda d_i}}, \quad (\text{A.8.1})$$

y la imagen de un objeto puntual para luz incoherente es:

$$PSF(x, y) = |h(x, y)|^2. \quad (\text{A.8.2})$$

La función de transferencia para luz incoherente se calcula con:

$$OTF(u, v) = \mathfrak{I}(|h(x, y)|^2). \quad (\text{A.8.3})$$

Las aberraciones de tercer orden son las siguientes.

Defoco:

$$W(x_l, y_l) = A_d \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right). \quad (\text{A.8.4})$$

Aberración Esférica:

$$W(x_l, y_l) = A_s \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right)^2. \quad (\text{A.8.5})$$

Coma:

$$W(x_l, y_l) = A_c \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right) \left(\frac{x_l \sin(\theta) + y_l \cos(\theta)}{r_l} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right). \quad (\text{A.8.6})$$

Astigmatismo y Curvatura de campo:

$$W(x_l, y_l) = \frac{1}{2} A_a \left(\left(\frac{x_l}{r_l} \right)^2 \sin(\theta) + \left(\frac{y_l}{r_l} \right)^2 \cos(\theta) \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2 + \frac{1}{4} (A_a + A_{cc}) \left(\frac{x_l^2 + y_l^2}{r_l^2} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2. \quad (A.8.7)$$

Distorsión:

$$W(x_l, y_l) = A_{ds} \left(\frac{x_l}{r_l} \sin(\theta) + \frac{y_l}{r_l} \cos(\theta) \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^3. \quad (A.8.8)$$

En estas ecuaciones (x_l, y_l) son las coordenadas en el plano de la lente; r_l es el radio de la lente; A_d , A_s , A_c , A_a , A_{cc} , y A_{ds} son las amplitudes de las aberraciones de defoco, esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión, respectivamente; θ es el ángulo entre el eje y y la línea que junta el centro del **objeto** con el punto del **objeto** para el cual se calcula la aberración, y cambia para cada punto del objeto; η es la distancia entre el centro del objeto y el punto del objeto para el cual se calcula la aberración y cambia para cada punto del objeto; η_{max} es el valor máximo de la distancia entre un punto del objeto y el centro del objeto.

El proyecto involucra el cálculo de imágenes utilizando luz incoherente espacialmente para combinaciones de 3 o más de las aberraciones. Escoge una combinación de aberraciones (e.g. defoco más aberración esférica más coma) e investiga como cambia una imagen para diferentes valores de los coeficientes de las aberraciones (en el ejemplo son A_d , A_s y A_c). Busca valores de los coeficientes que muestran diferentes efectos en la imagen. Pueden utilizar cualquier imagen, pero se recomienda utilizar también una imagen regular como una malla cuadrada, para ver los efectos de las aberraciones.

A.9 Filtraje Espacial

- 9.1 Se puede hacer la operación de diferenciación en un sistema $4f$ de filtraje espacial. Se sabe que después del plano de Fourier queremos la transformada de Fourier de la derivada de nuestra función de transferencia del objeto (para que la segunda lente forme la imagen de la derivada):

$$t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\xi)}{d\xi} \exp(-i2\pi\xi u) d\xi.$$

Escribir la función de transferencia de amplitud del objeto, $f(\xi)$, como la transformada de Fourier inversa de su transformada de Fourier $F(u)$, y calcular la derivada $\frac{df(\xi)}{d\xi}$. Relacionando la expresión de $t(u)$ arriba, con esta expresión para la derivada, escribir la forma que debe tener el filtro, y dibujar su forma. ¿Cuál es la expresión para el filtro para calcular ópticamente la derivada de orden n : $\frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n}$?

- 9.2 Si tomamos una foto de una televisión de antes (CRT), la imagen estará formada por una serie de líneas debido al barrido del haz de electrones en la pantalla. Debido a que la separación entre estas líneas es mucho menor que la estructura de cualquier parte de la imagen en la pantalla, describir la transformada de Fourier de la foto tomada. Describir como se puede quitar estas líneas de barrido usando un sistema de filtraje espacial.
- 9.3 Las imágenes en revistas y periódicos están formadas por puntos de tinta con una variación de posición y tamaño (ver la Figura A.9.1). La única condición para poder ver bien la imagen es que los puntos de tinta sean mucho más pequeños que el tamaño de la estructura del objeto en la imagen.
- (i) Explicar cómo se puede utilizar un sistema de filtraje espacial con una longitud de onda λ para remover los puntos de la imagen, y quedar solo con la imagen continua.
 - (ii) ¿Cómo tiene que cambiar el filtro en el plano de Fourier para obtener el mismo efecto de filtraje si se utiliza una longitud de onda menor que λ en el sistema de filtraje espacial?
 - (iii) ¿Cómo sería la imagen final si, en el mismo sistema de filtraje, se utiliza el filtro complementario al filtro utilizado en (i) (el filtraje complementario deja pasar la luz en el plano de Fourier donde está bloqueado en el original y tapa la luz donde pasa en el original).



