



CCADET

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Notas de Curso (NC-INME-2016-465)

Introducción a la Instrumentación y Señales

III. Características Estáticas de Sistemas e Instrumentos

Jorge Alberto Márquez Flores

Marzo 2018, CCADET-UNAM

Resumen:

Estas notas, recopiladas desde 2001, constituyen el Capítulo III del Temario del Curso del Posgrado en Física (UNAM): *Introducción a la Instrumentación y Señales*, materia obligatoria en el primer semestre de la maestría de física médica y opcional en el posgrado de física y en el posgrado de ingeniería (opciones Biomédica o Instrumentación). El curso está orientado a estudiantes con licenciatura en Física, ingenieros biomédicos o en instrumentación o bien, profesionistas con formación equivalente: físico-matemáticos, ingeniería eléctrica, o cualquier interesado que haya aprobado los exámenes de admisión a los Posgrados de Ciencias Físicas, o el de Ciencias e Ingeniería en Computación o bien el de Ingeniería Eléctrica. En este capítulo se examinan conceptos y definiciones sobre características estáticas de instrumentos y sistemas, y "estático" significa que la o las entradas presentan variaciones muy lentas, o son constantes (señales "DC"), en una o más dimensiones y elementos para su estudio cuantitativo, con énfasis en fundamentos, criterios de aplicación y se exponen conceptos en instrumentación y aplicaciones científicas y médicas. El contenido es prerequisite del capítulo IV de *Características Dinámicas* (notas aparte). Este material se complementa con prácticas de laboratorio (notas aparte) y es prerequisite de los capítulos posteriores. No es necesario, aunque sí conveniente haber estudiado el Capítulo II: *Información, Datos, Funciones, Señales e Imágenes* (notas aparte).

- **Nota:** Las secciones, notas y ejercicios precedidos por "♣" pueden omitirse en la 1ª o 2ª lecturas. Aquellos precedidos por "►" son importantes y deben recibir especial atención.

Nota: Si considera que existe ambigüedad en un ejemplo, nota, definición o ejercicio, antes de preguntar al profesor, intente establecer usted mismo las interpretaciones posibles, información faltante o aclaratoria y las respuestas correspondientes.

Características Estáticas de Sistemas e Instrumentos

Indice

<u>Definición de Características Estáticas</u>	4
<u>(1) Entrada(s) y Salida(s)</u>	4
<u>(2) Intervalo de variación</u>	6
<u>(3) Intervalo dinámico</u>	7
<u>(4) Intervalo de medición</u>	8
<u>(5) Offset</u>	9
<u>(6) Ganancia</u>	9
<u>(7) Contraste</u>	11
<u>(8) Intervalo(s) de operación</u>	12
<u>(9) Intervalo lineal</u>	12
▶ <u>(10) Función de transferencia</u>	13
<u>(11) Linealidad</u>	13
<u>(12) “Sensitividad” y Sensibilidad</u>	13
<u>(13) Deriva</u>	14
▶ <u>(14) Precisión</u>	16
▶ <u>(15) Exactitud o certeza</u>	16
<u>(16) Repetitividad (o repetibilidad) y reproducibilidad</u>	21
<u>(17) Estabilidad y equilibrio</u>	22
<u>(18) Robustez</u>	24
<u>(19) Confiabilidad</u>	25
<u>(20) Resolución (de un instrumento, sensor o actuador)</u>	25
▶ <u>(21) Resolución (en señales o imágenes)</u>	28
<u>(22) Resolución de escala</u>	29
♣ <u>(23) Profundidad de Campo</u>	29

<u>(24) Sistema Lineal</u>	29
▶ <u>(25) PSF (<i>Point Spread Function</i>)</u>	30
<u>(26) Sistema Lineal e Invariante a Corrimiento</u>	31
▶ <u>(27) Histéresis</u>	33
<u>Características Estáticas Locales</u>	38
 <u>ANEXOS</u>	 39
<u>(A) Entrada(s)</u>	39
<u>(A bis) Salida(s)</u>	39
<u>(B) Componentes o Dispositivos en Cascada</u>	41
<u>(C) LSF (<i>Line Spread Function</i>) y ESF (<i>Edge Spread Function</i>)</u>	43
<u>(D) Función de Transferencia Optica en 2D</u>	47
 <u>Bibliografía Recomendada</u>	 49

Definición de Características Estáticas

Las **Características Estáticas de un dispositivo, sistema o instrumento** describen el desempeño, funcionamiento o comportamiento **para señales de entrada aproximadamente constantes en el tiempo** (“DC”, o de muy baja frecuencia: cambios lentos respecto a los tiempos de respuesta). Son propiedades y características tales como: *intervalo de medición, intervalo dinámico, sensibilidad, precisión, exactitud, resolución*, etc. Para un intervalo amplio de entradas, exhiben además la calidad de una medición, o proceso, y permiten estimar efectos no-lineales, así como condiciones externas.

La mayoría de las características de un instrumento o de un sistema pueden referirse también al mesurando, a la señal del sensor, o aquella de salida tras procesamiento, conversiones o análisis. Muchas pueden ser también **propiedades intrínsecas de un proceso o método de procesamiento o de análisis**. Con frecuencia constituyen parámetros que pueden ser ajustados, o servir para calibrar el instrumento (medición, generación de señales y en un instrumento musical, su afinación), un procedimiento o bien, estimar ruido o errores de diversos tipos, susceptibles de corrección o compensación, hasta cierto grado. Una advertencia general es que damos aquí definiciones de **términos técnicos**, tal como se usan en instrumentación y ciencias (sobre todo en experimentación); su uso y definición en otros ámbitos puede ser diferente, ambiguo o vago, y muy dependiente del contexto.

- ♣ También estas características se pueden asociar a **comportamientos, protocolos, modelos** y otras entidades abstractas o concretas que no se relacionan necesariamente con instrumentos, pero donde existen nociones equivalentes o análogas a entradas, salidas, estímulos, respuestas, filtrado, etc. La correspondencia puede aparecer como analogía aproximada, pero depende cómo se extiendan las definiciones para adaptarlas a un modelo o problema específico.
- ♣ Existen sensores y sistemas que sólo responden a señales que cambian con el tiempo, o cuando presentan ciertos cambios, eventos o patrón (un pulso corto, un escalón, rampa, cambio de signo, un mínimo, un pico en la 2a. derivada, un tren de N pulsos de cierta duración, etc.). Pueden presentar respuestas diferentes y en instrumentación hay cada día hay más variantes. Para estos casos hay también algunas características estáticas aunque no haya respuesta a entradas constantes.

- (1) **Entrada(s) (inputs) y Salida(s) (outputs)**. No son características estáticas ni dinámicas, pero en el Anexo de [Entradas](#) y [Salidas](#) damos definiciones y detalles que no son indispensables en una primera lectura. Extendemos la noción de entradas y salidas a sistemas en general y aquí sólo mostramos aspectos de la notación utilizada en estas notas.

- ▶ Usaremos $u(\cdot)$ y $x(\cdot)$ para referirnos a una señal genérica de entrada (o **estímulo**, excitación, recepción), con variable dependiente $(\cdot)$, tal como el tiempo t , y usaremos u_n o x_n para referirnos a la n -ésima muestra de dicha señal (en el tiempo $t=n\Delta t$), con $n=1,2,\dots,N$. También, de forma más explícita escribiremos $x_{in}(\cdot)$ o bien $x_{input}(\cdot)$. La dependencia $(\cdot)$ puede ser temporal (t), de algún parámetro (a) o un dominio multidimensional. Según el contexto, tanto "x" como "y" pueden ser señales o coordenadas. Para las características estáticas, como se indicó, consideraremos $u(t) \approx u_{cte}$, constante, y muchas características se examinan para diferentes valores de u_{cte} .
- ▶ Usaremos $v(\cdot)$ y $y(\cdot)$ para una señal genérica de salida (o **respuesta**, emisión, transmisión) y usaremos v_n o bien y_n para referirnos a la n -ésima muestra de dichas señales. En forma explícita, podemos usar $x_{out}(\cdot)$ o $x_{output}(\cdot)$ para la salida dada una entrada $x_{in}(\cdot)$; notar la utilidad de esta notación si las entradas son coordenadas ($x_{in/out}$, $y_{in/out}$). En 2D, sin subíndices, si la entrada es el punto coordinado (x, y) , la salida puede escribirse como (u, v) .
- ♣ Otras notaciones muy usadas: entradas: $(u_x(\cdot), u_y(\cdot))$, salidas: $(v_x(\cdot), v_y(\cdot))$, o bien, en nD , entradas: $(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_m(\cdot))$ y salidas: $(v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_m(\cdot))$.
- ♣ En dominio espacial, en 2D (imágenes o señales bidimensionales), la dependencia la escribiremos por ejemplo como $I_{in}(x, y)$, o $f(u, v)$, etc., y en discreto por ejemplo como $I_{out}(i, j)$, o $I(m, n)$, o I_{mn} . Notar la dificultad de usar varios índices en el último caso (por ejemplo, ¿qué hacer para el cuadrado de la 2a. derivada de la imagen k -ésima?). En dominio de frecuencia espacial, podemos usar $I(\omega_x, \omega_y)$. Es claro que no hay una notación universal y dentro de un mismo problema es a veces necesario alternar notaciones o hasta asignar múltiples significados a algunas variables (poco recomendable, aún si el contexto aclara).

Para entradas y salidas multidimensionales también se emplea notación vectorial; $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y notación matricial: $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{X}^T$, $\mathbf{Y}^T$, $\mathbf{U}^T$, $\mathbf{V}^T$ (vectores columna y renglón, respectivamente); notar la equivalencia con vectores columna:

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Idealmente, la salida debería seguir una relación lineal con la entrada: $v(\cdot) = m u(\cdot) + u_0$, donde la pendiente (ganancia) y la ordenada al origen son constantes. En la práctica, esta relación es aproximada y sólo válida para un intervalo del parámetro $(\cdot)$. Cuando la relación es una función (o transformación, en el caso multidimensional), lineal o inclusive no lineal, de modo que $v(\cdot) = T(u(\cdot))$, entonces T se denomina Función de Transferencia.

Fin§ ► [Indice](#)

(2) **Intervalo de variación** (de entrada o salida): gama, margen, ámbito, recorrido, barrido, alcance, dominio, rango, abanico, escala, extensión, o **conjunto de valores posibles** que puede asumir un mesurando, estímulo o entrada a un sistema o instrumento (señales y datos estructurados). Igualmente para una salida o respuesta y es común especificar un intervalo de medición. Puede también referirse a la variación de un parámetro, o de otras variables (la ganancia, la precisión, etc., ver también intervalo(s) de operación). Si es de la entrada, puede ser estimado por modelos o experimentos previos, pues en principio no se ha medido todavía. Cuantitativamente, *intervalo de variación* traduce *variation range* y puede especificar una de dos interpretaciones: (A), el *intervalo* $[u_{\min}, u_{\max}]$ o (B) la diferencia $(u_{\max} - u_{\min})$, en el caso de la señal de entrada. Para la variación de la señal de salida también hay dos acepciones: $[v_{\min}, v_{\max}]$, ó $(v_{\max} - v_{\min})$. Ejemplos: (A) "el umbral de disparo de una neurona tiene una variación entre 0.1 y 0.3 milivolts" o (B) "(ídem) tiene una variación de 0.2 milivolts". El *intervalo de variación* coincide a veces con el intervalo dinámico, pues a su vez puede medirse como el logaritmo de un cociente, en decibels. Ocasionalmente, en vez del valor de atributo mínimo $u_{\min}$ se utiliza un *valor de referencia* u_{ref} y en vez de $u_{\max}$ un valor límite quizás negativo, mayor o menor a u_0 pero el intervalo [...] se debe especificar de menor a mayor. También estas definiciones pueden referirse al **intervalo de variación máxima** y manejar un intervalo variable $[u_{\text{ref}}, u]$, si $u_{\text{ref}} < u < u_{\max}$.

Ejemplo: el *intervalo de intensidades* $\{u\}$ en un despliegue en blanco y negro (imagen) es $[0, 2^n - 1]$, donde n es el número de bits por cada pixel (usualmente $n=8$ ó 16), $v_{\min}=0$ corresponde al negro y $v_{\max}=2^n - 1$ corresponde al blanco. El *intervalo de posiciones posibles* en tal despliegue (pantalla de una computadora) tiene coordenadas (x, y) en el dominio $[0, N-1] \times [0, M-1]$, con "x" el producto cartesiano, N y M el total de pixeles en las direcciones horizontal y vertical. Es convención común que el origen 0,0 de una imagen sea la esquina superior izquierda.

Nota: Los intervalos de variación de información estructurada pueden referirse al atributo (codominio), al dominio o a un parámetro que indiza las muestras $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, v.g., distintas condiciones (temperatura), edades o pesos de sujetos, o bien de sus números de identidad, etc.

Nota: En otro sentido, el intervalo puede referirse a las fluctuaciones de un valor que debería ser constante y puede ser entonces su precisión, incertidumbre, el margen de error (en su medición) o el nivel de ruido (en entrada o salida). Se distingue entre *fluctuaciones intrínsecas* (no constante) y *extrínsecas* (ruido o distorsión, que se puede sumar a las variaciones intrínsecas).

Nota: En los intervalos abiertos, sólo es relevante el mínimo (o sea $[u_{\min}, \infty)$) o sólo el máximo (o sea $(-\infty, u_{\max}]$), quedando indefinido el otro límite.

Nota: Es posible tener combinaciones complejas de intervalos, v.g.: $([a, b] \cup (c, d]) \cap [e, f)$.

Nota: Una misma variable (mesurando, medición, parámetro) puede tener asociados diferentes intervalos de variación dependiendo de la aplicación o condiciones: intervalo de estaturas de un adulto: sano en población indígena, la estatura requerida para admisión en el ejército, aquella característica del enanismo, la estatura recomendada para usar bicicleta con rodada de 27", etc. Un intervalo compuesto podría consistir de varios sub-intervalos inconexos.

