

Comité Editorial del ICAT

Agradezco al revisor por el tiempo dedicado a leer las notas, por las sugerencias y correcciones marcadas. En el texto se dejaron en color rojo todos los cambios hechos en el texto y ecuaciones. A continuación se reproducen los comentarios del revisor en negro y en color azul se dan las respuestas correspondientes.

Se anexa el documento con las correcciones (el sistema no me da la oportunidad de enviarlos por separado).

Saludos,

Augusto García

Respuestas a comentarios del árbitro y correcciones

Falta mencionar en un prólogo o introducción la motivación, a quien va dirigido el material, si es parte de un curso formal o extracurricular, e incluir el objetivo en este texto.

[Hecho. Gracias](#)

Se necesitan corregir varios errores y resolver algunas dudas, las cuales se mencionan a continuación:

Página, renglón 1 del párrafo “Objetivo” dice “... Ecuaciones de Maxwell ...” Debe decir “... ecuaciones de Maxwell”, la palabra ecuaciones debe ir en minúscula.

[Hecho. Gracias](#)

Página 11, renglón 2, se hace referencia a las Ec. (34) y debe hacerse a la (32). [Hecho. Gracias](#)

Página 11, renglón 6, se hace referencia a la Ec. (33) y debe hacerse a la (32).

[Hecho. Gracias](#)

Página 11, renglón 8, se hace referencia a la Ec. (18) y debe hacerse a la (33).

[Hecho. Gracias](#)

Página 11, renglón 10, dice “re-arreglando” con guión, debe decir “rearreglando”, sin guión. (En

español o castellano, los sustantivos compuestos se construyen por yuxtaposición del prefijo con un sustantivo o de los sustantivos, sin guiones).

[Hecho. Gracias!](#)

A partir de la página 11, se repite la numeración de las ecuaciones, pasa de la Ec. (34) en la página 10 a la Ec. (27) en la página 11 y sigue sucesivamente.

[Gracias. Se reenumeraron todas las ecuaciones a partir de la Ec. \(34\) y se hicieron las correcciones necesarias dentro del texto.](#)

Página 12, Sección “Ondas en una dimensión”, en renglón 4 dice “La solución general se adivina ...”. Esta expresión sugiere que no hay formas sistemáticas de obtener la forma de la función de

onda. Se recomienda que se busque una forma más adecuada de expresar esto.

[Se reescribió la frase y ahora dice: “La solución general la podemos escribir de la siguiente manera”](#)

Página 12, último renglón, se da el valor 3×10^8 para la rapidez de la luz en el vacío; se sugiere se explique que este es un valor aproximado para propósitos de cálculos en este curso, pues el valor de c ha sido definido en forma exacta por los organismos internacionales correspondientes (como el NIST).

Gracias. Se corrigió la frase en el renglón anterior a la ecuación en la que se da el valor de c (ahora la Ec. 43) y se intercambió el signo de igual por el signo aproximadamente igual en esa ecuación.

En la página 13, la segunda Ec. (34) (Ec. de Helmholtz) contiene el signo menos (-), debe ser más (+). Verificar la numeración de esta ecuación.

Corregidos signo y numeración. Gracias!

Página 13, último renglón, en la expresión del vector de onda, hay una λ que multiplica al

cociente, esta λ debe ser un vector unitario en la dirección del vector k .

Corregido. Reescribimos partes de las frases anteriores para mejorar la exposición. Gracias.

Página 14, Ecs. (39) y (40). Las implicaciones en estas ecuaciones son correctas, pero no parecen evidentes a primera vista. Tal vez necesita una explicación breve o dejarla como ejercicio.

Las ecuaciones mencionadas son ahora las ecuaciones (50) y (51). Agregamos una frase diciendo que al sustituir los campos dados en las dos ecuaciones anteriores en las ecuaciones de Maxwell se obtienen las siguientes ecuaciones (48)-(51). Hacer el detalle del álgebra es un ejercicio para hacer en clase durante la exposición.

Página 14, al final se muestra un sistema de coordenadas con los vectores de campo eléctrico y magnético en orden invertido. La leyenda de la Figura 2 está desplazada a la página siguiente. Se sugiere que la leyenda quede adherida a la figura.

Corregido. Gracias!

Página 15, cuarto renglón de abajo hacia arriba, dice "...evanece ...", debe decir "... envanesce ...".

Corregido. Gracias.

Página 17, renglón 17, dice "... Especificar la divergencia ...". Se sugiere "... A especificar la divergencia ...".

Página 17, renglón 20, dice "... re-arreglando", se sugiere "... reorganizando".

Corregido. Gracias.

Página 18, Las A y ϕ de (51) y (52) son funciones distintas de las ecuaciones (59) y (51), aunque se usan los mismos símbolos para representarlas. Sería conveniente hacer esta observación para una mejor comprensión por parte del estudiante.

Se hizo la nota y se agregó una frase adicional líneas arriba para claridad. Gracias.

Página 18, ¿Cómo se obtiene la esa forma de la función de Green en la Ec. (54)? Revisar, también, la numeración de esta ecuación.

Se revisó la numeración de la ecuación. La obtención de la ecuación de Green es un ejercicio de tarea. El profesor debe orientar al estudiante para realizar dicho ejercicio.

Página 19, renglón 7, dice: "... en una sistema ...", debe decir: "... en un sistema ...".

Corregido. Gracias.

Página 19, En las expresiones para calcular el promedio configuracional, este sólo se hace sobre

la función de densidad de carga y no se toma en cuenta el factor que involucra la distancia entre el punto dentro de la carga y el punto donde se calcula el campo. ¿Está correcto?

Sí, es correcto. El factor mencionado no contiene variables estocásticas. El promedio se saca sobre las coordenadas de la posición de las cargas que conforman el campo de densidad de carga (las $\mathbf{r}_j$). Pienso que en las siguientes ecuaciones esto se ve más claro.

Página 20, Pregunta similar a la anterior para el promedio configuracional del campo magnético.

La misma respuesta. El promedio se saca sobre las variables estocásticas que son la posición y la velocidad de las partículas. Este se ve en la siguiente subsección.

Página 22, renglón 11, dice "... es la carga del un solo ...", debe decir "... es la carga de un solo ...".

Corregido. Gracias.

Página 22, renglón 13. “drift velocity” se traduce, al menos en algunos textos, como “velocidad de deriva”.

Se agregó el término. Gracias.

Página 22, renglón 8 de la Sección “Conexión con la mecánica cuántica” falta una palabra, por ejemplo, “cual” o “que”.

Corregido. Gracias.

Página 25, renglón 7 de abajo hacia arriba. Se sugiere que el símbolo del coulomb (C) se escribía con letra “normal” no inclinada o caligráfica, según las convenciones al respecto.

Corregido. Gracias.

Página 26, renglón 16, se hace referencia a Ec. (84), pero debe ser a la Ec. (83), debe verificarse la numeración de las ecuaciones.

Corregido. Gracias. La ecuación es actualmente la (102)

Página 26. En el último párrafo antes de la Sección “6. Medios polarizables”, puede ser conveniente hacer notar (es una sugerencia) que para frecuencias bajas la conductividad también es independiente de la frecuencia.

Hecho. Gracias.

Página 26, antepenúltimo renglón antes de la Sección “6. Medios polarizarles”, falta un Gamma

mayúscula, donde dice: “... Para frecuencias altas podemos despreciar ___ en el denominador ..”

Corregido. Gracias.

Página 26, penúltimo renglón antes de la Sección “6. Medios polarizables” dice: “... al a ..”, debe

decir: “... a la ...”

Corregido. Gracias.

Página 26, primer renglón de la Sección “6. Medios polarizarles” dice “... esta...”, debe decir “... está ..”, pues es la conjugación del verbo “estar”.

Corregido. Gracias.

Página 26. En el último renglón se sugiere que el punto después de “protones” se mueva hasta después del paréntesis que contiene el valor de la carga del electrón.

Corregido. Gracias.

Página 27, renglones 3 y 7 la conjunción “o” aparece con tilde, según las normas de la Real Academia de la Lengua Española, esta conjunción no lleva tilde.

Corregido. Gracias.

Página 27, renglón 4, el nombre de la unidad de medida “Angstroms” debe escribirse con minúsculas: “ångstrom”.

Corregido. Gracias.

Página 28, renglón 2, dice: “... re-definimos...”, debe decir: “... redefinimos ...”

Corregido. Gracias.

Página 28, renglón 7, dice: “... Coulombs ...”, debe estar en minúsculas.

Corregido. Gracias.

Página 28, renglón 7, el vector r_i no va desde el centro de la molécula, sino desde el origen de coordenadas, porque el centro de la molécula está en r_j .

El vector r_i si va del centro de la molécula que está en r_j a la posición de la i -ésima carga (puede ser electrón o protón). Desde el origen, la posición de la carga es $r_j + r_i$. En el texto cambié la palabra “partícula” por “carga” para evitar confusión.

Página 28, renglón 4 de abajo hacia arriba dice “... y el campo eléctrico esta ...”, debe decir: “... y el campo eléctrico está ...”.

Corregido. Gracias.

Página 29, renglón 3, dice: “... encontrar a la partícula de carga i ...”, debe decir: “... encontrar a la partícula de carga s_i ...”.

Corregido. Gracias.

Página 29, Si la segunda integral que se muestra resultó de hacer la integral anterior con respecto a r_i , ¿por qué el integrando de la segunda integral todavía depende de r_i ?

Había un error. La integral es sobre $d^3\mathbf{r}'$ y no $d^3\mathbf{r}_i$. Ya quedó corregido. Había otro error en la siguiente ecuación en la que el numerador del Kernel de la integral es $g_i(\mathbf{r}_i)$ y la integral era sobre $d^3\mathbf{r}_i$. Ya quedó corregido también. Gracias!

Página 29, renglón 7, dice: "... Si el punto de observación esta ...", debe decir "... Si el punto de observación está ..."

Corregido. Gracias.

Página 29, renglón 10, se hace referencia a la Ec. (86), verifica si es correcta esta referencia.

Corregido. Gracias.

Página 34, renglón 7, dice "... ecuiación ..", debe decir: "... ecuación ..."

Corregido. Gracias.

Página 35, renglón 7, dice: "... frecuencias mas bajas ...", debe decir: "... frecuencia más bajas

Corregido. Gracias.

Notas de Curso

ELECTRODINÁMICA DE MEDIOS CONTINUOS

Augusto García Valenzuela

ICAT/UNAM, CD. Universitaria, CDMX, 2019

Prólogo

El objetivo de estas notas es familiarizar al estudiante con las ecuaciones de Maxwell en el vacío y en medios materiales. Se sintetizan temas básicos de electromagnetismo, ondas electromagnéticas y radiación. Se revisan las suposiciones y la física que fundamentan las ecuaciones de la electrodinámica de medios continuos. Las notas van dirigidas a estudiantes de primer semestre de la Maestría en Ingeniería Eléctrica; pero pueden también apoyar a estudiantes de primer ingreso en otros posgrados o de los últimos semestres en las diferentes carreras de ingeniería o física. El material que aquí se presenta se puede exponer y discutir en clases de 2 horas, dos veces por semana durante 8 semanas, o una vez por semana durante 16 semanas. Esto es la mitad de un curso semestral curricular.

Estas son las notas de clase del módulo de electromagnetismo del curso de física de medios continuos que se impartió durante diez años en el primer semestre de la maestría en ingeniería eléctrica de la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente este módulo se ofrece dentro de otros cursos con distintos nombres de acuerdo a la evolución de los planes de estudio en el posgrado en Ingeniería Eléctrica.