Figura A.9.1: Una imagen de un bailarín formada de puntos.

<https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/male-figure-made-with-dots-vector-14853192>

- 9.4 Al formar una imagen con luz coherente se tiene el efecto de *speckle* que es un efecto de interferencia debido a la coherencia de la luz. Este efecto se manifiesta en manchitas pequeñas distribuidas sobre la imagen (ver la Figura A.9.2). Estas manchitas tienen formas muy irregulares, pero son mucho más pequeñas que la información útil en la imagen. (i) Explicar cómo se puede utilizar un sistema de filtraje espacial con una longitud de onda λ para remover el efecto de *speckle* de una imagen. (ii) ¿Cómo tiene que cambiar el filtro en el plano de Fourier para obtener el mismo efecto de filtraje si se utiliza una longitud de onda menor que λ en el sistema de filtraje espacial? y (iii) ¿Cómo sería la imagen final si, en el mismo sistema de filtraje se utiliza el filtro complementario al filtro utilizado en (i) (el filtraje complementario deja pasar la luz donde está bloqueado en el original y tapa la luz donde pasa en el original).

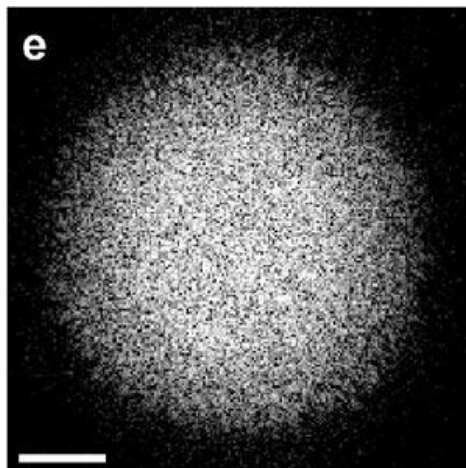


Figura A.9.2: El efecto del speckle sobre un haz gaussiano

- 9.5 Utilizando un programa de computadora, programar el problema de la Figura A.9.2, utilizando una mancha Gaussiana con una distribución regular de círculos pequeños como una primera aproximación a los *speckles*. Cambiar el tamaño del filtro para obtener el efecto de quitar los *speckles* y dejar la mancha Gaussiana. Luego, utilizar el filtro complementario (1 menos el filtro de la primera parte) para ver el efecto sobre la imagen. Cambiar el tamaño del filtro complementario para observar el efecto.
- 9.6 Utilizar un programa de computadora para calcular el proceso de filtraje espacial, tomando el objeto a la izquierda de la Figura A.9.3, y obtener la imagen a la derecha de la Figura A.9.3.

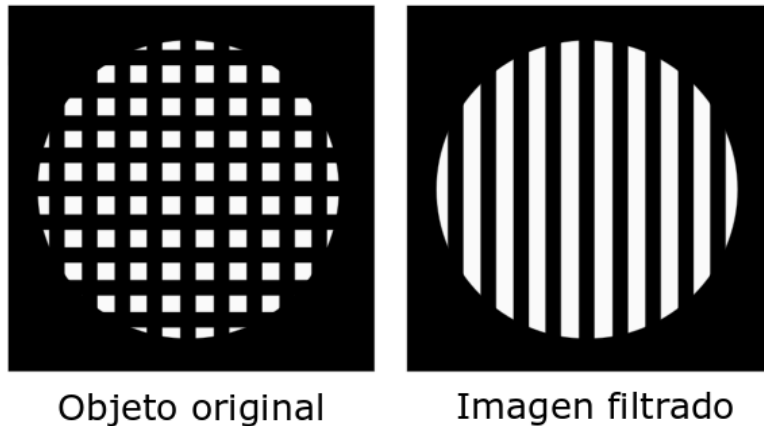


Figura A.9.3: El objeto y la imagen en un sistema de filtraje espacial

- 9.7 Utilizando el mismo objeto original que en la Figura A.9.3, en un programa de computadora, calcular la imagen obtenida en un sistema $4f$ utilizando como filtro:
- (i) un punto oscuro,
 - (ii) un agujero,

en el centro del plano de Fourier. Cambiar el tamaño del agujero o el punto oscuro para observar el efecto en la imagen final.