(3) Intervalo dinámico (de una señal cambiante, sea entrada o salida) o *alcance dinámico* (*dynamic range DR o DNR*). Se define como el cociente:

$$DR = u_{\max}/u_{\min}, \quad u_{\min} \neq 0 \quad (2)$$

tomando el logaritmo y escalando $\times 10$, el *DR* se mide en *decibels* y resulta coincidir con la diferencia $10(\log(u_{\max}) - \log(u_{\min}))$, que es otra forma de "intervalo de variación", lo cual puede causar confusión. ♣ El logaritmo del cociente tiene ventajas cuando el atributo abarca varios órdenes de magnitud; los sentidos de la audición y de la vista humanos perciben gamas muy grandes de intensidades y funcionan mejor para percibir diferencias relativas (logarítmicas, o sea el logaritmo de un cociente) en el atributo, que para percibir valores absolutos.

Hay intervalos de variación e intervalos ("rango") dinámicos (fijos) del instrumento, del mesurando (entrada, así que puede ser variable), de un estímulo, de un procesamiento o de una respuesta a un estímulo, o de una medición, o su despliegue (la escala de lecturas puede variar). Para un conjunto de N muestras $\mathbf{u} = \{u_n\}$, con $n=1, \dots, N$, el intervalo de variación del conjunto $\mathbf{u}$ es ya sea la diferencia: $\max_n \{u_n\} - \min_n \{u_n\}$, o bien, es el intervalo (o gama): $[\min_n \{u_n\}, \max_n \{u_n\}]$. Cualquier extremo podría servir de referencia.

Nota: a veces sólo se desea especificar de qué variable o atributo es el intervalo, o bien se desconocen los valores extremos; entonces se especifica *gama* o *intervalo de (valores $\{u\}$)*, o $\{v\}$, etc., y pueden existir diversos intervalos de interés para una misma variable.

Nota: Algunos autores consideran al *intervalo dinámico* como característica dinámica, pero en un análisis detallado es correcto considerarlo característica estática, dado que tal intervalo describe un aspecto de las variaciones en la entrada o salida que *en principio* no depende de su contenido en frecuencias, y no se refiere sólo a variaciones respecto a un argumento temporal ($u(t)$), pues no necesariamente hay relación con el dominio. Muchas características estáticas pueden estudiarse y generalizarse a sistemas dinámicos, extendiendo su definición al considerar dependencias del contenido en frecuencias.

► **Nota:** cuando se tiene $u_{\min} \approx 0$, es preferible definir el DR como la tasa SNR, es decir, en vez de $u_{\min}$ (que sería 0), se usa el valor RMS del ruido, η_{RMS} , el cual tiene más sentido como valor práctico de base (el término correcto en inglés es *baseline*).

(4) Intervalo de medición: La escala, gama, margen, ámbito, rango, barrido, alcance, dominio, registro, recorrido ventana, abanico, extensión, o el *continuo* de valores posibles (y pueden ser discretos, en la práctica) que puede proporcionar un dispositivo o instrumento de medición (en inglés es *measure range*). Se especifica variación de lecturas o salida del instrumento de medición, estrictamente no la del mesurando o estímulo. Fuera de dicho intervalo se alcanza *saturación de la lectura*. ► "Banda" se reserva para un intervalo de frecuencias o de canales.

♣ **Nota:** las definiciones anteriores revelan la dificultad de traducir de forma equivalente el término y concepto de *range* que puede indicar un recorrido, una diferencia, o bien una gama de posibles valores (intervalo). En inglés el contexto suele aclarar y es una de las justificaciones de la *Real Academia del Español* por "sobrecargar" un significado alternativo al término *rango* aparte de *rank* (orden, jerarquía). A la fecha (2018) no hay solución satisfactoria.

(Sobre)-saturación o desborde: cuando la entrada excede o rebasa la máxima lectura en la escala, y/o se encuentra por debajo del valor mínimo de la escala (usualmente cero).

Sub-saturación: cuando no se aprovecha todo el intervalo de medición, dando lugar a bajo [contraste](#) y baja [precisión](#). No confundir con *sub-muestreo*.

Nota: Hay diversas formas y dimensionalidades de intervalos de medición; en 2D es una ventana y en un sistema de imágenes es en espacio, en intensidad y en foco ([profundidad de campo](#)); son intervalos diferentes.

► Cuando la **relación** entre entrada y salida es **lineal**, una tarea importante es mapear una variable u de entrada a un intervalo $[v_{\min}, v_{\max}]$ deseado de salida: se normaliza primero a $[0,1]$, tomando en cuenta el *offset* (ver adelante) $u_{\min}$, luego se escala y se agrega el nuevo offset (se recalca que asumimos una relación lineal); notar que esto es a la vez una *interpolación lineal* (¡verificar!):

$$v = \frac{(u - u_{\min})(v_{\max} - v_{\min})}{(u_{\max} - u_{\min})} + v_{\min}, \quad (3)$$

notar que, sin pérdida de generalidad, cuando la entrada u es $u_{\min}$ ó $u_{\max}$, entonces v es $v_{\min}$ ó $v_{\max}$, respectivamente. Si suponemos $u_{\max} > u_{\min}$, el factor constante $((v_{\max} - v_{\min}) / (u_{\max} - u_{\min}))$ es igual a la [ganancia](#) entre entrada y salida. En toda medición se procura **maximizar su intervalo de variación** (y por tanto su rango o intervalo dinámico), para mejorar la precisión, y conviene conocer o controlar el intervalo de variación de la entrada. Esto implica conocer el:

(5) **Offset** (*bias*, a veces *sesgo*, *corrimiento*, *nivel base* (*baseline*), o “*cero*” aunque numéricamente no sea 0.0): Valor mínimo $u_{\min}$ predeterminado o posible en la entrada. Puede también referirse a cualquier corrimiento relativo respecto a un valor de referencia. Una generalización a 2D es el **fondo** que no necesariamente es constante. También consideramos un offset (puede o no corresponder) en la salida: $v_{\min}$, pero puede o no corresponder con $u_{\min}$ (v. g. corresponde al máximo si $v \propto 1/u$). En un monitor CRT el **brillo** es el “offset” y el *intervalo de variación* es llamado **contraste**, aunque suele usarse también la pendiente en sí misma para designar “contraste”, o sea la *ganancia*:

(6) **Ganancia**: Poder o factor de amplificación de la señal de entrada (aunque usualmente se amplifica, este factor podría ser menor a uno, es decir que puede ser una *atenuación*)

$$G = y/x, \text{ con } x \neq 0. \quad (4)$$

Notar la definición alternativa de la ecuación (3) que incluye un offset. La ganancia resulta un sinónimo de [sensibilidad estática](#), aunque ésta tiene otras connotaciones y puede ser relativa a parámetros del sistema. Exceptuando el caso de la relación (3) que, aunque describe una recta, no corresponde a un [sistema lineal](#), en los sistemas con respuesta **no lineal** la ganancia **no es constante** y es función de la entrada y quizás de algunos parámetros:

$$v = G(u), \quad \text{por ejemplo : } v = Ae^{-\mu(u-u_{\min})^2} + v_{\min} \quad (5)$$

Nota: En (4) la entrada x se mantiene constante; en otra medición, x es otra constante y en otra medición (otro día, otro individuo, otro instrumento, otro protocolo, otra calibración, otra temperatura, otro laboratorio, etc.) es nuevamente otra “constante”. Es así la relación entre la gama de salidas $\{y\}$ respecto a una gama de entradas posibles $\{x\}$, lo que caracteriza G , pero estrictamente no ponemos $x(t)$ y x puede ser inclusive muestra de un conjunto $\mathcal{X}$ de [datos no estructurados](#). Es válido escribir en el caso estático una dependencia específica $x(\text{parámetro}_a, \text{parámetro}_b, y/o \dots)$. ♣ Como *parámetro dinámico*, con dependencias temporales hay también una ganancia $G=y(t)/x(t)$, y en general depende del contenido en frecuencia de la entrada.

Nota: En algunos textos y paquetes de software, pueden usarse definiciones diferentes. El “brillo” de una imagen no siempre coincide con offset de entrada o salida, ni “contraste” es directamente el intervalo de variación de la salida. La razón es que al manipular ambos de forma interactiva, resulta más intuitivo mover simultáneamente offset y ganancia, u otras combinaciones, pero se aplica una terminología familiar (brillo, contraste).

Ejercicio: Aplique la ecuación (3) para formular la conversión de unidades angulares de radianes a grados. Explique. Idem, para Kelvins a °Fahrenheit.

Ejercicio: En la ecuación (3), ¿cuales son la ganancia y el offset? (es decir, como relación lineal, cuál es la pendiente y la ordenada al origen) Deduzca la relación (3) a partir de: (A), La [Figura 1](#) y

(B), encuentre al menos otro enfoque para describir la relación entre u y v . Enuncie los principios básicos para (A) y (B). Las escalas del diagrama pueden tener distintas unidades.

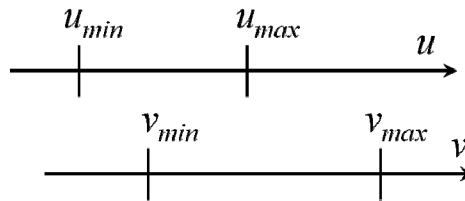


Figura 1. Valores extremos que definen los intervalos de variación de una entrada u y de una salida v .

- ♣ **Ejercicio:** Generalice todo el ejercicio anterior y la Figura 1 para el mapeo 2D de una ventana W_{XY} en otra W_{UV} , v.g., coordenadas en el mundo real a coordenadas en un despliegue gráfico.
- ♣♣ **Ejercicio:** Proponga equivalentes a la ecuación (3) para sistemas no lineales donde entrada y salida se relacionan funcionalmente de forma (A) *hiperbólica*, (B) *cuadrática*, (C) *exponencial*, (D) *sinusoidal*, (E) *sigmoidal*; establezca intervalos de validez y los parámetros más generales que convengan para cada modelo.

Ejercicio: Se dijo que la relación (3) entre dos intervalos entrada y salida y los valores respectivos mínimos y máximos, "es una *interpolación lineal*"; entre los ejemplos de [promedios ponderados](#) vimos que en una relación funcional $y=f(x)$, dadas dos muestras (x_a, y_a) , (x_b, y_b) , con $x_a \neq x_b$, una *interpolación lineal* es de la forma:

$$f(x) = (1-\alpha)f(x_a) + \alpha f(x_b) \quad (6)$$

$$\text{o bien: } y\alpha = (1-\alpha)y_a + \alpha y_b \quad (7)$$

para $x \in [x_a, x_b]$, sin conocer o aplicar $f(x)$. Identifique en la relación (3) qué son (x_a, y_a) , (x_b, y_b) y α . O sea, exprese (3) en la forma (6).

Nota: En una señal eléctrica el nivel de offset (constante) también se denomina *nivel de DC* o de *corriente directa*, en contraposición con la *corriente alterna AC* que es una señal armónica de 60 Hz, reflejando la línea de alimentación de amplitud en $[-120, +120]$ Volts (podría ser una componente de ruido inducido, como resultado de mal aislamiento, etc.).

Nota: Se considera que el nivel de offset o DC tiene una frecuencia de 0 Hz. Por tanto, si la señal es filtrada con un *pasa altas*, basta que la ventana comience apenas encima de 0 para eliminar la componente DC de la señal.

Nota: La ganancia G de muchos dispositivos es un parámetro ajustable y puede tener un [intervalo de variación](#) $[G_{min}, G_{max}]$. Idem para el [offset](#), etc.

Nota: Las unidades de u y v en (3) pueden estar a distintas escalas y ser diferentes (v.g., grados Fahrenheit vs Kelvin; milivolts vs decibels (sonido)).

Fin§ [►Índice](#)

- (7) **Contraste:** Noción de *diferencia relativa*, pero no hay definición única. Una es el propio [intervalo dinámico](#) de la entrada o de la salida. Otra definición genérica de contraste es la del cociente de una diferencia en el atributo, dividida entre el valor promedio del atributo. Ello equivale a relativizar la diferencia (intervalo de variación) respecto a la suma; se obtiene el **Contraste de Michelson** (o **visibilidad**, en imágenes, y también **modulación de contraste**), en términos de los extremos en la señal o imagen y opcionalmente como un porcentaje:

$$\text{Contraste}_M = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{u_{\max} + u_{\min}} \cdot 100\% \quad (8)$$

El denominador representa el doble del valor de atributo promedio. En intensidades de sistemas no lineales se usan escalas logarítmicas:

$$\text{Log contrast} = 10(\log_{10}(u_{\max} - u_{\min}) - \log_{10}(u_{\max} + u_{\min})), \quad (9)$$

dado en [decibels](#). El cociente de contraste (o de luminancia), en despliegue visual, se define como $I_{\max} / I_{\min}$ ("blanco"/"negro"), con dominio $[1, \infty)$. El anterior a veces es referido como contraste máximo y se puede manejar un contraste relativo I / I_{ref} .

El **Contraste de Weber** (o *fracción de Weber*) se define en sistemas de imagenología para detalles pequeños de luminancia u en un fondo uniforme de luminancia u_{bkg} (distinto de cero) por lo que el valor promedio es aproximadamente igual a u_{bkg} :

$$\text{Contraste}_W = \frac{u - u_{\text{bkg}}}{u_{\text{bkg}}} \quad (10)$$

Nota: El contraste global es máximo cuando $u_{\min}$ y $u_{\max}$ coinciden con los extremos del intervalo de variación; o sea que el mayor contraste se alcanza al aprovechar todo el intervalo de variación: en una imagen hay valores de intensidad en negro y valores correspondientes al blanco.

♣ También se puede definir el contraste de una imagen I como el ancho FWHM, o el FWTM del pico principal del histograma de I .

Nota: Algunos autores aproximan la medida de la [MTF \(Función de Transferencia en Modulación\)](#) con el contraste relativo (sin el "100%" en la ecuación (8)). La curva MTF se conoce también en Psicofísica como **Función de Sensibilidad a Contraste** (CSF en inglés).

El **Contraste RMS** en imágenes no depende del contenido de frecuencia espacial o de la distribución espacial del contraste en una imagen de $M \times N$ píxeles; se define como la desviación estándar de intensidades I_{ij} de los píxeles (normalizadas a $[0,1]$):

$$\text{Contraste RMS} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (I_{ij} - \bar{I})^2}, \quad (11)$$

♣ **Nota:** Es común en la literatura que la varianza de un conjunto de mediciones (o bien el segundo momento de la distribución del mesurando, visto como una variable aleatoria) se considere una “medida de contraste”

♣ **Nota:** En análisis textural, física de superficies y tribología, el atributo de intensidad I en una región de interés $[0, N-1] \times [0, M-1]$ corresponde a la altura sobre una superficie de referencia (por ejemplo la media $\bar{I}$) y la expresión (11) recibe también el nombre de *rugosidad RMS*.