CONTENIDO

1. Fuentes de campo eléctrico- y magneto-estático.....	4
Leyes de Coulomb y Biot-Savart.....	4
Fuerza de Lorentz.....	5
Leyes de Gauss.....	6
Potencial eléctrico.....	6
Ley de Ampere.....	7
Leyes de la electro y magnetostática en forma diferencial.....	7
Potenciales electro y magnetostáticos.....	8
2. Electrodinámica.....	9
Ley de inducción Faraday.....	9
Conservación de la carga eléctrica y ley de Ampere-Maxwell.....	10
Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.....	10
3. Ondas electromagnéticas.....	11
Ecuaciones de ondas.....	11
Ondas en una dimensión.....	12
Ecuación de Helmholtz.....	13
La onda plana electromagnética en el vacío.....	13
Polarización de ondas homogéneas en el vacío.....	16
Potenciales electromagnéticos.....	16
4. Ondas en medios materiales.....	19
Cargas extendidas y densidad de carga.....	19
Densidad de corriente.....	20
Corrientes microscópicas y extendidas.....	20
Conexión con la mecánica cuántica.....	22
Ecuaciones de Maxwell macroscópicas.....	23
5. Ondas en medios conductores.....	23
Ondas inhomogéneas.....	24
Modelo de Drude para la conductividad eléctrica.....	25
6. Medios polarizables.....	26
Dipolo eléctrico.....	27

Campo electrostático promedio alrededor de una molécula	28
Campo eléctrico promedio en un conjunto de N moléculas.....	30
Suceptibilidad eléctrica.....	33
Ecuaciones de Maxwell para campos monocromáticos para medios polarizables.....	33
7. Apéndices.....	36
Apéndice A. Equivalencia entre ley de Coulomb y ley de Gauss estática.....	36
Apéndice B: Polarización de una onda homogénea en el vacío	36
8. Bibliografía.....	40
9. Ejercicios	41

1. FUENTES DE CAMPO ELÉCTRO- Y MAGNETO-ESTÁTICO

Las fuentes de campo eléctrico y magnético son las cargas y las corrientes. Primero veremos las leyes correspondientes a campos estáticos y luego las extenderemos a casos dependientes del tiempo, es decir, dinámicos.

LEYES DE COULOMB Y BIOT-SAVART

Recordemos que en situaciones independientes del tiempo, las fuentes de campo eléctrico son las cargas eléctricas. Dada una distribución de carga uniforme concentrada en un volumen esférico, el campo eléctrico a su alrededor (en unidades MKSA) esta descrito por la ley de Coulomb,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}$ es el punto en el espacio de observación (fuera del volumen ocupado por la carga eléctrica) y $\mathbf{r}'$ es la localización del centro de la carga. q es la magnitud de la carga en Coulombs (C) y ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío ($\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \text{ CV}^{-1}\text{m}^{-1}$). Notemos que el campo eléctrico es radial desde el centro de la carga y su magnitud decae proporcional al inverso de la distancia entre el punto de observación y la carga al cuadrado. Si existen varias cargas en el espacio, el campo eléctrico debido a cada carga por separado se suma en el punto de observación.

La fuerza que siente una carga puntal q en un punto $\mathbf{r}$ está dado por el producto de la carga q por del campo eléctrico debido a otras cargas en ese punto $\mathbf{r}$. Por lo tanto, la fuerza que siente una carga puntal 1 en $\mathbf{r}_1$ debido a otra carga 2 en $\mathbf{r}_2$ esta dada por la ley de Coulomb como,

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1) = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2)$$

Es fácil ver que la fuerza que siente la carga 2 por la carga 1 es de igual magnitud pero de sentido contrario: $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_2)$. Por lo que la ley de coulomb satisface la tercera ley de Newton.

Las fuentes de campo magnético son las corrientes de carga eléctrica. La unidad de corriente es el Ampere (A) que es Coulomb por segundo. El campo magnético debido a un tramo de longitud diferencial $d\mathbf{l}$ de una línea (hilo de grosor infinitesimal) de corriente centrado en el punto $\mathbf{r}'$ está dado por la ley de Biot y Savart,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{l}, \quad (3)$$

donde $\mathbf{I}$ es el vector corriente (con dirección tangencial al tramo del alambre) y μ_0 es la permeabilidad del vacío ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$). Notemos que el vector magnético es perpendicular a la dirección de la corriente y del vector que va desde el tramo del alambre $d\mathbf{l}$ y el punto de observación $\mathbf{r}$. Su magnitud es proporcional en seno del ángulo entre el vector $\mathbf{I}$ y el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, y decae con el inverso del cuadrado de la distancia entre $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}$. El campo magnético total en un punto del espacio se encuentra integrando la Eq. (2) sobre todo la línea de corriente (e.g. un alambre), desde la fuente hasta el sumidero de cargas.

La fuerza que siente un elemento diferencial de corriente $\mathbf{I}d\mathbf{l}$ en un punto $\mathbf{r}$ está dada por el producto cruz del elemento diferencial de corriente $\mathbf{I}d\mathbf{l}$ con el campo magnético en ese punto $\mathbf{r}$ debido a otros elementos

diferenciales de corriente. Por lo tanto, la fuerza que siente un elemento diferencial de corriente 1 en $\mathbf{r}_1$ debido a otro elemento diferencial de corriente 2 en $\mathbf{r}_2$ esta dada por la ley de Biot-Savart como,

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_1(\mathbf{r}_1)dl_1 \times \left(\frac{\mu_0 \mathbf{I}_2(\mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} dl_2 \right). \quad (4)$$

Si calculamos la fuerza que ejerce el elemento 1 de corriente sobre el elemento dos de corriente vemos que $\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_2)$. Por lo tanto la Ley de Biot-Savart satisface la tercera Ley de Newton.

Si tenemos una distribución de carga extendida en el espacio $\rho(\mathbf{r})$, el campo eléctrico se puede escribir como una integral sobre la distribución de carga de la siguiente manera,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (5)$$

Por otro lado, la corriente a través de una superficie de área a se puede escribir a partir de una densidad de corriente como,

$$I = \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{a}, \quad (6)$$

donde $d\mathbf{a}$ es el diferencial de área y A es la sección transversal del hilo de corriente. No es difícil ver que si tenemos una distribución de corriente extendida en el espacio la integral de la Ec. (2) queda de la siguiente forma,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (7)$$

FUERZA DE LORENTZ

Los campos eléctrico y magnético ejercen independientemente fuerzas sobre las cargas eléctricas. La ley fundamental es la Ley de Lorentz. Las fuerzas sobre una partícula de carga q está dada por,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (8)$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad (vector) de la partícula (de dimensiones infinitesimales) con carga q . Nótese que el campo magnético sólo ejerce una fuerza sobre una carga en movimiento., y ésta es en dirección perpendicular al campo magnético y a la velocidad instantánea de la partícula.

Notas:

- 1) De la ecuación para la fuerza de Lorentz podemos recordar fácilmente las unidades del campo eléctrico y magnético en el sistema internacional de unidades (SI). Las unidades del campo eléctrico son Newton entre Coulomb, es decir, $[\mathbf{E}] = \left[\frac{N}{C} \right]$, y las del campo magnético: $[\mathbf{B}] = \left[\frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} \right] = \left[\frac{N}{A \cdot m} \right]$, es decir Newton entre ampere por metro.

- 2) En la ecuación (4) la fuerza neta sobre el elemento de corriente 1 es la suma de fuerzas sobre cada uno de los portadores de carga. Podemos pensar en la Ley de fuerza de Lorentz y que $\mathbf{I}_1(\mathbf{r}_1) = qna\bar{\mathbf{v}}$ donde q es la carga de uno de los portadores de carga (se suponen todos iguales, p. ej. electrones), n es la densidad en número de portadores de carga, a es el área de la sección transversal del conducto de corriente en $\mathbf{r}_1$ y $\bar{\mathbf{v}}$ es la velocidad promedio (vector) de los portadores de carga.

LEYES DE GAUSS

Definamos el flujo de campo eléctrico, Φ_E , a través de una superficie cualquiera, S (curva o plana, cerrada o abierta), como la integral sobre el área de la superficie del producto escalar del campo eléctrico y la normal a la superficie en el punto de integración,

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \quad (9)$$

donde, como ya se dijo, $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie y da es el diferencial de área. Comúnmente a $\hat{\mathbf{n}}da$ se le denomina el diferencial de superficie y se denota como un vector diferencial de superficie $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{n}}da$. Similarmente definamos se define flujo de campo magnético (Φ_B) reemplazando $\mathbf{E}$ por $\mathbf{B}$ en la expresión anterior. La ley de Gauss dice que el flujo de campo eléctrico sobre una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica en el interior de la superficie,

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (10)$$

donde $d\mathbf{s}$ es el vector diferencial de superficie (normal a la superficie), ρ es la densidad (por unidad de volumen) de carga eléctrica y V es el volumen encerrado por S . Se puede demostrar que si se postula la ley de Coulomb, entonces se puede derivar la Ley de Gauss del campo eléctrico y viceversa (ver apéndice A).

La inexistencia de cargas magnéticas (el campo magnético es generado por corrientes de carga eléctrica y no por cargas magnéticas) resulta en que el flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada es siempre cero,

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (11)$$

Las Ecs. (10) y (11) se conocen como la ley de Gauss del campo eléctrico y del campo magnético, respectivamente.

POTENCIAL ELÉCTRICO

De la ley de Coulomb también se puede derivar otra propiedad del campo electrostático. Esta es, la integral (de línea) del campo eléctrico sobre un circuito cerrado es siempre cero.

$$\oint_L \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (12)$$

Esta propiedad implica que la integral de línea del campo eléctrico de un punto a otro no depende de la trayectoria que se elija, y permite definir una función potencial de la que se puede derivar el campo eléctrico. En particular se define el potencial eléctrico como,

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (13)$$

Si establecemos el valor de cero para el potencial eléctrico en algún punto del espacio particular, digamos p.ej. en $\mathbf{r}_0$, la ecuación anterior define el potencial eléctrico como un campo escalar función de $\mathbf{r}$. El campo eléctrico se puede obtener de $U(\mathbf{r})$ como $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ donde $\nabla U(\mathbf{r}) = (\partial U / \partial x)\hat{\mathbf{a}}_x + (\partial U / \partial y)\hat{\mathbf{a}}_y + (\partial U / \partial z)\hat{\mathbf{a}}_z$, es el gradiente de $U(\mathbf{r})$ en coordenadas cartesianas y $\hat{\mathbf{a}}_x, \hat{\mathbf{a}}_y, \hat{\mathbf{a}}_z$ son vectores unitarios en la dirección de los ejes cartesianos correspondientes.

LEY DE AMPERE

La integral de línea del campo magnético a lo largo de un recorrido cerrado, L , se relaciona con el flujo de corriente eléctrica a través de una superficie cuyo perímetro es el recorrido de integración (la superficie puede ser plana o no). Si se postula la ley de Biot y Savart se puede mostrar que,

$$\oint_L \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (14)$$

donde $d\mathbf{l}$ es el vector diferencial de línea (dirección tangencial al trayecto de integración y magnitud igual al diferencial de longitud). Esta expresión se conoce como la ley de Ampere. También se puede al revés, si se postula la ley de Ampere, la Ley de Biot y Savart se puede demostrar. Las ecuaciones (10) y (12) son dos leyes de la electrostática equivalentes a la Ley de Coulomb y las ecuaciones (11) y (14) son dos leyes de la magnetostática equivalentes a la Ley de Biot y Savart.

LEYES DE LA ELECTRO Y MAGNETOSTÁTICA EN FORMA DIFERENCIAL

Usando el teorema de la divergencia:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV, \quad (15)$$

donde S es la superficie que engloba el volumen V , y el teorema de Stokes:

$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (16)$$

donde L es el contorno de la superficie L , en las ecuaciones (10), (11), (12) y (14), obtenemos,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (19)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Estas son las leyes de la electro- y magnetostática en forma diferencial. Son cuatro ecuaciones vectoriales diferenciales parciales en tres dimensiones de primer orden. Las dos primeras son las ecuaciones de Gauss para el campo eléctrico y magnético respectivamente. La tercera ecuación se podría llamar la Ley de Faraday estática y la cuarta la ley de Ampere. Dada una distribución de densidad de carga en el espacio, $\rho(\mathbf{r})$, las dos ecuaciones (17) y (19) determinan unívocamente, salvo por una constante, el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en todo el espacio. Dada una distribución de densidad de corriente en el espacio, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, las dos ecuaciones (18) y (20) determinan unívocamente, salvo por una constante, el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ en todo el espacio.

