



CCADET

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Laboratorio de Óptica Clásica

Neil C. Bruce

28/Marzo/2017

Laboratorio de Óptica Clásica

Neil C. Bruce

Resumen

Estas notas de curso son un texto de consulta que reúne los temas más importantes, que los estudiantes de la carrera de física o de áreas afines deberían conocer de un curso introductorio en materia de óptica experimental. Los experimentos presentados aquí están enfocados al análisis de errores, tema que en la mayoría de los casos no es tratado con la debida importancia en la entrega de reportes. Con el fin de motivar a los estudiantes, a los que va dirigido este material, a buscar la respuesta con su propio esfuerzo, el diseño de las practicas experimentales implica la búsqueda de información adicional en las referencias recomendadas. Este material se elabora a partir de la experiencia en impartir el curso del “Laboratorio de óptica”, asignatura de la licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Índice

Prefacio.....	5
1. Análisis de Errores.....	6
Error en una medición.....	6
Combinación de errores.....	8
Error en el promedio.....	11
Resumen de ecuaciones importantes.....	12
Otras ecuaciones importantes.....	13
Errores sistemáticos.....	15
2. Planeación de experimentos.....	16
Ejemplos del análisis de errores en la planeación de experimentos.....	20
3. Análisis de los resultados y escritura del reporte.....	31
Análisis de los resultados.....	31
Escritura del reporte.....	32
4. Prácticas de Laboratorio.....	34
Experimento 1: Medición de índices de refracción.....	35
Experimento 2: Lentes Delgadas.....	40
Experimento 3: La prueba de la Navaja de Foucault.....	47
Experimento 4: Análisis espectral por un Prisma.....	52
Experimento 5: Polarización y la Ley de Malus.....	56
Experimento 6: Ecuaciones de Fresnel.....	60
Experimento 7: Interferómetro de Michelson.....	63
Experimento 8: Interferómetro de Fabry-Perot.....	69
Experimento 9: Interferómetro Estelar de Michelson.....	72
Experimento 10: Speckle (moteado) de láser.....	75
Experimento 11: Difracción.....	79
Experimento 12: Espectroscopia por rejilla.....	84
Experimento 13: Resolución.....	87
Experimento 14: Filtraje espacial.....	91
Apéndice 1. El promedio y el error en el promedio.....	94
Apéndice 2. La matriz de la información.....	97

Prefacio

El presente trabajo surge de la necesidad de tener un texto sobre el análisis de errores y un banco básico de experimentos para llevarse a cabo en los laboratorios de óptica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Los experimentos presentados aquí cubren los temas más importantes que deben saber los estudiantes de licenciatura en relación a la óptica. Por supuesto que la elaboración de las prácticas siempre estará determinada en gran medida por las limitaciones de presupuesto y los equipos disponibles en buen funcionamiento.

Las prácticas no incluyen toda la teoría ni la deducción completa de las ecuaciones requeridas para los experimentos, pero se incluyen referencias donde esta información puede ser consultada. También, en la parte experimental no se da toda la información para realizar las mediciones con el objetivo de que el estudiante haga una búsqueda en las referencias y proponga la metodología a seguir para realizar su medición.

El conocimiento del tratamiento de los errores involucrados en cualquier experimento es esencial para una interpretación correcta de los datos obtenidos, pero en mi experiencia como profesor del laboratorio de óptica, los estudiantes utilizan formulas que otro profesor les presentó, sin entender de donde vienen las formulas o porqué se utilizan, o simplemente no se preocupan de incluir errores. Por esta razón, estas notas están enfocadas al análisis de errores. Aunque se incluye el desarrollo matemático de las formulas, en el capítulo 1 y en los apéndices, se trata de enfatizar la utilización de las formulas y el significado de los resultados que dan, para no esconder la importancia del análisis de errores en la deducción de las ecuaciones. En particular, en los capítulos 1 y 2 se dan ejemplos tomados de los mismos experimentos presentados posteriormente en el capítulo 4. Los apéndices incluyen la deducción de las ecuaciones utilizadas o presentadas, para que los estudiantes que tengan el interés en saber de dónde vienen las ecuaciones puedan consultarlos, aunque no es esencial entender el contenido de estos apéndices para aprovechar el resto del contenido.

Agradezco a Rufino Díaz por su apoyo cuando empecé a dar clases en el laboratorio de óptica, así mismo agradezco a Martha Rosete y a Citlali Bruce por su apoyo en la revisión de versiones anteriores de este texto.

1. Análisis de errores

Al realizar cualquier medición para determinar un valor en un experimento, intervienen una serie de factores que alteran o modifican este valor. Uno de esos factores se atribuye a los instrumentos y métodos de medición, en donde la última cifra significativa está relacionada a la mínima división de la escala en que están graduados (Oda Noda, 2013).

Error en una medición

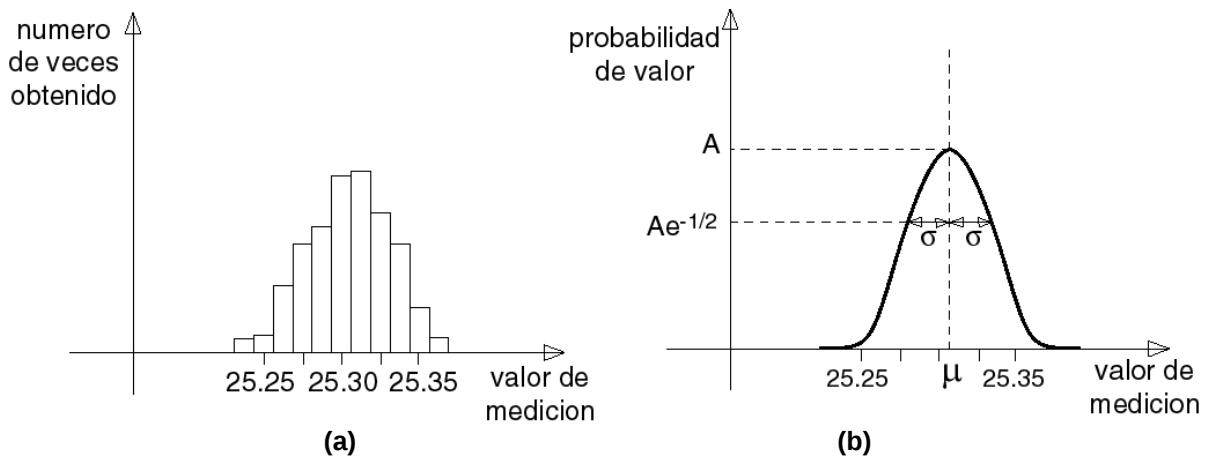
Si medimos una distancia con un vernier, por ejemplo, nuestra medición puede ser 25.300cm, y si el vernier tiene divisiones de 1/20mm, podemos estimar el error en nuestro valor como 0.0025mm, i.e. el valor es 25.3000 ± 0.0025 cm. Quizá esto implica que el valor verdadero de la medición puede tener cualquier valor entre 25.2975 y 25.3025 con igual probabilidad; pero no es así (Taylor, 1997). Tenemos dos casos que analizar:

- (i) Si repetimos nuestra medición y siempre obtenemos el mismo resultado, el instrumento utilizado (el vernier) es el que limita la precisión del resultado y podemos indicar el error como la mitad de la mínima escala. Sin embargo, si el valor “real” estuviera muy cercano al límite inferior o superior de este rango de error, esperaríamos que algunas de las mediciones nos dieran un valor inferior o superior al valor medido por las variaciones estadísticas (que provienen, por ejemplo, de variaciones en el posicionamiento del vernier sobre la distancia a medir, o variaciones en la lectura de la escala). Entonces en este caso es más probable que el valor “correcto” esté más cerca al valor medido que a los límites del error.
- (ii) De igual manera, si repetimos muchas veces la medición y obtenemos una distribución de resultados como en la figura 1(a), tenemos un caso en que el instrumento es más preciso que los otros aspectos del experimento (como los mencionados en el punto anterior) y es claro que es más probable que el valor “correcto” esté en el centro de la distribución que en las orillas.

En ambos casos podemos concluir que: **es más probable que el valor esté cerca de nuestra medición que más lejos**. Podemos ver este efecto si repetimos la medición muchas veces, como se mencionó arriba. Cuando el instrumento de medición es suficientemente preciso y graficamos el valor medido contra el número de veces que nos dio ese valor medido, se obtiene una gráfica como la de la figura 1(a). Se puede mostrar que si los errores son aleatorios y cuando el número de observaciones es muy grande (matemáticamente sería cuando este número tiende a infinito), la probabilidad de obtener un valor (i.e. el número relativo de veces de obtener un valor) puede ser aproximada por la distribución Gaussiana como se muestra en la figura 1(b). Se ha encontrado que la distribución Gaussiana es una buena aproximación para las distribuciones reales encontradas en mediciones y por eso su validez ha sido ampliamente aceptada.

La distribución está dada por (Baird, 1991; Beers 1962; Bevington, 2003):

$$P(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$



en donde x es el valor, μ es el promedio (el valor en el pico) y σ es la desviación estándar que da la extensión o ancho de la función.

Se puede calcular que:

68% de los valores están en el intervalo $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$

95.5% de los valores están en el intervalo $\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma$

99.7% de los valores están en el intervalo $\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma$.

i.e. σ nos da una medida del “error” o extensión en el valor. Vamos a decir que nuestro valor es $\mu \pm \sigma$. También se puede ver que es muy improbable que el valor “correcto” sea mayor que 2σ del valor promedio, entonces, si dos valores están separados por más de 2σ , podemos decir que “no son consistentes”.

Ahora, si tenemos N mediciones de nuestro valor, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, ¿cómo podemos calcular la mejor estimación al verdadero valor? La probabilidad de obtener el valor en el intervalo $x_1 \rightarrow x_1 + dx$ es:

$$P(x_1, \mu', \sigma)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu')^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (2)$$

donde μ' es la estimación del promedio. Del mismo modo, la probabilidad de obtener los valores de todas las N mediciones es:

$$P(x_1, \mu', \sigma) P(x_2, \mu', \sigma) P(x_3, \mu', \sigma) \dots P(x_N, \mu', \sigma) (dx)^N$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) (dx)^N \quad (3)$$

Queremos calcular el valor de μ' que da la máxima probabilidad de obtener los N valores. Este cálculo se puede hacer si se toma la derivada de la ecuación (3) con respecto al parámetro μ' y luego se iguala a cero este resultado. Como se muestra en el apéndice 1, el resultado está dado por:

$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4)$$

i.e. el promedio aritmético.

Ahora, queremos calcular σ , que es una estimación de la desviación estándar, o dicho de otra manera σ es una estimación de la variación en cada una de las mediciones. También, tomaremos a σ como la estimación del error en los valores. Derivando la ecuación (3) con respecto a σ , e igualando a cero, obtenemos:

$$\sigma = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

En calculadoras, normalmente esta cantidad se conoce como σ_{N-1} .

Ahora tenemos las mediciones con sus desviaciones estándar:

$$x_1 \pm \sigma, x_2 \pm \sigma, x_3 \pm \sigma, \dots, x_N \pm \sigma$$

y una estimación del promedio de las mediciones. Lo que todavía no tenemos es una estimación del error del promedio. Para calcular esta cantidad tenemos que ver cómo hacer la combinación de errores.

Combinación de errores

Comúnmente, la medición de una cantidad física no se realiza directamente con un instrumento, sino que se calcula a partir de otros parámetros medidos directamente con otros instrumentos. De manera que la incertidumbre asociada al cálculo final debe ser calculada también por un procedimiento definido, que involucre tanto a las cantidades directamente medidas como a sus correspondientes incertidumbres; esto se conoce con el nombre de propagación de incertidumbres (Baird, 1991; Beers 1962; Bevington, 2003, Taylor 1997).

Supongamos que el valor de la cantidad de interés es z , y se determina esta cantidad a partir de una variable directamente medida, x , a través de una función $f()$:

$$z = f(x) \quad (6)$$

y la incertidumbre se calcula como se describe a continuación.

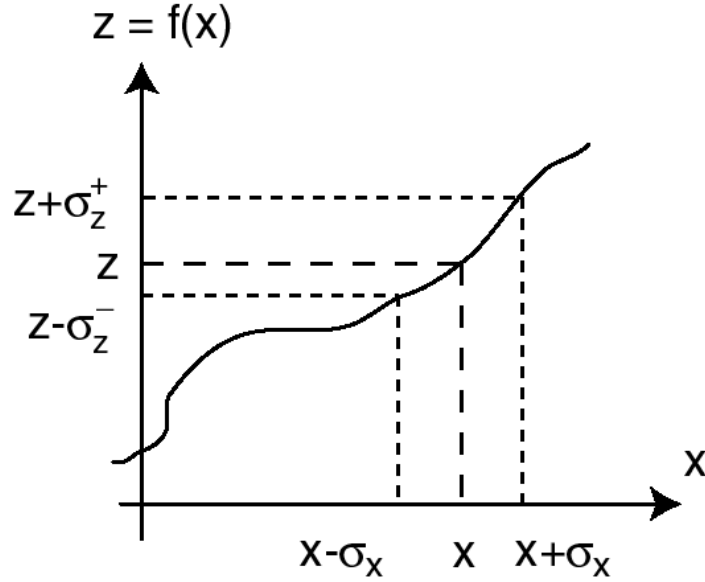


Figura 2: gráfica esquemática mostrando la relación entre un error en el medible x y el parámetro desconocido z

En la figura 2 se presenta la gráfica de la función $f(x)$; en el eje horizontal se muestra el valor x de la cantidad medida, así como su incertidumbre indicada por el intervalo:

$$x \pm \sigma_x = (x - \sigma_x, x + \sigma_x) \quad (7)$$

Proyectando dichos valores al eje de las ordenadas a través de la gráfica de la función, se obtienen los valores correspondientes de z :

$$z \pm \sigma_z = (z - \sigma_z^-, z + \sigma_z^+) \quad (8)$$

en donde se ha hecho evidente que el intervalo de error así obtenido es asimétrico para z . Aplicando la ecuación (6), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma_z^- &= \Delta f^- = f(x) - f(x - \sigma_x) \\ \sigma_z^+ &= \Delta f^+ = f(x + \sigma_x) - f(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Si definimos como σ_z simplemente el mayor de σ_z^- o σ_z^+ , dado que lo que queremos es una *estimación* del error en z , la incertidumbre propagada será

$$\sigma_z = \Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Delta x \quad (10)$$

Aceptando que $\Delta f (= \sigma_z)$ y $\Delta x (= \sigma_x)$ son pequeños, podemos aproximar el cociente en (10) por el valor de la derivada, resultando:

$$\sigma_z = \frac{df}{dx} \sigma_x \quad (11)$$

Para el caso de N mediciones de la variable x , y utilizando las ecuaciones (5) y (11):

$$(\sigma_z)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu'_z)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu'_x)^2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = (\sigma_x)^2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \quad (12)$$

Se puede generalizar la ecuación (12) a funciones de varias variables (suponiendo que no hay correlaciones entre las variaciones de las variables)

$$(\sigma_z)^2 = (\sigma_{x_1})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + (\sigma_{x_2})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + (\sigma_{x_3})^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 + \dots \quad (13)$$

Utilizando la ecuación (13) para funciones simples se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 1.

z	σ'_z
$x \pm y$	$\sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2}$
xy	$\sqrt{y^2(\sigma_x)^2 + x^2(\sigma_y)^2}$
$\frac{x}{y}$	$\sqrt{\frac{(\sigma_x)^2}{y^2} + \frac{x^2(\sigma_y)^2}{y^4}}$

Tabla 1: Fórmulas para la propagación de errores

Un ejemplo más complicado es la ley de Snell. Se puede medir el índice de refracción utilizando la ley de Snell:

$$n = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} \quad (14)$$

Donde n es la relación de los índices de refracción absolutos, en otras palabras, es el índice de refracción relativo de los dos medios. Suponemos que se quiere medir el índice de refracción de un bloque de vidrio en aire y que el índice de refracción del aire es aproximadamente igual a uno. Adicionalmente, θ_i es el ángulo de incidencia del rayo sobre el bloque de vidrio con respecto al normal a la superficie del bloque y θ_t es el ángulo de transmisión del rayo adentro del bloque de vidrio con respecto a la normal interna de la superficie. Estos dos ángulos son medidos en el experimento. Ahora, utilizando la ecuación (13), el error en el índice de refracción es:

$$(\sigma_n)^2 = (\sigma_{\theta_i})^2 \frac{\cos^2(\theta_i)}{\sin^2(\theta_i)} + (\sigma_{\theta_t})^2 \frac{\sin^2(\theta_i) \cos^2(\theta_t)}{\sin^2(\theta_t)} \quad (15)$$

Para analizar el error en el índice de refracción dado por la ecuación (15) supongamos que $n_t \approx 1.5$ (que es típico para el vidrio) y que la desviación estándar en la medición del ángulo es $\sigma_\theta = 0.5^\circ = 0.009$ radianes (nótese que los errores se manejan en radianes cuando hay ángulos involucrados) obtenemos los valores indicados en la Tabla 2.

θ_i	θ_t	$(\sigma_{\theta_i})^2 \frac{\cos^2(\theta_i)}{\sin^2(\theta_i)}$	$(\sigma_{\theta_t})^2 \frac{\sin^2(\theta_i)\cos^2(\theta_t)}{\sin^2(\theta_t)}$	σ_n
10°	6.65°	0.0059	0.0002	0.078
20°	13.18°	0.0014	0.0002	0.040
30°	19.47°	0.0005	0.0001	0.024
40°	25.37°	0.0003	0.0001	0.020
50°	30.71°	0.0001	0.0001	0.014
60°	35.26°	0.00006	0.0001	0.013
70°	38.79°	0.00002	0.0001	0.011
80°	41.04°	0.000006	0.0001	0.010

Tabla 2: Valores obtenidos para la propagación de errores con la ley de Snell

Esta tabla muestra algunos resultados interesantes:

1. Debido a que el error en el índice de refracción, σ_n , es mayor para ángulos de incidencia pequeños, es mejor realizar las mediciones a ángulos de incidencia grandes.
2. Como regla general se puede disminuir el error en la variable calculada minimizando el error en la medición de cada magnitud directamente medida.
3. Aunque lo anterior es cierto, también es cierto que hay ciertos errores en los parámetros que son más trascendentes que otros. Por ejemplo, en la tabla se puede ver que para ángulos de incidencia grandes, la contribución al error total producido por el error del ángulo de incidencia es muy pequeña comparada con la contribución del error en el ángulo de transmisión. Esto indica que el error del ángulo de transmisión es más importante y, por lo tanto, debe hacerse más esfuerzo por minimizar este error que el del ángulo de incidencia.

Error en el promedio

Utilizando la ecuación (4) tenemos:

$$\mu'_x = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N) \quad (16)$$

y utilizando la fórmula para el error en una suma de la Tabla 1:

$$\sigma_{\mu'_x} = \frac{1}{N} \sqrt{(N\sigma'_x)^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \mu'_x)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_{N-1} \quad (17)$$

i.e. si formamos el promedio de N valores, la desviación estándar (o error) en el promedio se reduce como $1/\sqrt{N}$ veces el error en cada medición. El error en el promedio disminuye si se aumenta el número de mediciones.

Un ejemplo de la utilización de las formulas presentados arriba es el caso de las mediciones para calcular el índice de refracción con la ley de Snell que vimos anteriormente; si medimos los ángulos de incidencia y transmisión 4 veces cada uno:

$$\theta_i = 80.2^\circ, 80.5^\circ, 80.1^\circ, 79.7^\circ$$

$$\theta_t = 40.8^\circ, 41.0^\circ, 41.2^\circ, 40.9^\circ$$

Se puede calcular el error en cada medición usando la ecuación (5):

$$\theta_i = 80.2 \pm 0.33^\circ, 80.5 \pm 0.33^\circ, 80.1 \pm 0.33^\circ, 79.7 \pm 0.33^\circ$$

$$\theta_t = 40.8 \pm 0.17^\circ, 41.0 \pm 0.17^\circ, 41.2 \pm 0.17^\circ, 40.9 \pm 0.17^\circ$$

Ahora formamos el promedio de cada parámetro, y debido a la relación (17), el error en el promedio es el error en cada medición multiplicado por $\frac{1}{\sqrt{N}}$, i.e. $\frac{1}{2}$ en este caso:

$$\theta_i = 80.13 \pm 0.17^\circ$$

$$\theta_t = 40.98 \pm 0.09^\circ$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones para propagar errores (en radianes), equation (13): el índice de refracción es $n = 1.502 \pm 0.002$.

Aquí hay otro punto importante y es el que se refiere al número de cifras que debe reportarse en un resultado. Si el error en el valor está en la tercera cifra después del punto decimal, como en el ejemplo de arriba, no tiene sentido reportar el valor con más de 4 o 5 cifras después del punto decimal. Siempre se debe reportar el valor y el error con el mismo número de cifras.

Resumen de ecuaciones importantes

Si tenemos N mediciones, x_i , de la cantidad x :

1. La mejor estimación de x es:
$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (18)$$

2. El error en cada medición x_i es:
$$\sigma = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2 \right)^{1/2} \quad (19)$$

3. El error en el promedio, μ' , es:
$$\sigma_{\mu'} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N-1}} \left(\sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

4. Si $x = f(u, v, w)$, entonces el error en x es:

$$\sigma_x^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + \sigma_w^2 \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right)^2 \quad (21)$$

en donde $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$ son los errores en u, v y w .

Otras ecuaciones importantes

En algunos experimentos tenemos varias mediciones de una cantidad y cada medición tiene su propio error, i.e. tenemos: $x_1 \pm \sigma_1, x_2 \pm \sigma_2, x_3 \pm \sigma_3, \dots, x_N \pm \sigma_N$. Si una de las mediciones es muy precisa, ésta debe ser más importante en el cálculo del promedio que una medición que no es muy precisa. Esto es, debemos realizar el promedio utilizando pesos para cada medición en donde el peso depende inversamente del error en la medición.

En ecuaciones tenemos que el promedio es (ver Apéndice 2):

$$\mu' = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)} \quad (22)$$

y el error en este promedio con pesos es:

$$\sigma_{\mu'} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (23)$$

En este caso no hay que estimar los errores en cada valor, como en el caso anterior, porque ya los conocemos, entonces el resultado tiene una forma diferente. Se puede verificar que si todos los valores de los errores σ_i son iguales, recuperamos las ecuaciones para el promedio y el error de la sección anterior.

Otra situación que ocurre muchas veces en el laboratorio es la necesidad de ajustar una línea recta a los datos. Supongamos que tenemos los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N)$ y que queremos ajustar estos datos a la línea recta $y = mx + c$, en donde m es la pendiente de la línea y c es la intersección de la línea en el eje y . Si no se conocen los errores en cada medición, se puede calcular que las mejores estimaciones de m y c son (ver Apéndice 2):

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (24)$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (25)$$

la estimación del error en cada medición es

$$s = \left\{ \frac{1}{(N-2)} \sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - c)^2 \right\}^{1/2} \quad (26)$$

y los errores en m y c están dados por:

$$\sigma_m = \left\{ \frac{1}{N(N-2)} \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - c)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (27)$$

$$\sigma_c = \left\{ \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - c)^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \right)}{N(N-2)} \right\}^{1/2} \quad (28)$$

Finalmente, si en el ajuste a una línea recta se conocen los errores en cada valor de y_i , las mejores estimaciones de m y c y sus errores están dados por:

$$m = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (29)$$

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (30)$$

$$\sigma_m = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{1/2} \quad (31)$$

$$\sigma_c = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^{1/2} \quad (32)$$

Nuevamente, los errores no los tenemos que estimar, y estas ecuaciones tienen una forma diferente a las ecuaciones obtenidas para el caso de error desconocido.

Errores sistemáticos

El análisis presentado arriba es para los errores estadísticos: estos errores suben o bajan el valor de una medición aleatoriamente, de tal forma que la repetición de una medición tiende a reducir el error. Sin embargo, hay otro tipo de error: el error sistemático, que afecta a todas las mediciones por igual. Este tipo de error no se puede analizar estadísticamente, y la repetición de las mediciones no reduce este error (Baird 1991; Taylor 1997). Algunos ejemplos de errores sistemáticos son:

- Errores de calibración de instrumentos. Por ejemplo, en el caso de la refracción de la luz en un bloque de vidrio, si el instrumento utilizado para medir los ángulos tiene un error en la graduación y, por ejemplo, mide los ángulos un poco más grandes que sus valores reales, entonces todas las mediciones serán más grandes y el valor final del índice de refracción tendrá un valor incorrecto. Este error no estará incluido en la estimación del error estadístico.
- Errores en los parámetros físicos requeridos en el experimento. Por ejemplo, en el mismo experimento para la transmisión de la luz en el vidrio, se aproximó el índice de refracción del aire igual a 1, cuando en realidad su valor varía con la temperatura y la presión, por ejemplo el índice de refracción del aire es igual a 1.000293 (a 0 grados centígrados y 1 atm de presión). Esto dará un error en el índice de refracción del vidrio.
- Cambios en las condiciones físicas. Repitiendo el mismo experimento en dos días diferentes cuando, por ejemplo, la temperatura es muy diferente, se obtendrán diferentes resultados para la medición, porque es conocido que el índice de refracción de un material depende de la temperatura. Entonces, la diferencia entre las mediciones del índice de refracción en los dos días puede ser mucho más grande que el error estadístico estimado.
- Errores de medición. Errores en la lectura de un vernier, equivocación en la escala de la lectura de una medición, o simplemente errores en la forma de medir los parámetros, también afectarán los resultados finales.

Para reducir el efecto de errores sistemáticos es necesario analizar con cuidado cada experimento y diseñarlo en una forma que elimine o reduzca lo más posible estos errores. En ocasiones, si no se puede eliminar un error sistemático se puede identificar una corrección del resultado final para reducir el efecto del error. Sin embargo, la mejor forma de eliminar errores sistemáticos es realizar la misma medición con dos (o más) técnicas diferentes, y si el resultado es consistente para los dos métodos, se puede suponer que los errores sistemáticos han sido eliminados. Si el resultado no es el mismo en los dos métodos, y esta diferencia es mayor que los errores estadísticos, entonces uno (o dos) de los métodos tiene algún error sistemático y se debe trabajar más en su reducción.

Bibliografía

Baird D.C., (1991), Experimentación: Una Introducción a la Teoría de Mediciones y el Diseño de Experimentos, Prentice-Hall Hispanoamericana, México

Beers Y., (1962), Introduction to the theory of error, Second Edition, Addison-Wesley, Nueva York

Bevington P.R., Robinson D.K., (2003), Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, Third Edition, McGraw-Hill, New York

Oda Noda B., (2013), Introducción al Análisis Gráfico de Datos Experimentales, Facultad de Ciencias, UNAM, México

Taylor J.R., (1997), An Introduction to Error Analysis, The Study of Uncertainties in Physical Measurements, Second Edition, University Science Books, Sausalito, CA

2. Planeación de experimentos

La planeación de un experimento, igual que la realización del mismo, debe realizarse en una forma ordenada y cuidadosa (Baird, 1991; Beers, 1962; Bevington, 2003; Taylor, 1997). Esto es igual para todos los experimentos: desde los experimentos sencillos que se van a realizar en el Laboratorio de Óptica hasta los experimentos más complicados en laboratorios como el CERN o la NASA. Por supuesto, si olvidas medir la distancia entre dos lentes en el Laboratorio de Óptica no hay mucho problema, puedes repetir el experimento y sólo pierdes una tarde, pero si olvidas revisar y repetir la medición de la forma del espejo secundario del telescopio espacial Hubble antes de lanzarlo al espacio, pierdes tu reputación, tu empleador tiene que gastar mucho dinero en corregir el problema y también pierde algo de su reputación (particularmente frente a los que pagan las cuentas), y probablemente pierdas tu empleo. Por eso, es importante empezar con los buenos hábitos necesarios para realizar correctamente un experimento. A continuación se enumeran los pasos que deben seguirse para preparar un experimento.

1. Definir muy bien el modelo a probar y el sistema experimental que se utilizará. Esto quizá parece obvio, pero es muy importante. Hay que entender el modelo a utilizar y compararlo con el sistema experimental. Hay que fijarse en las diferencias o en los parámetros que no están controlados en el experimento que pueden estar implícitos en el modelo. Es muy importante entender las aproximaciones realizadas en el modelo y cómo se compara la situación experimental con estas aproximaciones. Por ejemplo, el índice de refracción de un material (y del aire) cambia con la temperatura del ambiente, y quizá en el laboratorio no tenemos forma de controlar la temperatura. Sin embargo, si notamos que el cambio del índice de refracción en un vidrio típico es del orden de 10^{-6} por grado Celsius, entonces, para un cambio en la temperatura de 10°C , el cambio en el índice de refracción será de 10^{-5} , que es aproximadamente

$$\frac{\sigma_n}{n} \approx \frac{10^{-5}}{1.5} \approx 0.007\%$$

que es un valor mucho más pequeño de lo que podemos medir en el Laboratorio de Óptica estudiantil. Sin embargo, para realizar mediciones de mayor precisión, este factor se vuelve más importante y habría que controlar la temperatura.

2. Escoger las variables de entrada y de salida que se utilizarán en el experimento. Asegurarse que las otras variables (si las hay) estén fijas o muy bien controladas. En algunos casos se pueden observar cambios en la relación entre la variable de salida y la variable de entrada producidos por cambios en esas otras variables.
3. Definir la ecuación (o ecuaciones) que se utilizará(n) en el análisis de los resultados del experimento. Muchos de los textos clásicos sobre la experimentación explican que es necesario escoger las ecuaciones que describen al sistema en una forma lineal, para que se puedan graficar los resultados en una línea recta. Hoy en día, esto no es estrictamente necesario, aunque muchas veces, si los datos son lineales, el análisis de los resultados es más fácil. Hay muchos programas de cómputo hoy en día (e.g. Origin, o los programas en el libro de "Numerical Recipes in C") que permiten realizar ajustes no-lineales, esto es, ajustes que utilizan ecuaciones no lineales, y también calculan los valores de los errores en los parámetros involucrados en estos ajustes. Si no se tiene acceso a este tipo de herramientas, entonces será necesario poner las ecuaciones en una forma lineal para su análisis y ajuste al modelo.