Ejercicio: Escriba la definición (11) cuando las intensidades I están definidas en $[0, L-1]$.

Fin§ [►Índice](#)

(8) Intervalo(s) de operación: Se refiere a la gama de valores de entrada “válidos”, antes de ocasionar lecturas falsas, distorsionadas o fallas en el sensor/instrumento de medición; también comprende los intervalos de condiciones físicas tolerables: temperaturas de operación, presión, acidez, estrés mecánico, humedad, vibraciones, ruido, número de revoluciones por minuto (*rpm*), aceleración, golpes u otras condiciones que afecten el funcionamiento (sensor, actuador u otra etapa) aunque la entrada se encuentre dentro del intervalo de medición. Estos intervalos y tolerancias cambian conforme las componentes se degradan, se desajustan (se descalibra) o se dañan. Como equivale en sistemas e instrumentos al **intervalo de validez de un modelo** (por ejemplo el *intervalo de linealidad* de una respuesta), también aplica a procedimientos, algoritmos, etc. Los valores e intervalo de operación (especificados frecuentemente como un valor medio y una tolerancia) también se denominan *valores o intervalos de trabajo o nominales*.

Fin§ [►Índice](#)

(9) Intervalo lineal: Aquel en que la **respuesta** y la **salida** se relacionan mediante una relación lineal; usualmente:

$$\text{salida} = \text{offset} + \text{ganancia} \times \text{entrada}. \quad (12)$$

Pueden combinarse diferentes componentes lineales (“*piecewise linearity*”). Veremos que, paradójicamente, como sistema, *no es [sistema lineal](#) uno que siga el modelo de la línea recta*.

En general, existe también un **intervalo de validez** para la relación entrada/salida o de un modelo. En dos o más dimensiones, es el **subdominio o región de validez**.

- **(10) Función de transferencia.** En general, lineal o no, la T en la relación $y_{\text{output}} = T(x_{\text{input}})$ se llama *Función de transferencia*. El término también se aplica a cambios (lineales o no) de escala en la salida: $y_{\text{display}} = f(y_{\text{output}})$, con el objetivo de ajustar el intervalo de medición, por ejemplo: en una imagen brillo y contraste aumentan cuando la imagen producida por el instrumento tiene offset muy bajo (muy oscura) y bajo contraste. Otro ejemplo: cambiar las unidades de temperatura $\mathcal{T}$ de °F (Fahrenheit) a °C (Celsius): $\mathcal{T}_{\text{celsius}}(t) = 5/9 \times (\mathcal{T}_{\text{Fahrenheit}}(t) - 32)$.

- (11) Linealidad:** Diferencia entre el modelo lineal (ideal) entrada/salida y la relación (real) medida, incluso dentro del intervalo lineal. No confundir con [linealidad de un sistema](#), o de un modelo.

Nota: En sistemas digitales, los L valores de salida de todos los L valores de la entrada (con función de transferencia T conocida) se *precalculan* y se almacenan para uso posterior, de modo que un software "aplica" T usando las llamadas *tablas de búsqueda* (**LUT: Look-Up Tables**), con técnicas de *indireccionamiento*: el dato de entrada se convierte en un índice (entero) que es la dirección en memoria que contiene la salida " $y = T(x)$ " (no necesariamente entero y no necesariamente escalar) que le corresponde a ese valor x de entrada; como arreglo: $y = \text{LUT}[x]$, donde x debe ser entero o haber sido re-escalado y redondeado a entero; alternatively, si x no es entero, es posible interpolar y de los valores vecinos $\text{LUT}[\text{int}(x)]$ y $\text{LUT}[\text{int}(x)+1]$, a partir de la fracción $x - \text{int}(x)$, siendo $\text{int}(x)$ el entero inmediato menor a x para x positivo y el inmediato mayor para x negativo. Una aplicación es la *pseudocoloración*, para apreciar diferencias pequeñas de niveles de gris al "estirarlos" perceptualmente al usar una paleta de color (v.g. arcoiris, paleta térmica, etc.).

♣ **Ejercicio:** escriba una versión lineal de la interpolación (nota anterior); obtendrá un método usado por calculadoras científicas y librerías matemáticas para calcular funciones como el seno, la exponencial, etc.

Fin§ ► [Indice](#)

- (12) "Sensitividad" y Sensibilidad** (o mejor: **sensibilidad estática**; traducción técnica de *sensitivity*). Consideremos: (A) un sistema o instrumento de orden cero (ver [Características Dinámicas](#)), o bien (B), una *calibración estática* (cualquier orden) donde se fijan todas las entradas y parámetros en valores constantes excepto una entrada, la cuál es incrementada a lo largo del intervalo de operación, obteniendo salidas incrementales correspondientes. En ambos casos, si x_{input} es una entrada variable y y_{output} la respectiva salida (por ejemplo temperatura y su equivalencia como un voltaje o la altura de una columna de mercurio) definimos:

$$\text{Static sensitivity} = \Delta y_{\text{output}} / \Delta x_{\text{input}} \quad (13)$$

coincide con la [ganancia](#), pero puede seguir otra relación y cambiar punto a punto y relacionar el cambio de una respuesta en relación a parámetros). Es “alta” si cambios pequeños en la entrada x_{input} producen respuestas grandes (salida y_{output}) con incertidumbre proporcional (i. e., amplificada en proporción a la entrada).

♣ Hay definiciones especializadas que examinan las **dependencias de la entrada respecto a otras variables**; es decir en términos de la tasa de cambio $\partial y_{\text{output}} / \partial \theta$ (con θ un parámetro), o bien como $\partial y_{\text{output}} / \partial t$ (esta es semejante a la *sensibilidad dinámica*). Adelante veremos que en instrumentos/sistemas de cualquier orden, bajo las condiciones mencionadas en el caso (B), el cociente de (13) es *la componente estática* de la función de transferencia G que relaciona entradas con salidas en sistemas de orden arbitrario.

Nota: En los diccionarios en español no existe la palabra “sensitividad”, aunque se usa en el medio técnico para distinguir de *sensibilidad* (traducción “literal”). Preferentemente se usa “sensibilidad” para traducir *sensitivity*. *Sensitivo* y *sensible* sí existen en Español, el primero en un sentido más bien sensorial y el segundo en un sentido moral. Como traducción, en un contexto no técnico, también se traduce *sensitivity* como sensibilidad y muchos aseguran en el propio inglés que *sensibility* y *sensitivity* son sinónimos.

♣ **Sensibilidad.** Como traducción incorrecta de *sensibility no es característica estática*; mencionamos el uso del término “sensibility” en contextos técnicos y científicos: Un parámetro, medición, método o estrategia es “sensible” en un contexto o problema, cuando tiene mayor relevancia que otros; está “sintonizado” al problema en cuestión, permite mayor discriminación, etc. En la literatura científica se califica de *sensible* a un enfoque o acercamiento (*approach*), o a cierta decisión, sobre todo si toman en consideración ciertas consecuencias, riesgos o compromisos. En un contexto no técnico, se traduce *sensibility* como *sensatez*. Con el afán de evitar esta acepción, algunos autores escriben (erróneamente) *sensitividad*.

Fin§ [►Índice](#)

(13) Deriva (*drift*): Tanto la sensibilidad estática (o ganancia) como el “cero” u offset (lectura mínima en el instrumento) pueden presentar variaciones lentas (bajas frecuencias) denominadas **deriva**. En una imagen estática a veces se denomina *gradiente* (el término *deriva* implica tiempo e indicaría imágenes de video cuya intensidad sufre de deriva, punto a punto); es parte del “fondo” y suele corresponder a lo detectado cuando el sensor es “cegado” (*entrada nula*). Se reduce mediante filtros pasa altas con frecuencia de corte inferior $\omega_{c \text{ inf}}$ mayor a la frecuencia más alta de la deriva que se desea eliminar. En algunas señales la deriva se debe a un fenómeno de integración; en los circuitos eléctricos basta con *cortocircuitar* regularmente a tierra la señal (“resetear a 0”), reiniciando la integración que acumula algún valor de offset distinto a cero.

Nota: Prácticamente todos los parámetros y características estáticas de un sistema o instrumento pueden presentar defectos de deriva, respecto a su valor nominal, pero no necesariamente depende de las variaciones de entrada o salida, sino de otras condiciones (por ejemplo: dilatación por temperatura, iluminación no uniforme, etc.), de modo que la deriva o fondo se relaciona con la robustez y estabilidad frente a fluctuaciones en condiciones externas. El intervalo de variación y el intervalo dinámico DR podrían presentar también deriva (valor real de los extremos).

Fin§ [►Índice](#)

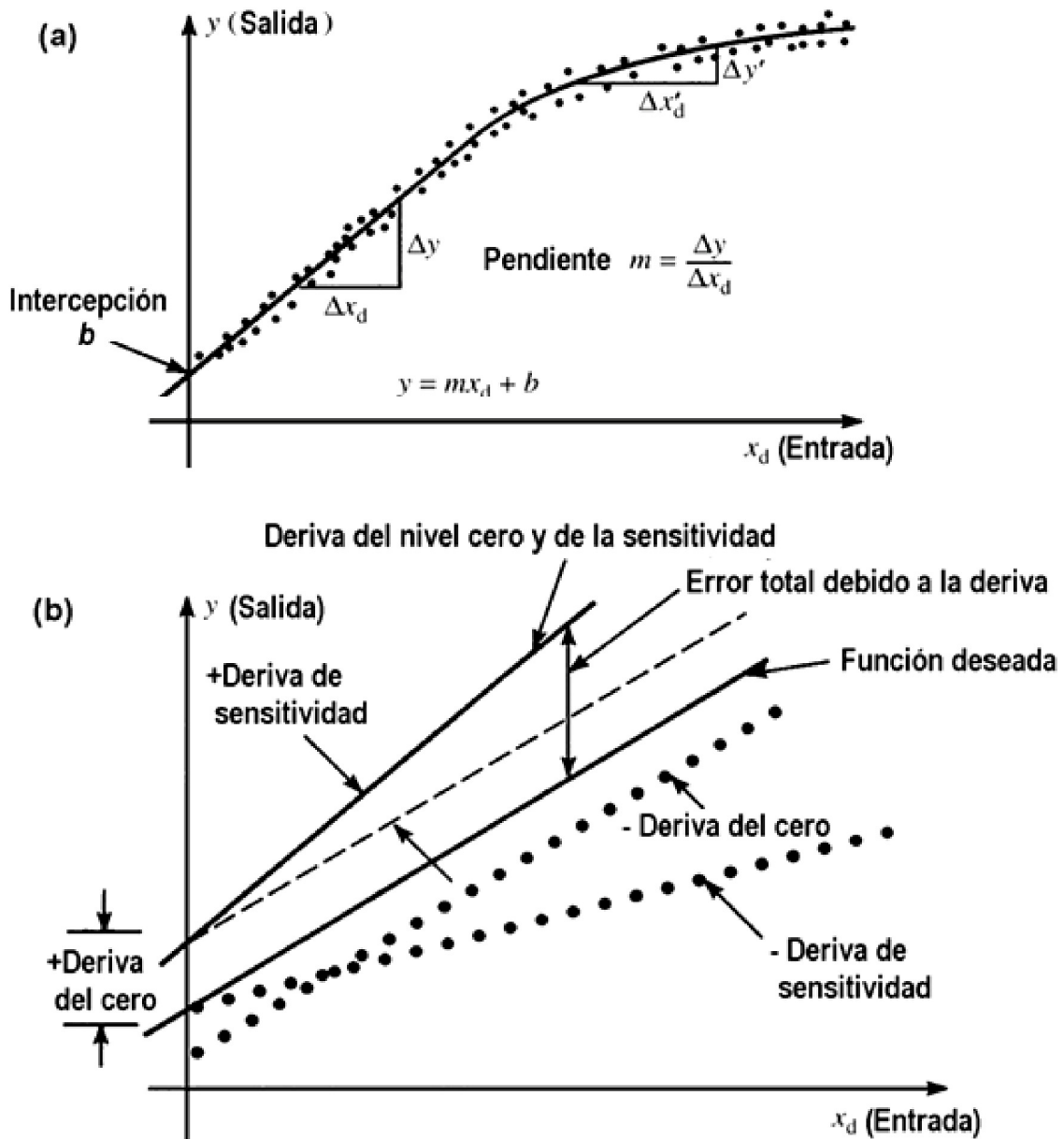


Figura 2. (Figura 1.3 del Webster, modificada). (a) Curva de sensibilidad estática (static sensitivity) relacionando la entrada x_d a la salida y . La sensibilidad estática puede ser constante sólo para un intervalo limitado de entradas. (b) Deriva del “cero” y deriva de la sensibilidad.

Ambas pueden ser negativas (líneas de puntos).

- **(14) Precisión:** (*Inglés: precision*) (A) Medida de la *dispersión* de un conjunto de varias mediciones (que supondrían dar todas un mismo valor constante). (B) (del Webster) *La precisión de una medición, o procedimiento, también expresa el número de alternativas distinguibles entre sí, de las cuáles un resultado es seleccionado*. Dada una misma entrada a un instrumento, una lectura de 2.434 se considera diez veces más precisa que una de 2.43. OJO: alta precisión no implica alta exactitud, pues no se está comparando con el “valor real” (ver la [Figuras 3 y 4](#)).

Por lo anterior, la precisión indica qué tan fina es una escala de medición, aunque puede caracterizar tanto un instrumento (o sensor), como un procedimiento o algoritmo (por ejemplo para calcular π). Notar que al dejar la posibilidad del margen [0.001, 0.002] en vez del margen [0.01, 0.02], la precisión es además una *medida de dispersión* (en el ejemplo anterior, el 2o. intervalo, como incertidumbre, equivale a menor precisión que el 1er. intervalo)..

En la práctica (acepción (B)), la precisión consiste en el *número de cifras significativas* (longitud de la representación numérica de la medición). Ejemplos: 413 es menos preciso que 412.801; 92 es menos preciso que 92.0 y 92.000 es todavía más preciso, los ceros *son significativos*. Al dar un valor $x \pm \delta x$, con δx la incertidumbre, las “cifras significativas” son aquellas cuyo lugar decimal ($d \times 10^{-n}$) es mayor a δx , si no, no son “significativas”, ejemplo: 3.141592 ± 0.005 sólo tiene 4 cifras significativas (una antes del punto y tres después) en total y es mejor dar el valor como: 3.145 ± 0.005 , siempre que la mínima unidad de la escala sea 0.01, cuya mitad es 0.005. Lo complicado es cuando la mínima división de escala no es una potencia de diez; por ejemplo 0.25; un truco para un redondeo “fraccionario” de x es, en este ejemplo, calcular $0.25(\text{round}(4x))$.