POTENCIALES ELECTRO Y MAGNETOSTÁTICOS

El potencial electrostático fue definido en la Ec. (13). En forma diferencial nos da,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (21)$$

Si usamos el potencial electrostático, la Ec. (19) se satisface automáticamente dada la identidad matemática $\nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = 0$ para todo campo escalar $f(\mathbf{r})$. Si sustituimos la Eq. (21) en las Eqs. (17) obtenemos,

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (22)$$

Esta ecuación diferencial se conoce como la ecuación de Poisson. Por lo tanto trabajando con el potencial electrostático las dos ecuaciones, (17) y (19) se transforman en una sola ecuación escalar. Lo cual es una aparente ventaja. El precio a pagar es que la ecuación diferencial es ahora de segundo orden.

Para el campo magnético también se define un campo potencial. En este caso, se apela a la identidad matemática: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Entonces, si usamos un campo vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ para derivar el campo magnético como su rotacional, es decir, si proponemos,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (23)$$

Entonces la ecuación de Gauss para el campo magnético se satisface automáticamente. Luego, sustituyendo la Ec. (23) en la Ley de ampere y usando la identidad: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})$, obtenemos,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}).$$

Notemos que la identidad matemática anterior se aplica solo con las componentes cartesianas del campo vectorial y $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})$ quiere decir el campo vectorial donde cada componente cartesiana es el Laplaciano de cada componente cartesiana de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Ahora, para especificar unívocamente un campo vectorial, salvo por una constante, se debe especificar el rotacional y la divergencia en todo punto del espacio del campo vectorial. Por lo tanto la ecuación (23) no especifica un potencial magnético único. Tenemos entera libertad de especificar

la divergencia de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ para determinar unívocamente, salvo por una constante, el potencial magnético. Elegir cuanto debe valer la divergencia del potencial vectorial se conoce como especificar la “norma”. Claramente en el caso estático lo que conviene es pedir que $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ en todo el espacio. Esta se conoce como la norma de Coulomb. En este caso el potencial magnético elegido satisface:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (24)$$

Notemos que estas son tres ecuaciones de Poisson. Una para cada componente cartesiana de los campos $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. La ventaja de usar el campo potencial en este caso no es tan obvia. En muchos casos, la ventaja consiste básicamente en que las tres ecuaciones de Poisson en la Ec. (24) están desacopladas. Es decir, son componente cartesiana por componente cartesiana.

2. ELECTRODINÁMICA

En electrodinámica se describen campos electromagnéticos que dependen del espacio y del tiempo. Las leyes de Gauss para el campo eléctrico y magnético se postulan válidas para los campos dinámicos, es decir,

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (25)$$

y

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (26)$$

Adicionalmente, tenemos la ley de inducción de Faraday y una modificación a la Ley de Ampere para el caso electrodinámico.

LEY DE INDUCCIÓN FARADAY

En el caso electrostático, la integral de línea del campo eléctrico entre dos puntos cualesquiera es independiente del camino que se escoja, lo que permite definir el potencial eléctrico (U) entre los puntos. Por lo tanto, si no existe dependencia en el tiempo, la integral de $\mathbf{E}$ sobre cualquier camino cerrado será cero. Sin embargo, si existe un campo magnético dependiente del tiempo, la integral de línea del campo eléctrico en un camino cerrado ya no es cero (por lo tanto el concepto de potencial eléctrico ya no es útil). En este caso la integral de línea se denomina la fuerza electromotriz (fem) (ó emf por sus siglas en inglés) y experimentalmente se encuentra que,

$$\int_L \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}. \quad (27)$$

Esta última ecuación es la ley de inducción de Faraday.

CONSERVACIÓN DE LA CARGA ELÉCTRICA Y LEY DE AMPERE-MAXWELL

J. C. Maxwell se dio cuenta que la Ley de Ampere no podía estar completa en una situación dinámica pues violaría la ley de conservación de carga:

$$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}. \quad (28)$$

Para que la Ec. (28) se satisfaga en todo momento es necesario añadir un término a la ley de Ampere, de tal forma que obtenemos la ley de Ampere-Maxwell:

$$\oint_L \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{s}. \quad (29)$$

Si se postula la Ec. (29), la continuidad de la carga se deriva de ésta.

ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL

Todas las ecuaciones anteriores suponen el vacío. Las ecuaciones (25), (26), (27), y (29) son suficientes para describir toda la electrodinámica clásica. Por lo tanto forman un conjunto de postulados (ó leyes) completo para la electrodinámica clásica. Las cuatro leyes se conocen como las leyes de Maxwell (dadas en forma integral).

Usando el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes en las Ecs. (25), (16), (17), y (19), obtenemos las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (33)$$

donde el argumento de todos los campos es $(\mathbf{r}, t)$. Aplicando la divergencia a ambos lados de (28) y recordando que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ para todo campo $\mathbf{A}$, obtenemos la Ec. de continuidad en forma diferencial,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (34)$$

3. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

ECUACIONES DE ONDAS

Las ecuaciones de Maxwell describen en principio todos los fenómenos electromagnéticos. En particular, deben de describir las ondas electromagnéticas. Las ecuaciones de Maxwell (32) y (33) acoplan los campos electrodinámicos, i.e., dependientes del tiempo. Son dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Para desacoplarlas y obtener una ecuación diferencial con sólo el campo eléctrico o sólo el campo magnético, tomamos el rotacional de una de ellas y usamos la otra. Por ejemplo, tomando el rotacional en ambos lados de la Ec. (32), obtenemos,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Usando la Ley de Ampere-Maxwell, la Eq. (33), en el lado derecho nos da,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Rearreglando términos nos da la **ecuación de onda vectorial del campo eléctrico**,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (35)$$

Aquí vemos que la fuente de radiación es el cambio en el tiempo de la densidad de corriente. **Esto es, cuando las cargas se aceleran, radian campos electromagnéticos.** Usando la identidad $\nabla \times \nabla \times \mathbf{S} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) - \nabla^2 \mathbf{S}$, y usando la Ley de Gauss para el campo eléctrico, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, obtenemos,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0}. \quad (36)$$

Ahora asumamos el espacio libre de cargas ($\rho = 0$) y de corrientes ($\mathbf{J} = 0$). Entonces, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y obtenemos,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (37)$$

Hay que recordar que el operador $\nabla^2 \mathbf{E}$ es abreviación de $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{E})$, y que como tal se aplica independientemente a cada componente ortogonal (i.e. cada componente cartesiana) del vector $\mathbf{E}$ (por definición, el gradiente se aplica a una función escalar y no hay vector). Tenemos que,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Tomando esto último en cuenta, es claro que la Ec. (37) corresponde a tres ecuaciones escalares independientes; una para cada componente cartesiana de $\mathbf{E}$. La Ec. (36) se conoce como la **ecuación de onda con fuentes** y la Ec. (37) se conoce como la **ecuación de onda en el vacío**.

Similarmente, tomando el rotacional de la ley de Ampere-Maxwell y utilizando la ley de inducción de Faraday,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Por lo que la *ecuación de onda vectorial para el campo magnético* es,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{J}. \quad (38)$$

En este caso las fuentes son el rotacional de la densidad de corriente. Nuevamente utilizamos la identidad, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{S} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) - \nabla^2 \mathbf{S}$ y obtenemos,

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}, \quad (39)$$

donde usamos la ley de Gauss para el campo magnético, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Asumiendo el espacio vacío ($\mathbf{J} = 0$) llegamos a la *ecuación de onda en el vacío del campo magnético*,

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (40)$$

ONDAS EN UNA DIMENSIÓN

Supongamos el caso más sencillo. Una onda escalar, digamos una componente del campo eléctrico, E_y , que depende sólo de una coordenada espacial, digamos x , y del tiempo t . La ecuación de onda se simplifica a,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (41)$$

La solución general la podemos escribir de la siguiente manera,

$$E_y = a_+ f\left(x - \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\right) + a_- g\left(x + \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\right), \quad (42)$$

donde f y g son funciones arbitrarias con primera derivada continua, a_+ y a_- son constantes. No es difícil ver que $f\left(x - \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\right)$ es una onda viajera que se propaga en la dirección positiva en el eje x a velocidad $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

El término $g\left(x + \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\right)$ corresponde a una onda propagándose en dirección negativa del eje x a la misma velocidad. La velocidad de propagación de la perturbación eléctrica en el espacio vacío se suele denotar como c . **Utilizando los valores de ϵ_0 y μ_0 (indicados al inicio de la sección 1) obtenemos,**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (43)$$

Podríamos pensar que en tres dimensiones, este resultado corresponde a una onda plana, es decir, una onda que es constante sobre cualquier plano (infinito) perpendicular a la dirección de propagación. En lo que sigue veremos el caso de una onda plana electromagnética vectorial.

ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

Escojamos una de las componentes cartesianas del vector eléctrico y denotémosla simplemente como E . En el vacío esta satisface la ecuación de onda escalar,

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (44)$$

En el caso monocromático asumimos una dependencia temporal dada por el factor $\exp(-i\omega t)$, donde ω es la frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$ donde f es la frecuencia), entonces el fasor de campo eléctrico satisface la ecuación,

$$\nabla^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0. \quad (45)$$

Esta es la ecuación de Helmholtz escalar en tres dimensiones.

LA ONDA PLANA ELECTROMAGNÉTICA EN EL VACÍO

Una onda electromagnética no sólo es una solución de la ecuación de onda. Debe ser solución en todo momento y punto del espacio de las ecuaciones de Maxwell. Esto impone ciertas restricciones a las soluciones vectoriales. Como veremos en este caso.

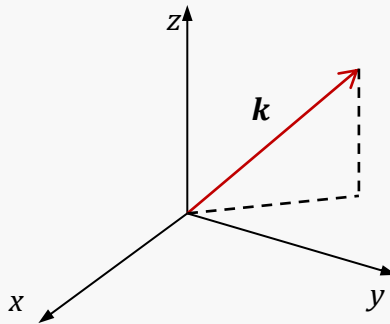


Figura 1. Vector de onda real. Indica la dirección de propagación de la fase y su magnitud la “frecuencia angular espacial”.

Consideremos la descripción de la onda usando coordenadas cartesianas y supongamos una dirección de propagación arbitraria en relación a la orientación de nuestros ejes coordenados. Supongamos que el vector unitario $\hat{s}$ apunta en la dirección de propagación de la onda y busquemos una solución sinusoidal en el tiempo (i.e., monocromática) y en el espacio. Definamos el vector de onda $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{s}$ (ver Fig. 1) y la frecuencia radial $\omega = 2\pi f$, donde λ será la longitud de onda y f la frecuencia. Proponemos una solución de la forma,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t), \quad (46)$$

donde $\mathbf{E}_0$ es un vector constante. Dado que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ están acoplados por las ecuaciones de Maxwell, necesariamente debemos tener una onda acompañante de campo $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \omega t). \quad (47)$$

Ambas ondas deben satisfacer las cuatro ecuaciones de Maxwell. Si sustituimos los campos dados en las Ecs. (46) y (47) en las ecuaciones de Maxwell, obtenemos que,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{implica } k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{y por lo tanto } \mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0, \quad (48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{implica } k_x B_x + k_y B_y + k_z B_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{y por lo tanto } \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \quad (49)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{implica } \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad \text{y por lo tanto } \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0, \quad (50)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{implica } \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \quad \text{y por lo tanto } \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{E}_0. \quad (51)$$

Las ecuaciones $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}$ además de relacionar las direcciones entre el campo eléctrico, el magnético y el vector de onda, relacionan las amplitudes de la onda eléctrica y la magnética están relacionadas.

Ahora tomamos el producto cruz de $\mathbf{k}$ con las ecuaciones vectoriales algebraicas que aparecen en (50) y (51) desde la derecha y obtenemos,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{k} \times \mathbf{E}.$$

Usando las ecuaciones anteriores en las últimas ecuaciones,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{B} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Usando la identidad $\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{A} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{A}$ en las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de dispersión en el vacío:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0. \quad (52)$$

Esta ecuación permite soluciones con el vector de onda real o complejo. En el caso de un **vector de onda real**, la ecuación de dispersión se simplifica a,

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0,$$

y la relación entre las magnitudes de la onda magnética y eléctrica se simplifica a $B_0 = (k/\omega)E_0$, i.e., a

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0. \quad (53)$$

También, en el caso de vector de onda real, tenemos que los vectores eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí, y ambos son perpendiculares a la dirección de propagación como se muestra en la figura 2.

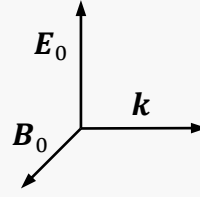


Figura 2. Relación entre los vectores eléctrico, magnético y vector de onda.