4. Elegir el intervalo de medición y los pasos a tomar entre mediciones dentro de este intervalo. Esto se realiza mediante mediciones de prueba utilizando el sistema experimental y también a base de cálculos utilizando la precisión requerida (ver el punto 5. abajo). Se debe tener cuidado de que el equipo esté funcionando dentro de su intervalo de aplicabilidad para no provocarle ningún daño. También se debe probar que tan rápido cambia la señal de salida con variaciones en la variable de entrada para decidir sobre el paso entre mediciones, pero hay que notar que los cambios en la salida no necesariamente van a ser constantes en todo el intervalo de interés de la entrada.
5. Definir la precisión del experimento. Esta parte es difícil, particularmente cuando hay un límite de tiempo, como en el Laboratorio de Óptica. Se puede decidir que se quiere una precisión de 0.1%, pero en el tiempo limitado del laboratorio, puede ser muy difícil obtener este valor. Por otro lado, se puede decidir por un error relativo de 50%. En este caso, es mejor no realizar el experimento porque los resultados carecerán de sentido con un error tan grande. En el Laboratorio de Óptica, típicamente se pueden obtener resultados con errores relativos menores al 1 o 2%, entonces se sugiere que intenten obtener resultados con estos errores. Por ejemplo, para medir el índice de refracción de un vidrio con un error relativo del 2% utilizando la ley de Snell $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$ en donde n_i es el índice de refracción del aire, que suponemos es igual a 1, n_t es el índice de refracción del vidrio de prueba, y θ_i y θ_t son los ángulos de incidencia (que serán la variable de entrada) y de transmisión (que será la variable de salida) de la luz en la interfase de vidrio, respectivamente. La ecuación para calcular n_t es

$$n_t = \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} \quad (33)$$

Utilizando las ecuaciones para propagación de errores (ecuación (13)), el error en n_t es igual a

$$(\sigma_{n_t})^2 = \left(\frac{\partial n_t}{\partial \theta_i} \right)^2 (\sigma_{\theta_i})^2 + \left(\frac{\partial n_t}{\partial \theta_t} \right)^2 (\sigma_{\theta_t})^2 \quad (34)$$

Es fácil mostrar que

$$\frac{\partial n_t}{\partial \theta_i} = \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_t} \frac{\partial n_t}{\partial \theta_t} = - \frac{\cos \theta_t \sin \theta_i}{\sin^2 \theta_t} \quad (35)$$

Sustituyendo la ecuación (35) en la ecuación (34), se obtiene

$$(\sigma_{n_t})^2 = \left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_t} \right)^2 (\sigma_{\theta_i})^2 + \left(\frac{\cos \theta_t \sin \theta_i}{\sin^2 \theta_t} \right)^2 (\sigma_{\theta_t})^2 \quad (36)$$

Se quiere un error relativo menor del 2%, esto es

$$\frac{\sigma_{n_t}}{n_t} < 0.02 \quad (37)$$

entonces, dividiendo ambos lados de la ecuación (36) por n_t y utilizando la ecuación (33), obtenemos

$$\left(\frac{\sigma_{n_t}}{n_t}\right)^2 = \left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i}\right)^2 (\sigma_{\theta_i})^2 + \left(\frac{\cos \theta_t}{\sin \theta_t}\right)^2 (\sigma_{\theta_t})^2 \quad (38)$$

Ahora escribimos la variable de salida como función de la variable de entrada (que es lo que controlamos al realizar el experimento)

$$\sin(\theta_t) = \frac{\sin(\theta_i)}{n_t} \cos^2(\theta_t) = 1 - \sin^2(\theta_t) = 1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_t^2} \quad (39)$$

sustituyendo las ecuaciones (39) en la ecuación (38), obtenemos

$$\left(\frac{\sigma_{n_t}}{n_t}\right)^2 = \left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i}\right)^2 (\sigma_{\theta_i})^2 + \left(\frac{n_t}{\sin \theta_t}\right)^2 (\sigma_{\theta_t})^2 - (\sigma_{\theta_t})^2 \quad (40)$$

Ahora, suponiendo que $\sigma_{\theta_i} = \sigma_{\theta_t} = \sigma_{\theta}$ (recuerda que aquí solo queremos una estimación del comportamiento del experimento), tenemos

$$\left(\frac{\sigma_{n_t}}{n_t}\right)^2 = \frac{\cos^2 \theta_i + n_t^2 - \sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_i} (\sigma_{\theta})^2 = \frac{\cos(2\theta_i) + n_t^2}{\sin^2 \theta_i} (\sigma_{\theta})^2 \quad (41)$$

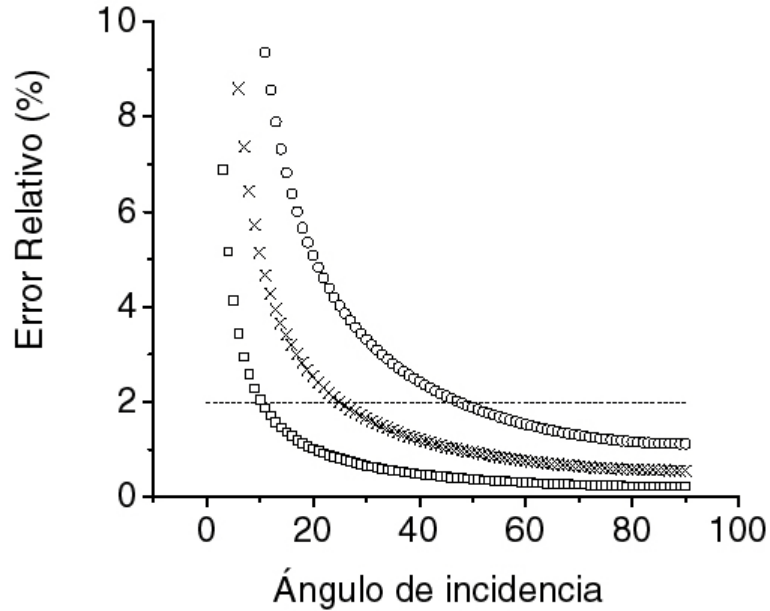


Figura 3: La precisión para la medición del índice de refracción. El error en la medición de los ángulos es 0.5° , círculos; 0.25° , cruces; 0.1° , cuadrados; el límite de 2% en la precisión se indica con la línea punteada.

Para estimar la precisión dada por la ecuación (41), supongamos $n_2 \approx 1.5$, un valor típico para vidrio, y supongamos que el error en la medición de los ángulos es del orden de 0.5° , i.e. $\delta\theta \approx 0.01$ radianes. Graficando la ecuación (40) obtenemos la curva de círculos mostrada en la figura 3. Se puede observar en la figura 3 que para el caso cuando el error en la medición de los ángulos es de 0.5° , el error relativo en el índice de refracción es menor al 2%

sólo cuando el ángulo de incidencia es mayor que 45° , aproximadamente. (Aquí, nota cómo el análisis del error relativo puede afectar el intervalo de medición, ver el punto 4 arriba). Podemos aceptar este resultado y realizar las mediciones para ángulos de incidencia mayores a 45° , o podemos permitir un error más grande en la medición del índice de refracción para extender el intervalo de medición, o podemos intentar reducir el error en la medición de los ángulos. En la figura 3 se muestra la precisión para $\delta\theta = 0.25^\circ$, indicada por las cruces, y $\delta\theta = 0.1^\circ$, indicada por los cuadrados. En estos casos se puede ver que es posible aumentar el intervalo de medición, pero que en todos los casos la precisión para los ángulos de incidencia cercanos a cero grados (incidencia normal) es muy pobre, por lo que estos casos deben evitarse en el experimento.

6. Analizar los errores para cada variable. Con el mismo ejemplo del punto 5. arriba,

$$(\sigma_{n_t})^2 = \left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_t} \right)^2 (\sigma_{\theta_i})^2 + \left(\frac{\cos \theta_t \sin \theta_i}{\sin^2 \theta_t} \right)^2 (\sigma_{\theta_t})^2 \quad (42)$$

Utilizando la ley de Snell, escribimos los factores

$$\Delta \theta_i = \left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_t} \right)^2 = \left(\frac{n_t}{\tan \theta_i} \right)^2 \quad \Delta \theta_t = \left(\frac{\cos \theta_t \sin \theta_i}{\sin^2 \theta_t} \right) = (n_t^2 - \sin^2 \theta_i) \quad (43)$$

y, otra vez, utilizamos el valor de $n_2 \approx 1.5$.

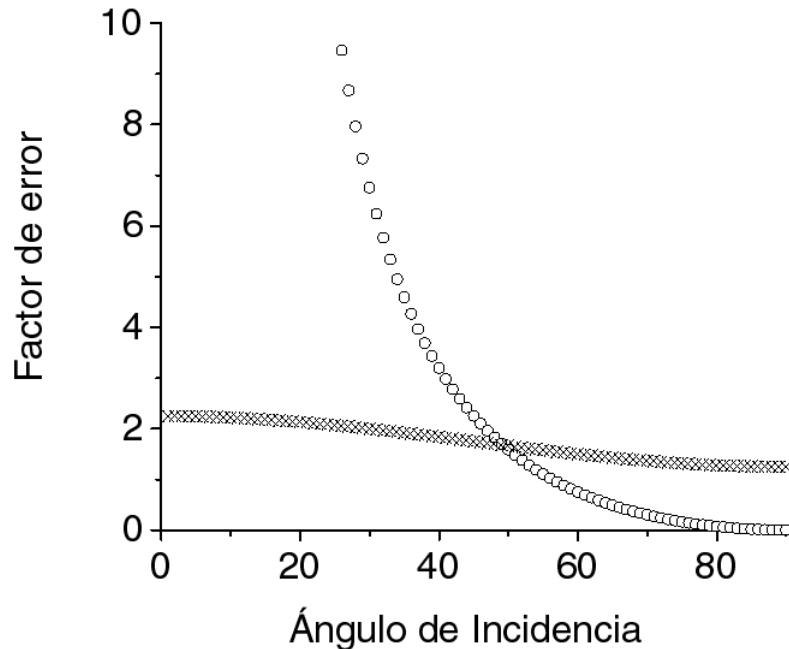


Figura 4: Gráfica de $\Delta \theta_i$, círculos, y $\Delta \theta_t$, cruces, contra el ángulo de incidencia.

En la figura 4 se grafican estos dos factores contra el ángulo de incidencia. Se puede notar que para ángulos de incidencia por debajo de los 50° el factor $\Delta \theta_i$ es mayor que el factor $\Delta \theta_t$, y que la diferencia entre estos dos factores aumenta para ángulos de incidencia

pequeños. Por otro lado, para ángulos de incidencia mayores de 50° , $\Delta\theta_i$ es mayor que $\Delta\theta_r$. Esto significa que, para valores del ángulo de incidencia menores que 50° , es más importante reducir el error en θ_1 , y para valores del ángulo de incidencia mayores que 50° , es más importante reducir el error en θ_2 , para reducir el error total del índice de refracción. Utilizando los resultados de este tipo de análisis se puede optimizar el esfuerzo en términos de tiempo y recursos experimentales para reducir el error final.

7. Definir el proceso de medición para el experimento. Por ejemplo, se pueden tomar los datos repitiendo la medición de una de las variables, luego repitiendo la medición de la siguiente variable, y así sucesivamente, o se puede tomar una medición de cada una de las variables, luego repetir estas mediciones, y así sucesivamente. El orden para la toma de los datos también puede ser importante, particularmente si algunos de los parámetros dependen de las condiciones del ambiente que siempre están cambiando.
8. Revisar los cálculos requeridos con los primeros datos obtenidos. Esto es importante: deben revisar que tienen todos los datos necesarios para los cálculos antes de seguir adelante con el experimento; si no revisan esto y se olvidan de medir algún parámetro puede ser necesario que tengan que repetir todo el experimento.

Ejemplos del análisis de errores en la planeación de experimentos

En esta sección se analizan ejemplos de los experimentos presentados más adelante para indicar como se debe realizar el análisis de errores para la planeación de un experimento.

El Método de Pfund (Experimento 1, Sección 1.1)

En este experimento, se mide el diámetro, D , del círculo oscuro formado por reflexión en el ángulo crítico, θ_c , en una cara de un bloque de vidrio de ancho h . De la figura 5 se puede ver que

$$\sin\theta_c = \frac{D/4}{\sqrt{h^2 + (D/4)^2}} \quad (44)$$

y sabemos que el ángulo crítico se define como

$$\sin\theta_c = \frac{1}{n} \quad (45)$$

con n el índice de refracción del vidrio, y suponemos que el índice de refracción del aire es 1.0. Sustituyendo la ecuación (45) en la (44), obtenemos

$$n = \frac{\sqrt{D^2 + 16h^2}}{D} \quad (46)$$

que es la ecuación que se utiliza para este experimento.

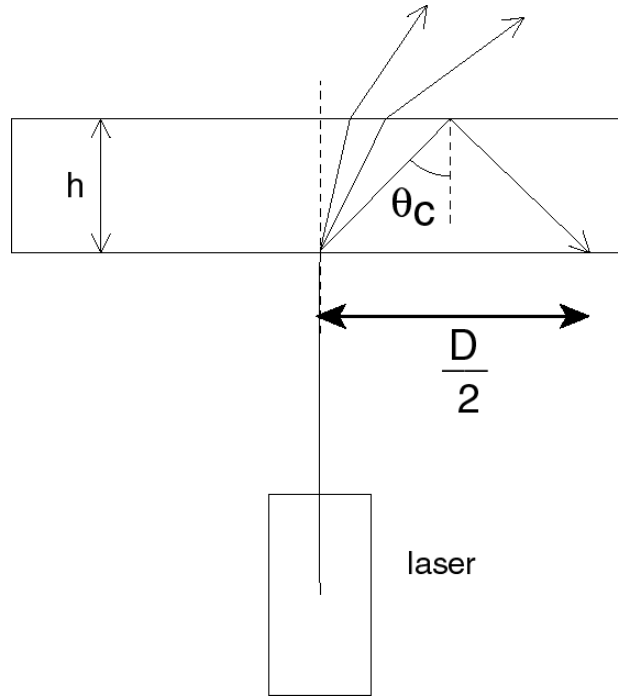


Figure 5: El método de Pfund

Ahora, analicemos los errores. Necesitamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial n}{\partial h} = \frac{1}{D} \frac{1}{2} (D^2 + 16h^2)^{-1/2} 32h = \frac{16h}{D^2 n} \quad (47)$$

$$\frac{\partial n}{\partial D} = \frac{1}{2} (D^2 + 16h^2)^{-1/2} 2D \frac{1}{D} - \frac{1}{D^2} (D^2 + 16h^2)^{1/2} = \frac{1}{D} \left(\frac{1}{n} - n \right) \quad (48)$$

en donde hemos utilizado la ecuación (46). De las ecuaciones (47) y (48) se puede ver que ambas contribuciones dependen inversamente de D , i.e. un D más grande dará un error final más pequeño. Pero como el valor de D es proporcional a h , $D = \frac{4}{\tan \theta_c} h$, requerimos una placa lo más ancha posible (Nótese que en la ecuación (47) tenemos un factor $\frac{h}{D^2}$ y como D es proporcional a h , este factor tiene el comportamiento de $\frac{1}{h}$, entonces es más pequeño con h más grande). Ahora, para tener una estimación del comportamiento del experimento, si suponemos $n = 1.5$ y $D = 1\text{cm}$, de la ecuación (46) $h \approx 3\text{mm}$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (47) y (48), obtenemos

$$\frac{\partial n}{\partial h} \approx 3.2 \quad \frac{\partial n}{\partial D} \approx 0.833$$

i.e. la contribución al error total de la medición del ancho de la placa es 4 veces la contribución de la medición del diámetro del círculo oscuro, y por ende se debe medir el ancho de la placa con más precisión, por ejemplo utilizando un vernier más preciso o repitiendo ésta medición más veces.

El Método de Alturas Aparentes (Experimento 1, Sección 1.2)

En este experimento se utiliza el cambio en la posición de un objeto visto a través de un vidrio, esto es la imagen de un objeto, para medir el índice de refracción del vidrio. Denotamos la mitad del ancho del objeto como x (ver la figura 6). Tenemos, utilizando la aproximación de ángulos pequeños:

$$\sin \theta_i \approx \tan \theta_i \approx \theta_i \approx \frac{x}{L_1 - L_3} \quad (49)$$

$$\sin \theta_t \approx \tan \theta_t \approx \theta_t \approx \frac{x}{L_1 - L_2} \quad (50)$$

También, tenemos la ley de Snell, que para ángulos pequeños es:

$$n = \frac{\theta_t}{\theta_i} \quad (51)$$

Sustituyendo (49) y (50) en (51) obtenemos:

$$n = \frac{L_1 - L_3}{L_1 - L_2} \quad (52)$$

que es la ecuación que se utiliza en este experimento.

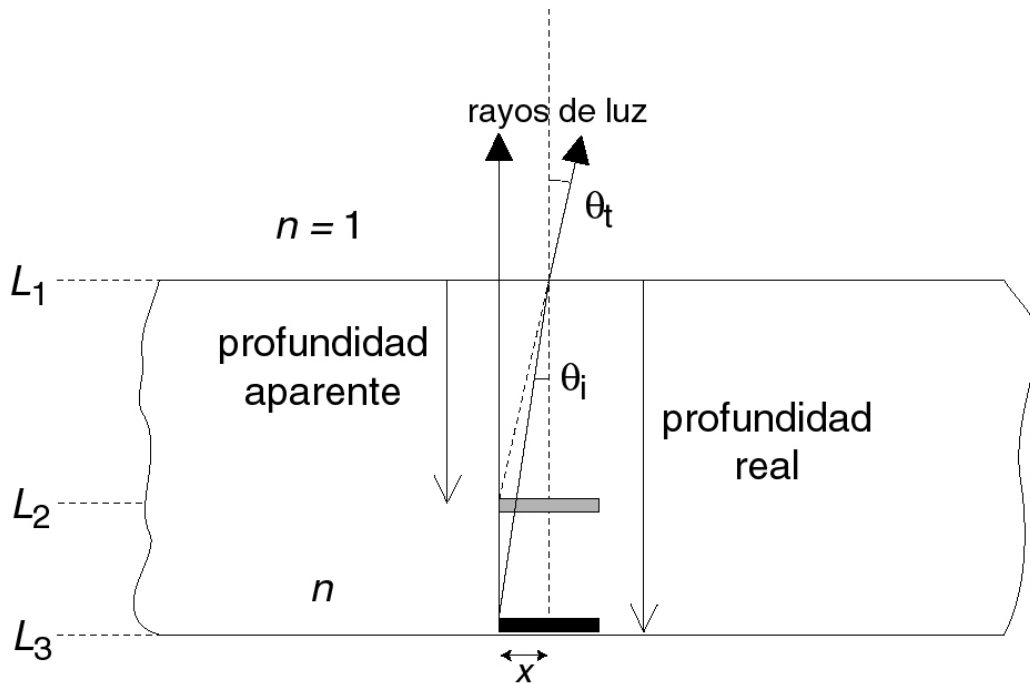


Figura 6: Geometría para profundidades aparentes

Ahora, calculando las derivadas parciales requeridas para calcular el error total, tenemos

$$\frac{\partial n}{\partial L_1} = \frac{1}{L_1 - L_2} + \frac{L_1 - L_3}{(L_1 - L_2)^2} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{L_1 - L_3} \quad (53)$$

$$\frac{\partial n}{\partial L_2} = -\frac{L_1 - L_3}{(L_1 - L_2)^2} = -\frac{n^2}{L_1 - L_3} \quad (54)$$

$$\frac{\partial n}{\partial L_3} = -\frac{1}{L_1 - L_2} = -\frac{n}{L_1 - L_3} \quad (55)$$

en donde se ha utilizado la ecuación (52) para escribir las ecuaciones en una forma independiente de L_2 . Se puede ver que todos los términos dependen del inverso de $L_1 - L_3$, que es el ancho del bloque de vidrio. Entonces el error total es menor para un bloque de vidrio más ancho (esto se discute también en las notas de este experimento). Sustituyendo $L_1 = 0mm$ y $n = 1.5$, se puede graficar las ecuaciones (53), (54) y (55) como funciones de L_3 , que corresponde al tamaño del bloque de vidrio. Estas funciones se muestran en la figura 7.

En la gráfica se puede ver que el error es más pequeño para un bloque de vidrio más grande, como se discutió arriba, y también que el error en L_1 es el que contribuye más al error total y esta medición debe hacerse con más precisión para reducir el error total del experimento.

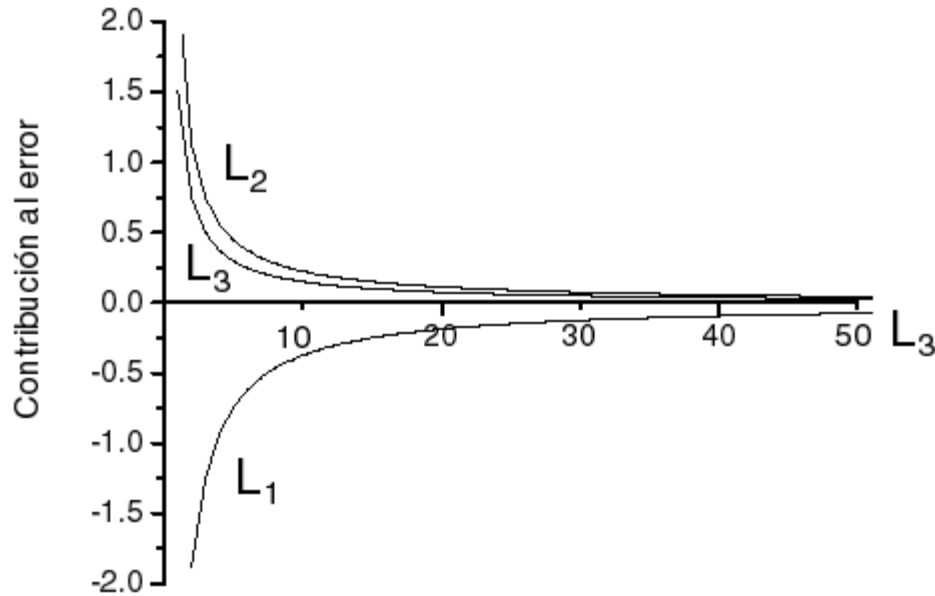


Figura 7: gráficas de las contribuciones al error total de los parámetros involucrados en el método de alturas aparentes. Aquí L_3 representa al grosor, en mm , de la placa de vidrio.

Desviación de un haz por una placa plana paralela (Experimento 1, Sección 1.3)

En este experimento se mide la desviación del haz de un laser al atravesar un bloque de vidrio. De la figura 8 se puede ver que:

$$\cos(\theta_t) = \frac{D}{D'} \quad (56)$$

$$\sin(\theta_i - \theta_t) = \frac{X}{D'} \quad (57)$$

Expandiendo la ecuación (57) y notando que la ley de Snell nos dice que

$$\sin(\theta_t) = \frac{\sin(\theta_i)}{n} \quad (58)$$

entonces,

$$\sin(\theta_i)\cos(\theta_t) - \sin(\theta_t)\cos(\theta_i) = \frac{X}{D'} \quad (59)$$

Sustituyendo las ecuaciones (56) y (57) en la ecuación (59), obtenemos

$$\frac{D}{D'}\sin(\theta_i) - \frac{\cos(\theta_i)\sin(\theta_i)}{n} = \frac{X}{D'} \quad (60)$$

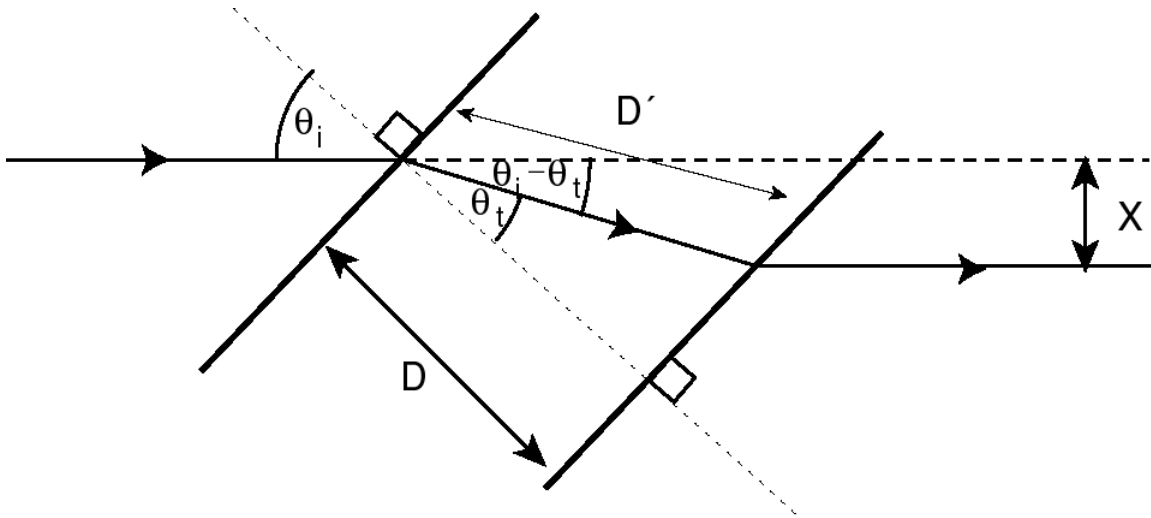


Figura 8: Geometría para la desviación de un haz por una placa de vidrio.

que se puede escribir como

$$D\sin(\theta_i) - \frac{\cos(\theta_i)\sin(\theta_i)}{n}D' = X \quad (61)$$

o

$$n = \frac{\cos(\theta_i)\sin(\theta_i)}{D\sin(\theta_i) - X}D' \quad (62)$$

Regresando a la ecuación (56), tenemos

$$D' = \frac{D}{\cos(\theta_t)} = \frac{D}{\sqrt{(1 - \sin^2(\theta_t))}} \quad (63)$$

y, utilizando la ley de Snell,

$$D' = \frac{D}{\sqrt{\left(1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n^2}\right)}} \quad (64)$$

Sustituyendo la ecuación (64) en la ecuación (63), obtenemos

$$n^2 = \left(\frac{\cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{D \sin(\theta_i) - X} \right)^2 \frac{D^2}{\left(1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n^2}\right)} \quad (65)$$

que se puede reordenar para dar

$$n^2 \left(1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n^2}\right) = \left(\frac{D \cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{D \sin(\theta_i) - X} \right)^2 \quad (66)$$

$$n^2 - \sin^2(\theta_i) = \left(\frac{D \cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{D \sin(\theta_i) - X} \right)^2 \quad (67)$$

$$n^2 = \sin^2(\theta_i) + \left(\frac{D \cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{D \sin(\theta_i) - X} \right)^2 \quad (68)$$

$$n = \sqrt{\sin^2(\theta_i) + \left(\frac{D \cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{D \sin(\theta_i) - X} \right)^2} \quad (69)$$

Que es la ecuación que se utiliza en este experimento. Se puede calcular las derivadas parciales con respecto a X , D y θ_i para investigar el comportamiento de los errores. Las expresiones para las derivadas parciales son los siguientes:

$$\frac{\partial n}{\partial X} = \frac{1}{n} \left(\frac{(D \cos \theta_i \sin \theta_i)^2}{(D \sin \theta_i - X)^3} \right) \quad (70)$$

$$\frac{\partial n}{\partial D} = \frac{1}{n} \left(\frac{D \cos \theta_i \sin \theta_i}{D \sin \theta_i - X} \right)^2 \left\{ \frac{1}{D} - \frac{\sin \theta_i}{D \sin \theta_i - X} \right\} \quad (71)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \theta_i} = \frac{1}{n} \left(\cos \theta_i \sin \theta_i + \frac{D \cos \theta_i \sin \theta_i}{(D \sin \theta_i - X)^2} \left\{ D \cos 2\theta_i - \frac{D \cos^2 \theta_i \sin \theta_i}{D \sin \theta_i - X} \right\} \right) \quad (72)$$

Estas ecuaciones son muy complicadas, pero, para tener una estimación del comportamiento del experimento, se pueden graficar utilizando valores de $n=1.5$ y $D=6\text{cm}$ y el valor de X , calculado utilizando la ecuación (61)

$$X = D \sin(\theta_i) - \frac{D \cos(\theta_i) \sin(\theta_i)}{n^2 - \sin^2(\theta_i)} \quad (73)$$

En la figura 9 se muestran las gráficas de las ecuaciones (70), (71) y (72) como funciones de θ_i .

En la figura 9 se puede ver que el error total del experimento es más pequeño en un intervalo de ángulos de incidencia de entre 40° y 70° (marcados por las líneas discontinuas verticales en la figura). Fuera de este rango dos o tres de las contribuciones al error total crecen enormemente. Por eso, este experimento se debe realizar con un ángulo de incidencia en el rango de 40° a 70° .

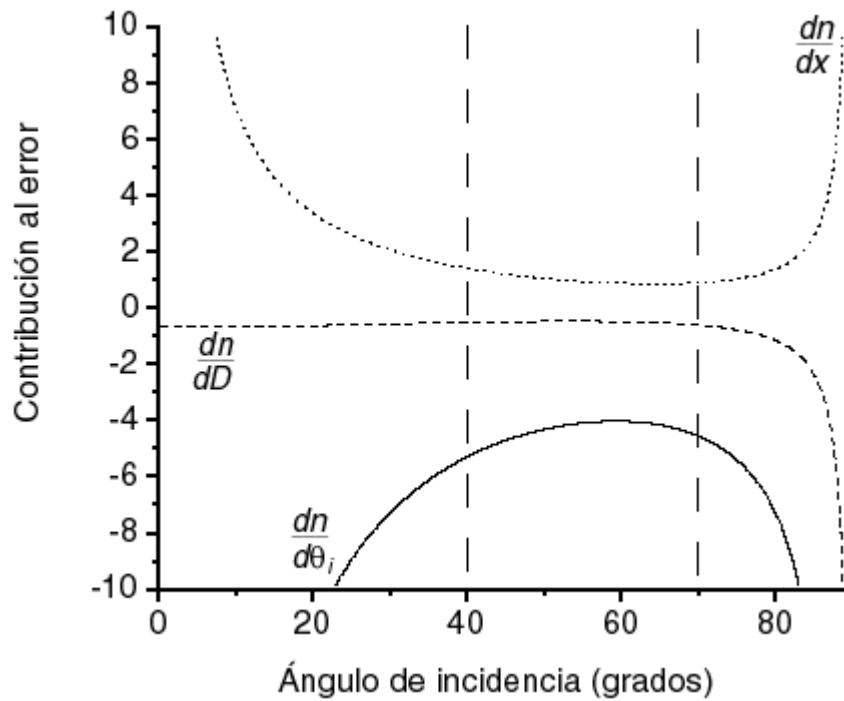


Figura 9: Contribuciones al error para el experimento de la desviación de un haz por una placa de vidrio.

Dispersión por un prisma en desviación mínima(Experimento 4)

En el caso de desviación mínima en un prisma para obtener el índice de refracción del material del prisma, tenemos (Hecht, 2000)

$$n = \frac{\sin\left\{\left(\delta_m + \alpha\right)/2\right\}}{\sin\left(\alpha/2\right)} \quad (74)$$

en donde α es el ángulo del prisma y δ_m es el ángulo de desviación mínima. Calculando las derivadas parciales tenemos:

$$\frac{dn}{d\delta_m} = \frac{1}{2} \frac{\cos\left\{\frac{(\delta_m + \alpha)}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (75)$$

$$\frac{dn}{d\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\cos\left\{\frac{(\delta_m + \alpha)}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\sin\left\{\frac{(\delta_m + \alpha)}{2}\right\} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (76)$$

Graficando estas dos ecuaciones utilizando $n = 1.5$ y, de la ecuación (74),

$$\delta_m = 2 \sin^{-1}\left\{n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\} - \alpha \quad (77)$$

obtenemos la figura 10.

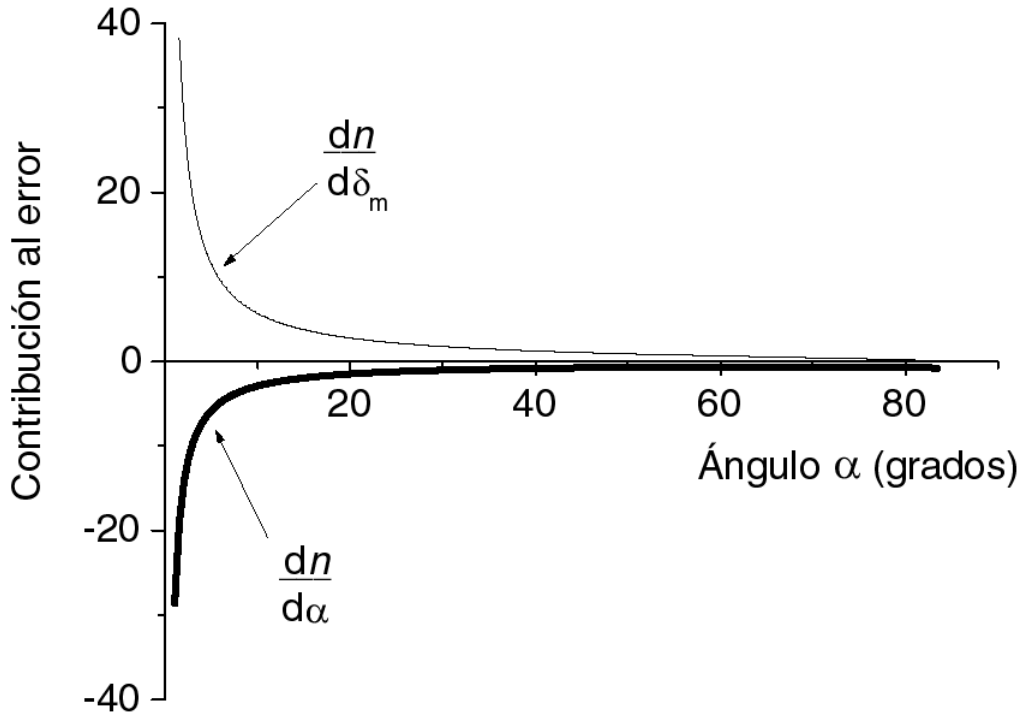


Figura 10: las contribuciones al error para la desviación mínima en un prisma

En la figura 10 se puede ver que la contribución de los dos parámetros disminuye con un ángulo α más grande y que los dos parámetros contribuyen igual al error final.