Notar que hay precisión del instrumento (relacionada con la escala y resolución) y precisión de la medición, que es la de un procedimiento y por tanto puede involucrar estrategias para aumentar el número de cifras significativas, tal como un promedio de N mediciones y la detección y exclusión de *outliers*. También una medición mal efectuada (o con mucho ruido) puede tener menor precisión que la del instrumento usado. Usualmente la precisión sólo tiene sentido si la mínima división de escala es mayor a $\frac{1}{2}$ de la máxima amplitud RMS del ruido; una división más pequeña no aporta más cifras significativas, debido a la incertidumbre introducida por el ruido. Así, puede existir *precisión de un procedimiento, algoritmo, análisis, interpretación, etc.*

Fin§ [►Índice](#)

- **(15) Exactitud o certeza** (*accuracy* -ver los diagramas que ilustran las diferencias entre precisión (definición A) y exactitud):

"Grado de concordancia entre un resultado experimental (o cantidad medida V_{measured}) y un valor de referencia aceptado o convenido V_{true} ".

Algunos autores (v.g., Webster) definen la exactitud o certeza como el *error porcentual* o como su valor absoluto:

$$Error_{abs}\% = |(V_{true} - V_{measured}) / V_{true}| \times 100\%, \quad (14)$$

independientemente de la precisión. Indica qué tanto se aleja una medición de un valor de referencia que se considera “el verdadero” (notar diferencias y la convención de reemplazar el verdadero por el de referencia). Un mejor término sería **veracidad** (*trueness*), que actualmente está desplazando a *accuracy* el cuál abarca desde ~2008 como concepto tanto la *veracidad* como la *precisión*. Es común también que “ V_{true} ” sea obtenido por otros métodos, inclusive teóricos, pero validado de algún modo. Entonces, la exactitud es relativa: compara el valor medido (estimado o deducido) con el de referencia. Podemos decir que *una medición es 100% exacta cuando su valor coincide 100% con el valor real del mesurando*. El valor medido $V_{measured}$ en la ecuación (14) puede también ser un valor aproximado o estimado; por ejemplo como predicción de una teoría, aunque si esta ya se encuentra establecida, puede volverse referencia para mediciones por métodos nuevos.

La exactitud puede expresarse como (A) porcentaje de una lectura, (B) porcentaje de la escala completa (*full scale*), (C) un número de dígitos para lecturas digitales o (D), un valor de $\pm 1/2$ de la mínima división de una escala. Con frecuencia la exactitud se expresa como una suma de las anteriores, por ejemplo en un dispositivo digital se puede tener: $\pm 0.01\%$ de la lectura $\pm 0.015\%$ de escala completa ± 1 dígito. Si la exactitud se expresa simplemente como porcentaje, se asume que es % de la escala completa. Algunos fabricantes de instrumentos especifican y garantizan una exactitud como válida sólo por cierto período limitado de tiempo.

- **Nota:** V_{true} es proporcionado o definido por normas y convenciones, una deducción teórica, promedios exhaustivos, u otros métodos ya probados. Un reloj atómico “super-preciso” que no está a la hora, no es exacto. La precisión es *intrínseca* al instrumento o medición, mientras que la exactitud es *extrínseca*. Una se refiere a variación o error aleatorio (o estadístico) y la otra a error sistemático. Si hay una única medición, exactitud y precisión aparentemente coinciden (=desviación respecto valor de referencia). Muchos valores de referencia aceptados en Ciencia y Tecnología se pueden encontrar en el [National Institute of Standards and Technology \(NIST\)](#).
- **Nota:** La definición (14) requiere $V_{true} \neq 0$. En general la ecuación (14) es polémica como definición de *exactitud* pues (A) expresa un error porcentual, en vez de una calidad de “exacto” (alto error $\Rightarrow$ ¿alta exactitud?, notar paradoja) y (B), es problemática para valores muy pequeños de V_{true} aunque no sea 0, ó para diferencias importantes. El error absoluto $|V_{true} - V_{measured}|$ también suele ser reportado en vez del porcentual o del *error relativo* (sin “ $\times 100\%$ ”, en (14)).

Nota: Cuando $V_{measured}$ es el promedio de varias mediciones, el error definido como la diferencia absoluta, relativa o porcentual suele llamarse también *error sistemático* y es diferente de los errores estadísticos entre las mediciones que fueron promediadas.

- **Ejercicio:** Proponga un error relativo o porcentual para mediciones vectoriales y otro para señales $x_{\text{true}}(t)$ y $x_{\text{measured}}(t)$. Idem para imágenes.

Ejercicio: ¿Qué diferencias aprecia entre V_{true} y *mesurando* y qué diferencias aprecia entre V_{measured} y *medición*?

Ejercicio: ¿Puede inferir de todo lo anterior la noción de “calibración”?

Nota: A veces en un experimento, cuando no hay otra referencia, se toma V_{true} como el promedio de muchas mediciones en condiciones muy exigentes (calidad de la instrumentación, control, etc.) y subsecuentes mediciones son comparadas contra ese V_{true} . En general un promedio no necesariamente es igual al valor verdadero de un *mesurando*: pueden haber errores sistemáticos; sin embargo en muchos casos es posible identificarlos y reducirlos.

Nota: Sinónimos de **precisión**: *concentración, dispersión, incertidumbre, intervalo o margen de error* (o simplemente *margen*), *sesgo, variación, (in)consistencia, soltura, calidad de difuso, esparcimiento, nitidez*. **Precisar** también significa *explicitar*, no dar información implícita (aquella no mencionada, lo cual supone que se sobreentienden detalles, dado un contexto).

Nota: Sinónimos de **exacto**: *valor real, verdadero, correcto, atinado, acertado, certero, veraz, verídico, "en el blanco"*. Al especificar una medición, “2.305±0.005”, no siempre es posible indicar la exactitud de la 1ª cifra, pues en principio no se conoce el valor verdadero; en cambio la 2ª cifra, ±0.005, es la precisión absoluta o incertidumbre y sí es posible estimarla. “Preciso” quiere decir “poco disperso” (connotaciones contrarias, aunque precisión y dispersión se refieren al margen de diferencias respecto al valor verdadero). Algunos autores⁽¹⁾ traducen directamente *precision* como *repetibilidad* o *fidelidad* y consideran que exacto y preciso son sinónimos que traducen *accuracy*. En inglés, *exactness* es sinónimo de *accuracy*. También notar las frases: “la hora exacta” y “ser más preciso” (al hablar).

- **Nota:** Un término asociado a precisión, es ***tolerancia*** que es un intervalo o margen de error permitido, aceptable, o desviación máxima respecto a un valor deseable; es afín a *incertidumbre* cuando se refiere a un intervalo numérico; en el medio experimental e ingenieril suele denominarse el “epsilon” (ϵ), de modo semejante al “sigma” (por autonomasia) de *desviación estándar*. “Tolerancia cero” tan sólo indica que la desviación se encuentra por debajo del mínimo de la escala de medición o de la resolución (tras “redondeo”).

¹ Por ejemplo: Ramon Pallàs Areny, (2004). *Sensores y acondicionadores de señal*. Ed. Marcombo.

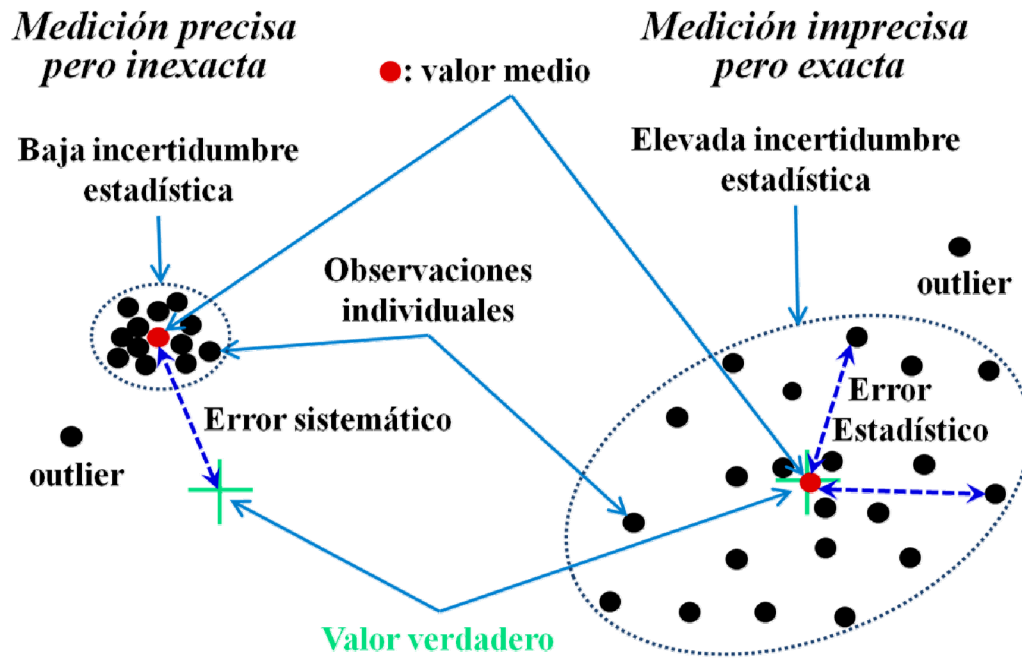


Figura 3. Exactitud y precisión en términos de la dispersión de mediciones en un espacio 2D; las cruces verdes localizan los valores verdaderos que se intenta medir como si fueran el centro de una diana de tiro al blanco; los puntos rojos son el promedio de las muestras u observaciones individuales y las elipses punteadas son la zonas de incertidumbres baja (izquierda) o elevada (derecha).

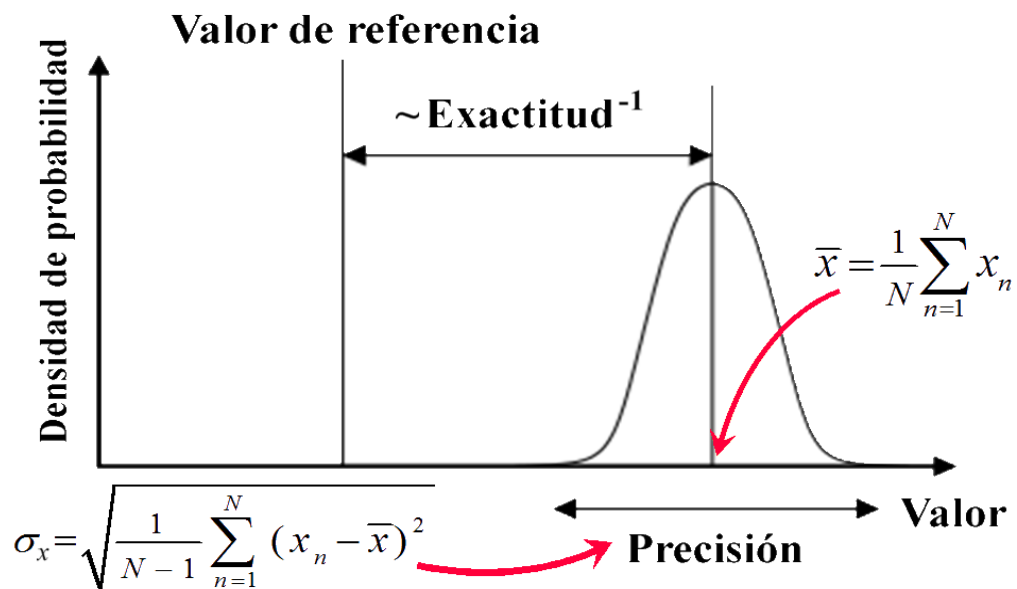


Figura 4. Exactitud y precisión en términos de la distribución, no necesariamente Gaussiana, de N observaciones de un valor en principio fijo, pero con ruido, errores, etc. La medición final de ese valor es la media $\bar{x}$ de las N observaciones; su desviación estándar σ_x es una medida de la precisión o dispersión del valor. Algunos autores definen directamente "Exactitud" como la diferencia de $\bar{x}$ con el valor de referencia, causando la paradoja de que "elevada exactitud" indicaría error grande; la diferencia es conocida también como error sistemático. Por ello aquí se escribió " $\sim \text{Exactitud}^{-1}$ ", como definición aproximada (mayor exactitud $\Leftrightarrow$ menor error y viceversa).

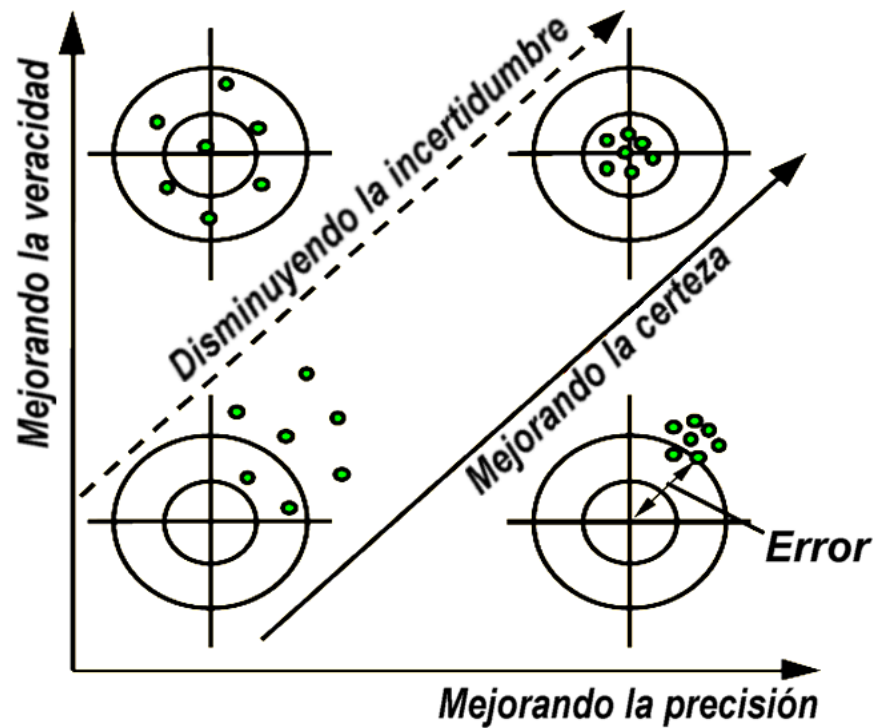


Figura 5. El concepto de **veracidad** como un eje ortogonal al de la **precisión** y las interrelaciones con la exactitud o certeza, la incertidumbre y el error. Los círculos concéntricos representan la analogía de “juego de tiro al blanco”.