Como ya se dijo, para un tiempo t dado, tanto $\mathbf{E}$ como $\mathbf{B}$ son constantes sobre los planos perpendiculares a $\mathbf{k}$. Un plano de fase constante, i.e., aquel para el cual el argumento en (46) y (47): $\pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ es constante en un instante de tiempo dado, se desplaza a la velocidad c a lo largo de la dirección de $\mathbf{k}$. Estos planos se les llaman **frentes de onda**.

En el caso de un vector de onda complejo la Ec. (52) explícitamente lo que dice es,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0. \quad (54)$$

Aquí vemos que en general podemos especificar dos componentes del vector de onda y resolver para la restante. Por ejemplo, podemos especificar k_x y k_y y resolver para k_z ,

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}, \quad (55)$$

donde $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$. Si k_x y k_y son reales y $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2$, entonces k_z es real y tenemos una onda propagante con vector de onda real. Pero si k_x y k_y son reales y $k_x^2 + k_y^2 > k_0^2$, entonces k_z es imaginaria y tenemos una onda evanescente con vector de onda complejo, donde el vector real y el vector imaginario son perpendiculares entre sí.

En general podemos escribir $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Sustituyendo en la Ec. (52), tenemos,

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k}'' + 2i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0.$$

De donde obtenemos,

$$(k')^2 - (k'')^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = 0.$$

La segunda ecuación dice que en el vacío la parte real y la parte imaginaria del vector de onda son siempre perpendiculares o que la parte imaginaria del vector de onda es cero, y la primera ecuación nos dice que la velocidad de propagación de los frentes de onda es diferente a la de la velocidad de propagación para ondas con vector de onda real.

Por definición cuando $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' = 0$ y $\mathbf{k}''$ es distinto de cero decimos que tenemos una onda evanescente. Cuando $\mathbf{k}''$ es cero decimos que tenemos una onda homogénea en el vacío. En una onda evanescente tenemos una onda plana $\mathbf{E}_0 \exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ cuyos frentes de onda viajan en la dirección de $\mathbf{k}'$ pero su amplitud está modulada por una exponencial real que “evanesce” en la dirección de $\mathbf{k}''$, es decir la amplitud es proporcional a $\exp(-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})$. En el caso general de ondas planas en materiales con absorción (que veremos más adelante), $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''$ es distinto de cero por lo que $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{k}''$ no pueden ser perpendiculares. En el caso de que sean paralelos decimos que tenemos una onda homogénea en el material, y en el caso que hagan un ángulo oblicuo entre ellos decimos que tenemos una onda inhomogénea. En este caso las ondas homogéneas decaen en la dirección de propagación de los frentes de onda.

Supongamos dos ondas electromagnéticas planas, homogéneas y viajando en la misma dirección, con la misma frecuencia y con sus vectores eléctricos perpendiculares:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{a}}_x, \quad (56)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t) = B \cos(kz - \omega t + \delta_y) \hat{\mathbf{a}}_y, \quad (57)$$

donde, $|\mathbf{k}| = k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \omega/c$, y δ_x y δ_y son constantes. No es difícil ver que el campo eléctrico resultante de superponer estas dos ondas,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{Y}(\mathbf{r}, t),$$

rota y cambia su amplitud como función del tiempo o de la posición a lo largo de la dirección de propagación. Para encontrar la traza que dibuja el vector campo eléctrico escribimos,

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = A \cos(\psi) \hat{\mathbf{a}}_x,$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t) = B \cos(\psi + \phi) \hat{\mathbf{a}}_y = B[\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi] \hat{\mathbf{a}}_y.$$

Donde $\psi = kz - \omega t + \delta_x$ y $\phi = \delta_y - \delta_x$. Buscamos una ecuación general que describa el movimiento del vector del campo eléctrico en el tiempo. Escribimos:

$$\left(\frac{\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)}{B}\right)^2 = \cos^2 \psi + [\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi]^2.$$

Después de un poco de álgebra, el lado derecho de la ecuación anterior se puede escribir como,

$$2 \left(\frac{\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{A}\right) \left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)}{B}\right) \cos \phi + \sin^2 \phi.$$

Por lo tanto, tenemos que en todo punto del espacio $\mathbf{r}$ y todo instante de tiempo t ,

$$\left(\frac{\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)}{B}\right)^2 - 2 \left(\frac{\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)}{A}\right) \left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)}{B}\right) \cos \phi = \sin^2 \phi. \quad (58)$$

Esta es la ecuación general de una elipse con sus ejes mayor y menor haciendo un ángulo oblicuo con los ejes coordenados x y y (ver apéndice B). Entonces, tenemos que en un punto fijo del espacio el campo eléctrico traza una elipse como función del tiempo. En un instante de tiempo, el desplazarnos a lo largo de la dirección de propagación de la onda, el vector eléctrico traza una espiral elíptica.

POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

En electrodinámica también se puede y es conveniente muchas veces trabajar con campos potenciales. Primero se define el potencial magnético, igual que en la magnetostática. La Ley de Gauss para el campo magnético nos dice que también la divergencia de éste es siempre cero en el caso dinámico, por otro lado

sabemos que la divergencia de un rotacional es siempre cero. Entonces podemos escribir siempre el vector magnético como el rotacional de un vector $\mathbf{A}$, el cual llamaremos el potencial magnético,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (59)$$

Introduciendo esta relación en la ley de inducción de Faraday, nos da,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Omitimos los argumentos $(\mathbf{r}, t)$ de todos los campos por simplicidad. Ahora, el rotacional de un gradiente es siempre cero, por lo que podemos escribir,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla \phi, \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (60)$$

donde ϕ es el potencial eléctrico. Notemos que si no hay dependencia en el tiempo, este potencial coincide con el potencial eléctrico que definimos comúnmente en electrostática.

Para especificar un campo vectorial en todo el espacio, salvo por una constante, debemos de especificar su rotacional y su divergencia en todo el espacio (notemos que en la divergencia y el rotacional juntos tenemos todas las derivadas de primer orden de las tres componentes del vector). De manera que todavía tenemos libertad de especificar la divergencia de $\mathbf{A}$. Al hecho de especificar la divergencia del potencial magnético se le conoce como escoger una *norma*. Veamos una norma conveniente. Busquemos las ecuaciones de onda para los potenciales. Sustituyendo los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ por sus expresiones en términos de $\mathbf{A}$ y ϕ en la ley de Ampere-Maxwell,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Usando $\nabla \times \nabla \times \mathbf{S} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{S}) - \nabla^2 \mathbf{S}$ y reorganizando,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Aquí vemos que nos conviene tomar la norma en la que la divergencia de $\mathbf{A}$ esta dado por,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (61)$$

De esta manera los dos últimos términos del lado izquierdo de la ecuación suman cero, y obtenemos,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (62)$$

Esta es la ecuación de onda para el potencial $\mathbf{A}$. Notemos que es una ecuación vectorial pero esta desacoplada en tres ecuaciones escalares, una para cada componente cartesiana de los campos vectoriales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{J}$. Ahora, para obtener la ecuación de onda para ϕ , sustituimos $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ en la ley Gauss del campo eléctrico. Obtenemos,

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Esto es,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Finalmente, usando la norma definida arriba en la Eq. (50), resulta en,

$$\nabla^2 \phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (63)$$

Esta es la ecuación de onda para el potencial eléctrico.

Por lo general, para resolver problemas de radiación trabajamos en el espacio de las frecuencias. Lo que se hace es que se saca la transformada de Fourier en el tiempo de las ecuaciones de onda anteriores y obtenemos,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (64)$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \phi(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, \omega)}{\epsilon_0}. \quad (65)$$

En las ecuaciones anteriores agregamos explícitamente los argumentos $(\mathbf{r}, \omega)$ a los campos $\mathbf{A}$ y ϕ para indicar que estos campos son las transformadas de Fourier en el tiempo de los campos $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\phi(\mathbf{r}, t)$. Usamos los mismos símbolos $\mathbf{A}$ y ϕ para no complicar la notación. Las Ec. (64) y (65) son ecuaciones de Helmholtz inhomogéneas. Si conocemos los campos fuente podemos resolver para los potenciales electromagnéticos usando la función de Green de la ecuación de Helmholtz escalar en tres dimensiones. Esta función de Green satisface,

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (66)$$

y está dada por,

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (67)$$

Donde $k = \omega/c = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Los potenciales electromagnéticos se encuentran realizando las siguientes integrales:

$$\phi(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; \omega) \rho(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}', \quad (68)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = -\mu_0 \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; \omega) \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}'. \quad (69)$$

Finalmente se realiza la transformada inversa de Fourier en ω y se obtienen los potenciales electromagnéticos como función de $\mathbf{r}$ y t . Los campos eléctrico y de inducción magnética se obtienen con las ecuaciones (59) y (60).

4. ONDAS EN MEDIOS MATERIALES

CARGAS EXTENDIDAS Y DENSIDAD DE CARGA

Sabemos que desde un punto de vista microscópico toda carga eléctrica es puntual (electrones) o puntual para todo efecto práctico (protones). Sin embargo, para la mayoría de problemas tenemos una gran cantidad de cargas distribuidas en zonas del espacio extendidas. La gran mayoría de las veces no sabemos la posición exacta de cada carga, ni la podríamos saber si quisiéramos. Entonces lo que describimos es el campo eléctrico promedio. El promedio corresponde al promedio configuracional del sistema de cargas. Primero definamos la densidad de carga microscópica. Cada carga puntual corresponde a una delta de *Dirac* en el espacio. La densidad carga en un sistema de cargas es una suma de funciones delta,

$$\rho_{mic}(\mathbf{r}) = q \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (70)$$

donde q es la magnitud de una carga y $\mathbf{r}_j$ es la posición de la j - ésima carga puntual. El campo eléctrico de este sistema de cargas está dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_{mic}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}.$$

Ahora tomemos el promedio de configuraciones del campo eléctrico:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \langle \rho_{mic}(\mathbf{r}') \rangle \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r',$$

esto es,

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \left\langle \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \right\rangle \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \sum_{j=1}^N \langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \rangle \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'.$$

Supongamos que la densidad de probabilidad de encontrar la j - ésima carga alrededor de $\mathbf{r}_j$ esta dada por $g_j(\mathbf{r}_j)$. Entonces, el promedio configuracional de la densidad de carga se obtiene como,

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r}') \rangle = q \sum_{j=1}^N \int g_j(\mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) = q \sum_{j=1}^N g_j(\mathbf{r}') \equiv \rho_{mac}(\mathbf{r}'), \quad (71)$$

y escribimos,

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_{mac}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'.$$

En esta relación $\rho_{mac}(\mathbf{r}')$ es una función continua, derivable y extendida en el espacio. Sin singularidades.

DENSIDAD DE CORRIENTE

Hasta ahora hemos supuesto que la corriente fluye por una línea de grosor cero o que la corriente es un continuo. En general debemos considerar corriente extendidas. Es decir que fluyen a través de áreas finitas. En este caso definimos una densidad de corriente por unidad de área, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. La corriente a través de una superficie S está dada por,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}.$$

El campo magnético emanado de una distribución de corriente en el espacio se calcula como,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'.$$

Nuevamente nos podemos preguntar cómo es que definimos una densidad de corriente continua en el espacio? Si en realidad la corriente son electrones puntuales que se desplazan en el espacio. En este caso debemos hablar del promedio configuracional de los campos. Deberíamos escribir,

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}') \rangle \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (72)$$

CORRIENTES MICROSCÓPICAS Y EXTENDIDAS

Pensemos en un conjunto de N cargas puntuales en movimiento,

$$\rho_{mic}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)), \quad (73)$$

donde e es la carga de cada partícula puntual. Por un momento pensemos en una densidad de carga con dimensiones finitas en movimiento: $\rho_p(\mathbf{r}, t)$. Supongamos un pequeño cilindro de longitud dl y sección transversal de área da como se muestra en la siguiente figura,

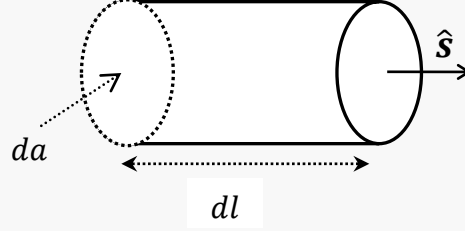


Figura 3. Elemento de volumen con su eje en la dirección de la densidad de corriente.