Lentes delgadas (Experimento 2)

En este experimento se calcula la distancia focal de una lente midiendo la posición de un objeto y su imagen formado por la lente. Empezamos con la ley de Gauss para una lente delgada(Hecht, 2000)

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (78)$$

Utilizando esta ecuación para calcular f , tenemos las contribuciones al error como

$$\frac{\partial f}{\partial s_o} = \frac{f^2}{s_o^2} \quad \frac{\partial f}{\partial s_i} = \frac{f^2}{s_i^2} = f^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} \right)^2 \quad (79)$$

en donde se ha escrito la segunda ecuación como función de s_o . Graficando estas ecuaciones se obtiene la figura 11. Aquí se ha graficado cada contribución al error y la contribución total, que es, suponiendo el mismo error en la medición de s_o y s_i ,

$$total \propto \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s_o} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial s_i} \right)^2} \quad (80)$$

Se puede ver que el error es mínimo alrededor del valor $s_o = 2f$, que por la ecuación de Gauss (ecuación(78)), es el caso simétrico de la formación de la imagen, $s_o = s_i = 2f$, y hay que medir en esta zona.

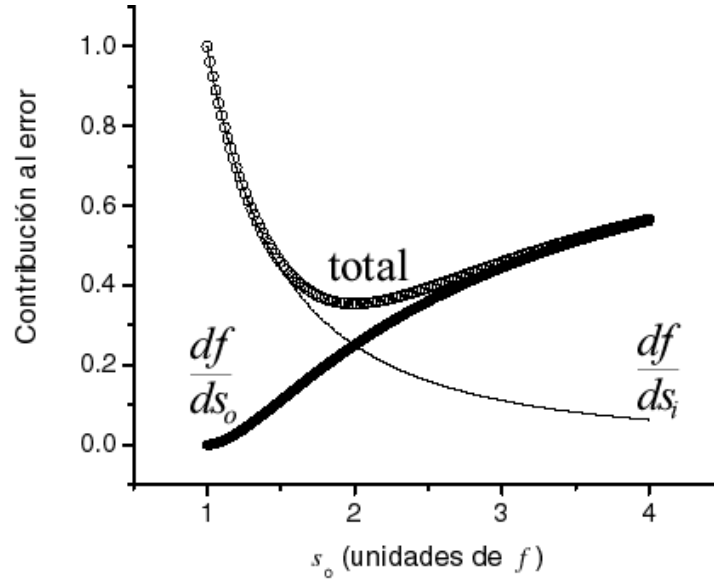


Figura 11: las contribuciones al error para una lente delgada

Para el caso de un sistema de 2 lentes delgadas, utilizamos la ley de Gauss dos veces:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{s_{o1}} + \frac{1}{s_{i1}}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{d - s_{i1}} + \frac{1}{s_{i2}}$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{s_{o1} - f_1}{s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1}} + \frac{1}{s_{i2}} \quad (81)$$

en donde se ha escrito la expresión para la distancia focal de la segunda lente, que suponemos es el desconocido, en términos de medibles (d, s_{o1}, s_{i2}) o conocidos (f_1). Se puede calcular las derivadas de la ecuación (81) con respecto a los 4 parámetros:

$$\frac{\partial f_2}{\partial f_1} = f_2^2 \left\{ \frac{1}{s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1}} - \frac{(d + s_{o1})(s_{o1} - f_1)}{(s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1})^2} \right\} \quad (82)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial d} = \frac{f_2^2(s_{o1} - f_1)}{(s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1})^2} \quad (83)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial s_{o1}} = f_2^2 \left\{ \frac{(d - f_1)(s_{o1} - f_1)}{(s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1})^2} - \frac{1}{s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1}} \right\} \quad (84)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial s_{i2}} = f_2^2 \left\{ \frac{(s_{o1} - f_1)}{s_{o1}d - f_1d - f_1s_{o1}} - \frac{1}{f_2} \right\} \quad (85)$$

La figura 12 muestra las graficas de estas funciones para los valores $f_1 = 12cm$, $f_2 = 12cm$ y los valores de d y s_{o1} variando entre $0.5f_1$ y $5f_1$.

Comparando la figura 12 con la figura de s_o contra s_i para una lente delgada, se puede ver que el error es más grande cuando la imagen de la primera lente está cerca a la posición de la segunda lente, $d \approx s_i$, entonces, para reducir el error, hay que asegurar que la primera imagen esté alejada de la segunda lente.

Bibliografía

Baird D.C., (1991), Experimentación: Una Introducción a la Teoría de Mediciones y el Diseño de Experimentos, Prentice-Hall Hispanoamerica, México

Beers Y., (1962), Introduction to the theory of error, Second Edition, Addison-Wesley, Nueva York

Bevington P.R., Robinson D.K., (2003), Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, Third Edition, McGraw-Hill, New York

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Taylor J.R., (1997), An Introduction to Error Analysis, The Study of Uncertainties in Physical Measurements, Second Edition, University Science Books, Sausalito, CA

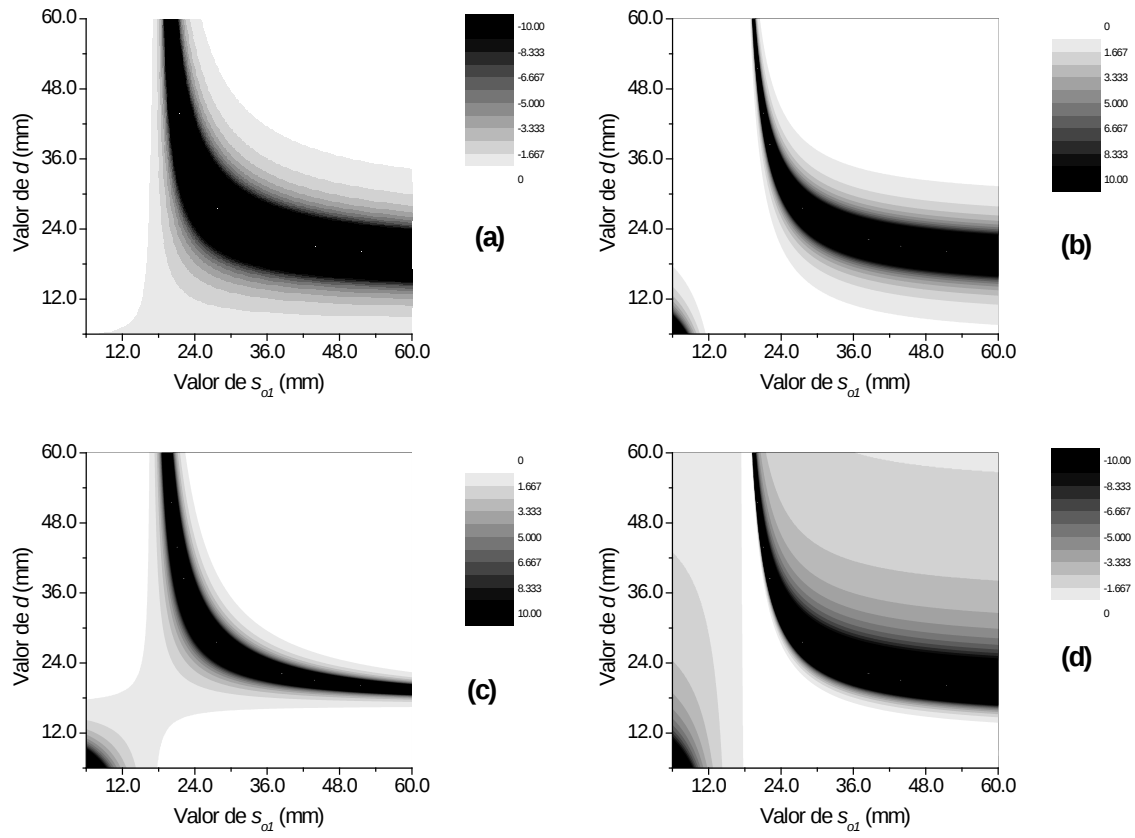


Figure 12: las contribuciones al error para el caso de un sistema de dos lentes. (a) $\frac{\partial f_2}{\partial f_1}$, (b) $\frac{\partial f_2}{\partial d}$, (c) $\frac{\partial f_2}{\partial s_{o1}}$ y (d) $\frac{\partial f_2}{\partial s_{i2}}$. Nota que las zonas más negras indican el error más grande (positivo o negativo).

3. Análisis de los resultados y escritura del reporte

Análisis de los resultados

Usualmente se obtienen los datos finales a través de un promedio y el error del parámetro a medir o a través de la obtención de la pendiente e intersección y sus errores de un ajuste lineal o de los parámetros y sus errores en un ajuste no-lineal. El primer punto por el que hay que preocuparse es cuando uno (o más) de los datos que tenemos está fuera de la tendencia de los demás datos. Esta desviación de los datos afectará el valor final obtenido con el promedio o el ajuste lineal o no-lineal, y también afectará (quizá más) al error obtenido. En este caso, **NO DEBEMOS DESCARTAR ESTE DATO DIRECTAMENTE** (Taylor, 1997). Primero se debe repetir el cálculo (si lo hay) de este dato, si esto no corrige el problema se debe repetir el experimento para este punto. Si el valor sigue estando igual, se debe realizar el experimento en valores cercanos al dato en cuestión para verificar si hay una tendencia en los datos que no se detectó anteriormente por un paso entre datos demasiado grande. Si aún así el dato sigue fuera de la tendencia de los demás datos, se debe incluir en el análisis final y la discusión, aún cuando no se sabe la razón de porqué está fuera de la tendencia. Siempre debes recordar que cualquier modelo está limitado en su rango de aplicabilidad y puede ser que este punto no caiga dentro de este rango. También, siempre hay que ser honesto con los resultados obtenidos y no se deben esconder datos que no convengan.

Otro punto importante es el número de cifras significativas que se deben reportar en los valores y sus errores. Aquí debe haber consistencia entre el valor reportado y el error de este valor. Por ejemplo, si reportamos el índice de refracción como 1.4873546 ± 0.003 estamos indicando que la tercera cifra después del decimal es incierta, entonces las cifras a la derecha de ésta serán más inciertas y no tiene sentido incluirlas en el resultado final. Este resultado debe reportarse como 1.487 ± 0.003 . También, si se conoce el error con más precisión se puede reportar con más cifras, e.g., 1.4874 ± 0.0032 , manteniendo la consistencia entre el valor y su error. Se puede calcular la precisión en el error (el error del error) pero en el Laboratorio de Óptica se estimará requiriendo que el número de dígitos significativos sea el mismo que el número de dígitos significativos del error en los parámetros medidos. Por ejemplo, si el error en la medición de los ángulos del ejemplo presentado en los puntos 5. y 6. arriba es 0.0087 radianes ($\approx 0.5^\circ$), el error en el resultado final se reportará como 0.0032; pero si se toma el error como 0.01 radianes (con menos precisión), el error final será 0.003.

Muchas veces se comparan los resultados obtenidos con valores establecidos o medidos por otros investigadores. Estos resultados son “correctos” en el sentido de que son los resultados de cálculos con ciertas aproximaciones o de experimentos con ciertas condiciones y equipo. No son “correctos” en el sentido de que si los resultados obtenidos en el Laboratorio de Óptica no son los mismos, entonces los resultados de los experimentos en el Laboratorio de Óptica son “incorrectos”. Es muy importante notar que todos los resultados, teóricos, numéricos o experimentales, tienen limitaciones. Parte de la habilidad de un experimentalista es entender estas limitaciones y tratar de limitar o eliminarlas (en lo posible). Los resultados obtenidos en el Laboratorio de Óptica son “correctos” en el sentido de que corresponden a lo que se puede medir en las condiciones disponibles, con el equipo disponible y con el nivel de conocimiento y práctica de los estudiantes que realizan los experimentos. Puede ser que los estudiantes hayan cometido algún error en la medición o en el análisis, esto sería un error sistemático en el procedimiento que habrá que detectar y corregir. También, ¿qué criterio se puede utilizar para decir si un resultado es “mejor” que otro? Lo único que se puede utilizar es el error de los diferentes resultados. Si el error es menor el resultado es “mejor” porque es más preciso. No se puede utilizar la cercanía de un valor medido a un valor ya publicado para decir que está “mejor” que otro más lejano. Lo que sí se puede decir es si los resultados

obtenidos son “consistentes” con otros valores reportados o si están “de acuerdo” con los valores publicados. Esto involucra otro punto importante: todos los constantes físicas dependen de mediciones en algún experimento, entonces todos los valores tienen asociado un error. Cuando uno compara dos valores de un parámetro se comparan los valores y los errores. Se sabe que hay 68% de probabilidad que el valor caiga dentro del rango (resultado $\pm$ error), hay 95.5% de probabilidad que el valor caiga dentro del rango (resultado $\pm$ 2 veces el error), y hay 99.7% de probabilidad que el valor caiga dentro del rango (resultado $\pm$ 3 veces el error). Se puede ver que la probabilidad de que el valor caiga afuera del rango de (resultado $\pm$ 2 veces el error) es muy pequeño (4.5%). Por eso, una relación tomada por convención es el límite de 2 veces el error (Baird, 1991; Taylor, 1997). Si los dos valores del parámetro están separados por menos de 2 veces los errores, se dice que son consistentes, si están fuera de este rango, no son consistentes y habrá que buscar las razones de la discrepancia. Por ejemplo, si el índice de refracción de un vidrio está reportado como 1.583 ± 0.001 en un artículo y nosotros lo medimos como 1.602 ± 0.002 , estos dos valores están más separados que dos veces sus errores y no son consistentes. Sin embargo, si nuestra medición fuera 1.602 ± 0.021 , los dos valores están separados por menos de dos veces los errores y los valores son consistentes.

Si el experimento requiere de la comparación de un modelo con los datos experimentales hay que realizar un ajuste no-lineal y reportar los valores de los parámetros involucrados con sus errores y un parámetro de ajuste, por ejemplo, el chi-cuadrado, para indicar cualitativamente la cercanía del ajuste. Si no se tiene acceso a un programa para realizar estos cálculos se deben linealizar las ecuaciones involucradas y ajustar a una línea recta. Otra vez, se deben reportar los parámetros de ajuste con sus errores y un parámetro de ajuste para indicar la cercanía de los datos a la línea recta.

Escritura del reporte

Se sugiere que los reportes tengan las siguientes secciones (Baird, 1991):

- Título, con fecha, autores y lugar de realización.
- Resumen conciso de lo que hicieron, sus resultados y sus conclusiones.
- Introducción: porqué hacer el experimento, para medir qué, trabajo previo de otros autores.
- Teoría: es importante que incluyan la deducción de (o referencia a) ecuaciones usadas en el experimento para que el lector pueda entender claramente qué están midiendo, porqué, y cómo.
- Procedimiento experimental: qué hicieron (un diagrama te salvará muchas palabras). Deben incluir todos los parámetros (distancias, longitudes de onda, distancias focales, etc.)
- Resultados incluyendo el análisis de datos. Se deben reportar honestamente los resultados, incluyendo resultados que parecen no caer dentro de las tendencias de los datos aunque no se pueda explicar el porqué están mal. Es importante que se incluya una explicación de la obtención de los errores para que el lector entienda como se llegó a los resultados finales. Si se puede, se deben incluir gráficas en lugar de tablas de datos.
- Discusión de los resultados, incluyendo resultados inesperados y posibles razones por cualquier discrepancia, o una discusión de la consistencia de sus resultados con el modelo o teoría.
- Conclusiones incluyendo sugerencias para mejoramientos de este y futuros experimentos. Una conclusión de que sería mejor repetir el experimento con otro método o equipo es una conclusión válida.
- Referencias y bibliografía. Se debe anotar todas las referencias utilizadas en la elaboración del experimento y del reporte.

Es importante que noten que este esquema es sólo una guía. No es necesario que sus reportes los

escriban exactamente así. Dependiendo del tema de cada experimento (algunos son más cualitativos, otros más cuantitativos) pueden cambiar el orden, unir unas secciones o cambiarlas en otra forma. Sin embargo hay que tomar en cuenta que la publicación de resultados científicos tienen dos propósitos: difundir los resultados y tener suficiente información para que otro trabajador en el área pueda repetir el experimento o cálculo para revisar y/o extender los resultados. Por eso, **sus reportes tienen que ser claros e informativos de tal manera que otro estudiante del mismo nivel de estudios pueda leer sus reportes, entender los resultados y repetir el experimento sin las notas del laboratorio.**

Bibliografía

Baird D.C., (1991), Experimentación: Una Introducción a la Teoría de Mediciones y el Diseño de Experimentos, Prentice-Hall Hispanoamerica, México

Taylor J.R., (1997), An Introduction to Error Analysis, The Study of Uncertainties in Physical Measurements, Second Edition, University Science Books, Sausalito, CA

4. Prácticas de Laboratorio

En este capítulo se incluye las prácticas de laboratorio. El orden de presentación es el orden en que realizamos las prácticas en el Laboratorio de Óptica de la Facultad de Ciencias, y que sigue aproximadamente el orden de los temas en las clases de teoría de la óptica en la misma Facultad. No es necesario seguir este mismo orden, se puede variar sin perder ningún aspecto de las prácticas.

Experimento 1: Medición de Índices de Refracción

Experimento 2: Lentes Delgadas

Experimento 3: La prueba de la Navaja de Foucault

Experimento 4: Análisis espectral por un Prisma

Experimento 5: Polarización y la Ley de Malus

Experimento 6: Ecuaciones de Fresnel

Experimento 7: Interferómetro de Michelson

Experimento 8: Interferómetro de Fabry-Perot

Experimento 9: Interferómetro Estelar de Michelson

Experimento 10: Speckle (moteado) de láser

Experimento 11: Difracción

Experimento 12: Espectroscopia por rejilla

Experimento 13: Resolución

Experimento 14: Filtraje espacial

Experimento 1

Medición de Índices de Refracción

Objetivos

- Instrumentar en el laboratorio métodos de medición de índices de refracción de sustancias transparentes que pueden estar en estado líquido o sólido, tales como vidrio, lucita, agua, glicerina, etc.
- Realizar un análisis de cómo influyen los diferentes aspectos de la medición en el error del valor medido y proponer mejoras al dispositivo experimental o al método de medición.
- Medir el índice de refracción de una sustancia transparente indicando correctamente el error asociado con diferentes métodos.

Introducción

Cuando un rayo de luz incide en la interfase o frontera entre dos medios transparentes parte de la energía luminosa se transmite y parte se refleja. Desde la antigüedad se sabe que el rayo reflejado se dirige en una dirección tal que el ángulo de incidencia (definido por el rayo incidente y la dirección normal a la interfase) es igual al ángulo de reflexión (el ángulo entre la misma normal con el rayo reflejado) (Hecht, 2000):

$$\theta_r = \theta_i \quad (1.1)$$

(ver figura 1.1). Esta es la ley de la reflexión.

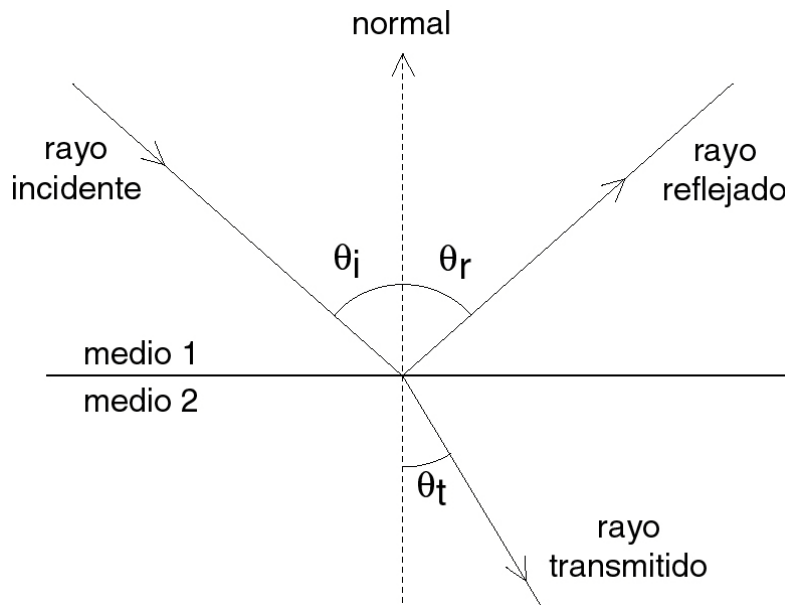


Figura 1.1 La geometría de reflexión y refracción

Es más, se sabe que las tres direcciones e, incluso, la del rayo transmitido, son coplanares; sin embargo, la relación entre la dirección del rayo transmitido y el rayo incidente fue más elusiva y hasta el siglo XVII se conoció correctamente. Esta es la famosa ley de la refracción o ley de Snell. Esta ley dice que el cociente de los senos de los ángulos de incidencia y el de refracción (definido de igual manera, el ángulo entre la normal y el rayo transmitido) es igual a una constante que depende del material de los medios 1 y 2 (ver figura 1.1) (Hecht, 2000):

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{n_2}{n_1} = cte. \quad (1.2)$$

Las constantes n_1 y n_2 se conocen con el nombre de índice de refracción y son una medida del grado de desviación que sufre un rayo al transmitirse de un medio a otro medio.

Además de lo anterior, podemos decir que el índice de refracción da cuenta de una gran diversidad de fenómenos en los que la luz es la protagonista central. Debido a ello, su conocimiento es de fundamental importancia para un correcto conocimiento de la óptica, además de que nos permite caracterizar materiales.

Un efecto importante es el efecto de reflexión total interna (RTI) que aparece cuando $n_2 > n_1$, i.e. la luz incide desde el vidrio hacia el aire, y tenemos un ángulo de incidencia $\theta_i \geq \theta_c$ con (Hecht, 2000)

$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (1.3)$$

Cuando el ángulo de incidencia es mayor que este valor, la ley de Snell no se puede satisfacer y no hay luz transmitida.

1.1. Medición del índice de refracción por el método de Pfund.

Para este método se utiliza una placa de caras paralelas y un láser. Montando el arreglo mostrado en la figura, la luz proveniente del láser incide en un punto de la cara esmerilada. Al realizar esto, la luz es esparcida en todas direcciones, en particular, hacia la otra cara por la cual saldrán. Sin embargo, rayos que inciden a esta segunda cara a ángulos mayores que el ángulo crítico serán reflejados de forma total interna, formándose así un círculo oscuro sobre la superficie esmerilada (ver la figura 1.2).

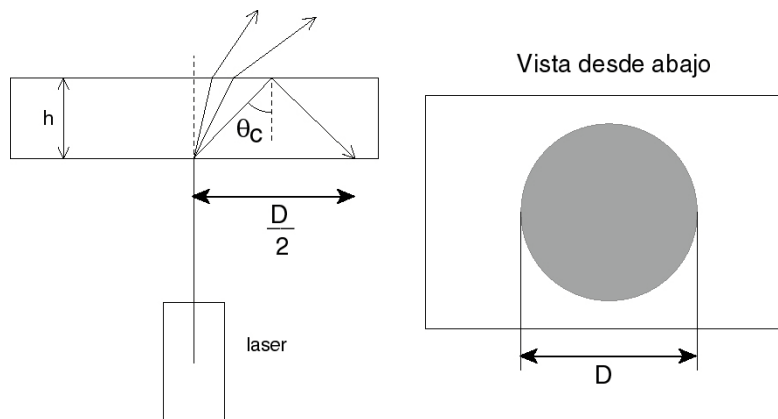


Figura 1.2 El método de Pfund

El índice de refracción de la placa, n_v , dependerá del ancho de la misma, h , y del diámetro, D , de la mancha formada en la cara esmerilada, de la siguiente forma:

$$n_v = \frac{\sqrt{D^2 + 16h^2}}{D} \quad (1.4)$$

La forma de analizar los errores es como sigue:

1. Llene la tabla abajo con los valores medidos de los parámetros D y h .
2. Para cada medición de los dos parámetros calcule el valor de n , y llene la última columna de la tabla. Saque el promedio y error de estos valores calculados del índice de refracción.

No. de Medición	D	h	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Promedio			
Error, σ			
$\frac{dn}{dD}, \frac{dn}{dh}$			
n			
Error en n			

3. Calcule los promedios y errores de los dos parámetros D y h . Ahora, usando la ecuación de propagación de errores

$$\sigma_n^2 = \sigma_D^2 \left(\frac{dn}{dD} \right)^2 + \sigma_h^2 \left(\frac{dn}{dh} \right)^2 \quad (1.5)$$

calcule las contribuciones al error total de cada uno de los dos parámetros. Llene las últimas tres filas de las tablas usando los valores promedios de los parámetros D y h . ¿Cuál de los dos parámetros es el más importante para la medición del índice de refracción?

4. Compare los valores del índice de refracción calculados en las partes 2. y 3. ¿Cuál de estos métodos es mejor para medir el índice de refracción y su error?

1.2. Medición de índice de refracción por alturas aparentes.

Al observar una moneda sumergida dentro de un recipiente en donde se tenga un líquido transparente, la profundidad a la que se observa la moneda es diferente a la profundidad real a la que se encuentra sumergida la moneda (ver figura 1.3). Utilizando este hecho y la ley de Snell para ángulos pequeños, se determina que existe una relación entre estas profundidades y el índice de refracción, y está dada por:

$$n = \frac{\text{profundidad real}}{\text{profundidad aparente}} \quad (1.6)$$

en donde n es el índice de refracción relativo.

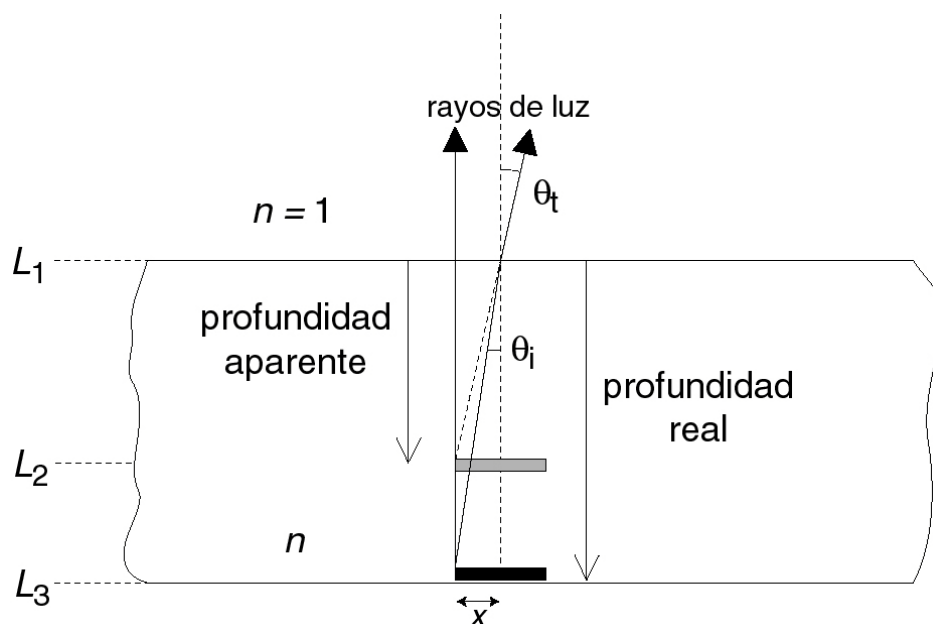


Figura 1.3 El método de profundidad aparente

Partiendo de esta relación existe un método para medir este índice de refracción que es como sigue: sobre una hoja de papel, en la cual se ha dibujado una marca (un punto o una letra), se coloca una

placa de vidrio o lucita (transparente), y se coloca un microscopio micrométrico o que tenga en su recorrido vertical una escala en la cual se puedan leer distintas posiciones del mismo. Montado el dispositivo se enfocará el microscopio sobre la cara superior de la placa y se tomará la lectura de posición (L_1). Luego se enfocará hacia la marca a través de la placa y se tomará nuevamente la lectura (L_2). Después de esto se quita la placa y se enfoca nuevamente a la marca pero esta vez sin la placa tomándose esta lectura (L_3). De esta forma:

$$\left. \begin{aligned} \text{Profundidad real} &= L_1 - L_3 \\ \text{Profundidad aparente} &= L_1 - L_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Este experimento es un ejemplo interesante sobre el análisis de los errores. Si escribimos la ecuación para el índice de refracción como:

$$n = \frac{r}{a} \quad (1.8)$$

en donde r es la profundidad real y a es la profundidad aparente. Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial n}{\partial r} = \frac{1}{a} = \frac{n}{r} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{r}{a^2} = -\frac{n^2}{r} \quad (1.10)$$

en donde se ha utilizado $a = \frac{r}{n}$. Sustituyendo en la ecuación para la propagación de errores:

$$\sigma_n^2 = \sigma_r^2 \left(\frac{n^2}{r^2} \right) + \sigma_a^2 \left(\frac{n^4}{r^2} \right) \quad (1.11)$$

y se ve que el error en el índice de refracción es inversamente proporcional a r , el ancho de la placa. Esto significa que es mejor utilizar una placa más ancha para reducir el error final. Por supuesto, el valor del índice de refracción debe ser independiente del valor de r .

Mida el índice de refracción de una placa de lucita y su error con dos diferentes valores de r y compare los resultados para los dos casos.

1.3. Medición del índice de refracción por medio de una placa plana paralela.

Utilice la desviación de un haz al pasar por una placa de lucita para medir el índice de refracción de la lucita y su error.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Experimento 2

Lentes Delgadas

Objetivos

- Verificar las ecuaciones que relacionan la distancia imagen y la amplificación transversal en una lente delgada con las distancias focal y del objeto de dicha lente.
- Manejar con fluidez los conceptos de distancia focal de una lente, así como los de objeto real y virtual e imagen real y virtual.
- Aprender a:
 - Determinar con rapidez la distancia focal de una lente.
 - Alinear una lente o un sistema de lentes en un arreglo óptico.
- Entender correctamente los conceptos de tamaño y amplificación angular o poder de aumento de un instrumento óptico.
- Entender el poder de amplificación de una lupa.
- Construir en el laboratorio un microscopio y un telescopio con dos lentes simples.

Introducción

Una lente es un sistema óptico, compuesto de dos o más superficies refractoras no paralelas (en general curvas), con la propiedad de que al observar un objeto a través de ella se forma una imagen de dicho objeto. Cuando el sistema sólo está formado por dos superficies refractoras es llamado un lente simple, y si la separación entre estas superficies es pequeña se dice que es delgado. Se tiene que, cuando se hace incidir un haz de rayos paralelos y estos convergen a un punto, se le llama a la lente convergente o positiva y si este haz diverge se dice que es divergente o negativa. Para cada posición del objeto se encuentra una posición y tamaño de la imagen.

Las imágenes que se pueden construir con las lentes delgadas (y en general, con cualquier sistema óptico) se clasifican como reales o virtuales. Una imagen real es aquella que puede ser proyectada sobre una pantalla de observación colocada a la distancia adecuada, según sea la distancia que guarde el objeto de la lente. Las imágenes virtuales, por el contrario, no pueden ser proyectadas en una pantalla; es decir, los rayos provenientes del objeto no convergen a ningún punto, más bien parecen divergir de un punto que, para ser localizado, requiere de un arreglo auxiliar.

La ubicación de la imagen está descrita matemáticamente por la ecuación de Gauss. Esta ecuación relaciona las distancias del objeto y la imagen con un parámetro de la propia lente llamada distancia focal. Ésta es definida como aquella distancia a la cual convergen rayos paralelos al eje definido por la lente. La relación es la siguiente (Hecht, 2000):

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} \quad (2.1)$$

donde S_o es la distancia objeto, S_i es la distancia imagen y f la distancia focal. En consecuencia, la amplificación transversal, definida como la razón existente entre las dimensiones transversales de la imagen y el objeto, resulta ser (Hecht, 2000)

$$M_t \equiv \frac{y_i}{y_o} = -\frac{S_i}{S_o} \quad (2.2)$$

En donde y_i es el tamaño transversal de la imagen y y_o es el tamaño transversal del objeto. Por otro lado todas las cantidades involucradas son números positivos pero existe una convención de signos para estas cantidades tomando a los rayos provenientes de la izquierda, esta convención se resume en la tabla 2.1.