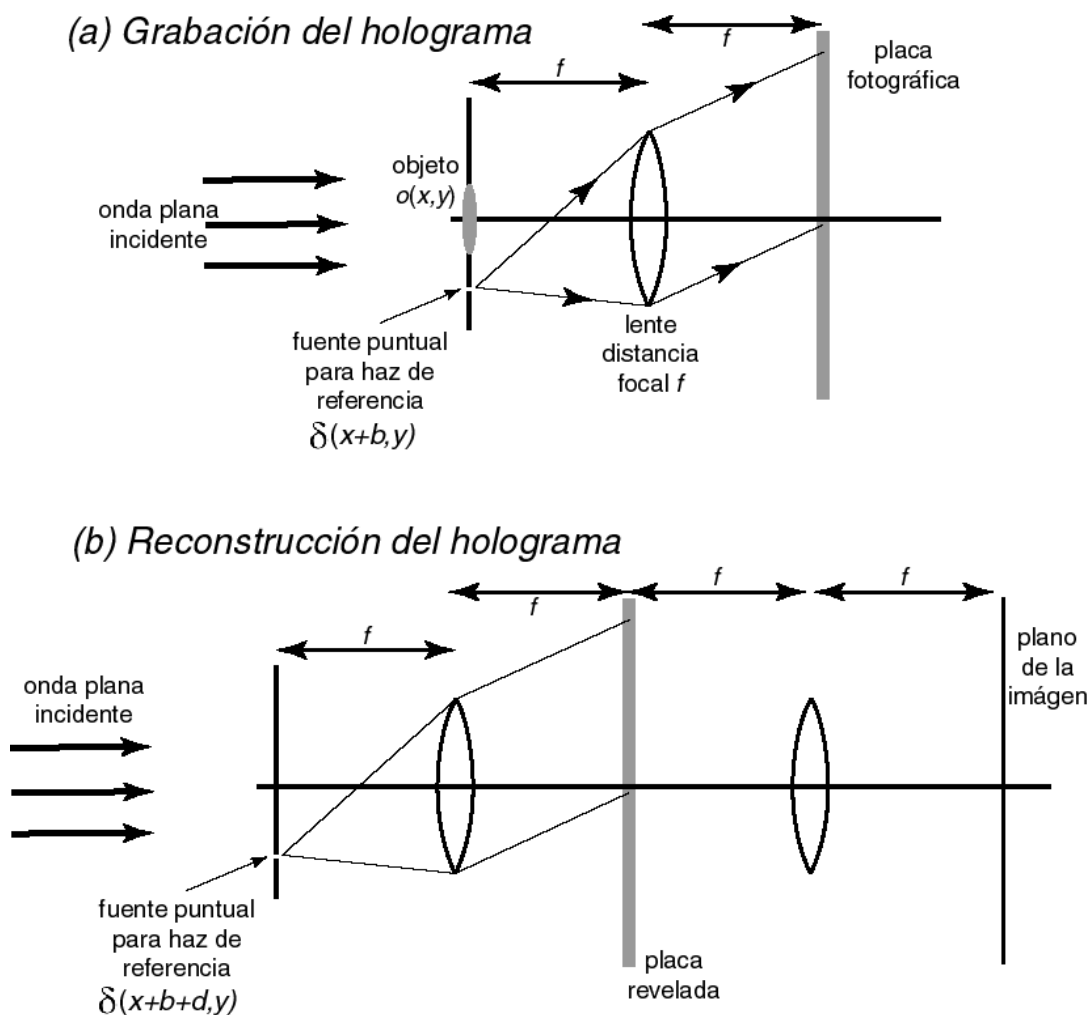
- 9.8 Utilizar un programa de computadora para calcular la imagen de:

- (i) contraste de fase positiva,
- (ii) contraste de fase negativa,
- (iii) campo oscuro,

para un objeto de fase, con la fase < 0.1 radianes.

A.10 Holografía

- 10.1 Si se rompe una placa holográfica revelada y reconstruyes a través de un pedazo de la placa original, ¿qué se ve?
- 10.2 Calcular la imagen de un holograma de la transformada de Fourier si, entre la grabación y la reconstrucción del holograma, se mueve la fuente puntual de referencia una distancia d (ver la Figura A.10.1). Describir los términos de la imagen.