Si en un tiempo dt la densidad de carga se desplaza sin distorsión (como un sólido) en la dirección $\hat{s}$ una distancia dl , la carga neta que atraviesa la tapa derecha del cilindro en el intervalo de tiempo dt es, $q = \rho_p(\mathbf{r}, t) dl \cdot da$. La corriente neta que pasa por la tapa del cilindro es $I = dq/dt$. Es decir, $I = \rho_p(\mathbf{r}, t) dl \cdot da/dt$. La magnitud de la densidad de corriente sobre la tapa del cilindro es, $J = \rho_p(\mathbf{r}, t) dl/dt$. Ahora dl/dt es la velocidad con la que se desplaza la densidad de carga como un todo. Ahora, dado que la densidad de carga se desplaza sin distorsión podemos escribir, $\rho_p(\mathbf{r}, t) = \rho_p[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]$ y la velocidad es $dl/dt = |d\mathbf{r}'(t)/dt| \equiv |\dot{\mathbf{r}}'(t)|$. Como definimos que la carga se desplaza en dirección $\hat{s}$ quiere decir que el vector $\dot{\mathbf{r}}'(t)$ apunta en dirección $\hat{s}$, y por lo tanto, la densidad de corriente como vector es en esa dirección. Podemos entonces escribir,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho_p[\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)]\dot{\mathbf{r}}'(t). \quad (74)$$

Regresemos al caso de N partículas puntuales. Cada partícula puntual la podemos entender como una densidad de carga “sólida” muy concentrada en un volumen dv y en el límite en que dv tiende a cero y la densidad de carga tiende a infinito, de manera que la carga total permanece constante e igual a e . Podemos entonces usar la ecuación anterior para cada carga puntual y la densidad de corriente de toda las partículas es simplemente la suma de ellas. Tenemos que,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{j=1}^N \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)]\dot{\mathbf{r}}_j(t).$$

Ahora, queremos describir el promedio configuracional de la densidad de corriente en un instante de tiempo dado. Pensemos que la densidad de probabilidad de encontrar al j -ésimo electrón alrededor de $\mathbf{r}$ es $g_j(\mathbf{r})$ y la densidad de probabilidad que tenga una velocidad alrededor de $\dot{\mathbf{r}}$ es $f_j(\dot{\mathbf{r}})$. Entonces el promedio configuracional en el instante t se escribe formalmente como,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle &= e \sum_{j=1}^N \langle \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)]\dot{\mathbf{r}}_j(t) \rangle \\ &= e \sum_{j=1}^N \int g_j(\mathbf{r}_j) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)] d^3\mathbf{r}_j \int f(\dot{\mathbf{r}}_j) \dot{\mathbf{r}}_j d^3\dot{\mathbf{r}}_j = e \sum_{j=1}^N g_j(\mathbf{r}) \bar{\dot{\mathbf{r}}}_j, \end{aligned} \quad (75)$$

donde hay que recalcar que, en general, $\mathbf{r}_j$ y $\bar{\dot{\mathbf{r}}}_j$ son funciones del tiempo, $\mathbf{r}_j(t)$ y $\bar{\dot{\mathbf{r}}}_j(t)$. Claramente esta última función ya puede ser una función extendida y suave en el espacio y con ello $\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle$ es un campo vectorial extendido en el espacio continuo y con derivadas finitas. Si en particular todos los electrones tienen la misma densidad de probabilidad en el espacio y la misma velocidad promedio, tenemos que,

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \rangle = eNg(\mathbf{r})\bar{\mathbf{r}}. \quad (76)$$

En este caso la densidad de corriente es independiente del tiempo. Como es usual, una vez que queda claro que uno se refiere al promedio configuracional de la densidad de corriente y de los campos, se omite el símbolo de promedio.

Ahora, nos podemos preguntar **cuál** es la fuerza ejercida por el campo magnético sobre cada electrón que compone una corriente determinada. Pensemos en la corriente que fluye por un alambre de sección transversal a (infinitesimal). Esta se puede escribir como,

$$I = enaV,$$

donde e es la carga **de** un solo portador de carga (e.g., electrones), n es la densidad en número de portadores, a es el área transversal del alambre que transporta la corriente y V es la rapidez promedio, **también llamada la velocidad de deriva**, de los electrones (*drift velocity* en inglés). La fuerza total sobre un diferencial de línea $d\mathbf{l}'$ por el que fluye una corriente $I = enaV$ es la suma de fuerzas que sienten los electrones de carga en ese tramo. Podemos escribir $Vd\mathbf{l}'$ como $\mathbf{V}d\mathbf{l}$ donde $\mathbf{V}$ es la velocidad de los electrones (vector) en dirección de $d\mathbf{l}'$ y $d\mathbf{l}$ es la magnitud del vector $d\mathbf{l}'$. Por lo tanto, tenemos que,

$$d\mathbf{F} = enad\mathbf{l}\mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

La fuerza que siente cada electrón, $\mathbf{F}_e$, es la fuerza anterior entre el número total de electrones en el tramo $d\mathbf{l}$. El número total de electrones es $nad\mathbf{l}$ y obtenemos,

$$\mathbf{F}_e = e\mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (77)$$

CONEXIÓN CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

Para llegar a la Ec. (75) y homogenizar las corrientes de esa manera, ignoramos la correlación entre posición y velocidad de las partículas portadoras de carga. En mecánica clásica esto no sería posible pues nos imaginaríamos un electrón siguiendo una trayectoria determinista en el espacio. Sin embargo esto implicaría un problema fundamental pues al considerar una trayectoria determinista la partícula cargada tendría periodos de aceleración y habría radiación electromagnética [ver Ec. (35)]. En el caso de electrones alrededor de un átomo esto implicaría que los electrones estarían perdiendo energía constantemente lo que eventualmente violaría el principio de conservación de energía. Este problema se resolvió con la llegada de la mecánica cuántica en la **que** precisamente se renuncia a las trayectorias deterministas de las partículas microscópicas y la posición y velocidad de una partícula son variables independientes. Podemos decir que para postular válidas las ecuaciones de Maxwell para partículas microscópicas es necesario renunciar a la mecánica clásica y postular una nueva teoría para la mecánica de partículas microscópicas: La mecánica cuántica. La homogenización de las corrientes nos permite usar las ecuaciones de Maxwell en problemas macroscópicos con densidades de corriente y carga extendidas y continuas en el espacio-tiempo y aplicar la mecánica clásica para relacionar ambas densidades. Esto es consistente con la mecánica cuántica, pues un postulado de ésta teoría es que el promedio de las cantidades físicas en mecánica cuántica deben satisfacer la mecánica clásica. Es importante estar conscientes que aunque nos referimos al electromagnetismo clásico, en realidad la mecánica cuántica es necesaria para postular las ecuaciones de Maxwell macroscópicas. Es decir, sin la mecánica cuántica no podríamos hacer consistentes las ecuaciones de Maxwell con una teoría corpuscular de la materia.

De las discusiones anteriores se desprende que una vez que tenemos muchas cargas puntuales, en realidad deberíamos escribir las ecuaciones de Maxwell para el promedio configuracional de los campos en términos de los promedios configuracionales de la densidad de carga y corriente. Tomando el promedio configuracional en ambos lados de las ecuaciones, y dado que promediar conmuta con las derivadas espaciales y temporales, postulamos las siguientes ecuaciones válidas,

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}, \quad (78)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0, \quad (79)$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t}, \quad (80)$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{J} \rangle + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t}. \quad (81)$$

Ya dicho esto, quitamos los símbolos de promedio y queda implícito en el futuro que nos referimos a los campos promedio de configuraciones o de ensamble.

5. ONDAS EN MEDIOS CONDUCTORES

Consideremos un medio con partículas cargadas libres. Supongamos que no existe ninguna corriente externa, es decir que en ausencia de campo eléctrico, en promedio las cargas no se mueven. Busquemos soluciones a las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo, es decir, supongamos una dependencia dada por el factor $\exp(-i\omega t)$. Ahora, aunque no haya corrientes externas, en presencia de un campo eléctrico, las cargas se desplazan empujadas por éste y se generan corrientes. Estas corrientes son inducidas, y en este caso las llamamos corrientes inducidas de conducción. Supongamos también que las cargas no se acumulan en el espacio, i.e., ni se comprimen ni se diluyen. Entonces la densidad de carga no cambia en el tiempo y de la ecuación de continuidad tenemos que de existir una corriente inducida esta satisface $\nabla \cdot \mathbf{J}_{ind}(\mathbf{r}, t) = 0$. Las ecuaciones de Maxwell en este caso quedan como,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (82)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (83)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (84)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mathbf{J}_{ind}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (85)$$

Donde le agregamos el subíndice *ind* a la densidad de corriente en la ley de Ampere Maxwell para hacer explícito que no hay corrientes externas.

Ahora para encontrar soluciones a este sistema de ecuaciones necesitamos un modelo. El más simple, pero a la vez el más útil en general es usar la ley de Ohm. En este caso, tenemos que la densidad de corriente en un

punto del espacio es proporcional al campo eléctrico en ese mismo punto. Si además suponemos que la respuesta de las cargas al campo eléctrico es isotrópica (igual en todas las direcciones) Escribimos,

$$\mathbf{J}_{ind}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (86)$$

En este caso la ley de Ampere-Maxwell queda como,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = (\mu_0\sigma(\omega) - i\omega\mu_0\epsilon_0)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mu_0\epsilon_0 \left(1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega\epsilon_0}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (87)$$

Ahora, podemos definir una nueva permitividad del medio, ϵ , dada por,

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left(1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega\epsilon_0}\right), \quad (88)$$

donde

$$1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega\epsilon_0} = \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} \equiv \epsilon_r(\omega), \quad (89)$$

es la permitividad eléctrica relativa o “constante dieléctrica”. Como se indica en la ecuación anterior esta no es constante si no una función de la frecuencia. Es una cantidad compleja, en este caso: $\epsilon_r = \epsilon'_r + i\epsilon''_r$. Se puede verificar que esta es una cantidad adimensional. Entonces en este caso, las ecuaciones de Maxwell quedan como,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (90)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (91)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (92)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mu_0\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (93)$$

Son las mismas ecuaciones que para el vacío pero reemplazando ϵ_0 por $\epsilon(\omega)$. Por lo tanto, tienen las mismas soluciones que para el vacío pero reemplazando ϵ_0 por $\epsilon(\omega)$.

ONDAS INHOMOGENEAS

La ecuación de Helmholtz en este caso queda como,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2\mu_0\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (94)$$

La solución de onda plana está dada por,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = E_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)\hat{\mathbf{e}}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Helmholtz resulta en,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2 \mu_0 \epsilon(\omega) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) = \epsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (95)$$

Esta es la ecuación de dispersión. En términos de las tres componentes cartesianas del vector de onda tenemos,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \epsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (96)$$

En general, podemos especificar dos componentes del vector de onda, e.g. k_x y k_y y la otra esta dada por la ecuación de dispersión como,

$$k_z(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}. \quad (97)$$

Dado que ϵ_r es compleja, k_z es también compleja: $k_z = k'_z + ik''_z$. Entonces el vector de onda es complejo y podemos escribir,

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''. \quad (98)$$

Tenemos dos casos generales cuando $\mathbf{k}'$ y $\mathbf{k}''$ son paralelos en cuyo caso nos referimos a una onda homogénea y cuando no son paralelos y en cuyo caso nos referimos a una onda inhomogénea. Por ejemplo, en el caso de refracción de una onda plana al interior de un material con permitividad relativa $\epsilon_r = \epsilon'_r + i\epsilon''_r$ a través de una interface plana y con el eje z normal a la interface, tenemos que k_x y k_y del vector de onda de la onda refractada son iguales a los de la onda incidente (nota: esta es la ley de Snell). Esta es una consecuencia de que las condiciones a la frontera (las que fueren y que veremos más adelante) se deben satisfacer en todo punto de la interfase. En este caso $\mathbf{k}''$ es en dirección z y $\mathbf{k}'$ tiene componentes x, y, z por lo que no son paralelos.