Cantidad	Signo	
	+	-
S_o	Objeto real (a la izquierda de la lente)	Objeto virtual (a la derecha de la lente)
S_i	Imagen real (a la derecha de la lente)	Imagen virtual (a la izquierda de la lente)
f	Lente convergente	Lente divergente
y_o	Objeto derecho	Objeto invertido
y_i	Imagen derecha	Imagen invertida
M_t	Imagen derecha	Imagen invertida

Tabla 2.1: Convención de signos

De la ecuación (2.1) vemos que si S_o es positiva y mayor que la distancia focal de la lente obtendremos una S_i positiva, por lo cual obtenemos una imagen real, pero, si la distancia S_o es igual a la distancia focal S_i , será infinita por lo que no se podrá obtener una imagen (está localizada en infinito). Ahora bien, si tenemos distancias S_o menores que la distancia focal, S_i será negativa y se formará una imagen virtual, la cual no podremos proyectar sobre una pantalla. Por último, si S_o es una cantidad negativa, (es decir si tenemos un objeto virtual), la distancia imagen será positiva, es decir, obtendremos una imagen real. Experimentalmente, es posible medir todas estas cantidades, algunas directamente y otras por medio de un arreglo óptico que facilite este trabajo.

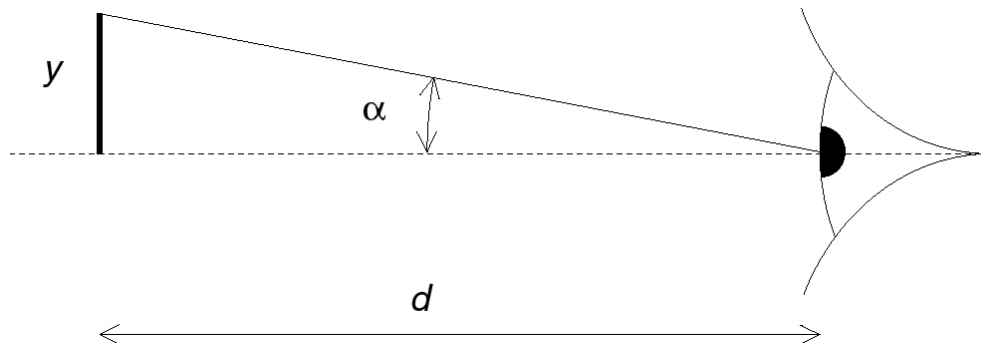


Figura 2.1 El tamaño angular de un objeto

El tamaño angular α de un objeto (o imagen) se define como el ángulo que subtiende el objeto desde el ojo que observa, $\alpha \approx y/d$ (figura 2.1)

El poder de amplificación (PA) de un instrumento se define como el cociente del tamaño angular visto a través del instrumento (figura 2.2) y el tamaño angular observado a simple vista en condiciones óptimas (generalmente se toma la situación cuando el objeto está en el punto cercano, i.e. en figura 2.1, d es la distancia al punto cercano, típicamente a 25cm del ojo) (Hecht, 2000):

$$PA = \frac{\alpha_i}{\alpha} \quad (2.3)$$

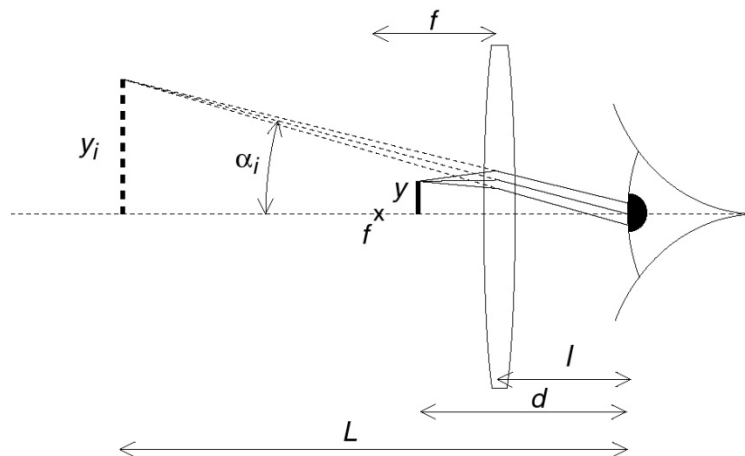


Figura 2.2 El poder de amplificación

Sugerencias

A continuación se sugiere un arreglo óptico para realizar el experimento en donde se involucren todos los casos posibles para medir la distancia focal de una lente convergente. Primeramente se determinará la distancia focal de una lente; para ello se requiere montar el arreglo mostrado en la figura 2.3.

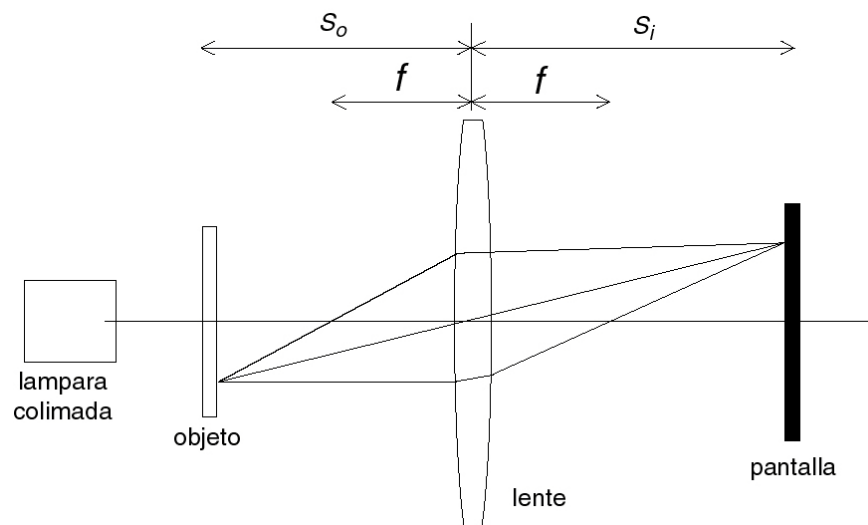


Figura 2.3 Arreglo para medir la distancia focal

Debido a que las distancias focales de las lentes con las que se cuenta en el laboratorio son pequeñas, será suficiente que las distancias objeto sean lo suficientemente grandes (según lo permita el riel óptico) para obtener una imagen real y con estos valores estimar en primera aproximación la distancia focal de la lente. Una vez estimado este valor será necesario tomar varios valores de S_o para poder establecer con mayor precisión el valor de f . Además, para cada posición se medirá también el tamaño de la imagen para verificar la ecuación (2.2). Debido a que cuando se forma una imagen virtual ésta no puede ser proyectada, se requerirá de una lente auxiliar previamente identificada para poder proyectar una imagen real S_{i1} tomando como objeto la imagen virtual de la primera lente y por medio de la misma ecuación de Gauss establecer tanto la distancia imagen como la amplificación transversal del objeto, véase la figura 2.2. Por último, se tomará a la imagen real formada por nuestra lente auxiliar como un objeto virtual (colocado a la derecha de nuestra lente de estudio), para formar con este objeto su imagen real, proyectándola sobre la pantalla (ver la figura 2.4), y con ayuda de la ecuación (2.1) determinar tanto S_i como la amplificación transversal.

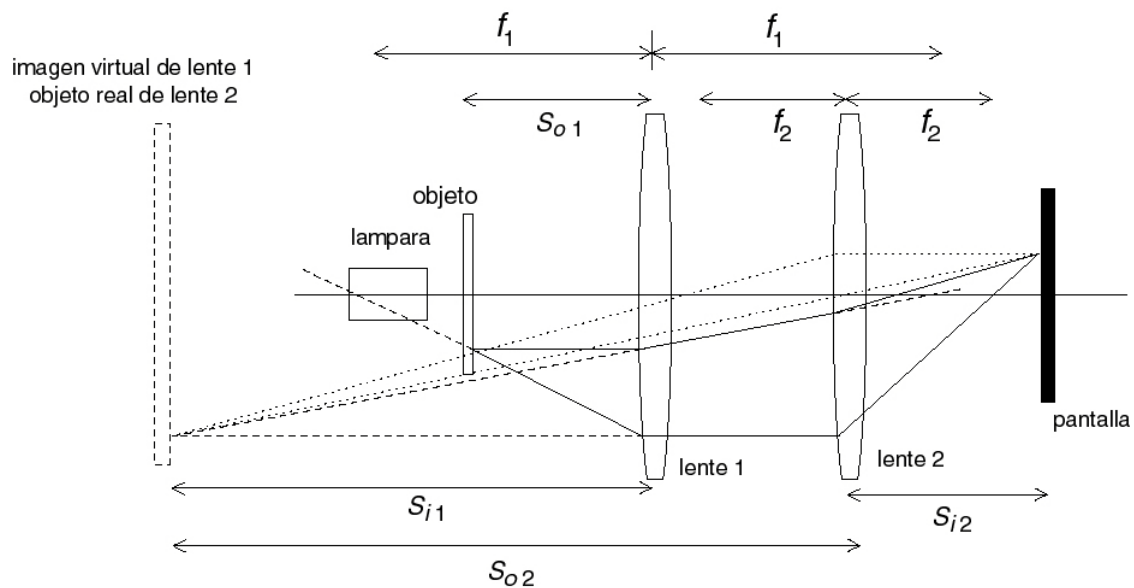


Figura 2.4 Formación de una imagen con un objeto virtual

Microscopio simple o lupa

La manera más simple de usar una lente positiva para aumentar una imagen y observarla cómodamente, es acercando el objeto a la lente de manera que la distancia objeto sea menor a la distancia focal; la imagen será virtual, de mayor tamaño transversal que el objeto, y suficientemente alejado para una observación cómoda (figura 2.2). Puede mostrarse que el poder de amplificación está dado por (Hecht, 2000)

$$PA = \frac{0.25}{L} \left(1 + \frac{(L - l)}{f} \right) \quad (2.4)$$

en donde un valor típico para la distancia al punto cercano es 0.25m y L (la distancia entre el ojo y la imagen virtual) y l (la distancia entre el ojo y la lupa) son positivos. Si se coloca el objeto en el punto focal de la lente, la imagen virtual está al infinito ($L = \infty$) y:

$$PA = \frac{0.25}{f}. \quad (2.5)$$

Microscopio Compuesto

El microscopio compuesto da mayor aumento angular que la lupa de objetos cercanos. El arreglo se muestra en la figura 2.5.

En el arreglo, el objetivo da una imagen real, invertida y aumentada del objeto (la imagen intermedia en la figura 2.3). La amplificación transversal del objetivo es (Hecht, 2000):

$$M_{To} = -\frac{L}{f_o} \quad (2.6)$$

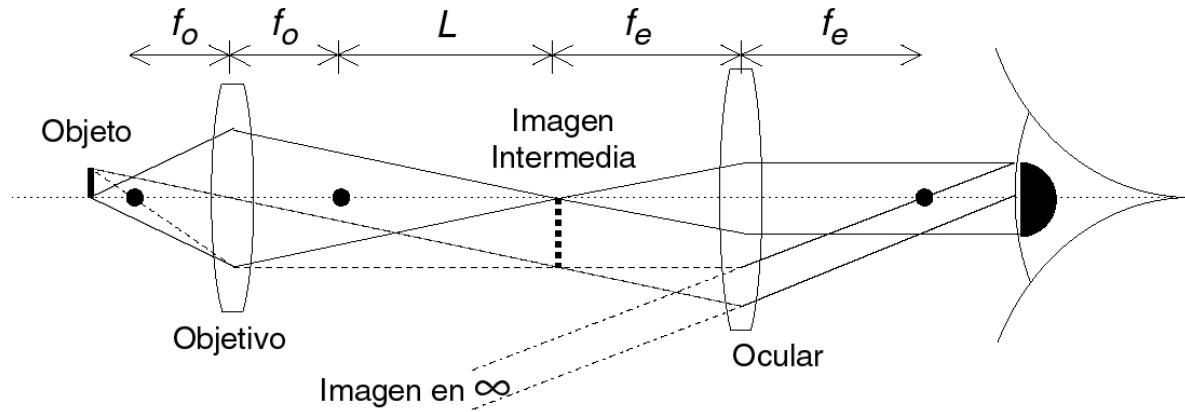


Figura 2.5: arreglo de un microscopio

donde la distancia L es conocida como “la longitud del tubo”, y es un estándar en microscopios comerciales, $L=0.16\text{m}$.

Usando la ecuación (2.5), el poder de aumento del ocular es (Hecht, 2000):

$$PA_e = \frac{0.25}{f_e} \quad (2.7)$$

El poder de aumento del sistema es:

$$PA = M_{To} \times PA_e = \left(-\frac{L}{f_o} \right) \left(\frac{0.25}{f_e} \right) \quad (2.8)$$

Telescopio

¿Cuál es la diferencia entre un microscopio y un telescopio? Básicamente, la única diferencia es la posición del objeto: cerca para el microscopio y lejos para el telescopio. Quizá por eso los dos fueron descubiertos casi al mismo tiempo (~1600). En la figura 2.6 se muestra el arreglo para un telescopio simple

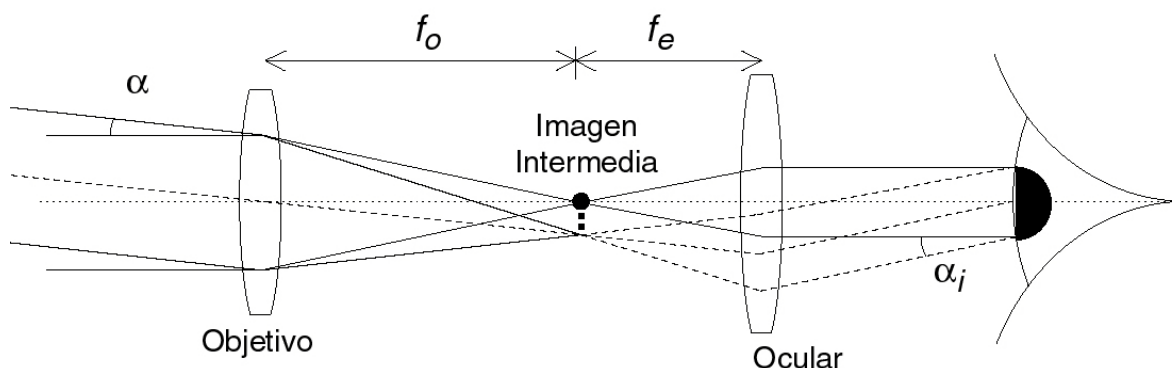


Figura 2.6 Arreglo de un telescopio

El poder de aumento está dado por la ecuación (2.3) con α y α_i como se indica en la figura 6. Se puede mostrar que el poder de aumento es (Hecht, 2000):

$$PA = -\frac{f_o}{f_e} \quad (2.9)$$

Procedimiento Experimental

1. Realice una medición rápidamente usando el arreglo de la Figura 2.3, para tener una estimación de la distancia focal de la lente positiva.
2. Observe la imagen a través de la lente directamente con el ojo. Observe las posiciones relativas de la lente y la imagen (si la imagen está antes o después de la lente) cuando la distancia entre la lente y el objeto es (a) mayor y (b) menor que la distancia focal de la lente. ¿Cuándo tienes una imagen virtual? ¿Pueden ver la imagen virtual? ¿Porqué?
3. Use el arreglo mostrado en la figura 2.3 para medir las distancias S_o y S_i de la lente para diferentes valores de S_o , cuando la distancia S_i es positiva, i.e. cuando la imagen es real. Realice el análisis de errores primero para encontrar los valores de S_o adecuados para minimizar los errores involucrados. Mida los tamaños del objeto y de la imagen para verificar la ecuación (2.2) de la magnificación de la lente.
4. Use un sistema de dos lentes formado por otra lente positiva y la lente ya medida para formar una imagen real y así calcular la distancia focal y su error para la lente desconocida usando la ecuación de Gauss dos veces. Asegúrate de usar correctamente la convención de signos. Mida los tamaños del objeto y de la imagen final y compara la amplificación con el valor calculado usando la ecuación (2.2) para cada lente. (Nota que la magnificación total es la magnificación del primer lente multiplicado por la magnificación del segundo lente.)
5. Mida la distancia focal y su error de una lente negativa. Compare la amplificación medida con la amplificación calculada usando la ecuación (2.2).

6. Use una lente simple positiva y pon un objeto a una distancia igual a la distancia focal de la lente. Observe la imagen formada directamente con el ojo por esta lupa para diferentes posiciones de observación (diferentes valores de I en la figura 2.2). Repita para una lente con diferente distancia focal. Describa y explique sus observaciones.
7. Construya un microscopio con dos lentes y verifique (cualitativamente) que hay aumento del tamaño angular y que este aumento sigue la relación de la ecuación (2.8).
8. Construya un telescopio con dos lentes y verifique (cualitativamente) que hay aumento del tamaño angular y que este aumento sigue la relación de la ecuación (2.9).
9. Mida la distancia focal de un espejo y verifique que el tamaño de la imagen obedece la ecuación de Gauss para un espejo.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Experimento 3

La prueba de la Navaja de Foucault

Objetivos

- Entender el modelo de rayos para la formación de imágenes.
- Entender la prueba de la navaja como prueba de un sistema óptico.
- Demostrar el efecto Schlieren.

3.1. La prueba de la navaja en lentes.

Introducción

La prueba de la navaja es una prueba óptica basada en la óptica geométrica para sistemas ópticos (Malacara, 2007). La idea es bloquear rayos y así obtener una distribución de luz que da información sobre el sistema. En este experimento van a usar la prueba de la navaja para investigar la formación de imágenes en una lente simple y el efecto Schlieren.

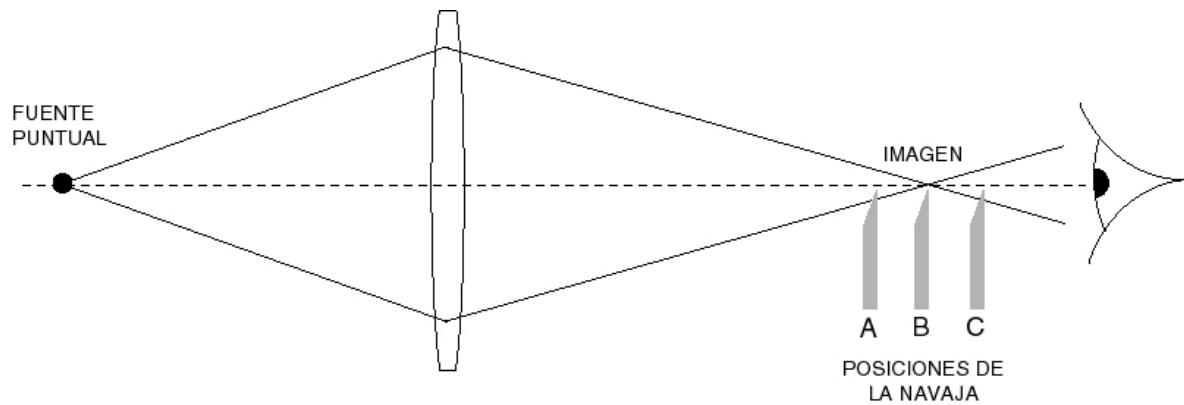


Figura 3.1: La geometría de la prueba de la navaja

El principio de esta prueba se puede ver en la figura 3.1. Colocando la navaja en la posición A en la figura, el observador no puede ver rayos que provienen de la parte inferior de la lente; en la posición B, el observador no puede ver ningún rayo (si la imagen es perfecta); y en la posición C el observador no puede ver rayos que pasan por la parte superior de la lente. El patrón de luz que ve el observador depende de la posición de la navaja y también de las aberraciones de la lente que afectan la distribución de rayos.

La fórmula de los fabricantes de lentes da la distancia focal de la lente en términos de sus parámetros (Hecht, 2000):

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.1)$$

También, es conocido que para vidrios normales $n(\text{azul}) > n(\text{rojo})$ (Hecht, 2000), entonces

$$f_{\text{azul}} < f_{\text{rojo}} \quad (3.2)$$

y la imagen en el azul debe aparecer más cerca a la lente (con una distancia de la imagen más pequeña) que la imagen roja. Ésta es una medida de la aberración cromática de la lente.

Procedimiento experimental

1. Monte el arreglo experimental mostrado en la figura 3.2. El diafragma variable debe estarlo más cerca posible a la lente. Por comodidad, arregle que el sistema tenga una magnificación de 1.

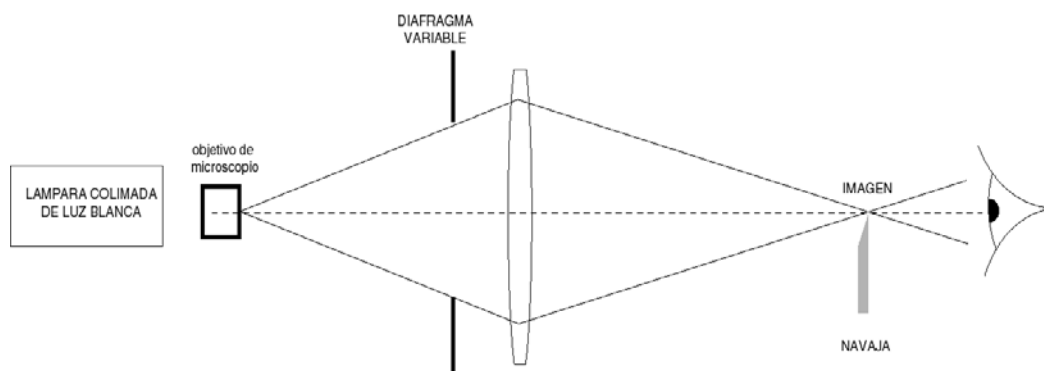


Figura 3.2: El arreglo experimental para la prueba de la navaja con una lente

2. Cierre el diafragma para dejar pasar la luz sólo por la parte central de la lente (entre 0.5cm y 1cm diámetro). Lentamente mueva la navaja (desde afuera hasta adentro del haz; arriba y abajo en la Figura 3.2) para bloquear la luz para diferentes posiciones de la navaja (antes de la imagen, en la imagen y después de la imagen; de izquierda a derecha en la figura 3.2). Describa y explique sus observaciones en términos de los rayos que forman la imagen.
3. Ahora, abra el diafragma (o quítelo del sistema) y use toda la abertura de la lente. Repita el paso 2. Dibuje y explique los patrones que se ven en términos de los rayos que forman la imagen.
4. Verifique si sus observaciones son consistentes con la ecuación (3.2).
5. Repita el punto 3, pero utilizando un doblete (una combinación de dos lentes). Describa y explique sus observaciones en términos de los rayos que forman la imagen. (Las lentes dobletes también se conocen como lentes acromáticas. Son una combinación de dos lentes de diferentes vidrios para reducir la aberración esférica y la aberración cromática cuando el objeto está en el eje óptico de las lentes).

3.2. La prueba de la navaja en un espejo esférico

En este experimento van a usar la prueba de la navaja para investigar la reflexión de luz en un espejo esférico.

Procedimiento experimental

1. Monte el arreglo experimental mostrado en la figura 3.3. Arregle que el espejo amplifica la imagen por un factor de alrededor de 1. Reduzca el ángulo de incidencia de la luz sobre el espejo lo más

posible para reducir la aberración de astigmatismo en la imagen (con astigmatismo la imagen se cambia de una línea horizontal a un círculo a una línea vertical al mover la pantalla).

2. Corte una abertura circular con undiámetrode aproximadamente 3cm en una hoja de papel negro y colóquela en frente del espejo de tal forma que sólo se pueda ver la reflexión de la parte central del espejo. Lentamente mueva la navaja para bloquear la luz reflejada para diferentes posiciones de la navaja (antes de la imagen, en la imagen y después de la imagen en la figura 3.3). Describa y explique tus observaciones en términos de los rayos que forman la imagen.
3. Ahora quite la hoja de papel negro y usa toda la abertura del espejo. Repita el paso 2. Dibuje y explique los patrones que se ven en términos de los rayos que forman la imagen.

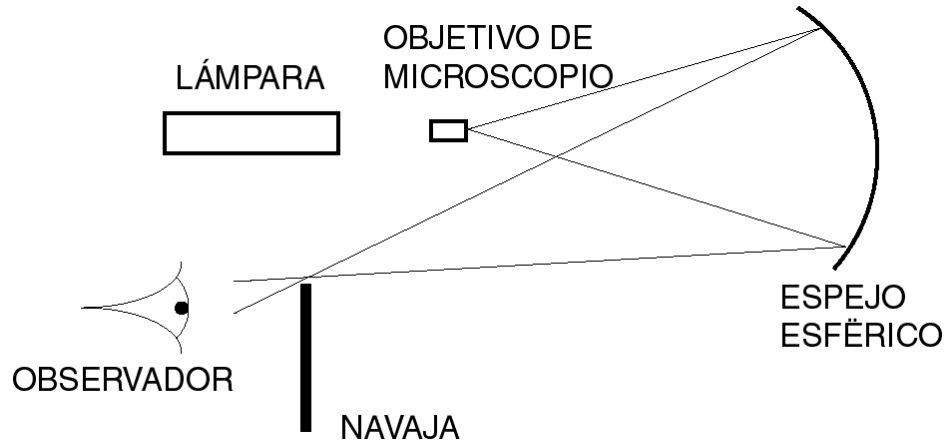


Figura 3.3: El arreglo experimental para la prueba de la navaja con un espejo

3.3. Utilizando un espejo y un objeto caliente, demuestra el efecto Schlieren.

3.4 La prueba de la navaja para medir el ancho de un haz Gaussiano

El haz de un láser se denomina un haz Gaussiano, por su perfil transversal de intensidad. En ecuaciones, se puede describir el perfil del haz como (Yariv, 1977):

$$I(r) = P_T \exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta r^2}\right) \quad (3.3)$$

en donde I es la intensidad, r es la posición radial dentro del haz, P_T es la intensidad máxima en el haz, y Δr es una medida del ancho del haz (cuando $r = \Delta r$ la intensidad cae a $1/e^2$ de su valor máximo).

Cortando el haz como se indica en la figura 3.4, y midiendo la intensidad como se muestra en la figura 3.5, la señal detectada es

$$P(x') = P_T \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2((x-x_0)^2 + y^2)}{\Delta r^2}\right) dx dy \quad (3.4)$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 P(x') &= P_T \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2(y^2)}{\Delta r^2}\right) dy \int_{-x'}^{\infty} \exp\left(-\frac{2((x-x_0)^2)}{\Delta r^2}\right) dx \\
 &= P_T' \int_{-x'}^{\infty} \exp\left(-\frac{2((x-x_0)^2)}{\Delta r^2}\right) dx
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

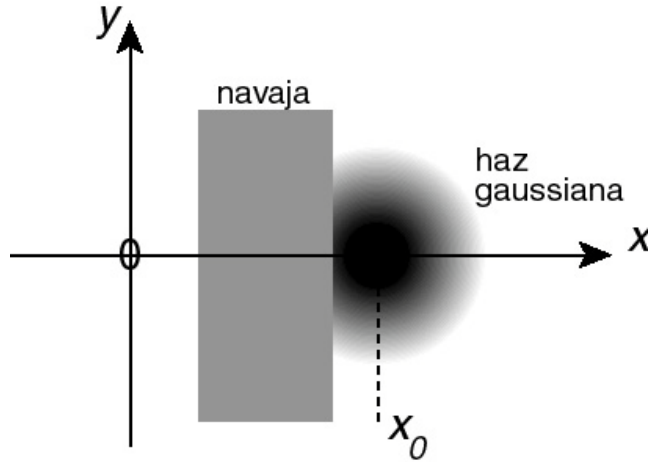


Figura 3.4 Cortando un haz Gaussiano

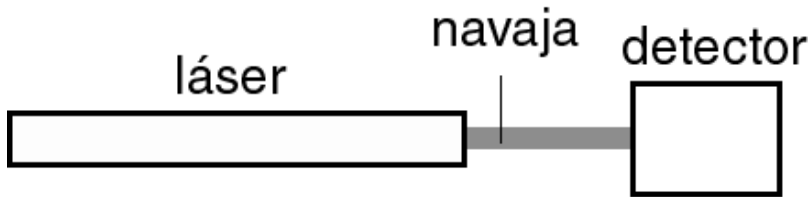


Figura 3.5 El arreglo experimental para medir el ancho de un haz de láser

Esta expresión puede ser escrita en términos de la función de error (Abramowitz, 1972)

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.5) y después de realizar un cambio de variables, se obtiene

$$P(x') = 2P \left(1 - \text{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(x' - x_0)}{\Delta r} \right) \right) \tag{3.6}$$

Procedimiento experimental

Utilice el arreglo de la Figura 3.5. Asegure que el detector reciba toda la luz del láser. Realice un barrido de la navaja para ir cortando el haz y medir la intensidad de la luz en cada posición de la navaja. Utilizando un programa de computadora ajuste la ecuación (3.6) a los datos obtenidos para

medir el parámetro Δr y su error. Cambie la distancia entre el láser y el detector, asegurando otra vez que el detector reciba toda la luz del láser, y repita la medición y ajuste para obtener el ancho del haz en esta nueva posición. Indique si el haz del láser es un haz Gaussiano, y si el haz está colimado, convergiendo o divergiendo al salir del láser.

Bibliografía

Abramowitz M., Stegun I.A., (1972) Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Nueva York

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Malacara D., (2007), Optical Shop Testing, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey

Yariv A., (1977), Introduction to Optical Electronics, Second Edition, Holt-McDougall, London

Experimento 4

Análisis espectral por un Prisma

Objetivos

- Observar la desviación y dispersión en un prisma.
- Calcular el cambio de índice de refracción entre las longitudes de onda en el espectro de una lámpara de gas.
- Comparar la variación de desviación mínima con λ con la teoría.
- Observar espectros de absorción.

Introducción

En esta práctica se investigarán las propiedades del prisma dispersor. Este tipo de prisma fue estudiado por Newton, en 1700 más o menos, en sus famosas investigaciones de dispersión y sigue teniendo muchas aplicaciones en la óptica. Un prisma tiene 5 caras, normalmente, de las cuales 2 son esmeriladas y 3 son pulidas para que pase la luz; se denomina a estas superficies pulidas las caras refringentes del prisma, y no deben ser tocadas ni maltratadas.

En la figura 4.1 se muestra la desviación de un rayo monocromático por un prisma.

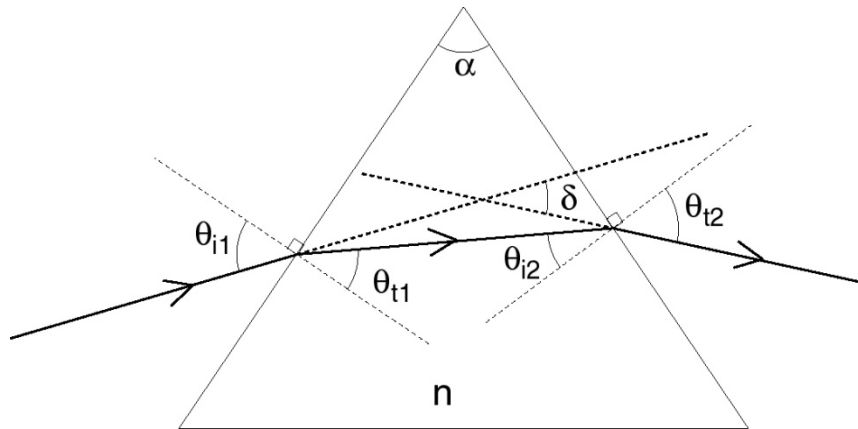


Figura 4.1 La geometría para refracción en un prisma

Aquí, δ es la desviación angular del haz de luz. Se puede calcular que (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$\delta = \theta_{i1} + \sin^{-1} \left[\sin(\alpha) \left(n^2 - \sin^2(\theta_{i1}) \right)^{1/2} - \sin(\theta_{i1}) \cos(\alpha) \right] - \alpha \quad (4.1)$$

en donde n es el índice de refracción del prisma. Esta ecuación indica que la desviación del haz es independiente del camino óptico dentro del prisma. Se puede graficar la ecuación (4.1) como función de θ_{i1} y ver que hay un mínimo en el valor de δ (ver figura 4.2).