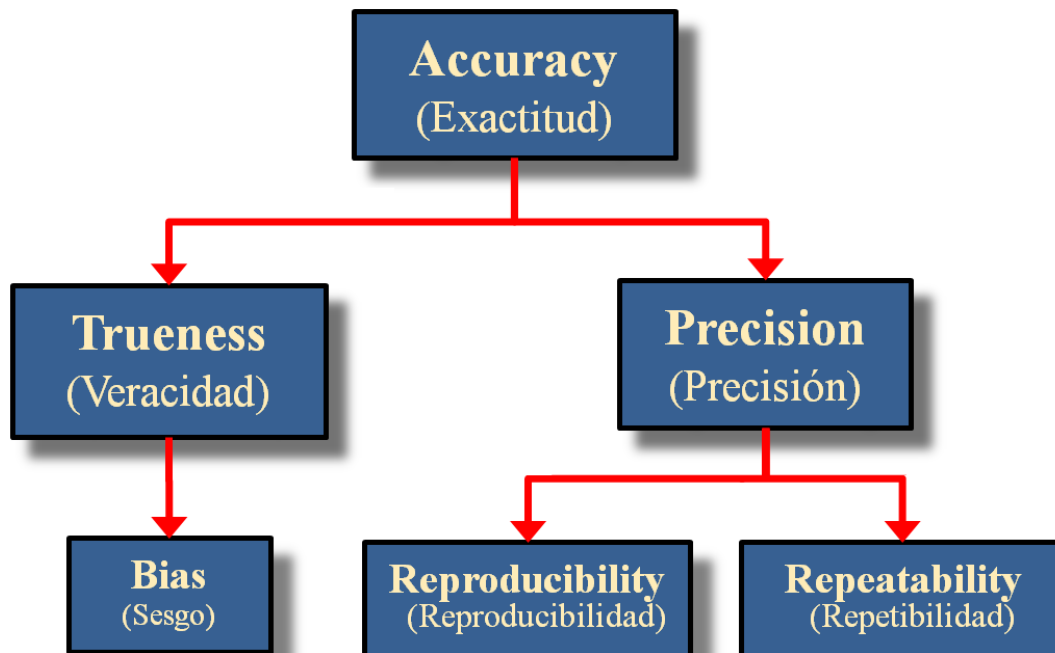


Figura 6. Determinación hoy aceptada de la exactitud en términos de la **veracidad**, la **precisión** y sus componentes, de acuerdo a la norma **ISO 5725 Standard**, acordada internacionalmente en 2008.

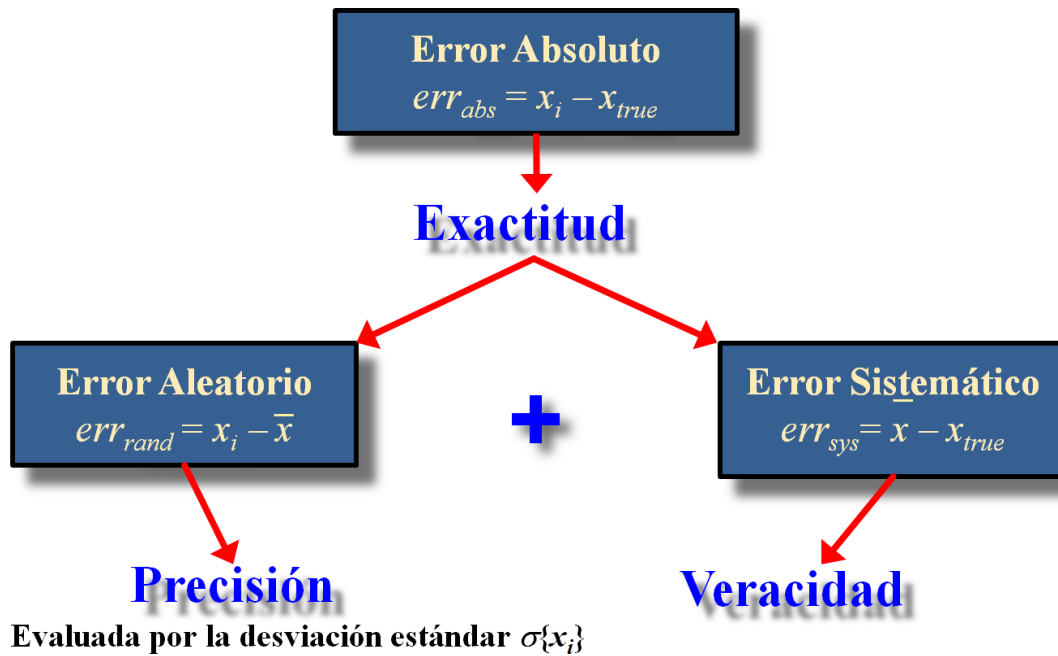


Figura 7. Cuantificación elemental del error absoluto de un conjunto de mediciones $\{x_i\}_{i=1}^N$ y sus componentes, de precisión y veracidad, de acuerdo a la norma **ISO 5725-6** de control de calidad.

♣ **Nota:** En detección, clasificación y diagnóstico médico se definen diversos parámetros descriptivos o factores en términos de *Verdaderos Positivos (TP)*, *Falsos Positivos (FP)*, *Verdaderos Negativos (TN)* y *Falsos Negativos (FN)*. Algunos de tales factores tienen nombres como los de algunas características estáticas que hemos visto: *exactitud*, *precisión* y *sensibilidad*, pero su interpretación puede cambiar y están definidos en términos de TP, FP, etc.

♣ **Ejercicio:** analizar sinónimos, *sinónimos-por-complemento* y definiciones de *exacto*, *exactitud*, *preciso*, *precisión* y en inglés de *accuracy* y de *precision*. Notar lo difuso y confuso de las mismas, sobretodo en español y que muchas veces el sinónimo parece significar lo contrario de lo que se pretende aunque el uso lo aclare (o sea, *sinónimos por complemento*): *alta precisión* = *baja incertidumbre*; *gran exactitud* = *error pequeño*. ¿Qué es un *valor de referencia*? –investigue (en Inglés). ¿De qué es sinónimo *perfección*? ¿Hay términos que indiquen tanto exacto como preciso?

Fin§ [►Índice](#)

(16) Repetitividad (o *repetibilidad*, *repeatability*) y **Reproducibilidad** (*reproducibility*): es la posibilidad de obtener un mismo resultado o valor (mínima desviación estándar) N veces, con la misma precisión (notar la circularidad: alta precisión también se define en términos de *baja dispersión*, o sea *alta repetitividad*). Se generaliza a obtener no sólo una medición, sino un fenómeno o candidatura (conjunto de parámetros, una configuración, etc.)

Condiciones reproducibles son aquellas que llevan a obtener un mismo valor o resultado (distintos instrumentos, técnicas o usuarios, en distintos lugares y tiempos), o sea, **reproducibilidad** es también la posibilidad de repetir un experimento completo. En este sentido, la **repetitividad** se considera más local: el *grado de concordancia entre mediciones por el mismo observador en un mismo laboratorio*. Se usa con frecuencia *reproducibilidad* para indicar *repetitividad* en el tiempo. A veces se dice **replicable** en vez de *reproducible*. Tanto repetitividad como reproducibilidad suelen reportarse como *desviación estándar*. Actualmente se ha acordado que ambas juntas constituyen la precisión de una medición.

♣ **Nota:** Algunos autores difieren totalmente entre *repetible* y *reproducible* (tomada como más general), y no siempre es clara la distinción.

Nota: a mayor precisión, hay mayor repetitividad (interpretación “relajada”), pero la repetitividad puede ser más general y referirse al comportamiento del equipo: *mismas salidas a mismas entradas en las mismas condiciones*.

► **Nota:** Existe *variabilidad* en mediciones debidas al instrumento o proceso de medición (variación o variabilidad *extrínseca*), pero también existe una variabilidad *natural* o *intrínseca* del fenómeno o propiedad a medir.

Fin§ ► [Indice](#)

(17) **Estabilidad y Equilibrio:** La posible variación de una medición, frente a ruido, puede modelarse por una función cóncava importante (“U”): en un sistema *estable*, cuando el valor medido se encuentra en la parte más baja del pozo de potencial, tras una perturbación (sin rebasar los bordes del pozo) la medición *regresa* a un estado base (usualmente estacionario). Pensar en una canica que se encuentra en el fondo y que al agitar, oscila pero por fricción regresa. La medición no es estable (aunque se trata más bien del potencial que ya no es cóncavo), cuando a una pequeña perturbación, y ano regresa al estado inicial. En términos de sistemas dinámicos, en un sistema estable (o en un estado estable del sistema) la respuesta se mantiene acotada para perturbaciones grandes. Estrictamente *estabilidad* no es sinónimo de [robustez](#).

Estabilizarse (un parámetro o estado en un sistema o dispositivo). También se refiere a alcanzar un estado estacionario, tras un **transiente**⁽²⁾ (tal como el encendido del instrumento) y puede referirse a una medición (esperar que “la lectura se estabilice”), una respuesta o comportamiento (en seres vivos). Algunos instrumentos requieren “calentarse” antes de su uso, por ejemplo algunas de sus componentes deben *alcanzar una [temperatura de operación](#)* o un motor

² Un **transiente**, **régimen transitorio**, o “**transitorio**”, es la respuesta a cambios de estado o a cierta entrada (v.g. pulso, escalón) de un sistema, instrumento, circuito, etc., que se extingue en un tiempo corto, en contraposición al **régimen estacionario** o permanente (o **estado estacionario**), que es la respuesta posterior (tras un transiente) que se mantendrá hasta que cambia la entrada o excitación. Estrictamente el régimen estacionario se alcanza de forma asintótica.

debe alcanzar cierto número de RPM. Todo esto es necesario para que proporcione lecturas estables, o con mínimo ruido.

♣ **Equilibrio:** Aunque no se considera una característica estática de un sistema o instrumento, se puede considerar como tal en un sistema dinámico, en particular como estado de una variable (o del sistema) está sometida a un potencial. En este sentido hay valores de **mínima** o incluso de **máxima** energía, así como puntos de **inflexión** y regiones constantes. En general se dice que existe equilibrio mecánico cuando la suma de fuerzas y torcas es cero. Se puede extrapolar tal definición a otras formas de energía. Se distingue entre:

Equilibrio estable, cuando el estado ocupa un *mínimo local* y las perturbaciones no alcanzan a sacar al sistema de este estado (regresa al mínimo, donde la suma de fuerzas es cero).

Equilibrio inestable, cuando el estado ocupa un *máximo local*: la menor perturbación aleja al sistema de ese punto.

Equilibrio indiferente: Cuando el estado ocupa una región de potencial constante, y una perturbación no lo aleja mucho de la posición inicial (si hay disipación), pero tampoco regresa.

Desequilibrio: Cuando el estado no ocupa un lugar fijo (está cambiando). Ejemplo: puntos de inflexión o estados transitorios. Tal estado es de muy corta duración: el sistema cambiará a un estado de equilibrio y mínima energía.

♣ **Equilibrio "estático" y equilibrio dinámico:** las definiciones anteriores se generalizan a dos situaciones posibles: los elementos del sistema se encuentran inmóviles o bien, se encuentran en movimiento u oscilando (en desequilibrio pero con un comportamiento *pasivo*); otro ejemplo es un acróbata en la cuerda floja, o uno balanceándose en un monociclo (comportamiento *activo*). Lo curioso es que la fuerza de compensación puede aplicarse con tal velocidad que lo que parece equilibrio inestable (nada se mueve en apariencia) es en realidad un *equilibrio dinámico*, que resiste perturbaciones por reaccionar de inmediato ante las mismas; se requiere desde luego de un sistema de control, sensores y actuadores (parte del comportamiento activo). En el caso de acróbatas o de personas comunes caminando o balanceándose, son micro-contracciones musculares y un control coordinado mediante receptores sensoriales en músculos, esqueleto y articulaciones, llamados [*proprioceptores*](#). El funcionamiento de los bicicletas [*segways*](#) es otro ejemplo, basado en sensores giroscópicos. Inicialmente escribimos "estático" encomillado por la observación de que el equilibrio de un estado en general no se considera estrictamente una característica estática, pero el tema queda abierto a discusión.

Fin§ [►Índice](#)

Nota: hemos visto varios términos cuyo uso requiere de *precisarlos* (o *calificar* su empleo, como en el caso de un *sinónimo por complemento*) para aclarar su significado, pero también el contexto lo hace (como en la frase anterior). Además su significado presenta paradojas o contradicciones aparentes:

Precisión Alta o baja, mucha o escasa; también al definirla como poca dispersión. baja incertidumbre, etc. Gran precisión implica más cifras significativas (algo pequeño).

Exactitud Si se define como un error (como hacen (Webster, 2009) y otros), parece significar lo contrario de lo que se desea.

Filtrar, filtro ¿Retener o dejar pasar?; en caso de frecuencias: *filtro pasa-bajas, pasa-banda, pasa-altas, rechaza-banda...* En inglés se puede especificar *filter in*, o *filter out*.

Resolución Alta (se ven o *resuelven* detalles pequeños porque la separación entre muestras es más pequeña), o baja (no se ven, la separación entre muestras es mayor).

Lineal La transformación $y=mx+b$ (=línea recta) no es lineal como transformación.

Otro ejemplo: un "factor de amplificación" menor a uno es en realidad una atenuación o reducción de magnitud (pero aunque se aumenta el tamaño de los detalles, no necesariamente aumenta la resolución -pero sí aumenta, si son detalles por debajo de la resolución del ojo que los observa). Efectuar un "zoom", magnificar y escalar implican por omisión un aumento pero también pueden tener un factor menor a uno. Zoom-in y zoom-out son precisiones en inglés, inexistentes en español.