MODELO DE DRUDE PARA LA CONDUCTIVIDAD ELÉCTRICA

Pensemos en un material que tiene electrones libres. Los electrones se están moviendo debido a su energía cinética dependiendo de la temperatura del sistema. Sin embargo, si no existe un campo eléctrico neto en una región del espacio, el desplazamiento promedio de los electrones es cero. En presencia de un campo eléctrico, los electrones sentirán una fuerza y en promedio se desplazaran localmente en la dirección del campo eléctrico en ese punto del espacio. Para describir el desplazamiento promedio de los electrones podemos usar mecánica clásica. Supongamos que existe un campo eléctrico (promedio) $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. En una región pequeña del espacio alrededor de $\mathbf{r}$ podemos suponer que $\mathbf{E}$ es constante en dirección del eje x y su magnitud no depende de las coordenadas espaciales. De manera que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(t)\hat{\mathbf{a}}_x$ donde $\hat{\mathbf{a}}_x$ es un vector unitario fijo en la dirección del eje x . Los electrones libres en esa región del espacio de moverán en promedio en la dirección del vector $\mathbf{E}$, es decir en la dirección de $\hat{\mathbf{a}}_x$. Denotemos la posición del electrón en el eje x como X . La fuerza que siente un electrón es $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, donde e es negativa y de magnitud igual a la carga fundamental, 1.6×10^{-19} C. Por otro lado la interacción de los electrones libres con los átomos o moléculas del material que los contiene resulta en una fuerza de fricción que se opone al movimiento de éstos. De manera que al desplazarse los electrones aparece una fuerza disipativa. Fenomenológicamente sabemos que este tipo de fuerzas son proporcionales a la velocidad de movimiento. Supongamos además que la dependencia en el tiempo es armónica. De manera que $\mathbf{E}(t) = E_0 \exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{a}}_x$. La ecuación de movimiento del electrón, dada por la segunda Ley de Newton, es en este caso,

$$m_e \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dX(t)}{dt} = eE_0 \exp(-i\omega t), \quad (99)$$

donde γ es una constante de “fricción microscópica”. La solución a esta ecuación diferencial inhomogénea se obtiene proponiendo la forma de la solución como,

$$X(t) = A \exp(-i\omega t), \quad (100)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial. Obtenemos,

$$m_e(-i\omega)^2 A \exp(-i\omega t) + \gamma(-i\omega)A \exp(-i\omega t) = eE_0 \exp(-i\omega t).$$

Despejamos el coeficiente A y obtenemos,

$$A = -\frac{\left(\frac{e}{m_e}\right)}{\omega^2 + i\Gamma\omega} E_0, \quad (101)$$

donde $\Gamma \equiv \gamma/m_e$.

Ahora, la densidad de corriente promedio está dada por $\mathbf{J} = en\mathbf{V}$ donde n es la densidad en número de electrones y $\mathbf{V}$ es la velocidad (promedio) de éstos. De la ecuaciones (100) y (101) obtenemos,

$$\mathbf{V} = \frac{dX(t)}{dt} = -\frac{\left(\frac{e}{m_e}\right)}{\omega^2 + i\Gamma\omega} E_0(-i\omega) \exp(-i\omega t).$$

Por lo que la densidad de corriente es,

$$\mathbf{J} = n \left(\frac{e^2}{m_e}\right) \frac{i\omega}{\omega^2 + i\Gamma\omega} E_0 \exp(-i\omega t) \hat{\mathbf{a}}_x. \quad (102)$$

La conductividad relaciona el campo eléctrico promedio con la densidad de corriente promedio en el mismo punto del espacio, $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Notando en la ecuación (102) que $E_0 \exp(-i\omega t)$ es la amplitud del campo eléctrico como función del tiempo, reconocemos que a frecuencia ω tenemos,

$$\sigma(\omega) = \frac{n \left(\frac{e^2}{m_e}\right)}{\Gamma - i\omega}. \quad (103)$$

La conductividad es compleja y en general función de la frecuencia. Para frecuencias bajas podemos despreciar ω en el denominador y tenemos que la conductividad es independiente de la frecuencia, $\sigma \approx \frac{ne^2}{\Gamma m_e}$.

Para frecuencias altas podemos despreciar Γ en el denominador y tenemos que la conductividad es imaginaria, $\sigma(\omega) = i \frac{ne^2}{\omega m_e}$ y decrece inversamente proporcional a la frecuencia.

6. MEDIOS POLARIZABLES

La materia está compuesta de átomos y moléculas y éstas poseen cargas eléctricas. Un átomo neutro está formado por un núcleo con un cierto número protones de carga $+e$ y neutrones sin carga. Alrededor del núcleo se encuentran electrones de carga $-e$ en igual número que los protones ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ C). La descripción del átomo se debe hacer en general usando la teoría de mecánica cuántica. Sin embargo, en óptica casi nunca es necesario tener una descripción detallada de los átomos. Para muchos propósitos es suficiente con representar a los átomos o a las moléculas como una distribución de carga localizada en un volumen muy

pequeño (desde unos cuantos **ángstroms** cúbicos hasta algunos nanómetros cúbicos). Un cuerpo material en presencia de un campo eléctrico externo va a tener una respuesta a éste. La distribución de carga asociada a una molécula se puede representar en una expansión multipolar. El primer término sería la carga total del átomo o molécula. Luego tendríamos el término dipolar, cuadrupolar, etc... Para el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas es suficiente quedarnos con los dos primeros términos; el monopolar y el dipolar. En el texto siguiente nos referiremos siempre a una molécula, pero en general podríamos referirnos a un átomo igualmente.

DIPOLO ELÉCTRICO

Un dipolo eléctrico consiste de dos cargas puntuales de signo opuesto pero igual magnitud (q) separadas por una distancia d . El campo eléctrico debido a una carga $+q$ en $\mathbf{r}_1$ y otra $-q$ en $\mathbf{r}_2$ está dado por,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right). \quad (104)$$

Este puede ser derivado del potencial eléctrico debido al dipolo,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right) \cdot \mathbf{d}, \quad (105)$$

donde $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. El vector dipolar se define como $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ donde el momento dipolar es la magnitud de éste: $p = qd$. (El dipolo eléctrico apunta de la carga negativa a la carga positiva.). Si queremos el potencial eléctrico a una distancia lejos del dipolo (comparado a d) podemos usar,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}_2 + \mathbf{d})|} \approx \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \nabla_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right) \Big|_{\mathbf{r}_j=\mathbf{r}_2} \cdot \mathbf{d}.$$

Entonces podemos escribir el campo eléctrico de un dipolo como,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\nabla_j \cdot \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\} \cdot \mathbf{p} \right]. \quad (106)$$

Ahora podemos realizar las operaciones indicadas:

$$\nabla_j \cdot \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\} \cdot \mathbf{p} = -\nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} \left\{ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}.$$

Luego,

$$\nabla \left\{ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \right\} = -3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^5} \{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p} \} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \nabla \{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p} \}.$$

Usando $\nabla \{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{p} \} = \mathbf{p}$ y combinando los dos términos obtenemos,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}, \quad (107)$$

donde redefinimos $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_j$ y por lo tanto $r \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$.

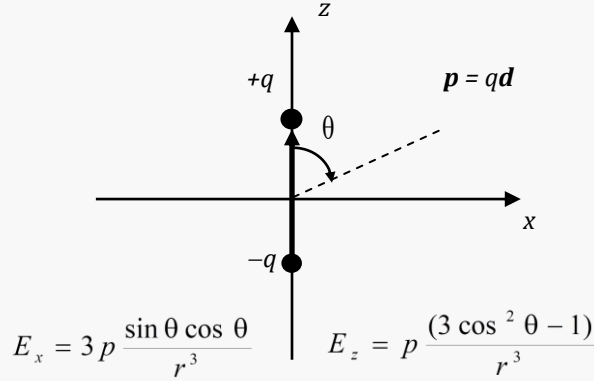


Figura 4. Dipolo eléctrico en el origen.

CAMPO ELECTROSTÁTICO PROMEDIO ALREDEDOR DE UNA MOLÉCULA

Imaginemos una molécula como una región definida del espacio en la cual coexisten un cierto número n_e de cargas negativas (electrones) con un número n_p de cargas positivas (protones). Supongamos que el centro de la molécula es $\mathbf{r}_j$. Supondremos que tanto las cargas negativas como las positivas son puntuales. Por lo tanto la densidad de carga se puede expresar como,

$$\rho_j(\mathbf{r}) = e \sum_i s_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \quad (108)$$

donde s_i es +1 si la partícula es un protón y -1 si es un electrón, e es la carga fundamental (1.602×10^{-19} coulombs), y $\mathbf{r}_i$ es el vector que va del centro de la molécula a la posición de la carga.

El potencial eléctrico microscópico debido a la molécula está dado como,

$$\begin{aligned} \phi_j(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_j(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int \frac{s_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{s_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}, \end{aligned} \quad (109)$$

y el campo eléctrico está dado como menos uno por el gradiente de esta expresión. Si imaginamos que los electrones y los protones están en constante movimiento y que el arreglo particular de éstos en un instante de tiempo en las diferentes moléculas que forman un material es diferente, queda claro que nos debemos de ocupar del campo Eléctrico promedio. Este se puede entender como un promedio *configuracional* o promedio de *ensamble* para un arreglo de moléculas. Este último lo entenderemos como el campo promedio entre todas las configuraciones posibles de las cargas puntuales. Podemos definir una densidad de probabilidad de encontrar a la i -ésima partícula de carga $s_i e$ en $\mathbf{r}_i$ como $g_i(\mathbf{r}_i)$. Entonces,

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle = \frac{s_i e}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{g_i(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}_i.$$

Realizamos la integral sobre $d^3\mathbf{r}'$ y obtenemos,

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle = \frac{s_i e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{g_i(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} d^3\mathbf{r}_i.$$

Si el punto de observación $\mathbf{r}$ esta lejos de la molécula comparado con sus dimensiones interiores podemos expandir,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \cong \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \mathbf{r}_i \cdot \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|}.$$

Si nos quedamos con sólo con los dos primeros términos obtenemos,

$$\langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle = \frac{s_i}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \mathbf{p}_i \cdot \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\}, \quad (110)$$

donde usamos,

$$\int g_i(\mathbf{r}_i) d^3\mathbf{r}_i = 1,$$

para toda i y definimos,

$$\mathbf{p}_i \equiv e \int \mathbf{r}_i g_i(\mathbf{r}_i) d^3\mathbf{r}_i. \quad (111)$$

El potencial eléctrico promedio debido a la molécula j , es la suma del potencial debido a todas las partículas de carga que la conforman,

$$\langle \phi_j(\mathbf{r}) \rangle = \sum_i \langle \phi_i(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\}, \quad (112)$$

donde

$$q_j \equiv (n_p - n_e)e, \quad (113)$$

es la carga neta de la molécula (n_p es el número de protones y n_e el número de electrones) y

$$\mathbf{p}_j = \sum_i \mathbf{p}_i = e \sum_i s_i \int \mathbf{r}_i g_i(\mathbf{r}_i) d^3\mathbf{r}_i. \quad (114)$$

El campo eléctrico promedio debido a la molécula está dado por

$$\langle \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \langle \phi_j(\mathbf{r}) \rangle = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left\{ \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\}. \quad (115)$$

El campo eléctrico en el interior de un material es la suma de campo externo más el campo monopolar y dipolar de cada molécula que constituye el material. En general el campo eléctrico es una función muy complicada de la posición y el tiempo. Sería imposible describir el campo eléctrico en todo instante tiempo y en todo punto del espacio entre las moléculas que forman un cuerpo material. A lo que nos debemos limitar es a describir el promedio de *ensamble* del campo eléctrico.

El promedio de *ensamble* en un punto del espacio es el promedio del campo eléctrico producido en dicho punto por todas las configuraciones posibles del arreglo de moléculas y lo denotaremos encerrando la cantidad promediada entre corchetes: $\langle \rangle$. Consideremos un arreglo de N moléculas que forman el cuerpo material de nuestro interés. Denotaremos la posición del centro de las moléculas por $\mathbf{r}_n$ donde n toma valores de 1 a N . Entonces el potencial en un punto del espacio $\mathbf{r}$ no muy cerca (**comparado con las dimensiones de la molécula**) de ninguna de las moléculas es,

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \phi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \nabla_n \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} \right) \cdot \mathbf{p}_n \right\}, \quad (116)$$

y el campo eléctrico derivado de este potencial eléctrico en $\mathbf{r}$ es $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_m(\mathbf{r})$.