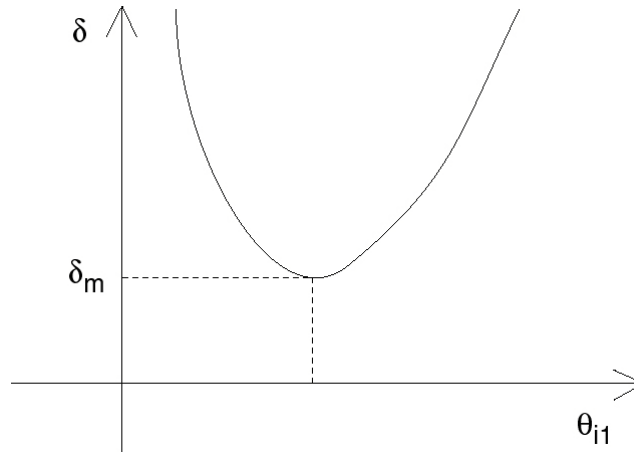


Figura 4.2: gráfica esquemática mostrando el ángulo de desviación mínimo con cambios en el ángulo de incidencia del haz

En el mínimo, δ_m , la ecuación para la desviación se simplifica mucho y el valor del índice de refracción se puede escribir como [1,2]:

$$n = \frac{\sin\left[\frac{(\delta_m + \alpha)}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]} \quad (4.2)$$

También se puede ver, en la figura 4.2, que la derivada del ángulo de desviación con respecto al ángulo de incidencia es igual a cero en δ_m , i.e. el error introducido en la medición de δ_m por un error en la medición del ángulo de incidencias es mínimo. Por esta razón, éste es un método muy preciso para medir el índice de refracción.

El índice de refracción de un material depende de la longitud de onda de la luz incidente. Este efecto se llama dispersión. Se puede ver de la ecuación (4.1) que si el índice de refracción depende de la longitud de onda, el ángulo de desviación también depende de la longitud de onda. Este efecto también se llama dispersión.

Hay diferentes ecuaciones empíricas para describir el comportamiento del índice de refracción con la longitud de onda. Dos de estas ecuaciones son las de Cauchy y de Sellmeier. La ecuación de Cauchy es (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$n(\lambda) = P_1 + \frac{P_2}{\lambda^2} + \frac{P_3}{\lambda^4} \quad (4.3)$$

en donde λ está en micras.

Para lucita se han estimado los coeficientes de Cauchy como: $P_1 = 1.48489$, $P_2 = 0.00047$ y $P_3 = 0.00056$.

Para BK7, un vidrio muy común, se ha encontrado que solo los primeros dos términos de la ecuación (4.3) dan una muy buena aproximación, y los coeficientes de Cauchy son: $P_1 = 1.5046$ y $P_2 = 0.00420$ para este caso.

La ecuación de Sellmeier es (R.P. Photonics, 2017):

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \quad (4.4)$$

en donde λ está en micras.

Para BK7, los coeficientes son $B_1 = 1.03961212$ $B_2 = 0.231792344$ $B_3 = 1.01046945$ $C_1 = 0.0060006986$ $C_2 = 0.0200179144$ $C_3 = 103.560653$.

Para lucita, los coeficientes son: $B_1 = 0.4963$ $B_2 = 0.6965$ $B_3 = 0.3223$ $C_1 = 0.0051552$ $C_2 = 0.0137828$ $C_3 = 0.8532217$

Procedimiento experimental

Se muestra el arreglo experimental del espectroscopio en la figura 4.3.

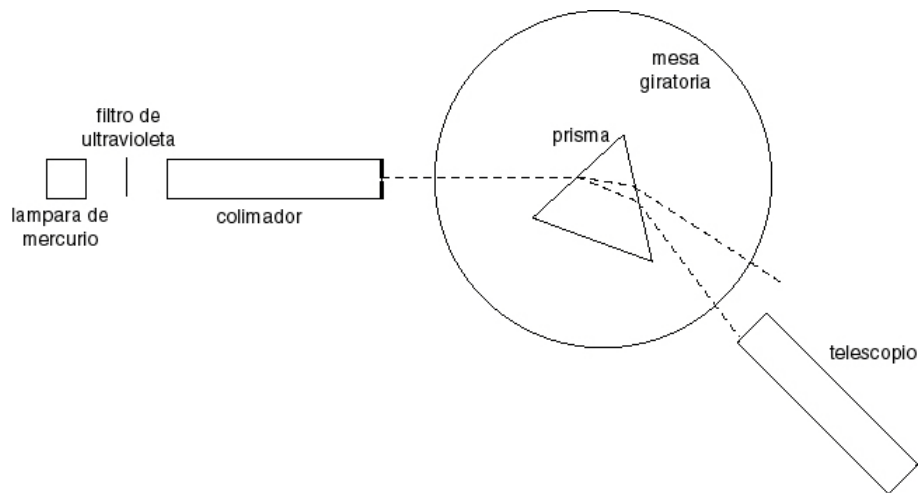


Figura 4.3 El arreglo experimental

1. Alinea el espectroscopio y el prisma cuidadosamente. (Lo más importante es que todos los rayos de luz que salen del colimador incidan en el prisma con el mismo ángulo para que la desviación sea igual para todos los rayos, esto es, verifica que la luz que sale del colimador esté colimada.)
2. Mida los ángulos de desviación mínima para las líneas del espectro de una lámpara de gas. Busque las longitudes de onda de las líneas de emisión en el internet.

3. Mida el ángulo α del prisma y su error.
4. Calcule el índice de refracción del vidrio del prisma para las longitudes de onda medidas, tomando en cuenta todos los errores.
5. Grafique el ángulo de **desviación mínima** contra **longitud de onda** usando los datos tomados y utiliza otras fuentes para agregar otros puntos (longitudes de onda) a su gráfica.
6. Compare tu gráfica con la gráfica obtenida utilizando las formulas de Cauchy y de Sellmeier para calcular la desviación mínima contra longitud de onda.
7. Estime las longitudes de onda absorbidas por colorantes de comida.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

R.P. Photonics, (2017), on-line, https://www.rp-photonics.com/sellmeier_formula.html (accessed 22/February/2017)

Experimento 5

Polarización y la Ley de Malus

Objetivo

En esta serie de experimentos investigarán diferentes formas de producir o controlar la polarización de un haz. Todos los experimentos se discuten en (Hecht, 2000; Jenkins, 1950).

Experimento 5.1: Polarización por birrefringencia

La Calcita es un material birrefringente, i.e. es un cristal que tiene dos índices de refracción en diferentes direcciones del cristal. Como resultado de esto, la calcita muestra el efecto de doble refracción. Uno de los rayos refractados se llama el rayo ordinario y obedece la ley de Snell, el otro se llama el rayo extraordinario y no obedece la ley de Snell.

- Coloque un cristal de calcita sobre una hoja con texto o figuras claras ¿qué se observa?
- ¿Qué sucede al girar el cristal?
- ¿Cuál de las imágenes es la ordinaria y cuál es la extraordinaria?
- ¿Cuál de las imágenes aparece más cerca al observador? Un cristal uniaxial, como la calcita, se llama positivo si $n_o < n_e$ y negativo si $n_o > n_e$. ¿La calcita es un cristal positivo o negativo?
- ¿Qué sucede al colocar un polarizador lineal sobre el cristal? ¿qué sucede al girar el polarizador? ¿Qué se puede decir sobre la polarización de la luz formando las dos imágenes?

Experimento 5.2: Polarización por reflexión

Cuando la luz incidente sobre una superficie de un dieléctrico está polarizada paralela al plano de incidencia y el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster ($\theta_B = \tan^{-1}(n)$ en donde n es el índice de refracción del dieléctrico), entonces no hay reflexión. Esto significa que, si se ilumina el mismo dieléctrico con luz no-polarizada, en el ángulo de Brewster la luz reflejada está polarizada perpendicular al plano de incidencia, y la luz transmitida está parcialmente polarizada (se transmite toda la luz polarizada paralela al plano de incidencia, pero sólo una fracción de la luz polarizada perpendicular, porque algo de ésta polarización es reflejada).

- Utilice un láser de luz no-polarizado, un polarizador y un portaobjetos para encontrar el ángulo de Brewster para el vidrio del portaobjetos.
- Quite el polarizador entre el láser y el portaobjetos, manteniendo el portaobjetos en el ángulo de Brewster y colócalo primeramente en el haz reflejado. Gire el polarizador. ¿Cómo está polarizado el haz reflejado? Ahora coloca el polarizador en el haz transmitido y gíralo. ¿Cómo está polarizado el haz transmitido?
- Manteniendo la incidencia en el ángulo de Brewster observe, describa, y discuta lo que pasa a la polarización de los haces reflejados y transmitidos al aumentar el número de placas de uno a muchos.

Si el portaobjetos está en el ángulo de Brewster, el haz reflejado será siempre polarizado perpendicular al plano de incidencia porque no hay reflexión de la polarización paralela, pero el haz transmitido perderá un poco de la luz polarizada perpendicular al plano de incidencia en cada reflexión en cada cara de los portaobjetos. Así, con muchos portaobjetos, el haz transmitido será polarizado paralelo al plano de incidencia.

Experimento 5.3: Actividad Óptica

Algunos materiales tienen la propiedad de actividad óptica. Estos materiales rotan el plano de vibración del campo eléctrico de la luz, i.e. si se hace incidir luz polarizada linealmente sobre estos materiales, la luz que sale será polarizada linealmente, pero en un plano rotado con respecto a la luz incidente. Un material muy común que es ópticamente activo es el azúcar (en solución).

- Llene con agua un recipiente largo con paredes de vidrio en los extremos.
- Incida el haz de un láser sobre el recipiente, coloque un polarizador a la entrada y otro a la salida del recipiente y crúzelos para que no pase la luz a la pantalla.
- Poco a poco disuelva azúcar en el agua, observe lo que sucede con la intensidad de la luz sobre la pantalla.
- Gire el polarizador a la salida del recipiente para tratar de bloquear toda la luz otra vez. ¿Cómo está relacionado el giro que requiere el polarizador de salida con la cantidad de azúcar? Agregue más azúcar si es necesario.
- Cambie el láser por una fuente de luz blanca y gire el polarizador de salida, observando directamente la luz transmitida. Describa y explique lo que observa.

Experimento 5.4: Retardadores

Los retardadores sirven para cambiar la polarización de un haz en una forma controlada. Estos aparatos son muy útiles en muchos instrumentos ópticos. El principio de funcionamiento de un retardador es que introduce un retardo de fase entre las dos polarizaciones constituyentes (e.g. horizontal y vertical) para así cambiar la polarización del haz de luz. Un retardador de $\lambda/4$ introduce una diferencia de fase de $\lambda/2$ entre los dos componentes, entonces, si luz polarizada linealmente incide sobre este retardador, la luz que sale estará polarizada elípticamente (figura 5.1(a)), aparte del caso cuando el eje del retardador se encuentra a 45° con respecto a las direcciones de las dos polarizaciones constituyentes, cuando la luz saliente estará polarizada circularmente (figure 5.1(b)). Un retardador de $\lambda/2$ introduce un cambio de fase de π entre los dos componentes, y el resultado es una rotación de la polarización lineal de 2θ en donde θ es el ángulo entre el eje rápido del retardador y la polarización lineal incidente (figura 5.1(c)). Como depende de la fase de la luz, un retardador sólo funciona para una longitud de onda dada.

- Haga incidir un haz de láser en un retardador $\lambda/2$. Coloque un polarizador a la entrada y otro a la salida del retardador. Gire el polarizador a la salida y el retardador. Describa y explique lo que sucede.
- Haga incidir un haz de láser en un retardador de $\lambda/4$. Coloque un polarizador a la entrada y otro a la salida del retardador. Intente producir luz circularmente polarizada. Describa y explique lo que sucede.

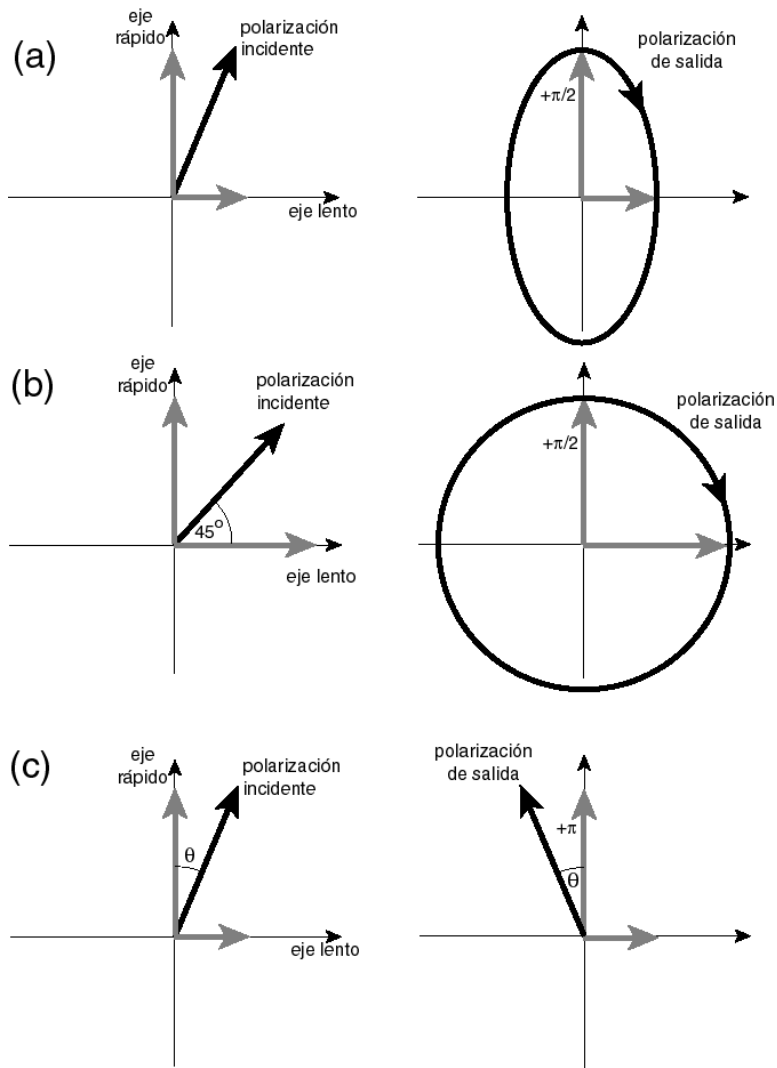


Figura 5.1: el efecto de los retardadores. (a) y (b) son para un retardador de $\lambda/4$ y (c) para un retardador de $\lambda/2$

Experimento 5.5: Efecto Fotoelástico

Algunos materiales se pueden convertir en birrefringentes al aplicarles una tensión o una fuerza. Esto se llama fotoelasticidad. Si las tensiones o fuerzas no son uniformes en una muestra, entonces la birrefringencia tampoco lo será. Esto pasa al momento de producir objetos en plástico, por las fuerzas inducidas al momento de estampar o moldear los objetos.

- Ilumine dos polarizadores cruzados con luz blanca. En medio de los polarizadores deforme objetos de plástico transparente, como reglas, u hojas de plástico, como celofán. Intente deformar los objetos.. Describa y explique lo que sucede.
- Repita cuando los dos ejes de los polarizadores son paralelos.

Experimento 5.6: La Ley de Malus

La polarización de la luz es, en general, elíptica, pero se puede hacer lineal usando un polarizador. Si ahora se coloca otro polarizador después del primero y se gira el segundo para tener un ángulo θ entre los ejes de los dos polarizadores, la intensidad transmitida tiene el comportamiento como (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$I_t \propto \cos^2 \theta \quad (5.1)$$

que es conocido como la ley de Malus.

En la práctica, los polarizadores no son perfectos: la intensidad cuando $\theta = 90^\circ$ no es igual a cero. Para dos polarizadores que producen una intensidad de luz que varía entre un máximo I_1 y un mínimo I_2 , la intensidad varía con el ángulo como $I_t = (I_1 - I_2)\cos^2 \theta + I_2$.

Procedimiento experimental

- (i) Monte el arreglo mostrado en la figura 5.2. Gire el polarizador 2 y observe el cambio en la señal. Tome las mediciones de la señal cada 10 grados.
- (ii) Verifique que tus resultados están descritos por la ecuación (5.1). **(N.B. Esto no significa “verifique que tus resultados se parecen a un coseno”, sino verifique en forma precisa que tus resultados varían como una función coseno sin que dejes dudas.)**

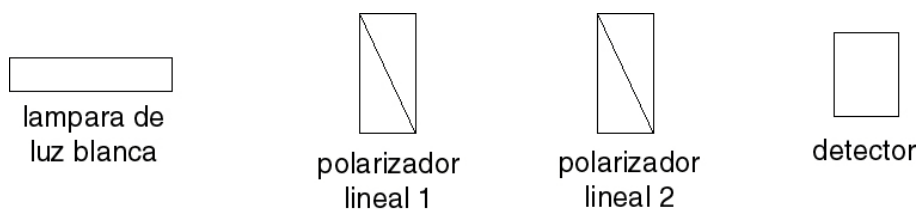


Figura 5.2 El arreglo para la ley de Malus

- (iii) Mida la intensidad transmitida cuando tienes un sistema de tres polarizadores, primero alineando el primer y el último polarizador y rotando el polarizador de en medio, y luego repitiendo con el primero y el último cruzados. Deduzca la expresión teórica para estos casos aplicando dos veces la ley de Malus, y compare con sus mediciones (de la misma forma que en el caso de dos polarizadores).

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Experimento 6

Ecuaciones de Fresnel

Objetivos

- Determinar el comportamiento de la energía reflejada y transmitida en la interface de dos medios transparentes, como función del ángulo de incidencia, para dos estados de polarización, (s y p, o $\perp$ y $\parallel$)
- Determinar la razón entre los coeficientes de reflexión de polarización p y de polarización s de la luz reflejada para incidencia externa.

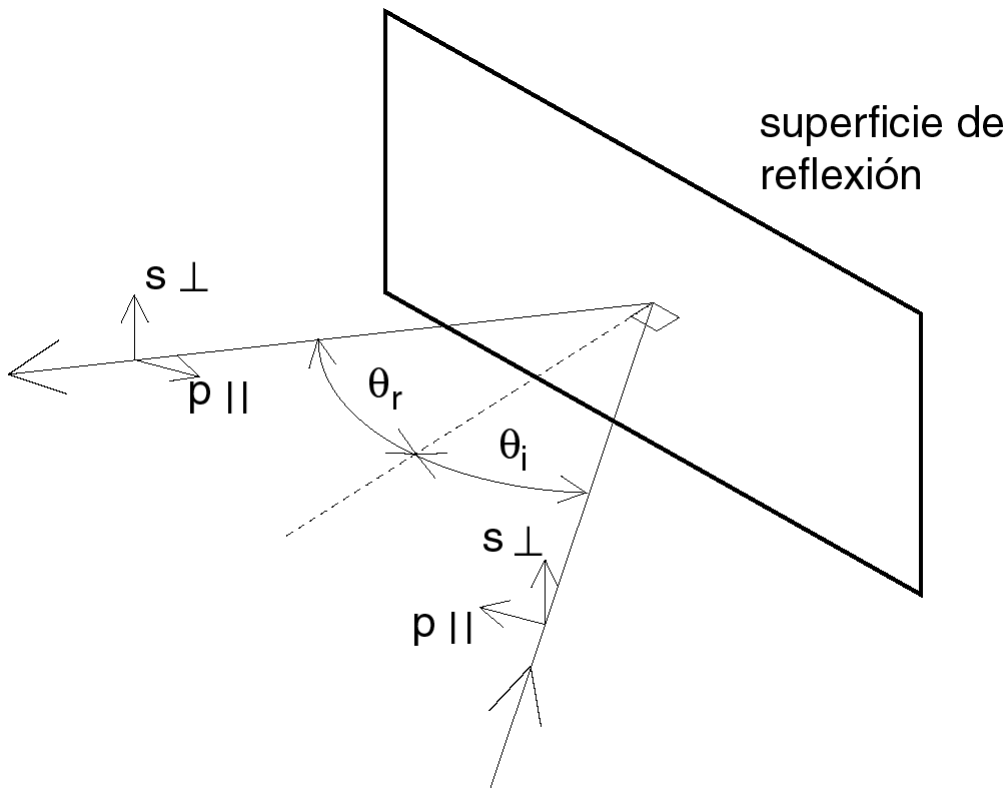


Figura 6.1 La geometría para las ecuaciones de Fresnel

Introducción

Las leyes de la óptica geométrica dan cuenta de la dirección que toman los rayos reflejado (θ_r) y transmitido (θ_t) en una interface entre los dos medios transparentes, dada una dirección de incidencia (θ_i) y los índices de refracción de los medios en cuestión (n_1 y n_2). Estas son la ley de la reflexión y la ley de Snell (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$\theta_r = \theta_i \quad \text{sen}(\theta_t) = \frac{n_1}{n_2} \text{sen}(\theta_i). \quad (6.1)$$

Sin embargo, estas ecuaciones no dicen nada de la “cantidad” de luz reflejada y transmitida; para calcular estos valores se necesita de la teoría electromagnética de la luz. El resultado de estos cálculos son las ecuaciones de Fresnel, las cuales muestran que la cantidad de energía transmitida y reflejada, así como las direcciones de transmisión y reflexión, dependen del ángulo de incidencia y los índices de refracción, pero también dependen de la dirección de polarización. Si notamos que cualquier polarización se puede representar como combinación de dos direcciones de polarización con una fase entre ellas, y si tomamos las direcciones paralela al plano de incidencia (p o $||$) y perpendicular al plano de incidencia (s o $\perp$) (ver figura 6.1), las ecuaciones de Fresnel para el campo (amplitud) están dadas por (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$r_s = -\frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad t_s = \frac{2\text{sen}(\theta_t)\cos(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad (6.2)$$

$$r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad t_p = \frac{2\text{sen}(\theta_t)\cos(\theta_i)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i + \theta_t)} \quad (6.3)$$

Si $n_2 > n_1$, tenemos el efecto de reflexión total interna (RTI) que aparece cuando $\theta_i \geq \theta_c$ y

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (6.4)$$

y tenemos el efecto de Brewster, y la reflexión de la polarización p es igual a cero, en el ángulo de incidencia

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (6.5)$$

Procedimiento experimental

- (i) Utilizando el arreglo experimental mostrado en la figura 6.2, dibuje cualitativamente el comportamiento del haz reflejado y del haz transmitido, cuando el eje de transmisión del polarizador es paralelo al plano de la mesa giratoria. Compare con las predicciones de las ecuaciones de Fresnel. Calcule el índice de refracción y su error del vidrio usando el efecto de Brewster.
- (ii) Repita el paso 1 para el caso cuando el eje del polarizador es ortogonal al plano de la mesa.
- (iii) Repita los pasos 1 y 2 para incidencia interna. Calcule el índice de refracción y su error usando el efecto del ángulo crítico.

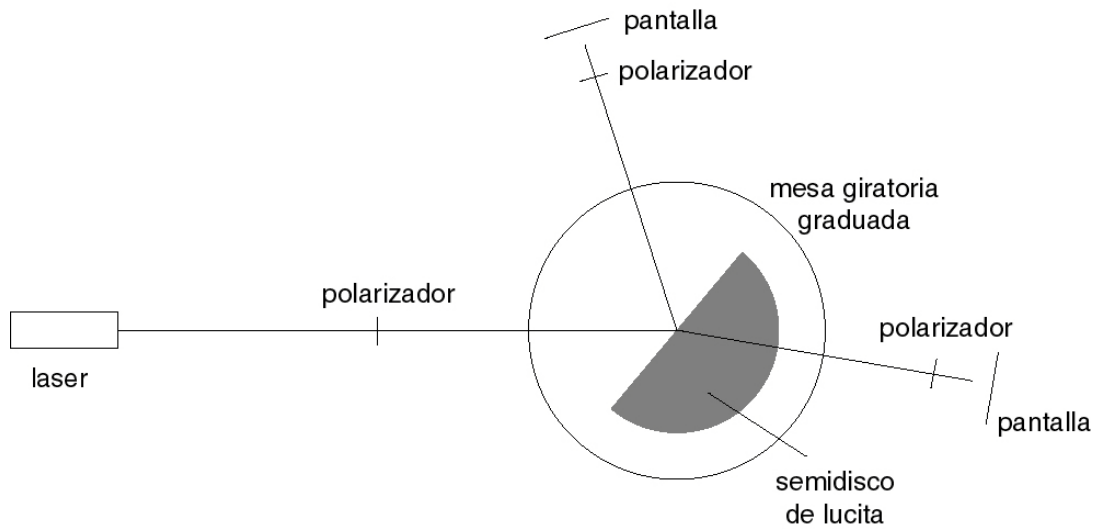


Figura 6.2 El arreglo experimental

- (iii) Para incidencia externa gráfique el comportamiento de la razón $\left(\frac{r_p}{r_s} \right)^2$ de los componentes s y p de la luz reflejada como función del ángulo de incidencia. Comparetu dibujo con la teoría usando ecuaciones (6.2) y (6.3) y el valor del índice de refracción medido en las otras partes del experimento. (N.B. se debe realizar esta medición sin un detector de potencia. Piensa en la polarización.)

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Experimento 7

Interferómetro de Michelson

Objetivos

- Entender la formación de las franjas en el interferómetro y aprender cómo encontrarlas.
- Medir la diferencia entre las dos líneas de emisión de sodio.
- Entender y encontrar las franjas de luz blanca en el interferómetro.

Introducción

Un interferómetro es un instrumento que utiliza la interferencia de luz para medir (distancia, índice de refracción, longitud de onda, etc.) (Hecht, 2000; Jenkins, 1950). El interferómetro de Michelson se muestra en la figura 7.1(a). La luz es dividida por un divisor de haz y los dos haces inciden en los dos espejos. La placa compensadora se necesita para que los dos haces pasen por el mismo ancho de vidrio (después vamos a ver porqué se necesita esto). Los dos haces reflejados pasan por el divisor de haz donde serán recombinados. Las franjas de interferencia de estos dos haces se pueden ver como se indica en la figura 7.1(a). La figura 7.1(b) muestra un arreglo simplificado pero equivalente a la figura 7.1(a) que ayuda en el análisis del interferómetro.

Existen dos tipos de franjas en el interferómetro de Michelson: franjas de Haidinger y franjas de inclinación (Fizeau). Se puede mostrar que las franjas de Haidinger que son claras desaparecen cuando (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$2d \cos(\theta) = n\lambda \quad (7.1)$$

donde d es la distancia relativa entre las posiciones de los dos espejos (figura 7.1(b)), θ es el ángulo de observación de la franja, λ es la longitud de onda y n es un entero. Se pueden ver estas franjas cuando los dos espejos están paralelos en la figura 7.1(b) (o perpendiculares en la figura 7.1(a)).

Cuando los espejos no están paralelos, se pueden ver franjas de Fizeau (Hecht, 2000; Jenkins, 1950), o de igual inclinación. Estas franjas son líneas rectas sólo cuando las posiciones de los dos espejos en la figura 7.1(b) son casi iguales. Fuera de esta posición, la separación entre los espejos en la línea de vista cambia con la posición en el plano de los espejos. Por eso, las franjas de Fizeau cambian de curvas a líneas rectas, y de líneas rectas a curvas (pero con curvatura opuesta a las primeras curvas), cuando la posición de uno de los espejos pasa la posición de cero diferencia de camino óptico.

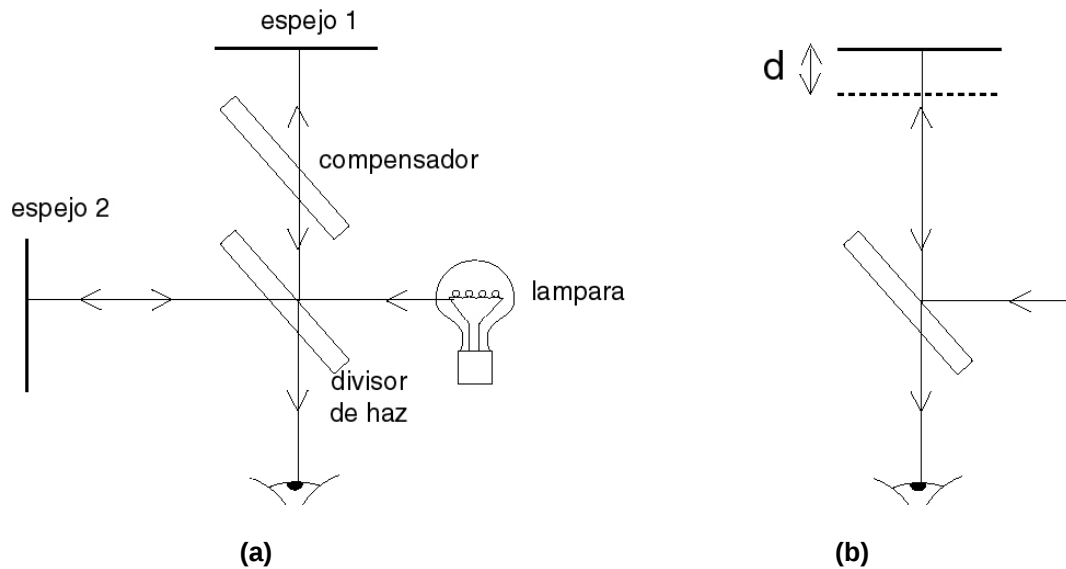


Figura 7.1 El arreglo del interferómetro de Michelson

Experimento 7.1

En esta parte van a encontrar las franjas con una fuente de mercurio e investigar cualitativamente sus propiedades. El arreglo para este experimento se muestra en la figura 7.1.

- (i) Se pueden ver tres imágenes de la abertura circular del difusor. Dos de estas imágenes vienen de reflexiones de los dos espejos. ¿De dónde viene la otra? Ignorando ésta otra imagen, cambie la inclinación del espejo 2 para alinear las dos imágenes relevantes. Con esta acción, los dos espejos están, aproximadamente, paralelos en la figura 7.1(b) (perpendiculares en la figura 7.1(a)) y se deberían ver franjas circulares. (Si no se puede ver las franjas, haga ajustes finos hasta que aparezcan.)
- (ii) Ahora, cambie la posición del espejo 1 con el micrómetro. ¿Qué pasa con las franjas? Use la ecuación (7.1) para decidir si la distancia d está incrementando o decreciendo.
- (iii) Reduzca la distancia d hasta que haya sólo 2 o 3 franjas circulares en el campo visual. Ahora, cambie la inclinación del espejo 2 para ver aproximadamente 7 u 8 franjas de inclinación. Estas franjas están curvas. Use la dirección de curvatura para decidir en qué posición del campo de vista los espejos están más alejados. (Recuerda que éstas franjas son de igual espesor, entonces piensa en las posiciones sobre los espejos, y el camino óptico entre estos, donde llegan los rayos, para decidir en donde se encuentran las posiciones de igual espesor, ver la figura 7.2).
- (iv) Continúe moviendo el espejo 1 en la misma dirección para ver franjas rectas y después franjas curvas en la dirección opuesta a las anteriores. Regrese a la posición de franjas rectas y tome unas mediciones de la posición del micrómetro. Esta posición está cerca de la posición de cero diferencia entre los caminos ópticos de los dos brazos del interferómetro y es importante para las otras partes del experimento.