- 10.3 Es posible utilizar luz incoherente para realizar algunas operaciones en imágenes. Por ejemplo, en la Figura A.10.2, dado que la transparencia 2 se puede mover verticalmente ¿qué operación se puede hacer con este sistema?

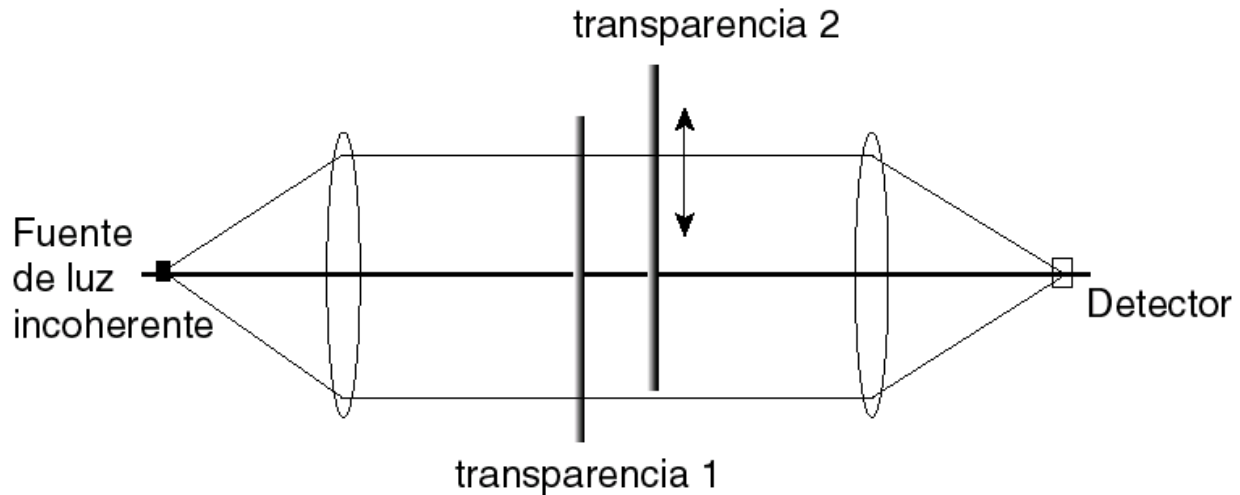


Figura A.10.2

- 10.4 En la reconstrucción de un holograma tradicional, si la transmitancia de amplitud de la placa revelada es proporcional a:

$$T \propto I^2(x, y),$$

es decir, hay un efecto no-lineal en la reconstrucción, calcular los términos de la intensidad de la luz difractada y discutir el significado de estos términos.

- 10.5 Se sabe que para dos ondas de longitud de onda λ con una inclinación θ entre ellas, la separación de las franjas en el patrón de interferencia grabado en la placa holográfica es:

$$d = \frac{\lambda}{2\sin(\theta)}.$$

¿Cuál es la variación de d si la fuente tiene un ancho de banda $\Delta\lambda$? Si la separación angular mínima (resolución) que se requiere es $\Delta\theta_m$ (ver la Figura A.10.3), ¿a qué variación de d corresponde esta variación de $\Delta\theta_m$? Se quiere que el valor de $\Delta\lambda$ de una variación de d que sea menor que la variación de d requerida por la resolución $\Delta\theta_m$ (o no podemos separar las dos direcciones). Si $\theta = 30^\circ$, $\lambda = 500 \text{ nm}$ y $\Delta\theta_m = 0.25^\circ$, ¿cuál es la condición sobre $\Delta\lambda$?

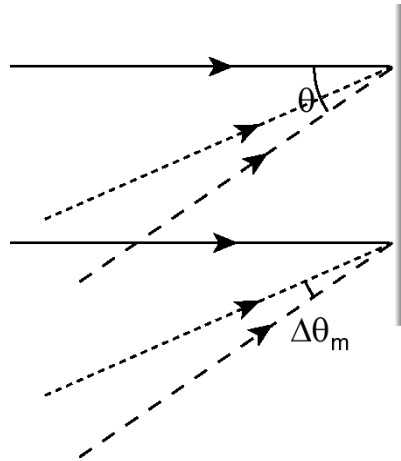


Figura A.10.3: Resolución angular para holografía

- 10.6 Utilizar un programa de computadora (MatLab, Mathematica, etc) para calcular el proceso de reconocimiento de patrones, utilizando un objeto de letras como el que se muestra en la Figura A.10.4. Recuerda que puede ser necesario tener un objeto con letras blancas sobre un fondo negro para mejorar el contraste de las correlaciones, y limpiar el objeto para evitar señales espurias. También, hay que cambiar el umbral de la intensidad en la imagen final para poder observar los picos de correlación.