Para continuar, supondremos que las moléculas son puntuales por lo que la Ec. (116) es válida para todo punto del espacio. El campo promedio en $\mathbf{r}$ se obtiene tomando el promedio de ensamble del arreglo de moléculas. Dado que ahora sólo nos interesa la respuesta de polarización eléctrica de la materia, supongamos que la carga neta de las moléculas es cero, i.e., $q_n = 0$, entonces,

Podemos suponer una densidad en número de moléculas puntuales dada por,

$$n_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (117)$$

Supongamos que la polarización de cada molécula es despreciable en ausencia de un campo externo (i.e., que la polarización permanente de cada molécula es cero, o más general, la orientación de las moléculas es al azar y el momento dipolar permanente promedia a cero). Entonces, supondremos que el momento dipolar de cada molécula es proporcional al campo eléctrico total sobre la molécula en $\mathbf{r}$. La aproximación de campo medio consiste en reemplazar el momento dipolar de cada molécula por la polarización promedio de la molécula en $\mathbf{r}$, la cual denotaremos como $\mathbf{p}(\mathbf{r})$.

Entonces, el potencial electrostático se puede escribir como la integral de la densidad molecular por el campo dipolar de una molécula,

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \phi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \sum_{n=1}^N \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}').$$

El promedio de ensamble se escribe formalmente como,

$$\langle \phi_m(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \phi_n(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \left\langle \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right\rangle, \quad (118)$$

Y

$$\langle \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \langle \phi_m(\mathbf{r}) \rangle,$$

donde usamos el hecho de que el promedio y la sumatoria conmutan. El promedio de configuraciones se hace formalmente de la siguiente manera,

$$\left\langle \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \right\rangle = \int \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}') f_n(\mathbf{r}_n) d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}_n, \quad (119)$$

donde $f_n(\mathbf{r}_n)$ es la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula n en $\mathbf{r}_n$. En general tenemos que,

$$f_n(\mathbf{r}_n) = \prod_{i \neq n} \int d^3 \mathbf{r}_i f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N),$$

donde $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_N)$ es la densidad de probabilidad de encontrar un arreglo particular de todas las moléculas, i.e., a la partícula 1 en $\mathbf{r}_1$, a la partícula 2 en $\mathbf{r}_2$, etc... Cada integral de volumen se hace sobre todo el espacio. Nótese que se ha omitido la integral sobre la coordenada $\mathbf{r}_n$ de la n -ésima partícula. Podemos hacer la integral sobre $d^3 \mathbf{r}_n$ en la ecuación (119) y obtenemos,

$$\langle \phi_m(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}') \left\{ \sum_{n=1}^N f_n(\mathbf{r}') \right\} d^3 \mathbf{r}'. \quad (120)$$

Ahora, definimos la polarización por unidad de volumen en un punto del espacio $\mathbf{r}$, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, como,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}(\mathbf{r}) \left\{ \sum_{n=1}^N f_n(\mathbf{r}') \right\}, \quad (121)$$

y obtenemos

$$\langle \phi_m(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (122)$$

El campo eléctrico promedio es entonces,

$$\langle \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \langle \phi_m(\mathbf{r}) \rangle = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (123)$$

El campo eléctrico promedio debido a la polarización de moléculas del material es una función de la posición continua y suave en escala molecular. Podemos referirnos al campo promedio como el campo eléctrico macroscópico. Este es el campo al que uno se refiere en las ecuaciones de Maxwell en medios materiales. Una vez que está claro que uno se refiere al campo promedio se pueden omitir los corchetes, y escribir el campo eléctrico macroscópico debido al conjunto de moléculas simplemente como $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$. Para no confundirnos en el futuro podríamos denotar al campo eléctrico de un ensamble particular (sin promediar) como el campo eléctrico microscópico y denotarlo como $\mathbf{e}_m(\mathbf{r})$. (Entonces, escribiríamos $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{e}_m(\mathbf{r}) \rangle$.) Usando la identidad,

$$\nabla \cdot [\mathbf{P}(\mathbf{r})a(\mathbf{r})] = a(\mathbf{r})\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \nabla a(\mathbf{r}),$$

y omitiendo los corchetes de promedio de configuraciones podemos re-escribir la Ec. (123) como,

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \left\{ \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} d^3\mathbf{r}'. \quad (124)$$

Supongamos que el material tiene un volumen V . Denotaremos la superficie del volumen V por Σ . En este caso la polarización por unidad de volumen es cero fuera de V . Entonces podemos reemplazar la integral sobre todo el espacio por una integral sobre el volumen V . Podemos entonces usar el teorema de la divergencia con el primer término, y tenemos que el campo eléctrico macroscópico se puede escribir como,

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left\{ \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right\}, \quad (125)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}'$ es el vector normal al elemento diferencial de área ds' y apunta hacia fuera del volumen V . Podemos interpretar la primer integral como la integral del potencial eléctrico debido a una densidad superficial de carga:

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}', \quad (126)$$

y el segundo como la integral del potencial debido a una densidad volumétrica de carga ligada,

$$\rho_b(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (127)$$

donde el subíndice b viene del término en inglés *bound*.

Si tomamos la divergencia del campo macroscópico en la Ec. (125), y usamos,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

obtenemos,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0. \quad (128)$$

Podemos suponer que adicionalmente se encuentra dentro del material una distribución de carga libre, $\rho_l(\mathbf{r})$, la cual da lugar a un campo eléctrico adicional $\mathbf{E}_l(\mathbf{r})$, el cual satisface $\nabla \cdot \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r})/\epsilon_0$. El campo eléctrico total es la suma de este campo más el campo debido a las moléculas dado por la ecuación (125). Entonces podemos escribir ambos $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_l(\mathbf{r})$, y entonces,

$$\nabla \cdot \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \right\} = \frac{\rho_l(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (129)$$

Es convencional definir el vector de desplazamiento:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (130)$$

el cual satisface la siguiente ley de gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r}). \quad (131)$$

SUCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA

Supongamos un campo eléctrico monocromático con dependencia temporal dada por $\exp(-i\omega t)$, en un medio material lineal e isotrópico. Podemos suponer que las relaciones anteriores, obtenidas para campos electrostáticos, son válidas en una región del espacio suficientemente pequeña para que la amplitud del (fasor) campo eléctrico, promedio configuracional, pueda ser considerado constante pero suficientemente grande para contener un gran número de moléculas o átomos. En este caso se puede suponer que la amplitud (del fasor) de polarización eléctrica por unidad de volumen es proporcional a la amplitud del campo eléctrico. El factor de proporcionalidad debe ser considerado en general como una función de la frecuencia. Por convención, escribimos,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (132)$$

donde χ_e se define como la susceptibilidad eléctrica del material, siendo ésta una cantidad adimensional. Entonces, el vector de desplazamiento eléctrico está dado por,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 [1 + \chi_e(\omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

donde $\epsilon(\omega)$ es la permitividad eléctrica del material y $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e(\omega)$ se denomina la permitividad eléctrica relativa ó función dieléctrica (también adimensional). Podemos escribir la Ec. (131) como,

$$\nabla \cdot [\epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \rho_l(\mathbf{r}). \quad (133)$$

ECUACIONES DE MAXWELL PARA CAMPOS MONOCROMÁTICOS PARA MEDIOS POLARIZABLES

La ecuación (133) es ya la primera ecuación de Maxwell para campos monocromáticos en medios polarizables. Corresponde a promediar sobre todas las configuraciones microscópicas permitidas la ley de Gauss para el campo eléctrico. Para derivar las tres siguientes tomaremos el promedio configuracional de ambos lados de las ecuaciones microscópicas correspondientes en presencia de un conjunto grande moléculas o átomos. Para evitar confusiones, en lo que sigue denotamos todos los campos microscópicos (i.e., el campo exacto, sin promediar) con minúsculas y los campos promediado sobre todas las configuraciones con mayúsculas y los denominaremos como campos macroscópicos. Por ejemplo el campo eléctrico microscópico (el campo exacto) es $\mathbf{e}$ y al campo eléctrico macroscópico (promedio de configuraciones) es $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$. El campo magnético microscópico (exacto) lo denotaremos como $\mathbf{b}$ y al campo magnético macroscópico (promedio configuracional) como $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$.

Si sacamos el promedio configuracional de la ley de Gauss para el campo de inducción magnética microscópico obtenemos, $\langle \nabla \cdot \mathbf{b} \rangle = \langle 0 \rangle$, esto es, $\nabla \cdot \langle \mathbf{b} \rangle = 0$. Por lo tanto tenemos que el campo magnético macroscópico satisface la ley de gauss para el campo magnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Similarmente podemos promediar la ley de Faraday para los campos microscópico: $\langle \nabla \times \mathbf{e} \rangle = -\langle \partial \mathbf{b} / \partial t \rangle$ y obtenemos,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

De manera que los campos macroscópicos satisfacen la ley de Faraday tal cual. Con la ley de Ampere-Maxwell debemos tener cuidado. Si promediamos los campos microscópicos, tenemos

$$\langle \nabla \times \mathbf{b} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t}.$$

Donde denotamos la densidad de corriente microscópica como $\mathbf{j}$. Ahora la polarización del medio, si es dependiente del campo genera corrientes. Esto lo podemos ver de la ecuación de continuidad de la carga (microscópica),

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Dado que $\langle \rho_b(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$ tenemos que,

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\partial \langle \rho_b \rangle}{\partial t} = \nabla \cdot \langle \mathbf{j}_b \rangle \equiv \nabla \cdot \mathbf{J}_b.$$

Por lo tanto,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{J}_b \right) = 0.$$

Dado que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es siempre cero, tenemos que, si dos campos tienen la misma divergencia entonces los campos son iguales salvo por el rotacional de un campo vectorial. Es decir, de la última ecuación obtenemos que en general,

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M},$$

donde el vector $\mathbf{M}$, de existir, se le denominaría magnetización por unidad de volumen y se relacionaría a la existencia de momentos magnéticos moleculares inducidos. Aquí supondremos que es cero. Entonces,

$$\langle \nabla \times \mathbf{b} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{j}_l \rangle + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t},$$

donde $\langle \mathbf{j}_l \rangle$ es el promedio de las corrientes libres, es de corrientes que no dependen, ni de los campos eléctricos, ni de los campos magnéticos. En términos de los campos macroscópicos tenemos,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_l + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mu_0 \mathbf{J}_l + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

donde $\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E}$. Resumiendo, las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en un medio polarizable son:

$$\nabla \cdot [\epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \rho_l(\mathbf{r}), \quad (134)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (135)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t}, \quad (136)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}_l(\mathbf{r}) + \mu_0 \epsilon(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t}, \quad (137)$$

donde todos los campos llevan implícita una dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$.