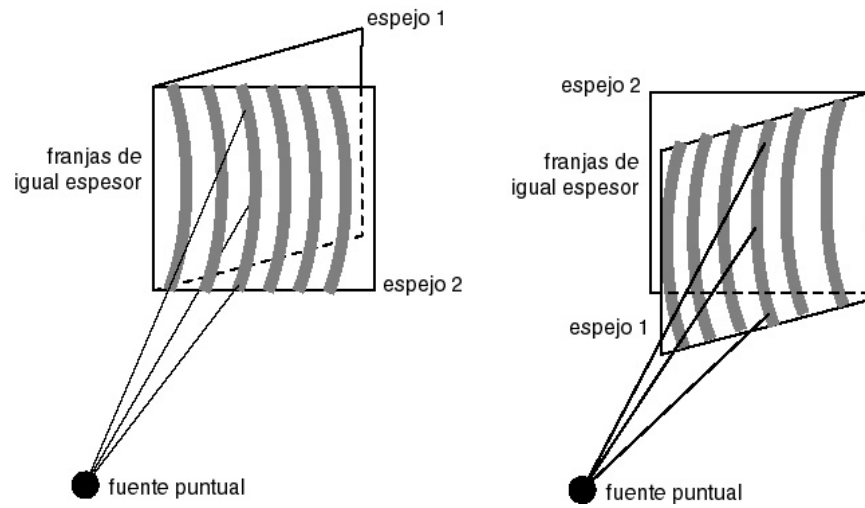


Figura 7.2: esquema de las franjas de igual espesor para dos posiciones relativas del espejo 1 y el espejo 2. Al pasar por la posición $d = 0$, la curvatura de estas franjas cambia de dirección.

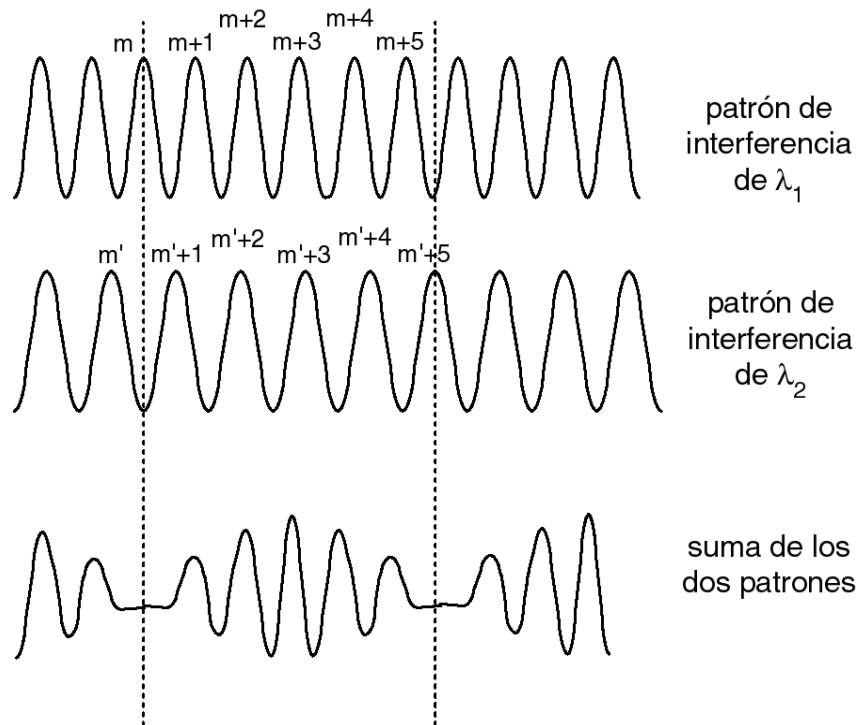


Figura 7.3 La combinación de dos patrones de interferencia debidos a dos longitudes de onda.

Experimento 7.2

- (i) Desconecte la fuente de mercurio y conecta una de sodio. Con unas 7 u 8 franjas curvas o rectas visibles mueva la posición del espejo 1 y observe que pasa con las franjas. ¿Cómo cambia el contraste de las franjas? Dibuje esquemáticamente el cambio de contraste contra la posición d .
- (ii) El espectro de sodio consiste en dos líneas fuertes en el amarillo. Consideramos las franjas de Haidinger. En el interferómetro, estas dos longitudes de onda van a dar patrones de franjas cada uno de ellos satisfaciendo la ecuación (7.1) (es importante recordar que no hay interferencia entre la luz con longitudes de onda diferentes). La figura 7.3 muestra que pasa en el centro del campo de vista, ($\theta = 0$), al cambiar la separación entre las posiciones de los dos espejos, d . Para tener el primer mínimo en la visibilidad de las franjas, a la izquierda de la figura 7.3 tenemos que para la primera longitud de onda hay un máximo en el patrón de interferencia, y para la segunda longitud de onda hay un mínimo, i.e.

$$\left. \begin{aligned} 2d &= m\lambda_1 \\ 2d &= \left(m' + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por λ_2 , la segunda por λ_1 y restando las ecuaciones resultantes se obtiene:

$$2d(\lambda_1 - \lambda_2) = \left(m' - m + \frac{1}{2}\right)\lambda_1\lambda_2 \quad (7.3)$$

que se puede escribir como

$$d = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} \left(m' - m + \frac{1}{2}\right) \quad (7.4)$$

Aquí, $\Delta\lambda$ es la diferencia entre la longitud de onda de las dos líneas y $\bar{\lambda} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ es el promedio geométrico de las dos longitudes de onda.

Repitiendo este cálculo para el segundo mínimo de contraste de la figura 7.3, en donde la primera longitud de onda tiene un mínimo y la segunda un máximo, nos da:

$$\left. \begin{aligned} 2d' &= \left(m + 5 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 \\ 2d' &= (m' + 5)\lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

$$d' = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} \left(m' - m - \frac{1}{2}\right) \quad (7.6)$$

De las ecuaciones (7.4) y (7.5) se puede ver que para cambiar de un mínimo de contraste al siguiente mínimo de contraste, el cambio en la posición de espejo 1 es

$$d - d' = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} \quad (7.7)$$

Si pasas N mínimos de contraste, la distancia que tienes que mover es

$$d - d' = N \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda} \quad (7.8)$$

que es el equivalente de tomar un promedio de las N distancias para cada separación mínimo a mínimo.

Ahora, utilice la ecuación (7.8) para calcular el valor de $\Delta\lambda$, y su error, para el sodio. (Supón que el valor de $\bar{\lambda} = 589.3 \pm 0.3 \text{ nm}$ e incluir el error en la distancia $d - d'$ y en el número de franjas.)

Experimento 7.3

- (i) En esta parte van a tener que iluminar con la lámpara de mercurio y una lámpara de luz blanca al mismo tiempo. Primero, asegure que el micrómetro esté en la posición anotada en la parte (iv) del experimento 7.1 (cerca de cero diferencia de camino óptico entre los dos brazos del interferómetro). Con la lámpara de mercurio, cambie la inclinación del espejo 2 para tener aproximadamente 10 franjas en el campo de vista. Cambie la distancia d para que las franjas estén curvas e ilumine la mitad del campo de vista con la lámpara de luz blanca (mientras la lámpara de mercurio todavía está iluminando el campo de vista). **Lentamente** cambie la distancia d hacia la posición de cero diferencia de camino óptico y busque una región de franjas coloridas en la luz blanca. **Inmediatamente anote el valor del micrómetro.**
- (ii) ¿Porqué sólo hay pocas franjas? ¿Entonces porqué se necesita el compensador? Describa y explique la secuencia de colores y el color de la franja central.

Experimento 7.4

Reemplace la fuente de luz blanca con un láser. **NO VEAN DIRECTAMENTE EL HAZ DEL LÁSER.** Mide la longitud de onda del láser y su error utilizando el número de franjas que pasan un punto en la pantalla al mover una cierta distancia el espejo para cambiar d . En este experimento, la precisión está limitada por la precisión de la medición de la distancia con el vernier. Sin embargo, se puede utilizar el número de franjas que pasan a un detector como medidor de distancia. Actualmente así es como se definen los estándares de distancia: 1,650,763.73 veces la longitud de onda de la línea roja-naranja del Krypton 86 es igual a 1m (ver <http://es.wikipedia.org/wiki/Metro>).

Experimento 7.5

La técnica de Tomografía de Coherencia Óptica (OCT por sus siglas en inglés), está encontrando muchas aplicaciones en la actualidad, particularmente en la medicina (Fujimoto, 2000). La técnica utiliza una fuente de baja coherencia, como una fuente de luz blanca, para detectar cambios en el

camino óptico entre los dos brazos de un interferómetro de Michelson (u otro tipo de interferómetro). En este experimento se verá el principio de funcionamiento de OCT.

- (i) Utilice la fuente de luz blanca. Repita el procedimiento del Experimento 7.3 para ver las franjas de colores. Anote nuevamente la posición del espejo 1 para ver estas franjas.
- (ii) Introduzca un portaobjetos de microscopio en uno de los brazos del interferómetro para cambiar la diferencia de camino óptico.
- (iii) Debido a este cambio de la diferencia de camino óptico, ya no se verán las franjas de colores, y debes cambiar la posición del espejo 1, para balancear los caminos en los dos brazos. Realice los movimientos lentamente, y si crees que has perdido las franjas, quite el portaobjetos, y regrese al punto (i) de este experimento.
- (iv) Cuando encuentres las franjas nuevamente, anote la posición del espejo 1. Ahora, la distancia movida del espejo 1, Δd , compensa el camino óptico extra por la presencia del portaobjetos, $d_{po}(n_{po}-1)$, en donde d_{po} es el grosor del portaobjetos, y n_{po} es su índice de refracción. Aquí tenemos el factor $(n_{po}-1)$ porque el portaobjetos quita el camino de aire, con índice de refracción 1, y lo reemplaza con un índice de refracción n_{po} . Entonces si sabemos d_{po} , podemos calcular n_{po} :

$$n_{po} = \frac{\Delta d}{d_{po}} + 1 \quad (7.9)$$

Mida el grosor del portaobjetos con un vernier. Repita la medición varias veces para obtener el valor y su error, y utilice la ecuación (7.9) para calcular n_{po} y su error.

- (v) Una cosa importante aquí es que, debido a la dispersión del vidrio del portaobjetos, el interferómetro ya no está compensado cuando lo introduces en uno de los brazos, que significa que las franjas no se ven iguales que el caso sin el portaobjetos. Observe y anote las diferencias en el patrón de franjas en los dos casos.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Fujimoto J.G., Pitris C., Boppart S.A., Brezinski M.E., (2000), Optical Coherence Tomography: An Emerging Technology for Biomedical Imaging and Optical Biopsy, Neoplasia, 2(1-2): 9–25.

Experimento 8

Interferómetro de Fabry-Perot

Objetivos

- Entender la formación de las franjas en el interferómetro y aprender cómo encontrarlas.
- Estimar el índice de refracción del aire.
- Medir la diferencia en longitud de onda de las líneas de emisión de sodio.

Introducción

Uno de los instrumentos más importantes en la óptica es el interferómetro de Fabry-Perot (Malacara, 2007). Es útil no sólo para espectroscopia (análisis de espectros muy delgados), sino también es una parte central de la cavidad de láseres. Se muestra en la figura 8.1 el arreglo básico para el interferómetro. Las franjas están formadas por la interferencia entre los haces reflejados de las dos caras internas. La diferencia en la fase entre dos haces transmitidos a un ángulo θ está dada por (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$\Delta(\text{fase}) = 2nt\cos\theta \quad (8.1)$$

en donde n es el índice de refracción en el espacio entre las dos caras internas del interferómetro, y t es la separación entre estas dos caras. Para interferencia constructiva, este cambio de la fase debe ser igual a un número entero de longitudes de onda:

$$2nt\cos\theta = m\lambda \quad (8.2)$$

i.e. las franjas son circulares.

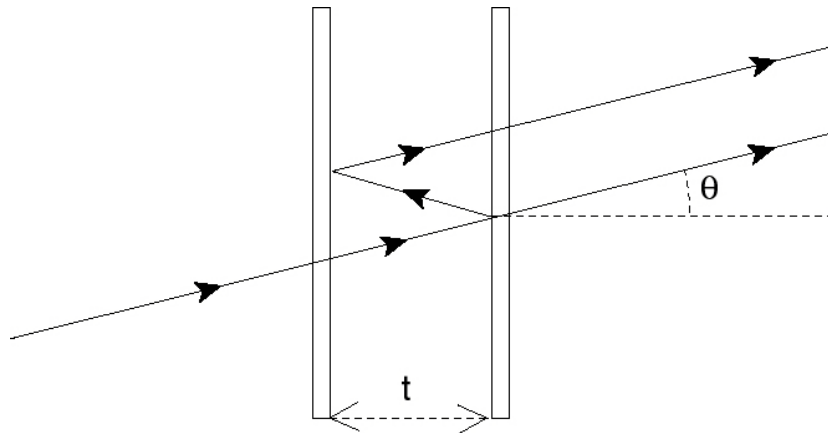


Figura 8.1: La geometría del interferómetro de Fabry-Perot, la luz se refleja entre dos espejos

Si tenemos dos longitudes de onda, λ_1 y λ_2 , el patrón de interferencia total contiene dos series de franjas, uno para cada longitud de onda. En el caso del Fabry-Perot, la resolución es, en general, mejor que en el caso del Michelson. Esto significa que, en lugar de observar cambios en el contraste de unas franjas, en el Fabry-Perot se puede ver los dos patrones de franjas. La figura 8.2 muestra lo que se observa para los dos casos: cuando los dos patrones de franjas coinciden y cuando están fuera de fase.

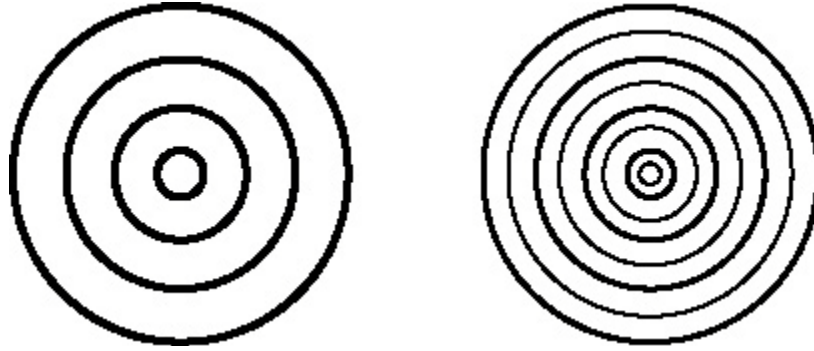


Figura 8.2: Las franjas en el Fabry-Perot para la lámpara de sodio

Ahora, si un máximo de un patrón coincide con un máximo del otro, tenemos el caso a la izquierda de la figura 8.2. Entonces, en el centro del patrón:

$$\left. \begin{aligned} 2nt &= m\lambda_1 \\ 2nt &= m'\lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

y de la misma manera que el mismo caso con el interferómetro de Michelson, se puede calcular que (con $\bar{\lambda}^2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ y $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$):

$$t = (m - m') \frac{\bar{\lambda}^2}{2n\Delta\lambda} \quad (8.4)$$

Si se cambia la separación t para estar en la posición en donde los máximos vuelven a coincidir, tenemos

$$\left. \begin{aligned} 2nt' &= (m + n)\lambda_1 \\ 2nt' &= (m' + n - 1)\lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

en donde n es el número de franjas que pasan en el centro del patrón de interferencia de λ_1 entre las dos posiciones de los espejos. Entonces

$$t' = (m - m' + 1) \frac{\bar{\lambda}^2}{2n\Delta\lambda} \quad (8.6)$$

Ahora, restando las ecuaciones (8.4) y (8.6)

$$t' - t = \frac{\bar{\lambda}^2}{2n\Delta\lambda} \quad (8.7)$$

y si tenemos el caso cuando pasan N posiciones de coincidencia de las franjas tenemos

$$t' - t = N \frac{\bar{\lambda}^2}{2n\Delta\lambda} \quad (8.8)$$

Para el caso de encontrar las posiciones en donde las mínimas de un patrón coinciden con las máximas del otro se obtiene la misma ecuación relacionando la distancia movida con la diferencia en las longitudes de onda.

Procedimiento experimental

- (i) Alinea el interferómetro con un haz de láser. Busque en una pantalla el patrón de la luz transmitida (**NO VEAN EL HAZ DIRECTAMENTE**) y cambie la inclinación de la placa variable para hacer coincidir los haces.
- (ii) Ahora, ponga un objetivo de microscopio en el haz para dar iluminación en toda la abertura del interferómetro. Si no encuentras franjas, ajuste la inclinación de la placa, y si todavía no hay franjas, empiece de nuevo otra vez. ¿Cómo cambian las franjas con cambios en la separación entre las placas? ¿El comportamiento concuerda con la ecuación (8.2)?
- (iii) Use la ecuación (8.2) para medir el índice de refracción del aire entre las placas del interferómetro. Se pueden contar las franjas creadas en el centro del patrón por un cambio en la distancia t . Incluya los efectos de los errores en todos los parámetros involucrados, incluyendo el número de franjas, y la longitud de onda del láser. Repita las mediciones para reducir el error en el valor calculado.
- (iv) Cambie el láser por una fuente de sodio. Observe el patrón de franjas directamente con el ojo. Cambie la distancia t y nota el efecto en las franjas. Dado que el valor de $\bar{\lambda} = 589.3 \pm 0.3 \text{ nm}$, calcule el valor de la separación entre las dos líneas en el espectro de sodio y compare con el valor medido (y el error calculado) con el interferómetro de Michelson. Analice los errores usando todos los valores involucrados.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Malacara D., (2007), Optical Shop Testing, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey

Experimento 9

Interferómetro Estelar de Michelson

Objetivos

1. Entender el funcionamiento del interferómetro estelar de Michelson.
2. Verificar el método de medición para esta técnica.

Introducción

La figura 9.1 muestra el arreglo del interferómetro estelar de Michelson. Se puede ver que este es el experimento de Young con la iluminación de las dos rendijas con luz que viene más separada que la separación de las rendijas y que va dirigida a éstas a través de espejos. Una estrella que se encuentra directamente arriba del interferómetro producirá un patrón de franjas de interferencia centradas en el punto P_0 en la figura 9.1. Si se encuentra otra estrella en una dirección a un ángulo θ de la primera estrella, la segunda estrella formará otro patrón de interferencia, ahora centrado en el punto P_1 . La diferencia de fase entre los dos rayos que llegan al interferómetro a un ángulo θ es (Hecht, 2000; Jenkins, 1950; Born, 1999)

$$\Delta\phi = h \sin \theta \approx h\theta \quad (9.1)$$

y esta es la misma diferencia de fase que llega al plano de la doble rendija. Esta diferencia de fase incidente sobre la rendija doble corresponde a un cambio en la posición del centro del patrón, θ' , dado por la ecuación

$$a\theta' = h\theta \quad (9.2)$$

Para la luz de la primera estrella, directamente arriba del telescopio, la separación de las franjas de interferencia es

$$\Delta\theta = \frac{\bar{\lambda}}{a} \quad (9.3)$$

en donde $\bar{\lambda}$ es el promedio de la longitud de ondas de iluminación. Entonces si θ' , el cambio de la posición del centro del patrón de interferencia, es igual a $\Delta\theta/2$, los máximos del segundo patrón de interferencia estarán en las mismas posiciones que los mínimos del patrón de interferencia de la primera estrella. Debido a que la luz de las dos estrellas tiene que ser incoherente, simplemente hay que sumar las intensidades de los dos patrones de interferencia. La figura 9.2 muestra que en este caso la resultante es una intensidad constante sin franjas.

Esta situación ocurre cuando $\frac{\Delta\theta}{2} = \theta'$, o

$$\frac{\bar{\lambda}}{2a} = \frac{h\theta}{a} \quad (9.4)$$

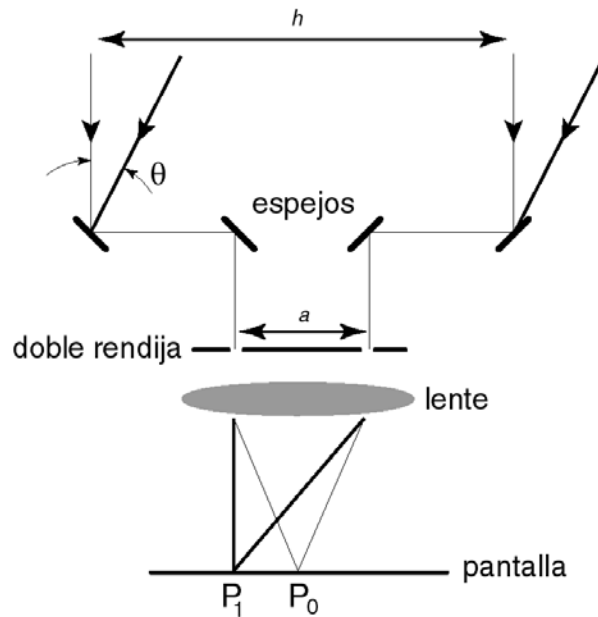


Figura 9.1: El interferómetro estelar de Michelson

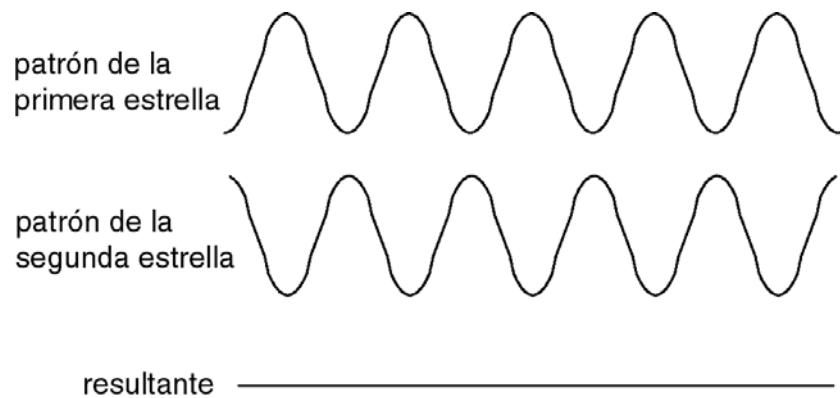


Figura 9.2: la suma de dos patrones de interferencia cuando los máximos del primero coincide con los mínimos del segundo

que se puede escribir como

$$\theta = \frac{\bar{\lambda}}{2h} \quad (9.5)$$

esto es, se puede conocer la separación angular entre las dos estrellas midiendo la separación de los espejos primarios que hace desaparecer las franjas de interferencia.

Si se observa a una sola estrella con este interferómetro, hay que sumar todos los patrones de interferencia que vienen de todos los puntos de la estrella para calcular qué es lo que se observa en la pantalla. Se puede mostrar (Born, 1999) que el patrón de interferencia resultante depende de una función de Bessel de primer orden y las franjas de interferencia desaparecen cuando

$$\theta = 1.22 \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (9.6)$$

Otra forma de pensar en este experimento es que mide la *coherencia* de la luz de la estrella, esto es cuándo la luz de la estrella produce franjas de interferencia y cuándo no. Puedes ver más detalles de esto en las referencias (Hecht, 2000; Jenkins, 1950; Born, 1999).

Procedimiento experimental

1. Monte el arreglo mostrado en la figura 9.3. La doble rendija se posiciona justo en frente del ojo. Varíe el tamaño del diafragma y mide la separación entre el diafragma y la doble rendija para que desaparezcan las franjas de interferencia. Repita para diferentes observadores. Compare tus resultados con la ecuación (9.6).

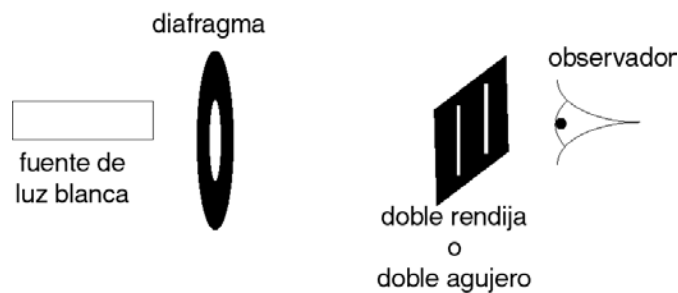


Figura9.3: el arreglo experimental

2. Para un tamaño del diafragma fijo, utilice filtros de color y anote como cambia la posición de la doble rendija para que desaparezcan las franjas de interferencia para diferentes longitudes de onda. Repita para diferentes tamaños del diafragma y para diferentes observadores. Compare con la ecuación (9.6).

Bibliografía

Born M., Wolf E., (1999), Principles of Optics: The Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, 7th Edition, Cambridge University Press, Cambridge

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Experimento10

Speckle (moteado) de láser

Objetivos

- Entender la formación del patrón de speckle (moteado).
- Observar el speckle (moteado) subjetivo.
- Observar el speckle (moteado) objetivo.

Introducción

Cuando la luz de un láser ilumina un difusor (que puede ser en transmisión o reflexión), el patrón de luz esparcida es una serie de puntos de luz clara y puntos oscuros conocido como un patrón de “speckle de láser”, o de “moteado”. Se debe el efecto a la coherencia temporal de la luz que permite que la luz esparcida de diferentes puntos del difusor interfiera, dando máximos y mínimos en la intensidad (Hecht, 2000; Dainty, 1977; Ennos, 1996).

Hay dos formas de speckle: el speckle “subjetivo” y el speckle “objetivo”. El speckle “subjetivo” es el efecto obtenido cuando se observa directamente la luz reflejada o transmitida en un difusor. Es “subjetivo” porque el patrón de speckle observado depende de la calidad del ojo y de la posición del observador. El “objetivo” se obtiene al proyectar un patrón de speckle sobre una pantalla. Todos los observadores aprecian el mismo patrón sobre la pantalla.

El speckle “subjetivo” se puede utilizar como una prueba de la calidad del ojo. En la figura 10.1 se muestra el funcionamiento del ojo para un objeto en infinito para un ojo normal, uno miope y uno hipermetrope. Suponemos que observamos a una distancia grande una pantalla iluminada por la luz de un láser. Dependiendo de la calidad de nuestro ojo, la imagen de la pantalla se localizará como se indica en la figura 10.1. Ahora, el patrón de speckle está no-localizado, i.e. en donde ponemos el ojo hay un patrón de speckle (se puede ver esto moviendo la cabeza más cerca y más lejos del objeto y notando que siempre se puede observar un patrón de speckle). Por eso, en la figura 10.1, siempre hay un patrón de speckle enfocado en la retina, independientemente de dónde se enfoca la imagen de la pantalla. En el caso del ojo normal, si se mueve la cabeza de un lado a otro, el speckle se debe mover junto con la imagen de la pantalla porque las imágenes están juntas. En el caso del ojo miope, la pantalla se enfoca antes que el speckle, entonces el speckle viene de un plano más cercano al ojo que la pantalla, y, con el efecto de paralaje, el speckle se debe mover en la dirección opuesta al movimiento de la cabeza con respecto a la pantalla. En el caso hipermetrope, la situación es al revés: el speckle está más lejos que la pantalla, y el speckle se debe mover en la misma dirección que la cabeza con respecto a la pantalla.

Para el speckle “objetivo”, se puede calcular que la distribución de la probabilidad de intensidad en el patrón de speckle está dada por (Dainty, 1977; Ennos, 1996):

$$P(I)dI = \frac{\exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right)}{\langle I \rangle} dI \quad (10.1)$$

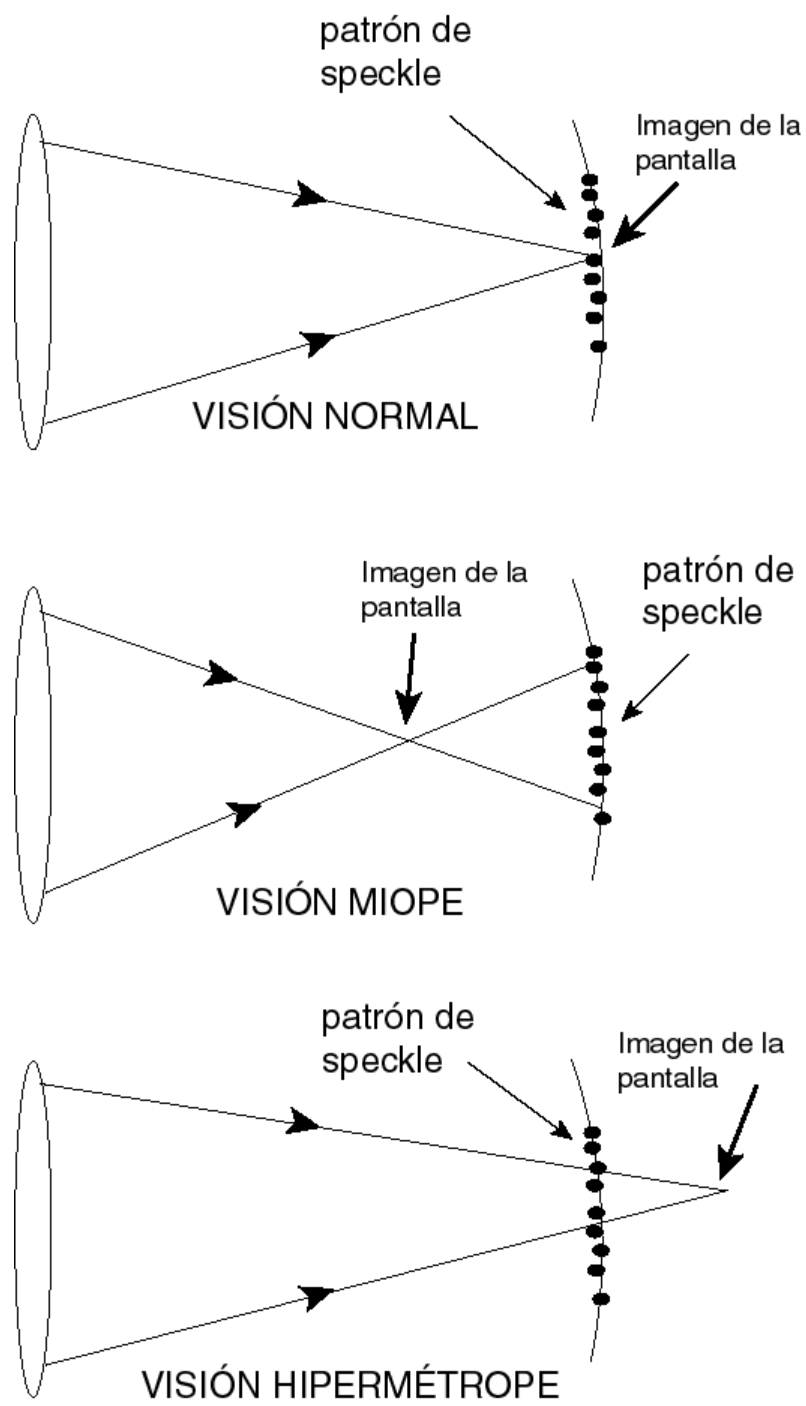


Figura 10.1: el efecto speckle "subjetivo"

en donde $\langle I \rangle$ es el promedio de la intensidad. Esta ecuación muestra que la intensidad más probable es 0; y puntos más intensos son menos probables.

El patrón de speckle viene de la interferencia de haces de luz de muchos diferentes puntos en el difusor. Se puede calcular que las franjas producidas por dos haces con separación angular de ϕ , están separadas por una distancia (Dainty, 1977; Ennos, 1996):

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)} \quad (10.2)$$

i.e. una separación angular más grande da unas franjas menos separadas. Dado que la luz de las orillas del haz da la separación angular más grande, el tamaño de los puntos del speckle debe estar dado por (suponiendo ángulos pequeños):

$$d \approx \frac{R\lambda}{t} \quad (10.3)$$

en donde R es la distancia entre el difusor y la pantalla y t es el tamaño del haz en el difusor.