Nota: "Instrumento de precisión" implícitamente significa *alta* precisión. "Impreciso", en cambio siempre significa: poco preciso, muy disperso, difuso, indefinido, sin detalles, o vago, del mismo modo que "inexacto" siempre significa: equivocado, falso, errado, inválido o desatinado (como al tener mala puntería), pero puede ser relativo a una referencia que se supone acertada, verdadera, etc.

"Puntual" parece significar tanto exacto como preciso, e idealmente sin posibilidad de variación. En una frase, "precisamente..." suele tener más connotación de exacto, acertado, verdadero. Un *criterio terminante* es estricto, cerrado, sin margen (pero no se usa *preciso* en este caso, aunque resultaría correcto, según las definiciones anteriores.

Fin§ [►Índice](#)

(18) Robustez: Calidad de un instrumento cuando el ruido o perturbaciones externas **no afectan** las mediciones (efectos debajo de la precisión de la medida) o sus funciones (puede ser una señal generada, o de control). El **pozo de potencial**, en vez de ser una función cóncava suave ("U"), es más como la función impulso negativa ("⌏"). Robusto significa "muy estable", en dos extremos: (1) una medida o comportamiento es estable si, respondiendo a una perturbación, regresa pronto a

la posición (valor) de equilibrio; en la respuesta el sistema es “perturbable”; (2) en el otro extremo, de robustez absoluta, el valor o estado NO responde a la perturbación (es insensible). Esto ocurre cuando variaciones en parámetros importantes no afectan las medidas, gracias al diseño (las absorbe). Hay definiciones más precisas (detalladas, y matemáticas).

Nota: Un promedio aritmético es robusto, cuando ha sido calculado penalizando o excluyendo los valores (llamados *outliers*) que “perturban” al promedio completo y se determina que no pertenecen a la población bajo estudio. En muchos casos puede considerarse *robusta* a una respuesta (o señal generada) respecto a fluctuaciones en un parámetro θ (a entrada constante), si se tiene $\partial y_{output} / \partial \theta = 0$, ó es un valor muy pequeño (= insensible).

♣ **Nota:** En un sentido de construcción o diseño, un instrumento o dispositivo es robusto cuando su funcionamiento, intervalos de operación y características no son afectadas (o muy poco) por condiciones o cambios ambientales (temperatura, presión, etc.), uso rudo, golpes, “picos” que alcanzan límites especificados, etc. Tal robustez, por ejemplo en satélites y sondas interplanetarias, se puede mejorar con materiales especiales, algoritmos de auto-reparación y corrección de fallas o errores, o con el llamado *diseño redundante*. También un método o algoritmo puede ser más robusto que otro (por ejemplo en los *problemas mal planteados (ill-posed)* tales como la inversión matricial, se diseñan así métodos más robustos que aquellos convencionales).

(19) Confiabilidad: alto grado de **repetitividad** (funcionamiento, mediciones), alta **precisión** y **robustez**. Tras una **calibración** correcta la **exactitud** queda determinada (valor igual al de referencia y su medición es repetible). Un buen manual debe indicar cuándo es necesario recalibrar, reemplazar componentes, la vida útil del instrumento (caducidades), etc. Hay también confiabilidad en un dato, o en un procedimiento, y hasta en un modelo, pero los criterios y *métricas* no son estándar. En estadística existe la noción de *intervalo de confianza*. Usualmente el alto grado de repetitividad, precisión, etc. satisfacen valores e intervalos mínimos o máximos según el caso, o de tolerancia o a veces como exigencia, según la aplicación.

En un instrumento de medición debidamente calibrado, bajo las condiciones anteriores, se trabaja bajo la *hipótesis tácita* (=se confía) de que una medición coincide para todo fin práctico con el valor verdadero de un mesurando (dentro de los intervalos de medición, de validez, precisión y la incertidumbre en la calibración). En un instrumento que produce una señal o acción, se tiene confianza en que el valor del parámetro de un actuador (o la señal producida) coincide con la que se especificó en el instrumento, procedimiento o programa.

(20) Resolución (de un instrumento, sensor o actuador) es la mínima variación de magnitud que puede apreciar (o generar) un instrumento (notar la diferencia con precisión, que no se refiere

a mínimas variaciones, sino a la representación de un valor). **También:** medida de la habilidad o límite de un instrumento, dispositivo, o de un método para separar (distinguir o *resolver*) dos “picos” (*extrema* locales) muy cercanos en una señal (imágenes puntuales de estrellas en un telescopio, líneas espectrales en un espectro, etc.). En una señal o imagen es su capacidad de representar dos puntos o detalles de forma separada. Igualmente, para un sistema de imagenología, en su sensor. **Resolución óptica:** Idem, cuando se trata de dispositivos o instrumentos ópticos.

También la resolución expresa el grado en que dos cantidades (o dos picos o dos manchas) casi iguales pueden ser discriminadas (decidir que son dos diferentes). Cuando la cantidad medida varía a partir de un valor cero, el término **umbral (de detección)** es un sinónimo de *resolución* (o sea el caso de distinguir dos cantidades cuando una es el cero de referencia).

(Poder de) resolución cromática (instrumentos espectroscópicos):

$$\frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda}, \quad \delta\lambda \text{ diferencia de dos longitudes } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ de onda a resolver,} \quad (15)$$

$\bar{\lambda}$ promedio de ambas longitudes de onda.

$$\text{Notar que: } \frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (\text{inverso de } 2 \times \text{contraste de } \lambda). \quad (16)$$

(Poder de) resolución angular (instrumentos ópticos):

$$\text{Criterio de Rayleigh:} \quad \sin(\theta) = 1.22 \frac{\lambda}{d_{\text{lente}}}, \quad (17)$$

θ resolución angular [radianes]

d_{lente} diámetro de la lente (apertura),

λ longitud de onda de la luz observada ($\approx 560 \text{ nm}$).

El factor 1.22 proviene de un modelo del patrón de difracción. La resolución angular se cambia a resolución espacial R (también: *resolución lateral*) multiplicando por la distancia al objeto. En un microscopio esta es aproximadamente la *longitud focal* f del objetivo y (17) da lugar a:

$$R = 1.220 \frac{f\lambda}{d_{\text{lente}}} \quad (18)$$

(Poder de) resolución en microscopios

También en microscopios, la resolución espacial (distancia, no es resolución angular) es la mínima distancia $d_{\min}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que puede discernirse entre dos puntos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y está dada en nanómetros por:

$$R = \frac{1.22 \lambda}{NA_{\text{condensador}} + NA_{\text{objetivo}}}, \quad \text{donde } NA = \eta \sin(\varphi), \quad (19)$$

- NA apertura numérica (sin dimensiones) por cada lente
 η índice de refracción del medio entre lente y espécimen
 φ depende del diámetro y distancia focal de la lente
 λ longitud de onda de la luz observada (≈ 560 nm).

Usualmente los valores óptimos posibles hacen que $NA_{\text{condensador}} = NA_{\text{objetivo}}$, para una máxima resolución (R mínima) que es en la práctica de unos 200 nm, y un valor $\lambda \approx 400$ nm. Se tiene:

$$R = \frac{0.61 \lambda}{NA_{\text{objetivo}}} \quad (20)$$

que también se conoce como el **Límite de Abbe**, definido en términos de microscopia como: *la separación exacta en el espécimen que puede ser resuelta, cuando la apertura numérica de la lente del objetivo es lo suficientemente grande para capturar el 1er. orden del patrón de difracción producido en un microscopio limitado por difracción, a una longitud de onda específica λ .*

NOTA: Con las definiciones anteriores hay una paradoja aparente: la resolución, *mientras más pequeña, mejor* (¡y sin embargo se habla de "alta resolución"! En la ecuación (20), una R grande (separación a resolver) significa *menor resolución*. En la práctica suele usarse el recíproco para que "mayor resolución" signifique poder *resolver* detalles más pequeños; por ejemplo $R=1/d_{\min}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, que además se parece a la [resolución cromática](#) (en dominio de frecuencia, no sólo de señales en el espectro visible).

NOTA: En algunas técnicas como la espectrometría, la resolución se define en términos del ancho de una distribución o curva espectral, o también como alguna medida de la extensión (ancho) de la [PSF](#) del sistema de adquisición. Tal extensión suele ser el *Ancho Neto a Media Altura (FWHM, en inglés)*, definido como el ancho de la curva o pico medido a la mitad del valor máximo (ver adelante la [Figura 11](#), abajo a la derecha).

Fin§ [►Índice](#)

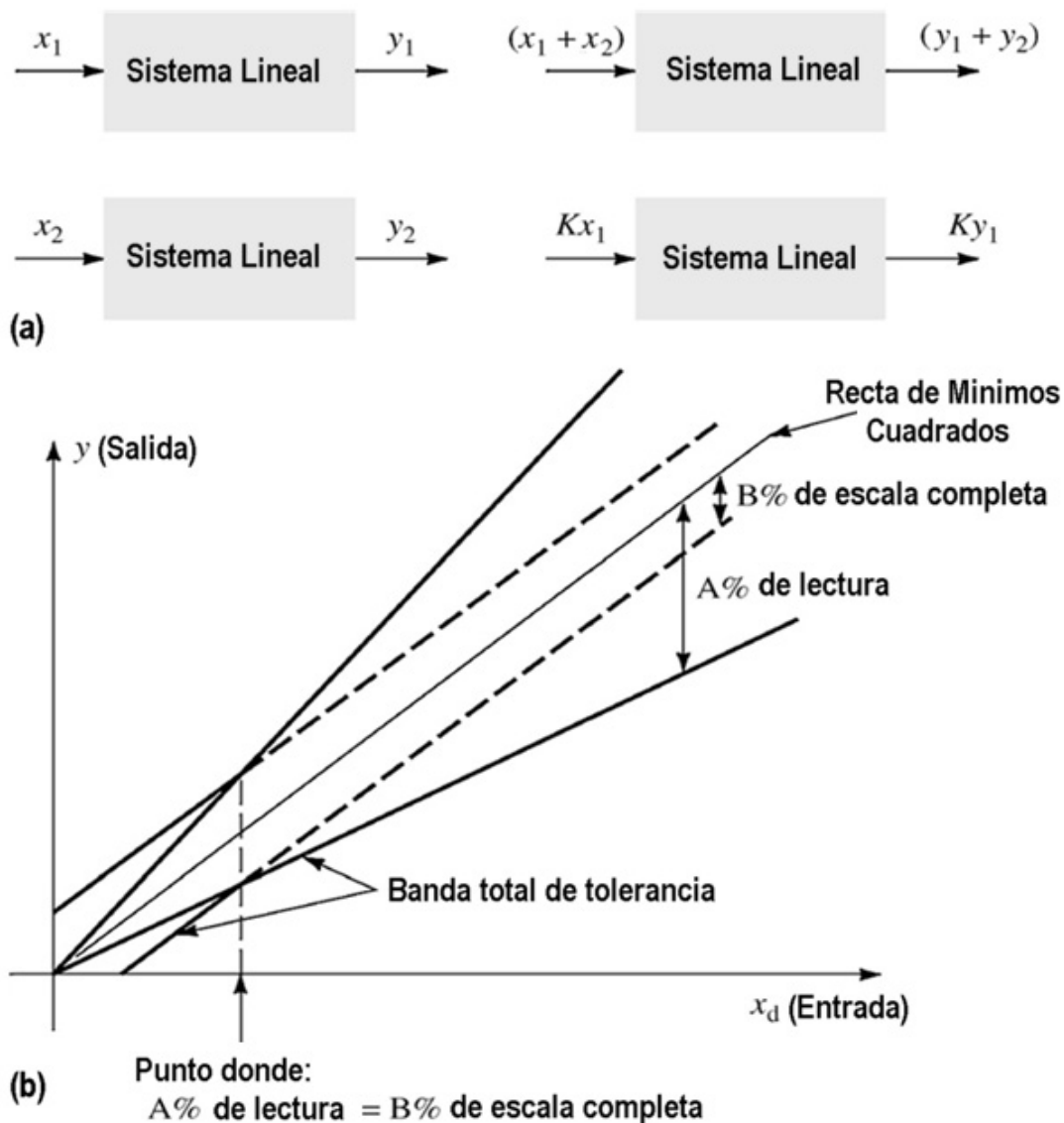


Figura 8. (Adaptada de la Fig. 1.4 del Webster). (a) Linealidad para un sistema, componente, función o transformación. Se muestra la salida para cuatro entradas diferentes. (b) Gráficas de no-linealidades independientes, igualando $\pm A\%$ de la lectura, o $\pm B\%$ de escala completa, la que resulte mayor (la que permita el error más grande).

- **(21) Resolución (en señales o imágenes discretas, volúmenes, etc.):** tamaño del *bin* (intervalo de muestra en una señal o clase en un histograma), píxel, voxel o elemento discreto (1/3 mm). En la práctica se dan las dimensiones de la imagen: el número de píxeles de cada renglón y de cada columna (tamaño de pantalla CRT es más o menos fijo). Ejemplo: 480×640 (renglones×columnas) es la resolución media del estándar VGA. Se incluye la precisión en bits del dato representado en el píxel (en color hay 3 canales, la resolución contiene además la especificación: 3×8 bits). “Alta resolución” en tomografía, MRI y visualización científica implica (en tecnologías de ~2010 en adelante): 1024×1024 ×16bits × 4 canales RGBα.

(22) Resolución de escala. Mínima división en una escala de medida. En instrumentos analógicos una aguja o indicador podría quedar entre dos divisiones y debe ya sea leerse el valor inferior (truncar o “piso”) o el superior (“techo” o redondeo).

♣ **(23) Profundidad de Campo.** En los instrumentos ópticos las lentes determinan límites para un enfoque óptimo. La *profundidad de campo* DF es el intervalo definido por las distancia antes y después del plano del objeto (este plano en foco) entre las cuáles todo aparece en foco. La DF (en nanómetros) es función de la longitud de onda de la luz usada y el inverso del cuadrado de la apertura numérica:

$$DF = \frac{1.22 \lambda}{(NA_{\text{objetivo}})^2} = \frac{3.27 R^2}{\lambda} \quad (21)$$

O sea que hay un compromiso: DF es pequeña para una alta resolución (R pequeña) y viceversa. Las imágenes *multi-foco* (cambiando planos focales) y las técnicas de *campo extendido* permiten soslayar esta limitación.