Si definimos $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, siendo $\mathbf{H}$ el campo magnético H , obtenemos las ecuaciones usadas en óptica. A frecuencias **más** bajas que las consideradas en óptica, algunos medios pueden tener respuesta magnética. En este caso, la magnetización de un material no es despreciable, entonces es necesario hacer un tratamiento análogo con el momento dipolar magnético promedio inducido en las moléculas por el campo magnético macroscópico (es decir, promedio). En este caso se define $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ y en medios lineales se define la susceptibilidad magnética, χ_h , como $\mathbf{M} = \chi_h \mathbf{H}$. Entonces tenemos $\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{H} + \mathbf{M}$ y $\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_h)\mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, donde μ_r es la permeabilidad magnética relativa. La ecuación de Ampere-Maxwell queda como $\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J}_l + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ y la ley de Gauss queda igual, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Aquí notemos que $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$ y entonces $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$. De manera que la divergencia del vector $\mathbf{H}$ puede no ser cero. En este caso se puede pensar en una densidad de “carga magnética” que es fuente del vector magnético $\mathbf{H}$. En algunos libros esto se escribe como $\nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m$. Esta densidad de carga nunca es libre, siempre corresponde a “cargas magnéticas” inducidas en medios materiales y solo son macroscópicas. No tienen origen microscópico. Las ecuaciones de Maxwell en este caso se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot [\epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \rho_{ext}(\mathbf{r}), \quad (138)$$

$$\nabla \cdot [\mu(\omega) \mathbf{B}(\mathbf{r})] = 0, \quad (139)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r})}{\partial t}, \quad (140)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}_{ext}(\mathbf{r}) + \mu_0 \epsilon(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t}, \quad (141)$$

7. APÉNDICES

APÉNDICE A. EQUIVALENCIA ENTRE LEY DE COULOMB Y LEY DE GAUSS ESTÁTICA

Para mostrar que la Ley de Gauss es equivalente a la Ley de Coulomb, podemos primero pensar en una superficie esférica con una carga eléctrica puntual en su centro. La integral de superficie del campo eléctrico se puede calcular fácilmente,

$$\oint_{S_E} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (A1)$$

donde S_E es la superficie de una esfera de radio R concéntrica con la carga puntual. Por otro lado no es difícil mostrar que para una fuente puntual en $\mathbf{r}'$, $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ para toda $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ y $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \infty$ para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Usando el teorema de la divergencia tenemos que,

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint_{S_E} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{V_E} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \int_{V_E} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) dV, \quad (A2)$$

y esto es independiente del radio R de la esfera, por lo que se concluye que ,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (A3)$$

Con este resultado no es difícil ver que la integral de volumen de la divergencia de $\mathbf{E}$ es q/ϵ_0 independientemente de la forma del volumen de integración si es que éste incluye a la carga. Si no la incluye entonces el resultado es cero dado que la divergencia de $\mathbf{E}$ es cero dentro de todo el volumen y por lo tanto la integral de superficie de $\mathbf{E}$ sobre una superficie que no engloba a una carga es cero. Extender el resultado a muchas cargas y a una distribución continua de cargas es directo.

APÉNDICE B: POLARIZACIÓN DE UNA ONDA HOMOGÉNEA EN EL VACÍO

En la **subsección “Polarización de Ondas Homogéneas”** obtuvimos:

$$\left(\frac{X(\mathbf{r}, t)}{A} \right)^2 + \left(\frac{Y(\mathbf{r}, t)}{B} \right)^2 = \cos^2 \psi + [\cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi]^2, \quad (B1)$$

donde $\psi \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta_x$ y $\phi \equiv \delta_y - \delta_x$. Realizando el álgebra para reescribir el lado derecho de la ecuación anterior y mostrar que obtenemos la ecuación de una elipse,

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2 \phi + \sin^2 \psi \sin^2 \phi - 2 \cos \psi \cos \phi \sin \psi \sin \phi \\ &= \cos^2 \psi + \cos^2 \psi [1 - \sin^2 \phi] + \sin^2 \psi \sin^2 \phi - 2 \cos \psi \cos \phi \sin \psi \sin \phi \\ &= 2\cos^2 \psi + [\sin^2 \psi - \cos^2 \psi] \sin^2 \phi - 2 \cos \psi \cos \phi \sin \psi \sin \phi \\ &= 2\cos^2 \psi + [1 - 2 \cos^2 \psi] \sin^2 \phi - 2 \cos \psi \cos \phi \sin \psi \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\cos^2 \psi - 2\cos^2 \psi \sin^2 \phi - 2\cos \psi \cos \phi \sin \psi \sin \phi + \sin^2 \phi \\
&= 2\cos^2 \psi \cos^2 \phi - 2\cos \psi \cos \phi \sin \psi \sin \phi + \sin^2 \phi \\
&= 2\cos \psi [\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi] \cos \phi + \sin^2 \phi \\
&= 2\cos \psi [\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi] \cos \phi + \sin^2 \phi \\
&= 2\left(\frac{X(\mathbf{r}, t)}{A}\right)\left(\frac{Y(\mathbf{r}, t)}{B}\right) \cos \phi + \sin^2 \phi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que en todo punto del espacio $\mathbf{r}$ y todo instante de tiempo t ,

$$\left(\frac{X(\mathbf{r}, t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y(\mathbf{r}, t)}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{X(\mathbf{r}, t)}{A}\right)\left(\frac{Y(\mathbf{r}, t)}{B}\right) \cos \phi = \sin^2 \phi, \quad (B2)$$

Para poder relacionar las constantes A, B y ϕ con las propiedades de una elipse, recordemos que la ecuación de una elipse centrada en el origen con sus ejes a lo largo de los ejes cartesianos es,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (B3)$$

Si rotamos los ejes coordenados un ángulo θ y usamos $x = X \cos \theta + Y \sin \theta$ y $y = -X \sin \theta + Y \cos \theta$, tenemos,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{X \cos \theta + Y \sin \theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{-X \sin \theta + Y \cos \theta}{b}\right)^2 = 1, \\
&\frac{X^2 \cos^2 \theta + Y^2 \sin^2 \theta + 2XY \cos \theta \sin \theta}{a^2} + \frac{X^2 \sin^2 \theta + Y^2 \cos^2 \theta - 2XY \cos \theta \sin \theta}{b^2} = 1, \\
&X^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}\right) + Y^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2}\right) + 2XY \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cos \theta \sin \theta = 1, \\
&\frac{X^2(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)}{a^2 b^2} + \frac{Y^2(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)}{a^2 b^2} + 2XY \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \cos \theta \sin \theta = 1.
\end{aligned}$$

Tenemos que la ecuación de la elipse en el sistema XY es,

$$X^2(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) + Y^2(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) + 2XY(b^2 - a^2) \cos \theta \sin \theta = a^2 b^2. \quad (B4)$$

Comparando las Ecs. (B4) y (B2) tenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A^2} &\equiv (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta), \\
\frac{1}{B^2} &\equiv (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta), \\
\frac{1}{AB} \cos \phi &= (b^2 - a^2) \cos \theta \sin \theta,
\end{aligned}$$

$$\sin^2 \phi = a^2 b^2.$$

De la última ecuación obtenemos,

$$b = \frac{1}{a} \sin \phi,$$

y de las primeras dos ecuaciones tenemos que,

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = b^2 + a^2.$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones, obtenemos,

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{\sin^2 \phi}{a^2} + a^2.$$

Resolviendo para a ,

$$a^4 - a^2 \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right) + \sin^2 \phi = 0,$$

llegamos a,

$$a = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right)^2 - 4 \sin^2 \phi}}{2}}. \quad (B5)$$

Similarmente encontramos que,

$$b^4 - b^2 \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right) + \sin^2 \phi = 0,$$

y

$$b = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right)^2 - 4 \sin^2 \phi}}{2}}. \quad (B6)$$

En un caso debemos tomar el signo positivo y en el otro el negativo (si no serían iguales). Finalmente de la tercera ecuación resolvemos para θ :

$$\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta) = \frac{\cos \phi}{AB(b^2 - a^2)}.$$

Notemos que,

$$b^2 - a^2 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \right)^2 - 4 \sin^2 \phi}.$$

Por lo tanto,

$$\sin(2\theta) = \pm \frac{2 \cos \phi}{AB \sqrt{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}\right)^2 - 4 \sin^2 \phi}} . \quad (B7)$$

De donde obtenemos directamente θ .

8. BIBLIOGRAFÍA

- 1) Simon Ramo, John R. Whinnery and Theodore van Duzer, Fields and Waves in Communications Electronics, Third Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- 2) John David Jackson, Classical Electrodynamics Third Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

9. EJERCICIOS

1. Demuestra el teorema de la divergencia y el teorema de Stokes.
2. Demuestra que la Ley de Biot-Savart cumple con la tercera ley de Newton
3. Demuestra que $\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r})] = 0$.
4. Demuestra que $\nabla \times [\nabla \phi(\mathbf{r})] = 0$.
5. Define la función delta de Dirac y da una expresión matemática en forma de límite.
6. A partir de las ecuaciones de Maxwell deriva la ecuación de onda vectorial para el campo magnético con fuentes (es decir no hagas cero los términos ρ y $\mathbf{J}$). Luego asume un campo monocromático con dependencia $\exp(-i\omega t)$ en el vacío (ρ y $\mathbf{J}$ cero) y obtén la llamada ecuación de Helmholtz para el campo magnético.
7. Deriva la Ecuación de onda para el potencial magnético $\mathbf{A}$ y el potencial eléctrico ϕ en la norma de Coulomb. ¿Qué ventaja hay al trabajar con ellos?
8. Calcula el flujo de campo eléctrico ϕ_E a través de una superficie esférica concéntrica a una carga puntual con carga q .
9. Demuestra $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ donde $\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})$ y $\nabla \mathbf{A}$ aquí quiere decir aquí obtener el gradiente componente por componente cartesiana ($\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_x \nabla^2 A_x + \hat{\mathbf{a}}_y \nabla^2 A_y + \hat{\mathbf{a}}_z \nabla^2 A_z$). Nota: Esta identidad es válida sólo para componentes cartesianas.
10. Supongamos un conjunto de N cargas puntuales en movimiento. La densidad de carga se puede escribir como,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \sum_{j=1}^N \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)].$$

Obtén una expresión para la corriente microscópica $\mathbf{j}$ y para su promedio configuracional $\langle \mathbf{j} \rangle$. Esta última en términos de funciones de densidad de probabilidades de posición y velocidad.

11. Encuentra una expresión para el campo radiado por un alambre de longitud L en el que oscila la corriente,

$$I = I_0 \exp(-i\omega t)$$

Puedes suponer que la densidad de corriente es uniforme en el interior del alambre y que el alambre es cilíndrico con sección transversal a muy pequeña ($a \ll \lambda$). Toma en cuenta que en los extremos del alambre se acumula periódicamente carga. Lejos del alambre que potencial electromagnético, ϕ o $\mathbf{A}$, contribuye más?... y cerca?

12. Pensemos en una carga puntual $+q$ localizada en $\mathbf{r}'$ y otra carga puntual $-q$ localizada en $\mathbf{r}' + \mathbf{d}$. Este par de cargas forma un dipolo eléctrico. Demuestra que el campo lejos del dipolo ($|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \mathbf{d}$) se puede escribir como,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\left\{ \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right\} \cdot \mathbf{p} \right].$$

Define el operador diádico $\nabla \nabla_j$ y calcula $\nabla \nabla_j \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right)$. Luego toma el producto punto con el vector dipolo $\mathbf{p}$ y multiplica por $\frac{-1}{4\pi\epsilon_0}$. Muestra realizando las operaciones que el resultado final es el mismo.

13. Demuestra que en $\mathbf{E}$ que la ecuación anterior se puede escribir como,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}$$

En el límite $d \rightarrow 0$ y $q \rightarrow \infty$ con la restricción $p = qd$ (finito), es el dipolo puntual.

14. Pensemos en un dipolo puntual localizado en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano. Supongamos que $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{a}}_z$. Da una expresión en coordenadas cartesianas para E_x, E_y y E_z como función de (x, y, z) .
15. Muestra que el promedio (configuracional) del campo eléctrico alrededor de u átomo o molécula se puede aproximar como el de una carga puntual más el de un dipolo puntual. Da una expresión para el momento dipolar del átomo o molécula.
16. Define el vector macroscópico de polarización $\mathbf{P}$. Muestra que a) $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\langle \rho_{ind} \rangle$ donde $\langle \rho_{ind} \rangle$ es el promedio de la densidad de carga inducida en el bulto del material. b) Usando la ecuación de continuidad de la carga, $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$, muestra que $\mathbf{J}_{ind} = \partial \mathbf{P} / \partial t + \nabla \times \mathbf{M}$.
17. Homogenizar la densidad de corriente en un átomo o molécula en presencia de un campo eléctrico a frecuencia ω y mostrar que el campo electromagnético radiado se puede ver como el de un dipolo puntual que oscila a frecuencia ω .
18. Obtener las ecuaciones de Maxwell para campos monocromáticos con dependencia $\exp(i\omega t)$ en medios materiales para un material hecho de dipolos puntuales que responden linealmente, isotrópicamente y localmente al campo eléctrico. No hacer la aproximación cuasi-estática, deben usar el campo electrodinámico radiado por dipolos puntuales a frecuencia ω . [Suponer que $\mathbf{P}(\mathbf{r}; \omega) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}; \omega)$, donde $\mathbf{P}$ es la polarización por unidad de volumen y χ_e es la suceptibilidad eléctrica.]
19. Investiga cómo se obtiene y cuál es la función de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, para la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

20. Investiga cómo se obtiene y cuál es la función de Green $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$, para la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial t^2} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t').$$