Figura A.10.4: ejemplo de un objeto original para reconocimiento de patrones

La reconstrucción se realiza con letras individuales, como las que se muestra en la Figura A.10.5.



Figura A.10.5: ejemplos de objetos para la reconstrucción para reconocimiento de patrones

Utilizar letras que sí están en el objeto original y letras que no están en el objeto original para la reconstrucción, para mostrar los efectos de señales erróneas en las correlaciones.

A.11 Coherencia

11.1 En el interferómetro de Michelson, la intensidad detectada esta dada por:

$$I(l) - \frac{1}{2} I(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(k) \cos(kl) dk,$$

donde l es la longitud de la diferencia de camino óptico en los dos brazos del interferómetro y $B(k)$ es el espectro de la luz con $k = 2\pi/\lambda$. Calcular la distribución de intensidad como función de l para un espectro de la forma:

$$B(k) = \delta(k - k_1) + \delta(k - k_2),$$

que es un espectro de solo dos líneas de diferentes longitudes de onda. Utilizar la relación:

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Dibujar el comportamiento de la intensidad y explicar que significa.

11.2 El espectro del sodio está dominado por dos líneas en el amarillo ($\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$ y $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$). Utilizar el resultado del problema 11.1 para calcular el cambio en la posición de uno de los espejos en el interferómetro de Michelson necesario para ir de un mínimo del contraste de las franjas al siguiente mínimo de contraste.

Referencias

- Abramowitz M. y Stegun I., (1972), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- Arfken G., (1985), *Mathematical Methods for Physicists*, 3^{ra} edición, Academic Press, Orlando.
- Ayers G.R. y Dainty J.C., (1988), Iterative blind deconvolution method and its applications, *Optics Letters*, 13, pp. 547.
- Bartelt H.O., Brenner K.H. y Lohmann A.W., (1980), The Wigner distribution function and its optical production, *Optics Communications*, 32, pp. 32.
- Bastiaans M.J., (1978), The Wigner distribution function applied to optical signals and systems, *Optics Communications*, 25, pp. 26.
- Bastiaans M.J., (1979), Wigner distribution function and its application to first-order optics", *Journal of the Optical Society of America*, 69, pp. 1710.
- Bentzen S.M., (1983), Evaluation of the spatial resolution of a CT scanner by direct analysis of the edge response function, *Medical Physics*, 10, pp. 579.
- Boreman G.D., (2001), *Modulation Transfer Function in Optical and Electro-Optical Systems*, SPIE Press, Bellingham.
- Born M. y Wolf E., (1980), *Principles of Optics*, 6^{ta} edición, Pergamon, Oxford.
- Bracewell R., (1965), *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, New York.
- Cochran W.T., Cooley J.W., Favin D.L., Helms H.D., Kaenel R.A., Lang W.W., Maling G.C., Nelson D.E., Rader C.M. y Welch P.D., (1967), What is the fast Fourier transform, *IEEE Transactions on Audio y Electroacoustics*, AU-15, pp. 45.
- Collier R.J., Burckhardt C.B. y Lin L.H., (1971), *Optical Holography*, Academic Press, New York.
- Considine P.S., (1966), Effects of coherence on imaging systems, *Journal of the Optical Society of America*, 56, pp. 1001.
- Foufoula-Georgiou E. y Kumar P., editores, (1994), *Wavelets in Geophysics*, Academic Press, San Diego.
- Furlan W.D., Saavedra G. y Granieri S., (2001), Simultaneous display of all the Fresnel diffraction patterns of one-dimensional apertures, *American Journal of Physics*, 69, pp. 799.
- Gaskill J.D., (1978), *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, John Wiley and Sons, New York.