Procedimiento experimental

- (i) Utilice un láser, expande el haz e ilumine un papel con una mancha de luz de varios cm de diámetro. Observe esta mancha a unos metros de distancia y mueva la cabeza de un lado a otro. ¿Cómo se mueven los speckles? Inténtelo primero con un ojo y luego con el otro. ¿Hay alguna diferencia? Si utiliza lentes inténtelo con y sin estas. Si no usa lentes, pida unas prestadas a tus compañeros y observe si hay alguna diferencia con ellas. También, intente acercando a la pantalla (a unos cm), y describa y explique qué sucede.
- (ii) Utilice el arreglo mostrado en la figura 10.2 para ver el patrón de speckle. ¿Qué pasa al mover la pantalla? ¿Cambia el tamaño de los puntos del speckle? Escoja un punto de luz en el patrón y vea cómo cambia al mover la pantalla.
- (iii) Con la pantalla en una posición fija, mueva el difusor de un lado para otro con movimientos rápidos. Describa y explique qué pasa con el patrón de speckle.
- (iv) Mida el tamaño típico de los speckles para diferentes posiciones de la pantalla. Como el ojo no es un detector lineal en intensidad, tratar de medir a ojo el tamaño de los speckles directamente da muchos errores. Es mejor estimar el tamaño de los speckles midiendo la separación entre dos speckles vecinos (del centro de uno al centro del otro) y suponer que el tamaño de cada speckle es la mitad de esta distancia (piense que debe haber un speckle oscuro entre los brillantes) ¿Cuál es la relación entre el tamaño del speckle y la distancia entre el difusor y la pantalla?
- (v) Utilice el arreglo mostrado en la figura 10.3. Cambie la posición del difusor con respecto al objetivo de microscopio, y describa y explique qué sucede con el patrón de speckle. Mida el tamaño de los speckles para 4 o 5 diferentes separaciones entre el difusor y el objetivo y grafique los resultados para ver la relación entre esta separación y el tamaño de los speckles. ¿Los resultados están de acuerdo con la ecuación (10.3)?

- (vi) Estime el tamaño del haz en el punto focal del objetivo de microscopio. Para una lente con una abertura numérica de NA , se puede estimar el tamaño del haz en el punto focal como $t \approx \frac{1.22\lambda}{NA}$ (ver referencia (Ennos, 1996)). Compare esta estimación con tu medición, y recuerde que el haz del láser tiene un perfil Gaussiano que afecta el tamaño del haz en el foco y que no está tomado en cuenta en esta ecuación.

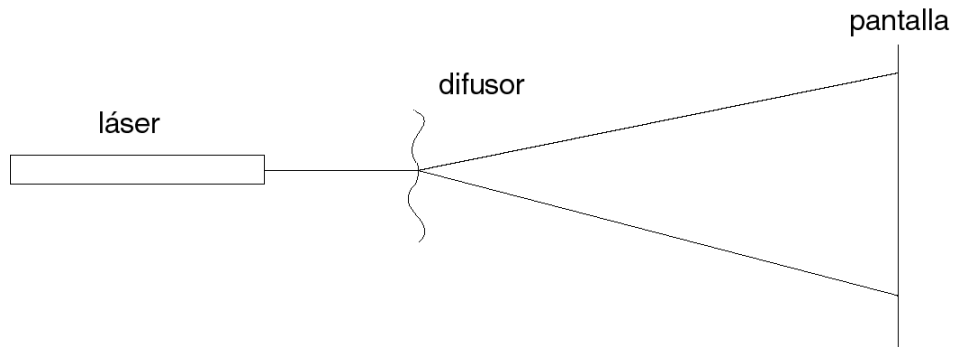


Figura10.2

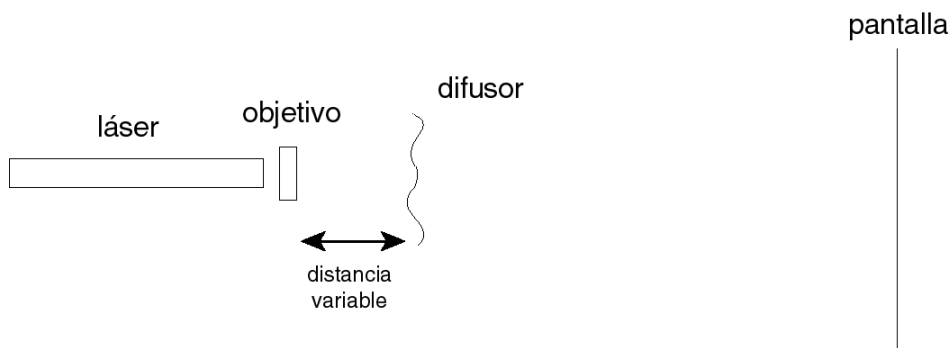


Figura10.3

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Dainty J.C., (1977), The statistics of speckle patterns, in Progress in Optics, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam

Ennos A.E., (1996), Laser Speckle experiments for students, Physics Education, **31**, 138-142, (1996) (www.iop.org/EJ/abstract/0031-9120/31/3/012)

Experimento 11

Difracción

Objetivos

- Producir patrones de difracción de diferentes aberturas; describir cualitativamente, con detalle sus características más sobresalientes, compararlos con las predicciones teóricas.
- Determinar cuantitativamente la distribución de energía en un patrón de difracción de Fraunhofer, producido por una rendija y demostrar que coincide con la predicción teórica.
- Determinar cualitativamente la distribución de energía en un patrón de difracción de Fresnel.

Introducción

Cuando un haz luminoso interacciona con objetos pequeños (de tamaño comparable a la longitud de onda de la luz usada), los rayos luminosos parecen curvarse y producir redistribuciones de la energía no explicables en términos de la óptica geométrica; este comportamiento conocido desde hace casi cuatro siglos se conoce con el nombre de **difracción**. Alrededor de 1818, Agustín Jean Fresnel pudo explicar exitosamente tal fenómeno en términos de un modelo ondulatorio de la luz. Los casos más simples son los producidos por rendijas en el régimen de Fraunhofer; en éste, la fuente luminosa y la pantalla de observación se encuentran suficientemente alejados de la abertura difractora, o con ayuda de lentes se producen y observan frentes de onda planos.

En general, la intensidad en el patrón de difracción se puede calcular utilizando el teorema de Huygens-Fresnel, como (Hecht, 2000; Jenkins, 1950)

$$I(P) = \left| \int_{\substack{\text{parte} \\ \text{abierta} \\ \text{de la} \\ \text{abertura}}} \frac{\exp(ikr(x))}{r(x)} dx \right|^2 \quad (11.1)$$

Se puede calcular (Hecht, 2000; Jenkins, 1950) que, para una sola rendija, la distribución de intensidad en el régimen de Fraunhofer está dada por:

$$I(\theta) \propto \left(\frac{\sin(kb \sin(\theta)/2)}{kb \sin(\theta)/2} \right)^2 \quad (11.2)$$

donde b es el ancho de la rendija y k es el número de propagación $k = 2\pi/\lambda$. Esta ecuación es igual a cero cuando

$$kb \sin(\theta)/2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (11.3)$$

entonces se puede utilizar las posiciones de los ceros de intensidad y la ecuación (11.3) para medir el ancho de la rendija.

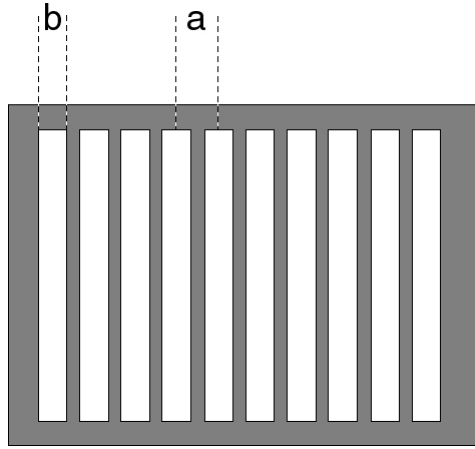


Figura 11.1 Rendijas múltiples

Para N rendijas idénticas, de ancho b y separación a (ver la figura 11.1):

$$I(\theta) \propto \left(\frac{\text{sen}(k b \text{sen}(\theta)/2)}{k b \text{sen}(\theta)/2} \right)^2 \left(\frac{\text{sen}(N k a \text{sen}(\theta)/2)}{\text{sen}(k a \text{sen}(\theta)/2)} \right)^2 \quad (11.4)$$

El primer término a la derecha de la ecuación (11.4) es igual a la ecuación (11.2) y es la difracción de cada rendija como si fuera sencilla. El segundo término a la derecha de (11.4) solo depende de la separación entre las rendijas. Este término se puede considerar un término de interferencia entre los campos transmitidos en las diferentes rendijas.

Para el caso especial de $N = 2$, que es el caso del famoso experimento de Young, la ecuación (11.4) es

$$\begin{aligned} I(\theta) &\propto \left(\frac{\text{sen}(k b \text{sen}(\theta)/2)}{k b \text{sen}(\theta)/2} \right)^2 \left(\frac{\text{sen}(2 k a \text{sen}(\theta)/2)}{\text{sen}(k a \text{sen}(\theta)/2)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\text{sen}(k b \text{sen}(\theta)/2)}{k b \text{sen}(\theta)/2} \right)^2 \left(\frac{2 \text{sen}(k a \text{sen}(\theta)/2) \cos(k a \text{sen}(\theta)/2)}{\text{sen}(k a \text{sen}(\theta)/2)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\text{sen}(k b \text{sen}(\theta)/2)}{k b \text{sen}(\theta)/2} \right)^2 (2 \cos(k a \text{sen}(\theta)/2))^2 \end{aligned} \quad (11.5)$$

La figura 11.2 muestra las dos contribuciones al patrón de difracción y el resultado total. Se puede notar que, debido a que la separación de las dos rendijas debe ser mayor que el ancho de cada rendija, el patrón de interferencia oscila más rápidamente que el patrón de difracción.

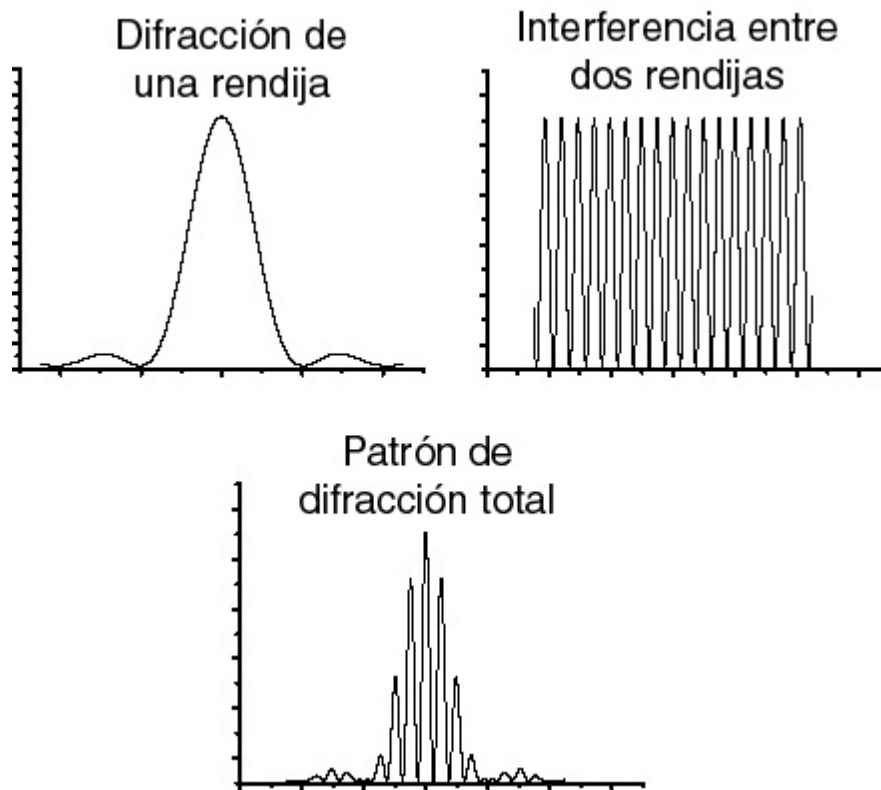


Figura 11.2: El patrón de difracción total para dos rendijas (la ecuación (11.5)), mostrado en la gráfica de abajo, está formado por la multiplicación de un patrón de difracción de una rendija (arriba izquierda) y un patrón de interferencia entre las dos rendijas (arriba derecha).

Ahora, de las posiciones de los ceros de intensidad del término de difracción y la ecuación (11.3) se puede medir el ancho de las rendijas, y de las posiciones de los ceros del patrón de interferencia y la condición de intensidad cero de la ecuación (11.5):

$$k \text{asen}(\theta)/2 = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (11.6)$$

se puede medir la separación de las rendijas.

Cuando N es mayor que 2, el patrón de difracción en la ecuación (11.4) no cambia, pero el patrón de interferencia sí. Para el caso de una rejilla de difracción, $N \rightarrow \infty$ y en este caso, el término de interferencia será significativo sólo cuando

$$\text{sen}(k \text{asen}(\theta)/2) = 0 \quad (11.7)$$

esto es cuando

$$k \text{asen}(\theta)/2 = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots \quad (11.8)$$

Se puede utilizar la ecuación (10.8) para medir la separación de las líneas en una rejilla de difracción.

El principio de Babinet

Si tenemos una abertura que deja pasar la luz en la zona Σ_1 y bloquea la luz en la zona Σ_1^* , la abertura complementaria deja pasar la luz en la zona Σ_1^* y bloquea la luz en la zona Σ_1 . La contribución a la amplitud de la primera abertura en el punto P del campo lejano es E_1 , y la contribución de la segunda es E_2 . Si E_0 es la amplitud cuando no hay abertura, entonces $E_1 + E_2 = E_0$, ya que las aberturas son complementarias. Entonces, cuando $E_0 = 0$, $E_1 = -E_2$, i.e. las intensidades son iguales. El haz incidente forma una mancha pequeña en el campo lejano, por lo tanto, fuera de esta mancha, los patrones de difracción de una abertura y la abertura complementaria son iguales.

Procedimiento experimental

- (i) Utilice un láser para medir la distribución de energía en el patrón de difracción de una rendija sola con la cámara digital. Analice la imagen obtenida para graficar la distribución obtenida y, en la misma gráfica, incluya la ecuación (11.1), escogiendo la constante de proporcionalidad apropiada, y compare las dos curvas. (Una opción para analizar las fotografías es ImageJ. Para bajar el programa ImageJ para analizar imágenes, hay que ir a la página <http://rsb.info.nih.gov/ij/>. También se puede utilizar MatLab, Mathematica u otros programas para analizar las imágenes.)
- (ii) Para la misma rendija sencilla mida la separación de los mínimos de intensidad y utilice las posiciones de los mínimos de la ecuación (11.1) para calcular el ancho de la rendija y su error. Observe cualitativamente cómo cambia el patrón de difracción al utilizar rendijas sencillas de diferente ancho.
- (iii) Sustituya la rendija sencilla por una rendija doble. Mida las posiciones de los mínimos del patrón de difracción y calcule el ancho de cada rendija y la separación entre las dos rendijas. Observe cualitativamente cómo cambia el patrón de difracción cuando utilizas rendijas dobles de diferentes anchos de rendija y de diferentes separaciones entre rendijas.
- (iv) Investigue el patrón de difracción de diferentes aberturas: varias rendijas (cómo cambia el patrón de difracción cuando cambia el número de rendijas en la abertura), de diferentes grosores y separaciones. Realice lo mismo con aberturas cuadradas y rectangulares, circulares, con aberturas irregulares, etc. En cada caso describa las características más sobresalientes de los patrones de difracción. Realice los dibujos o diagramas que estime convenientes para hacer más clara la descripción de los patrones producidos.
- (v) Use el principio de Babinet y otras ecuaciones convenientes para medir el ancho de uno de tus cabellos.
- (vi) Estime la capacidad de un CD. ¿Puedes decir algo sobre la forma en que está grabada la información en el CD?
- (vii) Utilice el arreglo mostrado en la figura 11.3 para investigar el patrón de difracción de Fresnel de un balón. Busque el punto de Poisson en el centro del patrón de difracción de Fresnel. Investigue qué pasa cuando cambias la distancia entre el balón y la pantalla.

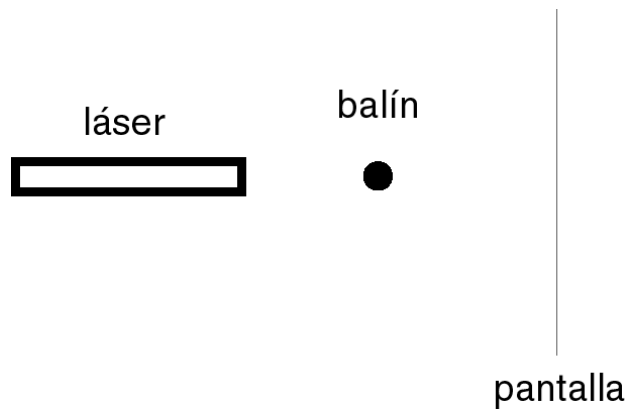


Figura 11.3: el arreglo experimental para ver el patrón de difracción de Fresnel.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Experimento 12

Espectroscopia por rejilla

Objetivos

- Entender la formación de los órdenes de difracción en rejillas de difracción.
- Medir la separación en longitud de onda entre las dos líneas de sodio.

Introducción

Al iluminar una rejilla de N líneas/mm, con luz de longitud de onda λ , a un ángulo de incidencia θ_i , el orden m de difracción aparece a un ángulo θ_m , dado por la ecuación de la rejilla (Hecht, 2000; Jenkins, 1950):

$$\frac{1}{N} \left(\sin(\theta_m) - \sin(\theta_i) \right) = m\lambda \quad (12.1)$$

En donde los ángulos se miden con respecto al normal a la rejilla (ver la figura 12.1).

En el espectrómetro se puede medir los ángulos de los órdenes con respecto al orden cero, i.e. $\theta_{+m} = \theta_i + |\phi_+|$ y $\theta_{-m} = \theta_i - |\phi_-|$ en donde $||$ significa el módulo, y ϕ_+ y ϕ_- son los ángulos de los órdenes positivos y negativos, respectivamente, con respecto al orden cero.

Usando la ecuación (12.1) se puede ver que el orden m del patrón de difracción de la longitud de onda λ_1 coincide con el orden m' de la longitud de onda λ_2 cuando

$$m\lambda_1 = m'\lambda_2 \quad (12.2)$$

independiente del número de líneas/mm de la rejilla.

Si el ángulo de incidencia no es igual a 0° , el patrón de difracción no es simétrico alrededor del orden 0 (ver figura 12.1). Se puede usar este hecho para calcular el ángulo de incidencia.

Procedimiento experimental

- (i) Monte una lámpara de luz blanca a la entrada del colimador del espectroscopio (primero alinear el telescopio y el colimador). Coloque las rejillas de diferentes líneas/mm en la mesa del espectrómetro. Observe y explique los patrones de difracción obtenidos con las tres rejillas. Observe cómo cambia el espectro con el ángulo de difracción para cada rejilla y el cambio en los patrones para las diferentes rejillas. ¿Sus observaciones están de acuerdo con las ecuaciones (12.1) y (12.2)?

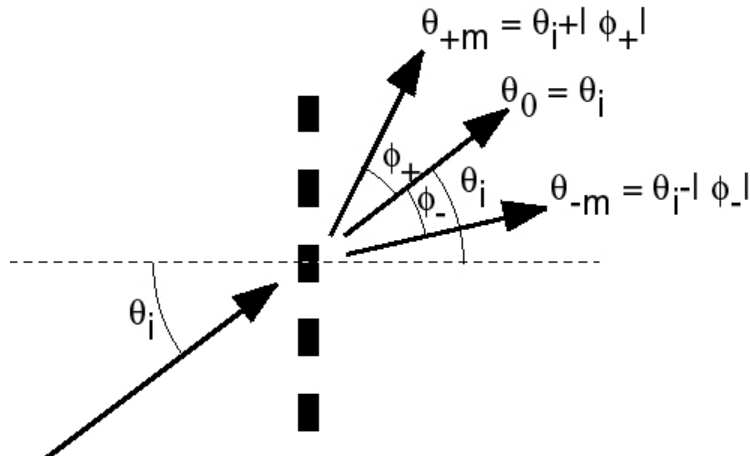


Figura 12.1 La geometría para rejillas de difracción

- (ii) Utilice una lámpara de mercurio o de sodio. La dispersión angular de una rejilla de difracción se define como $\frac{d\theta}{d\lambda}$ e indica cómo se separan en ángulo las diferentes longitudes de onda de la luz. Utilizando las rejillas con diferentes números de líneas/mm, observe cualitativamente cómo cambia la dispersión angular con el número de líneas/mm y el orden de difracción, observando las líneas amarillas de los espectros. En términos de estos dos parámetros, ¿cuáles son las mejores condiciones para observar la separación de dos longitudes de onda cercanas con una rejilla? Utilice la ecuación (12.1) para encontrar una expresión teórica para la dispersión angular y compare con sus observaciones.

LAS PARTES (iii) Y (iv) DEBEN REALIZARSE EN UNA SOLA SESIÓN YA QUE SE REQUIERE LOS RESULTADOS DE LA PARTE (iii) PARA LA PARTE (iv)

- (iii) Monte la rejilla escogida en la parte (ii) arriba y utilice una lámpara de mercurio. Alinea cuidadosamente el sistema (vea el espectro y ajuste los controles de la mesa de la rejilla para que, al ver a través del telescopio, el espectro se vea siempre a la misma altura). Escoja un ángulo de incidencia y fije la mesa de la rejilla. Ahora, escribiendo la ecuación (12.1) para los órdenes m y $-m$ obtenemos

$$\frac{1}{N}(\sin(\theta_m) - \sin(\theta_i)) = m\lambda$$

$$\frac{1}{N}(\sin(\theta_{-m}) - \sin(\theta_i)) = -m\lambda$$

Sumando estas dos ecuaciones obtenemos

$$(\sin(\theta_m) + \sin(\theta_{-m}) - 2\sin(\theta_i)) = 0$$

que es independiente del número de líneas por mm que tiene la rejilla y de la longitud de onda. Ahora, recordando que lo que se puede medir es el ángulo entre el orden 0 y el orden m , porque no sabemos el ángulo del normal a la rejilla, tenemos

$$\sin(\theta_i + |\phi_+|) + \sin(\theta_i - |\phi_-|) = 2\sin(\theta_i)$$

y expandiendo los términos a la izquierda de esta ecuación:

$$\sin(\theta_i)\cos(|\phi_+|) + \sin(|\phi_+|)\cos(\theta_i) + \sin(\theta_i)\cos(|\phi_-|) - \sin(|\phi_-|)\cos(\theta_i) = 2\sin(\theta_i)$$

Dividiendo ambos lados de esta ecuación por $\sin(\theta_i)$ y re-agrupando términos obtenemos

$$\tan(\theta_i) = \frac{\sin(\phi_+) - \sin(\phi_-)}{2 - \cos(\phi_+) - \cos(\phi_-)}$$

que es una expresión para el ángulo de incidencia en términos de cantidades fácilmente medibles en el espectrómetro. Mida las posiciones de la línea verde del espectro de mercurio en diferentes órdenes de difracción para calcular el ángulo de incidencia y la longitud de onda de esta línea del espectro de mercurio.

- (iv) Cambie la lámpara de mercurio por la lámpara de sodio para medir la separación de las dos líneas amarillas de la lámpara de sodio.
- (v) Investigue espectros de absorción de colorantes de comida.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Experimento 13

Resolución

Objetivos

- Entender el límite de resolución.
- Determinar la validez del límite de resolución de Rayleigh.

Introducción

Al utilizar cualquier instrumento óptico (incluyendo el ojo) para formar la imagen de un objeto puntual, esta imagen tiene la forma del patrón de difracción de la abertura (o el diafragma) del instrumento. Casi siempre, la abertura de los instrumentos ópticos es circular, y la imagen de un objeto puntual será igual al patrón de Airy de difracción en una abertura circular (ver la figura 13.1) (Hecht, 2000; Jenkins, 1950).

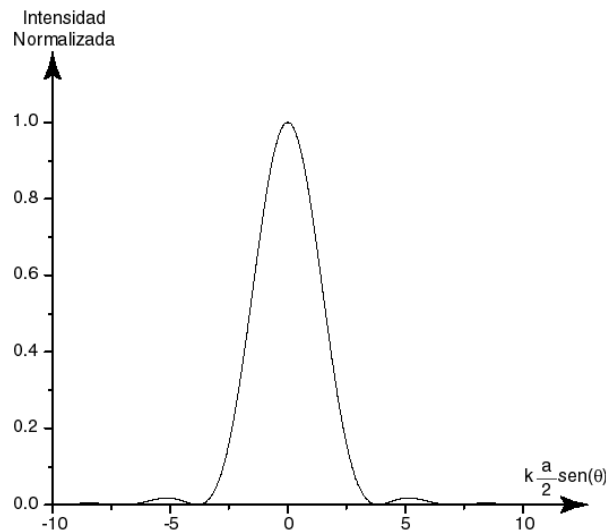


Figura 13.1: El patrón de Airy. El parámetro a es el diámetro de la abertura circular.

Ahora, ¿qué pasa cuando tenemos dos objetos puntuales (e.g. dos estrellas) en el campo de vista al mismo tiempo? En este caso tenemos que sumar las dos intensidades de los dos objetos (suponemos que son objetos de los cuales la luz es incoherente). La figura 13.2 muestra que pasa para diferentes separaciones de los dos objetos.

En la figura 13.2 se puede ver que para la separación entre los puntos de 3.18π las dos imágenes se pueden ver separadas fácilmente, o se dice que los objetos son resueltos, mientras que, para el último caso de la separación 0.32π aparentemente sólo hay un objeto en el campo de vista, y no hay resolución de los dos objetos. El caso intermedio es el caso del criterio de Rayleigh para el límite de resolución (Hecht, 2000; Jenkins, 1950). Esta separación de 1.22π , corresponde al caso cuando el primer mínimo de uno de los patrones de Airy está en la posición del máximo del otro patrón. Esta separación se toma (por convención) como el límite entre los casos de resolución de dos objetos y los casos de no resolución de dos objetos.

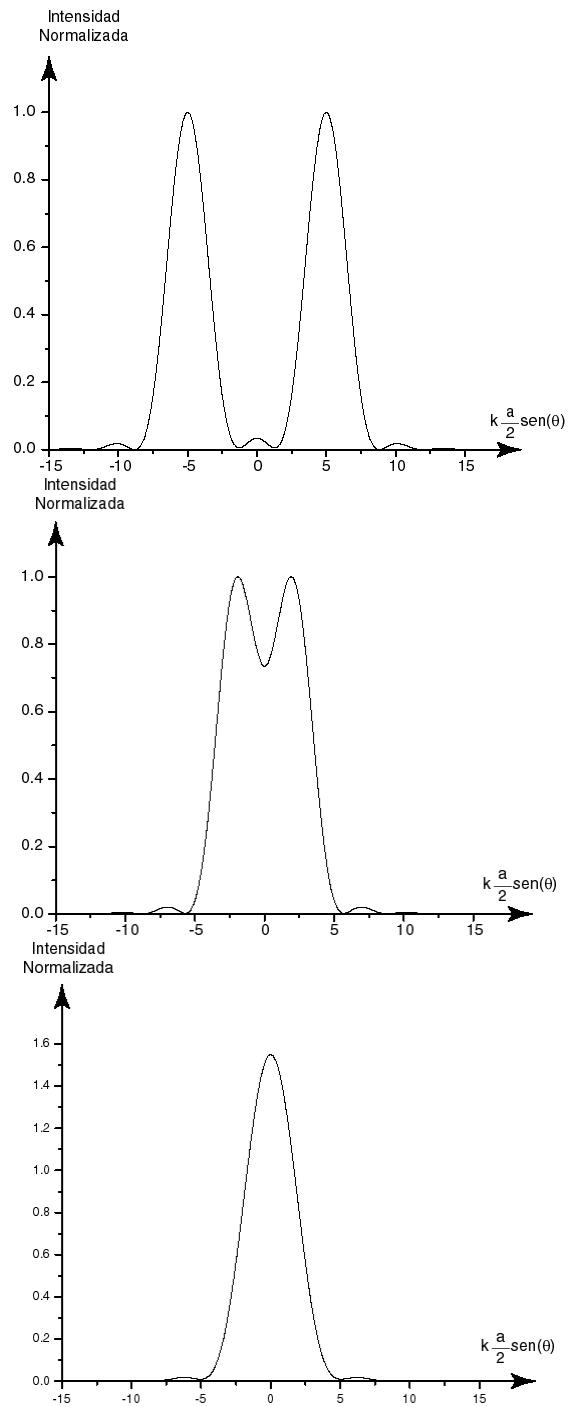


Figura 12.2: La imagen de dos objetos puntuales separados por $\Delta\theta$ con

$$k \frac{a}{2} \text{sen}(\Delta\theta) = : \text{arriba, } 3.18\pi; \text{ centro, } 1.22\pi; \text{ y abajo, } 0.32\pi$$

Tenemos $k \frac{a}{2} \sin(\Delta\theta) = 1.22\pi$, en donde a es el diámetro de la abertura del sistema óptico, entonces, suponiendo ángulos pequeños, podemos escribir

$$\Delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{a} \quad (13.1)$$

en donde $\Delta\theta$ es la separación angular entre los dos objetos (ver la figura 13.3).

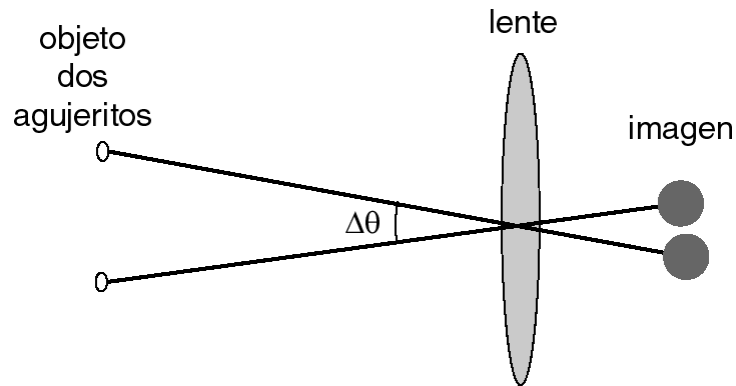


Figura13.3: La geometría para el experimento de resolución

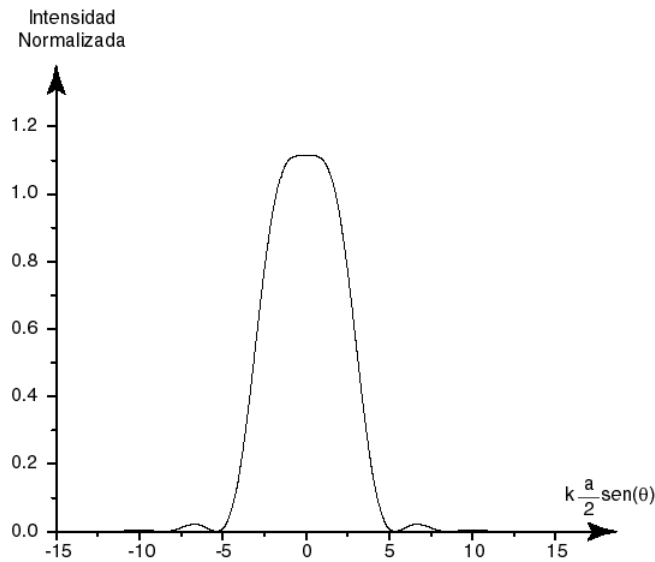


Figura 13.4: La imagen de dos objetos en el límite del criterio de Sparrowe $\Delta\theta = 0.95 \frac{\lambda}{a}$. La intensidad en el centro del patrón es plano.

Procedimiento experimental

1. Utilice una lámpara de luz blanca con filtros de color adecuados para iluminar un par de agujeritos en un papel aluminio o una rendija doble. Con el ojo observe a qué distancia los agujeritos no se pueden resolver para diferentes colores de la luz. Verifique si el comportamiento está de acuerdo con la ecuación (13.1) y compare los resultados para diferentes personas.
2. Ahora observe los dos agujeritos a través de un telescopio y utilice un diafragma para ajustar la abertura del telescopio. Mida el diámetro del diafragma necesario para perder la resolución de los dos agujeritos para diferentes colores de la iluminación. Grafique λ contra a , el diámetro del diafragma para la posición de perder la resolución, y compare con la ecuación (13.1). ¿Sus mediciones están de acuerdo con la teoría?
3. El criterio de Sparrowe (Hecht, 2000) está basado en la separación para que el mínimo entre los dos objetos desaparezca (ver la figura 13.4), y da como el límite de resolución: $\Delta\theta = 0.95 \frac{\lambda}{a}$
¿Este criterio está mejor o peor que el criterio de Rayleigh basado en tus resultados?