(24) Sistema Lineal: Un sistema, instrumento, transductor, elemento, procesamiento, filtro, o transformación T es **lineal** cuando al tomar las respuestas separadas $y_1=T(x_1)$, $y_2=T(x_2)$ a dos entradas x_1 y x_2 , se cumplen las propiedades de (Figura 8):

$$\textbf{Aditividad (o superposición):} \quad y_1 + y_2 = T(x_1 + x_2), \quad (22)$$

y para toda constante K ,

$$\textbf{Homogeneidad:} \quad K y_1 = T(K x_1) \quad (23)$$

♣ **Ejercicio:** Verifique que, si la entrada es un vector de componentes (u,v) y T es una transformación geométrica, consistente de una rotación por un ángulo θ , entonces T es una transformación lineal. Si se tiene adicionalmente una traslación por el vector (u_0, v_0) ; ¿es lineal o no es lineal esta nueva transformación? ¿Qué ocurre en coordenadas polares?

♣ **Ejercicio:** Si en un sistema o dispositivo S la respuesta y a una entrada x sigue un **modelo lineal**, es decir $y = mx + b$, con m una ganancia constante y b un offset constante distinto de cero, ¿es S lineal? Demuéstrelo; o proponga una condición para que sea lineal. En caso contrario (y considerando $b \neq 0$), si existen maneras de hacer lineal una re-interpretación o reformulación de S , proponga alguna. ¿Qué fue lo no-lineal?, ¿el sistema o su modelo?

Ejercicio: Verifique si la transformada de Fourier es o no es lineal (basta revisar una tabla de propiedades). ¿Qué consecuencia tiene el análisis de Fourier para las señales de entrada y salida en un instrumento o sistema con comportamiento lineal?

► (25) **PSF (Point Spread Function) Función de Dispersión Puntual (o de punto), respuesta a impulso** o función de respuesta o IRF).³

La **PSF** es la respuesta (salida) de un sistema cuando la entrada (o estímulo) es una *función impulso* (delta de Dirac $\delta(t)$, $\delta(x,y)$ en continuo, o delta de Kronecker δ_i , $\delta_{i,j}$ en discreto). En imágenes $\delta(x,y)$ es un punto luminoso, idealmente de "diámetro cero", de modo que la PSF teórica, matemática difiere ligeramente de la PSF física, real, que siempre resulta ser una mancha finita (no puntual) y determina la mejor resolución posible.

En un sistema lineal e invariante a corrimiento (**LSI**) o en el tiempo (**LTI**), la PSF es la misma función para cada punto del dominio. Por linealidad, puede entonces conocerse la respuesta (salida) a cualquier función de entrada usando la relación (*principio de superposición en dominio temporal (espacial)*) siguiente:

$$h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (24)$$

La **PSF** de un sistema, usualmente en *imagenología médica* y científica, es una característica que no siempre es presentada como "estática", aunque cumple con corresponder a una propiedad del sistema o instrumento ante una señal constante. Pero también puede variar temporalmente, aunque quizás de forma independiente a la entrada, por lo que tampoco es exactamente *característica dinámica*. Cuando la PSF de una imagen no es constante en el tiempo o espacio, entonces el sistema *no es invariante a corrimiento*. En la retina humana, por ejemplo, la PSF alcanza su tamaño mínimo en la fovea (región central del campo visual) y crece mucho hacia la periferia (hay en consecuencia menor nitidez); hay además menor densidad de conos y bastones en la periferia. Una variante de nomenclatura popular en español es *función de esparcimiento a un punto* (o *del punto*).

La **resolución neta** de un instrumento o una medición, imagen, etc., depende de la *discretización* (separación entre muestras, v. g., tamaño de píxeles, o período de muestreo), de la *cuantización* (ídem, entre valores del atributo o de la muestra propiamente dicha) y del efecto de la PSF del sistema (respuesta a impulso). Existen errores de discretización (en el dominio) y errores de cuantización (en el atributo) y aparte, un difuminado o suavizado más distorsiones o aberraciones debidas a la PSF. Ver el **Modelo Lineal de Degradación** en las notas de *Información y Señales*.

- ♣ En sistemas bidimensionales, la PSF suele ser isotrópica. Para dos ejemplos notables de PSF anisotrópica, ver el Anexo [LSF \(Line Spread Function\) y ESF \(Edge Spread Function\)](#).

³ Ver la presentación complementaria [Finite Apertures PSF LSF ESF.pdf](#)

- ♣ Las componentes de *difracción* de una PSF no se deben a la lente, sino a la forma y bordes de la apertura (diafragma o pupila), la longitud de onda del haz electromagnético (no sólo luz) y al valor f/N (número " f ") de la lente.

Las [Figuras 11-13](#) en el [Anexo C](#) ilustran los conceptos de la PSF, LSF y ESF.

Nota: Conviene evitar la nomenclatura "respuesta puntual" (mejor: respuesta a un punto o a impulso), por la ambigüedad; es la entrada la que es "puntual". Como una dispersión no es en general puntual, se implica que "dispersión puntual", es el efecto debido a una entrada puntual.

Fin§ [►Índice](#)

(26) Sistemas Lineales e Invariantes a Corrimiento (*Shift-Invariant, Linear System LSI*). En el caso de señales temporales se dicen **invariantes en el tiempo** (*Linear Time-Invariant* o **LTI**).

Son aquellos sistemas lineales S en que la relación entrada-salida puede modelarse, a través de la función PSF (respuesta a impulso h) del sistema S mediante la *convolución*; si la entrada es una función f (sea $f(t)$, o bien $f(x, y)$, etc.) la salida g (idem) y la PSF una función h (idem). Entonces:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= (f * h)(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau && \text{señales temporales} \\
 (f * h)(x, y) &= (h * f)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \zeta) f(x - \xi, y - \zeta) d\xi d\zeta && \text{imágenes}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

La interpretación de "invariancia" significa que la PSF es la misma (se conserva), ya sea en cualquier momento (sistemas invariantes en el tiempo) o en el espacio (sistemas invariantes a corrimiento espacial) y no depende de la posición. En sistemas no invariantes, la PSF depende ya sea del tiempo y/o de la posición y la convolución no aplica, la relación entrada-salida es una integral más compleja con una h distinta por cada instante y/o punto.

Ejercicio: Escriba la versión discreta y finita de las ecuaciones (25), haciendo por ejemplo $f_n = f(n\Delta t)$, con n entero en $[N_1, N_2]$ y Δt el paso de discretización. Revise el [anexo sobre la DFT](#).

- ♣ **Ejercicio:** Proponga cómo formular una relación entre f , h , g para sistemas lineales que no son invariantes a corrimiento (sea temporal o espacial).
- ♣♣ **Ejercicio:** Proponga cómo formular una relación entre f , h , g para sistemas invariantes a corrimiento (sea temporal o espacial) que no sean lineales. Si no haya alguna formulación, al menos discuta las dificultades.

Ejercicio: ¿Qué diferencias nota entre linealidad y sistema lineal invariante a corrimiento? ¿A qué simplificaciones importantes lleva cada propiedad?

► **Ejercicio:** ¿Cómo interpretaría la versión en dominio de frecuencia (temporal o espacial) de las propiedades de los sistemas LSI o LTI, en particular de la consecuencia de que *basta conocer la respuesta a impulso $h(t)$ (=PSF) para conocer la respuesta a cualquier entrada?*

► **Nota:** Todas las características anteriores se pueden generalizar a entradas y salidas vectoriales (múltiples canales o modalidades), imágenes (escalares, vectoriales, etc.), video, e información multi-dimensional en general.

► **Ejercicio:** Se tiene una transformación lineal vectorial bidimensional $\mathbf{T}:\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{Z}^2$ y cada una es una imagen de $N \times M$ elementos. Dados valores mínimos y máximos en $\mathbf{A}$ y en $\mathbf{B}$, formule el equivalente a la relación (3) para expresar un valor $\mathbf{v} \in \mathbf{B}$ en términos de uno $\mathbf{u} \in \mathbf{A}$. En otras palabras, ¿cómo mapea las coordenadas de una ventana en otra? (por ejemplo de una escena 2D en la pantalla de su computadora). ♣ ¿Qué problemas identifica en el caso discreto y cómo los resolvería?

♣♣ **Ejercicio:** Formule o al menos discuta cada una de las características estáticas para diversos casos de información multidimensional (dominio y atributo).

Fin§ ► [Índice](#)

Hay también características que no son exactamente estáticas, pues con frecuencia involucran cambios temporales o en función de una variable que cambia en circunstancias diferentes. También suelen introducirse antes de estudiar las características dinámicas. Una importante es la histéresis.

- **(27) Histéresis:** Fenómeno en que dos cantidades se relacionan de una forma **que depende** de que una aumente o decrezca en relación a la otra (no necesariamente constante). La gráfica de la variable dependiente "y" contra la independiente "x", que aumenta y luego disminuye, da lugar a un *ciclo de histéresis K* ([Figura 9](#)). El aumento o disminución podría ser función del tiempo (y entonces es característica dinámica), pero como hemos visto con otras características estáticas, el aumento no es necesariamente temporal, sino cambiar en distintas situaciones, y la curva caracteriza el comportamiento del sistema, sensor, instrumento o proceso para distintos valores de las variables. Ambas pueden ser parámetros del sistema, en vez de entrada/salida. Puede también suceder que la dependencia temporal precisa (y por tanto del contenido en frecuencias) resulta irrelevante.

También se define *histéresis* en términos de un *retardo* o de una *memoria*: es la tendencia de un material (o fenómeno) a conservar una de sus propiedades (o respuesta), en ausencia del estímulo que la ha generado. Por extensión, el término se aplica a fenómenos que no dependen sólo de las circunstancias actuales, sino también *de cómo se ha llegado* a esas circunstancias (historia). La histéresis puede ser inherente al fenómeno o material, o puede inducirse intencionalmente en el diseño de dispositivos o sistemas, en particular en situaciones que implican fluctuaciones rápidas entre estados muy diferentes (discontinuidades).

Ejemplo 1 ([Figura 9](#)): Dado un material ferro-magnético, se grafica la densidad de flujo magnético **B** contra la intensidad de campo magnético **H**. Si inicialmente la magnetización es 0, al aumentar **H**, la densidad alcanzará saturación **P**. Al reducir **H**, comenzará a formarse el ciclo **PQRSTP** con área cada vez mayor, al volver a aumentar y disminuir **H**. Esta área es proporcional a la pérdida de energía que ocurre durante el ciclo. El valor **Q** se llama *remanencia* o *retentividad*, siendo la densidad de flujo magnético que queda en el material, después que el campo tras saturación se reduce a 0. **R** es la fuerza coercitiva igual a la intensidad de campo **H** requerida para reducir a 0 el remanente de densidad de flujo. Una aplicación de mediados del siglo XX fueron los registros de memoria en un disco magnético o los de muchas computadoras tipo "main-frame".

Ejemplo 2: Un termostato es un control *on-off* con histéresis *intencionalmente incorporada*. El control consiste de dos umbrales de temperatura y definen dos extremos del ciclo de histéresis: umbral T_1 de descenso de temperatura (se enciende un calefactor) y umbral T_2 de ascenso (se apaga el calefactor), con $T_2 > T_1$. El ciclo (fijo) entre ambos umbrales evita oscilaciones del control *on-off* que ocurrirían sin histéresis ($T_2 \equiv T_1$). Muchos dispositivos de *switcheo* (interruptores), o de disparo siguen el mismo principio, evitando desgaste, chispas o recalentamiento del interruptor y en otros casos una parálisis del sistema.

Ejemplo 3: Hay compuestos químicos cuyas transiciones de fase (sólido a líquido, etc.) no se producen a la misma temperatura en ambos sentidos; por ejemplo, cierto *gel de agar* se licúa a 35°C, pero no vuelve a *gelificar* hasta que baje la temperatura a unos 15°C; sin embargo, a temperaturas intermedias entre la de licuefacción y la de gelificación, el estado dependerá de su historia térmica.

Ejemplo 4: El monitoreo de un parámetro puede presentar *histéresis*: hay dos umbrales críticos (o más) y dos eventos distintos; el objetivo es por ejemplo tomar una decisión, activar un actuador, registrar los valores, el tipo de evento y/o la hora y fecha en que ocurrió, etc.), un umbral T_1 (o evento E_1) para cuando la señal disminuye y otro umbral T_2 (o evento E_2) para cuando aumenta. Generaliza el interruptor de control on/off de un calefactor.

Ejemplo 5: En segmentación y edición de imágenes se usa un umbral T_1 para seleccionar por intensidad una zona; este umbral “se pasa” un poco de lo deseado y, para quitar el exceso, se deselectiona (o sea se resta como selección) aquello con un umbral T_2 , siendo usualmente $T_1 > T_2$, aunque en ciertos casos es al revés. Algo semejante ocurre para segmentar zonas de interés. A veces se combina haciendo la primera selección global independientemente de que las zonas estén o no conectadas (fragmentos) y la segunda local, sólo en zonas conectadas. Es claro que el procedimiento puede ser rápido, lento, discontinuo, en fin, la dependencia temporal resulta irrelevante.

♣ **Ejemplo 6 (abstracto):** Un evento X es interpretado de la manera A , si acontece en una dirección o en ciertas condiciones (algo aumenta o cambia de manera que llamamos “positiva” o “cambio en dirección $+A$ ”); pero si acontece en otra dirección (la contraria), o en las condiciones contrarias (algo disminuye o cambia de la manera que llamaríamos “negativa”, o “ $-A$ ”), entonces X es interpretado de la manera complementaria “ A^c ” ó “ $-A$ ”. En vez de interpretar, se puede obtener un resultado de dos posibles respuestas en vez de una o bien, una respuesta a partir de dos posibilidades (como cuando consideramos las dos soluciones de una ecuación de segundo grado). A veces se habla de *asimetría* e inclusive de *bifurcación*. Se modelan, como procesos con histéresis: fenómenos biológicos, químicos, sociales, económicos (hay un modelo notable sobre el desempleo cíclico en términos de histéresis), culturales o de comportamiento humano y el lenguaje. La *polisemia* significa *múltiples significados*, sea simultáneos, o en función de una condición (un “aumento” o “disminución”, pero pueden haber varias direcciones de cambio. Por ejemplo tomando en serio la respuesta ambigua “sí pero no” a una pregunta suele significar que “sí”, en un sentido o en tales condiciones, pero significa “no”, en otro sentido o en otras condiciones. Muchas contradicciones y paradojas aparentes son en realidad efecto de una histéresis en los propios elementos lógicos (o en su interpretación) de una aseveración.