- Goodman J., (1996), *Introduction to Fourier Optics*, 2^{da} edición, McGraw-Hill, New York.
- Hariharan P., (1985), *Optical Interferometry*, Academic Press, Sydney.
- Hebden J.C., Hall D.J. y Delpy D.T., (1995), The spatial resolution performance of a time-resolved optical imaging system using temporal extrapolation, *Medical Physics*, 22, pp. 201.
- Hecht E., (1998), *Optica*, 3^{ra} edición, Addison Wesley, Madrid.
- Helstrom C.W., (1967), Image restoration by the method of least squares, *Journal of the Optical Society of America*, 57, pp. 297.
- Kane D.J. y Trebino R., (1993), Single-shot measurement of the intensity and phase of an arbitrary ultrashort pulse by using frequency resolved optical gating, *Optics Letters*, 18, pp. 823.
- Kong J.A., (2005), *Electromagnetic Wave Theory*, EMW Publishing, Cambridge, Massachusetts.
- Lohmann A.W., (1983), Image rotation, Wigner rotation and the fractional Fourier transform, *Journal of the Optical Society of America A*, 10, pp. 2181.
- Marathay A.S., (1982), *Elements of Optical Coherence Theory*, John Wiley and Sons, New York.
- McBride A.C. y Kerr F.H., (1987), On Namias's fractional Fourier transform, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 39, pp. 159.
- Mielenz K.D., (1998), Algorithms for Fresnel diffraction at rectangular and circular apertures, *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 103, pp. 497.
- Mix D.F. y Olejniczak K.J., (2003), *Elements of Wavelets for Engineers and Scientists*, John Wiley and Sons, New York.
- Montgomery W.D., (1967), Self-imaging objects of infinite aperture, *Journal of the Optical Society of America*, 57, pp. 772.
- Morris C.E., Richards M.A. y Hayes M.H., (1987), Iterative deconvolution algorithm with quadratic convergence, *Journal of the Optical Society of America A*, 4, pp. 200.
- Namias V., (1980), The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 25, pp. 241.
- Park S.K., Schowengerdt R. y Kaczynski M.A., (1984), Modulation-transfer-function analysis for sampled image systems, *Applied Optics*, 23, 2572.

- Pellat-Finet P., (1994), Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform, *Optics Letters*, 19, pp. 1388.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., (1992), *Numerical Recipes in C; The art of scientific computing*, 2^{da} edición, Cambridge University Press, Cambridge.
- Reynolds G.O., DeVelis J.B., Parrent Jr. G.B. y Thompson B.J., (1989), *The New Physical Optics Notebook: Tutorials in Fourier Optics*, SPIE, Bellingham, WA, y American Institute of Physics, New York.
- Seldin J.H. y Fienup J.R., (1990), Iterative blind deconvolution algorithm applied to phase retrieval, *Journal of the Optical Society of America A*, 7, pp. 428.
- Shannon C.E., (1949), Communications in the prescence of noise, *Proceedings I.R.E.*, 37, pp. 10.
- Siegman A.E., (1986), *Lasers*, University Science Books, New York.
- Smith H.M., (1975), *Principles of Holography*, 2^{da} edición, John Wiley and Sons, New York.
- Soifer V.A., editor, (2013), *Computer design of diffractive optics*, Woodhead Publishing, Oxford.
- Steward E.G., (1983), *Fourier Optics: an introduction*, Ellis Horwood, Chichester.
- Talbot H.F., (1836), *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9, pp. 401.
- Tango W.J. y Twiss R.Q., (1980), Michelson stellar interferometry, *Progress in Optics*, E.Wolf, ed., 17, pp. 239.
- Torre A., (2002), The fractional-order Fourier transform and some of its applications to optics, *Progress in Optics*, E. Wolf, ed., 43, pp. 531.
- Trebino R. y Kane D.J., (1993), Using phase retrieval to measure the intensity and phase of ultrashort pulses: frequency-resolved optical gating, *Journal of the Optical Society of America A*, 10, pp. 1101.
- Troth R.C. y Dainty J.C., (1991), Holographic interferometry using anisotropic self-diffraction in Bi₁₂SiO₂₀, *Optics Letters*, 10, pp. 53.
- Van den Berg J.C., editor, (1999), *Wavelets in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Vollmerhausen R. y Diggers R., (1998), *Analysis of Sampled Image Systems*, SPIE Press, Bellingham.
- Whittaker E.T., (1915), On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory, *Proceedings of the Royal Society, Edinburgh*, A 35, pp. 181.

- Williams C.S. y Becklund O.A., (1989), *Introduction to the Optical Transfer Function*, John Wiley and Sons, New York.
- Wilson R.G., (1995), *Fourier Series and Optical Transform Techniques in Contemporary Optics*, John Wiley and Sons, New York.
- Yariv A., (1985), *Optical Electronics*, 3^{ra} edición, Holt-Saunders, New York.