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Experimento 14

Filtraje espacial

Objetivos

- Entender el concepto de frecuencia espacial y el arreglo de $4f$
- Observar cualitativamente el efecto de diferentes filtros sobre la imagen

Introducción

El patrón de difracción de Fraunhofer (campo lejano) de una rejilla sinusoidal (i.e. una rejilla que tiene una función de transmitancia como $\sin(x)$ en donde x es una distancia en la abertura de la rejilla) consiste en 3 picos de intensidad, uno central y dos más, uno a cada lado del central (ver la figura 14.1). La separación entre el pico central y los picos secundarios depende del periodo del seno en la rejilla: si el periodo es más grande, los picos están más cerca y viceversa.

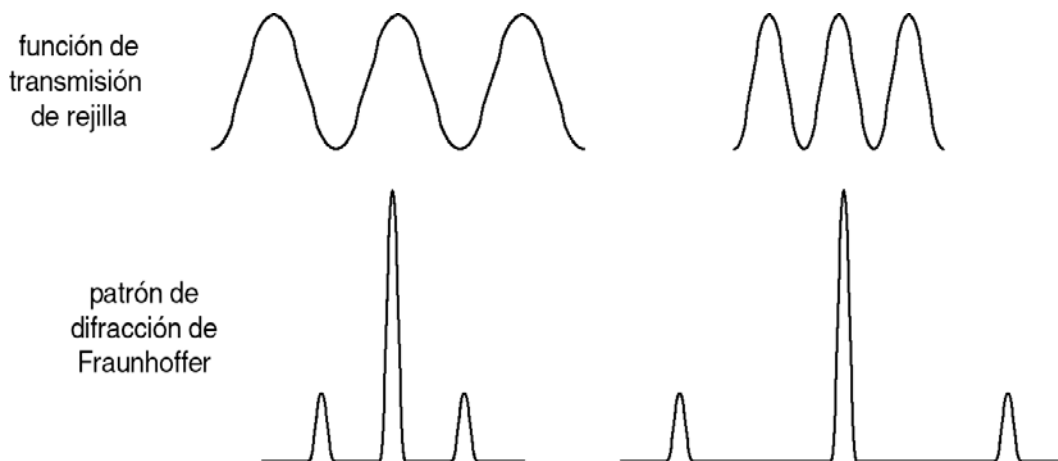


Figura 14.1 Difracción por una rejilla sinusoidal

Ahora necesitamos el teorema de Fourier, que dice que cualquier función se puede formar como una combinación de senos (y cosenos) de frecuencias espaciales apropiadas. La frecuencia espacial es simplemente el inverso de la distancia entre los picos de la función de seno. Con este principio se puede decir que el patrón de difracción de Fraunhofer de cualquier función está dado por la suma de los patrones de difracción de los senos que se necesitan para formar la misma función, i.e. el patrón de difracción de Fraunhofer de la función está formado por una serie de puntos cuya separación del punto central depende de la frecuencia espacial que contiene la función. Puntos cercanos al punto central del patrón de difracción representan frecuencias espaciales pequeñas (senos con periodos muy grandes) y puntos más alejados del punto central representan frecuencias espaciales grandes (senos con periodos más pequeños).

La figura 14.2 muestra el arreglo para obtener la transformada de Fourier de un objeto. Se puede mostrar que la distribución de amplitud en el plano focal de la lente es proporcional a (Hecht, 2000; Jenkins, 1950, Goodman, 1996):

$$U(x_i) \propto \int U(x_o) \exp\left(-i2\pi x_o \frac{x_i}{\lambda f}\right) dx_o \quad (14.1)$$

que es la transformada de Fourier de la función del objeto $U(x_o)$, evaluada en las frecuencias $x_i/\lambda f$.

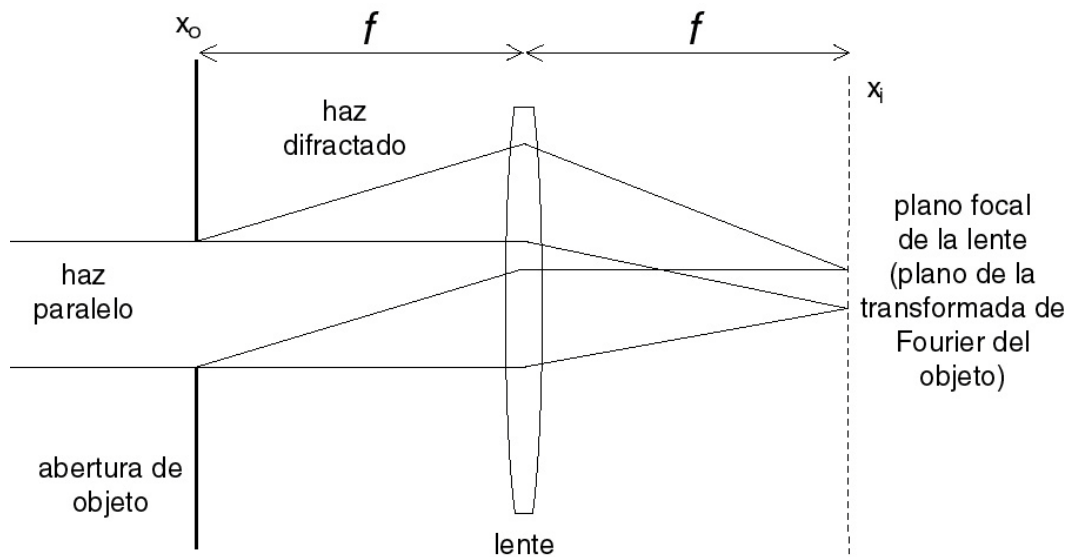


Figura 14.2: Arreglo experimental para obtener la transformada de Fourier de un objeto

En la figura 14.3 se muestra un arreglo experimental para formar una imagen de un objeto pero con una etapa intermedia que forma la transformada de Fourier del objeto.

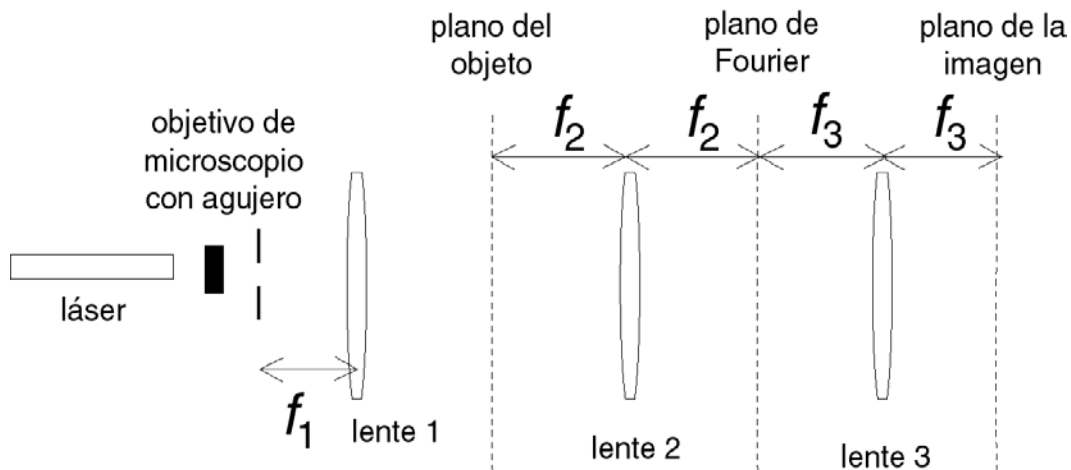


Figura 14.3: Arreglo experimental para filtraje espacial

La lente 1 transforma el frente de onda incidente en un frente de onda plano, el cual incide en el objeto. La lente 2 forma el patrón de Fraunhofer (la transformada de Fourier) del objeto en el plano de Fourier, y la lente 3 forma la imagen (invertida) del objeto.

Procedimiento experimental

- (i) Monte el arreglo mostrado en la figura 14.3 cuidadosamente. Utilice lentes dobles para reducir las aberraciones. Coloque una rejilla de Ronchi en el plano del objeto y observe el plano de Fourier y el plano de la imagen. Dibuje los patrones en estos dos planos.
- (ii) Ahora coloque un acetato con una marca de pluma para bloquear diferentes partes del patrón de Fourier y observe en el plano de la imagen. Dibuje los patrones en los dos planos y trate de explicar sus observaciones usando las ideas en la introducción de estas notas.
- (iii) Coloque una rejilla cuadrada (e.g. formada con dos rejillas de Ronchi cruzadas) en el plano del objeto, y observe y dibuje los patrones de luz en los planos de Fourier y de la imagen. Coloque un diafragma en el plano de Fourier. Dibuje y explique qué sucede cuando se cierra el diafragma para dejar pasar sólo el punto central en el plano de Fourier.
- (iv) Coloque una rendija de anchura variable en lugar del diafragma y ciérrela para dejar pasar sólo el máximo central y la serie de otros puntos de luz alineada con él. Gire la rendija alrededor del punto central. Observe, dibuje y explique lo que sucede.
- (v) Utilice un objeto más complicado, e.g. la forma de una letra dibujada en un pedazo de vidrio, y repita los pasos (iii) y (iv) para este objeto. Dibuje y explique sus observaciones.

Bibliografía

Hecht E.J., (2000), Óptica, Addison Wesley, Madrid

Jenkins F.A., White H.E., (1950) Fundamentals of Optics, McGraw-Hill, Nueva York

Goodman J.W., (1996), Introduction to Fourier Optics, Second Edition, McGraw-Hill, Nueva York

Apéndice 1

El promedio y el error en el promedio

En este Apéndice se incluye la deducción de las ecuaciones presentadas en el capítulo 1.

La probabilidad de obtener la combinación de valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, está dada por la ecuación (3) en el capítulo 1 (Baird, 1991; Taylor, 1997; Meiners, 1969):

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, \mu', \sigma) (dx)^N = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) (dx)^N \quad (A1.1)$$

en donde μ' es la estimación del promedio de nuestros valores y suponemos que la desviación en nuestros valores es σ . Ahora queremos maximizar esta probabilidad con respecto a nuestra variable que es μ' , i.e. queremos

$$\frac{dP(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, \mu', \sigma)}{d\mu'} = 0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \frac{d}{d\mu'} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (A1.2)$$

$$0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right) \right) \quad (A1.3)$$

Podemos separar esta ecuación en tres partes:

(i) $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N = 0$ cuando $\sigma = \infty$. Esta condición no tiene sentido práctico porque cuando la desviación es infinita el promedio no está definido.

(ii) $\exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) = 0$ cuando $\sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 = \infty$, i.e. cuando $\sigma = 0$, que no es muy

útil, porque si la desviación es cero, todas las mediciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ tendrán el mismo valor, que es el promedio; ó $\sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2 = \infty$ y si el número de mediciones y los valores medidos son finitos, significa que $\mu' = \infty$, otro resultado que no tiene significado físico.

(iii) $\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right) = 0$ cuando $\sigma = \infty$, que ya vimos en la parte (i) o $\sum_{i=1}^N (x_i - \mu') = 0$. Se puede

simplificar esta ecuación: $\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \mu' = \sum_{i=1}^N x_i - N\mu' = 0$ o $\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

i.e. de las tres partes solo la última tiene sentido, entonces la mejor estimación del promedio está dada por

$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A1.4})$$

que es la ecuación (4) del capítulo 1.

Ahora queremos calcular la desviación en este promedio con respecto al promedio obtenido con un número infinito de mediciones, i.e. con respecto al valor “correcto”. Aquí hay varias diferentes desviaciones que necesitamos en esta derivación:

- (i) la desviación en el promedio, $\sigma_{\mu'}$, que está dada por:

$$\sigma_{\mu'} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_{x_i}^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{A1.5})$$

en donde σ es la desviación de cada una de las mediciones con respecto al promedio obtenido con un número infinito de mediciones (igual para todas las mediciones).

- (ii) la desviación de cada una de las mediciones con respecto al promedio obtenido con un número infinito de mediciones, σ , que está dada por:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{\infty})^2 \quad (\text{A1.6})$$

en donde $\bar{x}_{\infty}$ es el promedio obtenido con un número infinito de mediciones. Debido a que $\bar{x}_{\infty}$ es una constante con respecto a i , se puede simplificar esta ecuación:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \bar{x}_{\infty}^2 - 2\bar{x}_{\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \bar{x}_{\infty}^2 - 2\bar{x}_{\infty} \mu' \quad (\text{A1.7})$$

en donde μ' es la mejor estimación del promedio, dada por la ecuación (A1.4) arriba. La desviación s es la desviación que queremos calcular.

- (iii) la desviación de cada una de las mediciones con respecto a la mejor estimación del promedio, σ' , que está dada por:

$$\sigma'^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2 \quad (\text{A1.8})$$

Se puede simplificar esta ecuación:

$$\begin{aligned}\sigma'^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \mu'^2 - 2\mu' \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \mu'^2 - 2\mu'^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \mu'^2\end{aligned}\quad (\text{A1.9})$$

Ahora si restamos la ecuación (A1.9) de la ecuación (A1.7):

$$\sigma^2 - \sigma'^2 = \bar{x}_\infty^2 - 2\bar{x}_\infty \mu' + \mu'^2 = (\bar{x}_\infty - \mu')^2 \quad (\text{A1.10})$$

este último término, a la derecha, se puede estimar como el cuadrado de la desviación del promedio estimado con N mediciones con respecto a la desviación del promedio con un número infinito de mediciones, i.e. $\sigma_{\mu'}^2$. Sustituyendo la ecuación (A1.5) en la ecuación (A1.10) se obtiene:

$$\frac{\sigma^2}{N} = \sigma^2 - \sigma'^2 \quad (\text{A1.11})$$

que se puede escribir como:

$$\sigma = \sigma' \sqrt{\frac{N}{N-1}} \quad (\text{A1.12})$$

Sustituyendo la ecuación (A1.8) en la ecuación (A1.12) obtenemos

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2} \quad (\text{A1.13})$$

que es la ecuación (5) del capítulo 1.

Bibliografía

Baird D.C, (1991), Experimentación. Una Introducción a la Teoría de Mediciones y al Diseño Experimental, Prentice-Hall Hispanoamericano, México

Meiners H.F., Eppenstein W., Moore K.H., (1969), Laboratory Physics, J. Wiley and Sons, New York

Taylor J.R., (1997), An Introduction to Error Analysis, 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, California

Apéndice 2

La matriz de información

En este apéndice se presenta una forma alternativa de deducir las ecuaciones que se utilizan para el análisis de errores utilizando la matriz de la información (Cooper, 1992). No es común presentar este método a nivel de licenciatura, pero creo que da otro punto de vista sobre la deducción de las ecuaciones y lo incluyo aquí para los estudiantes que estén interesados en el tema.

La matriz de información

La probabilidad de obtener la combinación de valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$, está dada por la ecuación (3) en el capítulo 1 (Baird, 1991; Taylor, 1997; Meiners, 1969):

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, \mu', \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (\text{A2.1})$$

en donde μ' es la estimación del promedio de nuestros valores y suponemos que la desviación en nuestros valores es σ .

Vamos a ver cómo calcular los promedios y sus errores en general antes de aplicar el método a los casos que vienen en la Introducción.

Primeramente definimos otra función (Cooper, 1992):

$$W(y_i) = \ln(P(y_i)) \quad (\text{A2.2})$$

que simplifica las matemáticas después. De la ecuación (A2.1) podemos escribir

$$W(x_i) = N \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \quad (\text{A2.3})$$

Por la forma de la función $\ln(\)$, el máximo en $P(y_i)$ coincide con el máximo de $W(y_i)$, entonces se puede definir el valor más probable de μ' con la función

$$\frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'} = 0 \quad (\text{A2.4})$$

que será la definición de la mejor estimación de μ' . Ahora, si hay más que un parámetro (e.g. en el caso de ajuste de una línea recta), tendremos que calcular los mejores valores de los parámetros $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots, \mu'_m$, i.e. tenemos m desconocidos, entonces necesitamos m ecuaciones, que vienen de

$$\frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'_1} = \frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'_2} = \frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'_3} = \dots = \frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'_m} = 0 \quad (\text{A2.5})$$

Ahora, necesitamos calcular los errores en estas estimaciones de los parámetros. Primeramente, ponemos los valores medidos en una serie de mediciones:

$$\{\mu\} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n) \quad (\text{A2.6})$$

También, tenemos los valores más probables:

$$\{\mu'\} = (\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots, \mu'_n) \quad (\text{A2.7})$$

Podemos escribir el valor de la función $W(\{\mu\})$ como la función de Taylor alrededor del punto $W(\{\mu'\})$:

$$W(\{\mu\}) = W(\{\mu'\}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial W}{\partial \mu_j} \bigg|_{\{\mu'\}} (\mu_j - \mu'_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 W}{\partial \mu_j \partial \mu_k} \bigg|_{\{\mu'\}} (\mu_j - \mu'_j)(\mu_k - \mu'_k) + \dots \quad (\text{A2.8})$$

en donde la notación $\sum_{j=1}^m \frac{\partial W}{\partial \mu_j} \bigg|_{\{\mu'\}}$ significa el valor de la derivada calculada en los valores promedios

de los parámetros. El segundo término al lado derecho de la ecuación (A2.8) es igual a cero, porque el derivado tiene que ser igual a cero calculado en el valor más probable (ver la ecuación (A2.5)). Entonces, la ecuación (A2.8) se reduce a

$$W(\{\mu\}) = W(\{\mu'\}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 W}{\partial \mu_j \partial \mu_k} \bigg|_{\{\mu'\}} (\mu_j - \mu'_j)(\mu_k - \mu'_k) + \dots \quad (\text{A2.9})$$

y la probabilidad de obtener los valores es

$$P(\{\mu\}) = \exp(W(\{\mu\})) = \exp(W(\{\mu'\})) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m H_{jk} \delta \mu_j \delta \mu_k\right) \quad (\text{A2.10})$$

en donde H_{jk} es una matriz de $m \times m$ con los componentes dados por

$$H_{jk} = - \frac{\partial^2 W}{\partial \mu_j \partial \mu_k} \bigg|_{\{\mu'\}} \quad (\text{A2.11})$$

y conocido como la **matriz de información**, y

$$\delta \mu_j = (\mu_j - \mu'_j) \quad (\text{A2.12})$$

Para el caso en la ecuación (A2.1) la matriz $\mathbf{H}$ sólo tiene 1 elemento, que es la segunda derivada con respecto a la mejor estimación del promedio.

Escribimos:

$$\beta = (\delta \mu_1, \delta \mu_2, \delta \mu_3, \dots, \delta \mu_m) \quad (\text{A2.13})$$

y la transpuesta de este vector es

$$\beta^T = \begin{pmatrix} \delta \mu_1 \\ \delta \mu_2 \\ \delta \mu_3 \\ \vdots \\ \delta \mu_m \end{pmatrix} \quad (\text{A2.14})$$

y

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1m} \\ H_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & \dots & \dots & H_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.15})$$

Se puede escribir la ecuación (A2.10) como

$$P(\{\mu\}) = C \exp\left(-\frac{1}{2} \beta \mathbf{H} \beta^T\right) \quad (\text{A2.16})$$

Ahora vamos a cambiar de las variables β a las variables γ a través de una rotación de los coordenados, esto es (tomando en cuenta ecuaciones (A2.13) y (A2.14)),

$$\gamma^T = U \beta^T \text{ o } \gamma = \beta U^T \quad (\text{A2.17})$$

(se puede mostrar que las dos definiciones son equivalentes) en donde U es la matriz de rotación. La matriz U , que es ortogonal, tiene la propiedad que

$$U^{-1} = U^T \quad (\text{A2.18})$$

Así se puede escribir

$$\begin{aligned} P(\{\mu\}) &= C \exp\left(-\frac{1}{2} \beta U^{-1} U \mathbf{H} U^{-1} U \beta^T\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2} \beta U^T U \mathbf{H} U^T U \beta^T\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma U \mathbf{H} U^T \gamma^T\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma \mathbf{h} \gamma^T\right) \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

en donde se ha definido $\mathbf{h} = U \mathbf{H} U^T$.

Lo que queremos es $\langle \beta \beta^T \rangle_{jk} = \langle (a_j - a'_j)(a_k - a'_k) \rangle$ que, para los valores $j = k$ son las varianzas de los parámetros, y eso es lo que tomamos como el error en estos parámetros. La notación $\langle \rangle$ significa promedio sobre las diferentes mediciones de los parámetros.

Tenemos de la ecuación (A2.17):

$$\langle \beta \beta^T \rangle = U^T \langle \gamma^T \gamma \rangle U \quad (\text{A2.20})$$

Suponemos que U es tal que γ es diagonal. Entonces $\gamma^T \gamma$ da las varianzas de los parámetros nuevos en los elementos diagonales, y de la ecuación (A2.19) la varianza es h_{ii}^{-1} (el valor de γ para el cual $P(\{\mu\})$ tiene el valor de $\exp(-1/2)$), i.e.

$$\langle \beta \beta^T \rangle = U^T \langle \gamma^T \gamma \rangle U = U^T h^{-1} U \quad (\text{A2.21})$$

pero $U^T h^{-1} U = (U^T h U)^{-1} = \mathbf{H}^{-1}$ (nótese que se puede escribir $(U^T h^{-1} U)(U^T h U) = (U^T h^{-1}) U U^T (h U) = (U^T h^{-1})(h U) = (U^T) h^{-1} h (U) = U^T U = 1$), i.e las varianzas de los parámetros son

$$\langle \beta \beta^T \rangle = \mathbf{H}^{-1} \quad (\text{A2.22})$$

La matriz $\mathbf{H}^{-1}$ se conoce como **la matriz de error**. En la diagonal, ésta matriz tiene las varianzas de los parámetros del ajuste, y en las otras posiciones las correlaciones entre los parámetros.

El procedimiento para encontrar las varianzas de los parámetros es el siguiente:

1. Encontrar la función $W(\cdot)$, dada por la ecuación (A2.2).
2. Encontrar la matriz $\mathbf{H}$ con las dobles derivadas parciales descritas en la ecuación (A2.11).
3. Encontrar el inverso de esta matriz $\mathbf{H}^{-1}$.
4. La varianza (el error) en el parámetro a_j es $\sqrt{H_{jj}^{-1}}$

Se puede verificar que este esquema funciona para un caso sencillo, utilizando la ecuación (A2.3). En este caso, sólo hay un parámetro, μ' , y la matriz $\mathbf{H}$ es

$$H_{11} = -\frac{\partial^2 W}{\partial \mu'^2} \Big|_{\{\mu'\}} = \frac{1}{\sigma^2}$$

y el inverso es

$$(H_{11})^{-1} = \sigma^2$$

para que

$$\sigma = \sqrt{(H_{11})^{-1}}$$

igual que el procedimiento descrito arriba.

La mejor estimación del promedio

En este caso tenemos

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, \mu', \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (\text{A2.23})$$

en donde μ' es la estimación del promedio de nuestros valores y suponemos que la desviación en nuestros valores es σ . El valor de la función $W(\cdot)$ es, entonces (Cooper, 1992)

$$W(x_i) = N \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right)^2 \quad (\text{A2.24})$$

Ahora queremos maximizar esta función con respecto a nuestra variable que es μ' , i.e. queremos

$$\frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma} \right) = 0 \quad (\text{A2.25})$$

que se satisface cuando $\sigma = \infty$, que no tiene sentido físico, o cuando $\sum_{i=1}^N (x_i - \mu') = 0$. Se puede

simplificar esta última condición: $\sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \mu' = \sum_{i=1}^N x_i - N\mu' = 0$ o $\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.

i.e. la mejor estimación del promedio está dada por

$$\mu' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{A2.26})$$

que es la ecuación (4) del capítulo 1.

Para calcular el error necesitamos

$$\frac{\partial^2 W(x_i)}{\partial \mu'^2} = \frac{N}{\sigma^2} \quad (\text{A2.27})$$

que es la matriz $\mathbf{H}$. El inverso de esta matriz (que tiene un solo elemento) es

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{A2.28})$$

Entonces

$$\sigma_{\mu'}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{A2.29})$$

En el caso en que no conocemos el error en cada medición, por convención, la mejor estimación de σ es:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2} \quad (\text{A2.30})$$

que es una medida de la variación de las mediciones alrededor del valor promedio, y en donde el factor $\frac{1}{\sqrt{N-1}}$ aparece porque tenemos N puntos y 1 parámetro. Entonces

$$\sigma_{\mu'} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu')^2} \quad (\text{A2.32})$$

Cuando conocemos el error en cada medición, y es lo mismo para todas las mediciones, el error en el promedio está dado por la ecuación (A2.29).

La mejor estimación del promedio cuando se conocen los errores de las mediciones

En este caso tenemos (Cooper, 1992)

$$W(x_i) = N \ln \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i} \right)^2 \quad (\text{A2.33})$$

y

$$\frac{\partial W(x_i)}{\partial \mu'} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu'}{\sigma_i^2} \right) = 0 \quad (\text{A2.34})$$

Esta última ecuación se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\mu'}{\sigma_i^2} = 0 \quad (\text{A2.35})$$

o

$$\mu' = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (\text{A2.36})$$

que es la mejor estimación del promedio en este caso. El error en este caso se calcula con:

$$\frac{\partial^2 W(x_i)}{\partial \mu'^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (\text{A2.37})$$

Por la cual

$$\sigma_{\mu'} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (\text{A2.38})$$

Aquí, a diferencia del caso cuando no se conocen los errores de las mediciones, no se tiene que estimar el error en cada medición, por eso este resultado no es de la misma forma que la ecuación (A2.32), pero se puede verificar que la ecuación (A2.38) es lo mismo que la ecuación (A2.29) cuando los errores de cada medición son todos iguales.

El mejor ajuste a una línea recta

En este caso tenemos (Cooper, 1992)

$$P(y_i) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - (mx_i + c)}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (\text{A2.39})$$

para ajustar nuestros datos (x_i, y_i) a la línea $y_i = mx_i + c$ con las mejores estimaciones de los parámetros m y c lo que queremos encontrar. En este caso, la pendiente y la intersección están correlacionadas. Esto se puede ver en la figura A2.1.

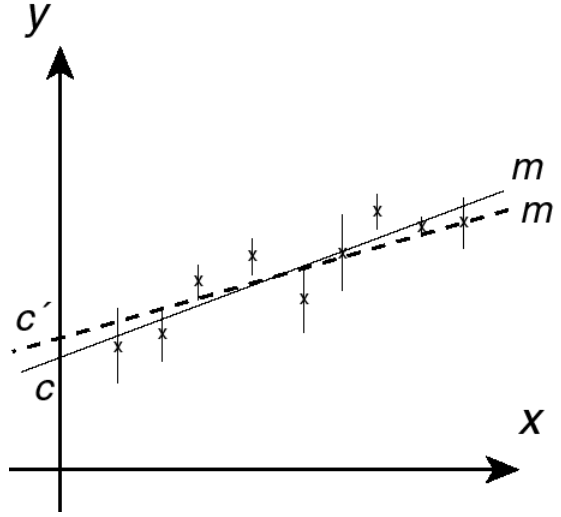


Figura A2.1: Un cambio en la pendiente de $m \rightarrow m'$ causa un cambio en el punto de intersección $c \rightarrow c'$, i.e. hay una correlación entre la pendiente y la intersección.

Tenemos

$$W(y_i) = N \ln \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - (mx_i + c)}{\sigma} \right)^2 \quad (\text{A2.40})$$

y los valores de los promedios de m y c se calculan con

$$\frac{\partial}{\partial m} (W(y_i)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} (W(y_i)) = 0 \quad (\text{A2.41})$$

Realizando las derivadas nos da las dos ecuaciones simultáneas:

$$\sum_{i=1}^N y_i = m \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) + Nc \quad (\text{A2.42})$$

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = m \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) + c \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \quad (\text{A2.43})$$

Resolviendo estas dos ecuaciones se obtienen las mejores estimaciones para los coeficientes m y c :

$$m = \frac{N \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (\text{A2.44})$$

$$c = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (\text{A2.45})$$

Para calcular los errores en estos parámetros, los componentes de la matriz **H** son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial m^2} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i^2}{\sigma^2} \\
 H_{22} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial c^2} = \frac{N}{\sigma^2} \\
 H_{12} &= H_{21} = -\frac{\partial^2 W}{\partial m \partial c} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i}{\sigma^2}
 \end{aligned} \tag{A2.46}$$

El hecho de que los términos H_{12} y H_{21} no son iguales a cero es indicación de la correlación entre los dos parámetros. Ahora se requiere el inverso de la matriz **H**

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{N \sum_{i=1}^N x_i^2}{\sigma^2} & \frac{N \sum_{i=1}^N x_i}{\sigma^2} \\ \frac{N \sum_{i=1}^N x_i}{\sigma^2} & \frac{N}{\sigma^2} \end{pmatrix} \tag{A2.47}$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)} \begin{pmatrix} 1 & -\sum_{i=1}^N x_i \\ -\sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \end{pmatrix} \tag{A2.48}$$

Aquí, el error en los parámetros está dado por los componentes diagonales de esta matriz:

$$\begin{aligned}
 \sigma_m^2 &= \frac{\sigma^2}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)} \\
 \sigma_c^2 &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{A2.49}$$

Como aquí no conocemos la varianza en las posiciones de los valores y_i , lo podemos estimar con la distribución de los puntos alrededor de la línea de mejor ajuste:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + c))^2 \tag{A2.50}$$

Aquí el factor $(N-2)$ viene en lugar del factor de $(N-1)$ en la ecuación (A2.30) y aparece porque aquí tenemos 2 parámetros en lugar de 1, que es el caso de la ecuación (A2.30). Sustituyendo en las ecuaciones (A2.49) y (A2.50):

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{N(N-2)} \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + c))^2}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)} \right) \quad (A2.51)$$

$$\sigma_c^2 = \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)}{N(N-2)} \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - (mx_i + c))^2}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)} \right)$$

que son las ecuaciones (27) y (28) presentadas en el capítulo 1.

El mejor ajuste a una línea recta cuando se conocen los errores en los valores y_i

En este caso suponemos que se conocen los valores x_i precisamente, i.e. sin error, y que los errores en y_i son σ_i . Ahora la probabilidad de obtener unos valores y_i es (Cooper, 1992)

$$P(y_i) = \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - (mx_i + c)}{\sigma_i} \right)^2 \right) \quad (A2.52)$$

y

$$W(y_i) = \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - (mx_i + c)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (A2.53)$$

Ahora, otra vez, tenemos que obtener

$$\frac{\partial}{\partial m} (W(y_i)) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} (W(y_i)) = 0 \quad (A2.54)$$

Realizando las derivadas, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2} = m \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) + c \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (A2.55)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} = m \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) + c \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (A2.56)$$

Se pueden resolver estas dos ecuaciones para obtener

$$m = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) \right] \quad (\text{A2.57})$$

$$c = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2} \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right) \right] \quad (\text{A2.58})$$

Estas son las ecuaciones (29) y (30) que vienen en el capítulo 1. Los errores en estos parámetros se calculan con:

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial m^2} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ H_{22} &= -\frac{\partial^2 W}{\partial c^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \\ H_{12} &= H_{21} = -\frac{\partial^2 W}{\partial m \partial c} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (\text{A2.59})$$

para que

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.60})$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{\left(\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2\right)} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} & -\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ -\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.61})$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2\right)} \\ \sigma_c^2 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2\right)} \end{aligned} \quad (\text{A2.62})$$

que son las ecuaciones (31) y (32) que vienen en el capítulo 1.

Bibliografía

Baird D.C, (1991), Experimentación. Una Introducción a la Teoría de Mediciones y al Diseño Experimental, Prentice-Hall Hispanoamericano, México

Cooper W.A., Schlatter T.W., Gal-Chen T., Parsons D.B., (1992), The analysis of observations with applications in atmospheric science, The 1992 ASP Summer Colloquium: Observations in Atmospheric Science. Part 1, www.asp.ucar.edu/colloquium/1992/notes/part1.

Meiners H.F., Eppenstein W., Moore K.H., (1969), Laboratory Physics, J. Wiley and Sons, New York

Taylor J.R., (1997), An Introduction to Error Analysis, 2nd Edition, University Science Books, Sausalito, California