Ejemplo 7: En una clase, la formulación de una pregunta tiene un objetivo, significado o interpretación que depende de quien la hace y a quien va dirigida: Cuando un estudiante la formula al profesor (el sentido en la jerarquía es “↑”), usualmente su fin es plantear dudas, pedir aclarar una definición, etc.,

en resumen: *aprender*. Cuando un profesor formula una pregunta a un estudiante (el sentido en la jerarquía es " $\downarrow$ "), usualmente la finalidad es saber si entendió o aprendió correctamente algo, si ha estudiado, o saber si usa correctamente lo aprendido, etc., en resumen: *evaluar*. Claro que los papeles pueden invertirse y el estudiante preguntar para saber si el profesor sabe, o éste indagar para aprender algo de sus estudiantes. Hay métodos (por ejemplo el *socrático*) en que el profesor pregunta como si no supiera, u objetivos que son indistintos como el pedir o dar ejemplos y aplicaciones. Situaciones semejantes de asimetría y dependencia del sentido ocurren en diversas jerarquías, como la de hijos-padres-abuelos, empleados-jefe, seguidor-líder, paciente-médico, soldado-sargento-...-general..., servidor-amo, deportista-entrenador, explorador-guía, etc.

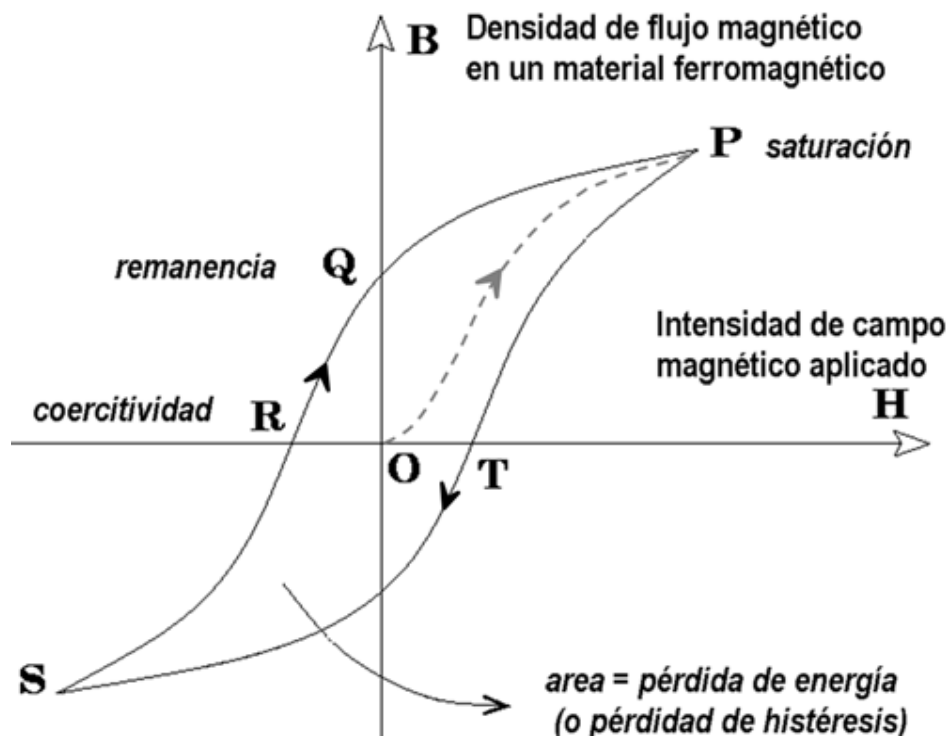


Figura 9. Gráfico del ciclo o lazo de histéresis. La fuerza de campo magnético **H** puede aumentar en función de t o de otra variable (el ciclo en sí no depende de t). El ciclo se "ensancha" en espiral desde el centro (curva punteada en gris), bajo ciertas condiciones iniciales.

- ♣ **Ejemplo 8** (cómputo): En una prueba de igualdad ("**comparación relajada**") entre una variable de referencia x_0 y una variable x , medida o calculada, la variable x puede ser afectada por ruido, discretización o redondeo, imprecisión, o su error proviene de un algoritmo con precisión numérica finita, ser un problema "mal condicionado", etc. En vez de hacer la prueba " $x = x_0$?", para tomar una decisión, se introduce una histéresis y dos umbrales, o sea que la prueba se relaja a " $|x - x_0| < \varepsilon$ ", o sea que se tienen dos umbrales (dos pruebas): " $((x_0 - \varepsilon) < x) \text{ OR } (x < (x_0 + \varepsilon))$ ", con *epsilon* la tolerancia, en función de posibles fluctuaciones. Estrictamente no es histéresis convencional pues no hay dependencia de si la variable aumenta o disminuye: los dos umbrales más bien definen un intervalo de tolerancia. Compárese con la introducción de dos umbrales en un

[control on/off](#). Un ejemplo afín es un circuito comparador de señales (ver el capítulo sobre Amplificadores Operacionales): la "igualdad" corresponde a una diferencia pequeña (la epsilon), si no, en una igualdad estricta ($\epsilon=0$) el circuito oscila debido al ruido en ambas señales.

Ejercicio: Encuentre o imagine otros ejemplos de histéresis en diversas áreas. Puede ser la histéresis de una respuesta que cambia según el incremento o decremento de una variable independiente, o la histéresis generalizada, de una "salida", según un sentido (o significado) A y un sentido (o significado) B de la "entrada" (las comillas son por establecer una analogía o metáfora con sistemas que hemos estudiado, o bien entradas y salidas generalizadas en diversos ámbitos). También pueden ser contextos A, B diferentes.

En general, hay histéresis si hay dos umbrales para una respuesta, y si uno funciona en un sentido (aumenta una variable) y el segundo en otro (disminuye la misma variable). También, podrían existir dos variables y sólo hay respuesta al umbral 1 si una aumenta mientras la otra se mantiene fija y sólo hay respuesta al umbral 2 si ambas disminuyen. Hay combinaciones más complejas; en todo caso existe una asimetría en el comportamiento del sistema. Como caso práctico, semejante al control on/off ([ejemplo 2](#)), es el uso de criterios "asimétricos" en la toma de decisiones; por ejemplo: las ventas de una compañía aumentan y se decide aumentar el precio cuando las ventas sobrepasan un umbral V_1 , con el fin de aumentar ganancias pero además no se puede atender ya la creciente demanda. Al bajar las ventas, no se disminuyen los precios al bajar a V_1 , sino hasta que caen por debajo de V_2 (inferior a V_1) y se mantienen así mientras las ventas no rebasen el nivel V_1 .

La noción de tener "dos sentidos" denominados (+) o (−), o bien ($\uparrow$) o ($\downarrow$), se puede generalizar a parejas de opuestos: creciente/decreciente, ida/vuelta, subir/bajar, abrir/cerrar, (giro horario)/(giro antihorario), (pendiente +/pendiente −), afirmar/negar, erosionar/dilatar, aclarar/oscurecer, saturar/neutralizar, (camino A) / (camino B), (significado A) / (significado contrario) o (significado B), lo cual permite vislumbrar que la histéresis podría ser múltiple y no sólo binaria: un comportamiento distinto para cada sentido o contexto A, B, C,... ♣ La histéresis en procesamiento de datos suele aparecer en dos operadores duales cuando estos no conmutan.

Ejercicio: Dada una función $z=f(x, y)$, ¿cómo sería una histéresis bidimensional? ¿Cómo podría haber una histéresis unidimensional en el dominio de f ?

- ♣ En algunos sistemas la histéresis puede generarse mediante *retroalimentación positiva*. Cuando la ganancia del lazo de retro-alimentación es mayor a 1, la salida se aleja de la entrada; si es mayor a la entrada, entonces la salida se mueve hacia el límite positivo más cercano, si es menor a la entrada, entonces se mueve hacia el límite negativo más cercano. Una vez que alcanza el límite se estabilizará; sin embargo si la entrada sobrepasa el límite, entonces la retroalimentación cambia de signo a negativa y entonces el proceso se revierte: la salida se mueve en dirección opuesta hasta que alcanza el límite opuesto. El sistema entonces presenta *comportamiento biestable*. Esta

propiedad (recordar el switcheo inestable de un control on-off si sólo hay un umbral, al haber dos, presenta también un comportamiento biestable) es la base de dispositivos osciladores y compuertas lógicas con capacidad de memorizar un estado lógico.

♣ Formulación Matemática de la Histéresis:

Sea $y=f(x)$ la respuesta de un sensor o sistema a la entrada x , o en general, representa cualquier relación funcional entre las variables x y y . La respuesta o comportamiento $f(x)$ puede depender de la progresión de x (ascendiendo $\uparrow$ ó descendiendo $\downarrow$), en el intervalo $[x_1, x_2]$, de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & \text{if } x \uparrow \\ f_-(x) & \text{if } x \downarrow \end{cases} \quad (26)$$

con f_+ y f_- dos comportamientos funcionales distintos. Podríamos expresar una *progresión temporal* $x(t)$, y usar referencias $t_1 < t_2$ para definir “ $x \uparrow$ ” y “ $x \downarrow$ ”.

Decimos que existe *histéresis positiva*, entre x y $y = f(x)$, en $[x_1, x_2]$, si y sólo si:

$$f_+(x) > f_-(x) \quad (27)$$

y existe *histéresis negativa* en el mismo intervalo si y sólo si:

$$f_+(x) < f_-(x) \quad (28)$$

El circuito cerrado (*closed loop*) cuando x inicia en $x=x_1$, incrementa monotónicamente hasta $x=x_2$ (“**punto de saturación**”) y regresa decrementándose monotónicamente hasta $x=x_1$, se llama “**Ciclo de Histéresis**”. La *pérdida de histéresis* (área del ciclo) es la cantidad:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_+(x) dx - \int_{x_2}^{x_1} f_-(x) dx \quad (29)$$

Una **definición discreta** de la histéresis, con $k = 0, 1 \dots$, sería la siguiente:

$$f(x_k) = \begin{cases} f_+(x_k) & \text{if } x_k \geq x_{k-1} \\ f_-(x_k) & \text{if } x_k < x_{k-1} \end{cases} \quad (30)$$

♣♣ La *pseudo-histéresis* o *histéresis generalizada* se refiere a un “desdoblamiento” múltiple de $f(\cdot)$ no sólo si el argumento disminuye o aumenta, sino a condiciones expresadas como *predicados* (evaluados como variables Booleanas) sobre $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) & \text{si } [\textit{Predicado}_1(\mathbf{x})] \\ f_2(\mathbf{x}) & \text{si } [\textit{Predicado}_2(\mathbf{x})] \\ \vdots & \vdots \\ f_N(\mathbf{x}) & \text{si } [\textit{Predicado}_N(\mathbf{x})] \end{cases} \quad (31)$$

por ejemplo, un *campo de distancia Euclidiano* se puede visualizar, diferenciando el interior del exterior mediante color y marcando curvas de nivel de interés; se define entonces como:

$$[\mathbf{D}(\mathbf{A}(\mathbf{p}))](\mathbf{p}) \triangleq d(\mathbf{p}) = \text{sgn} \cdot \min_{\mathbf{q} \in \partial \mathbf{A}} \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|, \quad \text{con } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{A} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\text{sgn} = \begin{cases} \overbrace{(255, 0, 0)}^{R, G, B} & \text{si } (\mathbf{p} \in \mathbf{A}^c) \quad (\text{exterior de } \mathbf{A}) \\ (255, 255, 255) & \text{si } (\mathbf{p} \in \partial \mathbf{A}) \quad (\text{frontera de } \mathbf{A}) \\ (0, 0, 255) & \text{si } (\mathbf{p} \in \mathbf{A}) \quad (\text{interior de } \mathbf{A}) \\ (64, 128, 255) & \text{si } (\mathbf{p} \in \partial(\text{Bin}|_{d=10}(\mathbf{D}(\mathbf{A}))) \quad (\text{contorno a distancia } =10 \text{ de } \partial \mathbf{A}) \end{cases} \quad (32)$$

Fin§ [►Índice](#)

Características Estáticas Locales.

Todas las características estáticas se definieron de forma global pero en su mayoría se pueden aplicar de forma local a subconjuntos de los datos y regiones de interés (ROI) tanto en el dominio como en el atributo; por ejemplo: cierto comportamiento resulta lineal en un lapso inicial, pero no lineal después (se había visto de hecho [intervalo de linealidad](#) y *linealidad por pedazos (piecewise linearity)*); el contraste en una imagen es elevado en los objetos cercanos pero bajo en el fondo; en un registro sísmico el intervalo de variación es pequeño al inicio y al final de un evento, la precisión es elevada para muestras con un atributo mayor a cierto umbral, hay sistemas ópticos con mayor resolución en el centro que en la periferia del campo visual (en vez de plantear un sistema no invariante a posición, se modela con dos o más sistemas invariantes pero de diferente PSF), etc.

Una justificación de la caracterización local, haciendo por ejemplo una partición del dominio (variables independientes) es la misma que en el caso de un modelo lineal-a-pedazos (*piecewise linear*), que la de aproximar un modelo o descripción no lineal a la unión de componentes lineales en ciertos intervalos o regiones.

Tales variaciones locales o regionales de una característica estática se pueden estudiar y describir mediante curvas, poli-líneas, y en general mapas de distribución temporal o espacial. Es común que un instrumento sea diseñado como "baterías" o "bancos" de subsistemas con características estáticas definidas en distintos intervalos de trabajo y exista un control que selecciona y activa el subsistema de acuerdo a las condiciones de funcionamiento, el intervalo del mesurando o de su espectro, adaptando la medición para obtener por ejemplo una amplia gama de resoluciones, intervalos dinámicos, etc. Un ejemplo es el banco de filtros y la variación de parámetros (constante RC) en un receptor de radiofrecuencia, permitiendo sintonizar una gran cantidad de estaciones de radio.

Fin§ [►Índice](#)

ANEXOS

(A) Entrada(s) (*input(s)*). Cuando se trata de un sensor o instrumento, una entrada es el valor (o valores) físico y real, posiblemente variable en el tiempo, de un mesurando justo antes de ser *sensado* o capturado, "proyectado" en el sensor, o al "excitar" al último, producir una respuesta convertida en señal y luego en medición. En principio no es posible conocer este valor antes de ser sensado, o si la entrada no es salida de otro dispositivo o instrumento; lo que se conoce es lo que un instrumento (o un procedimiento que involucra al mesurando) mide, es decir la *salida*. En general, una entrada puede ser relativa (es decir, es la salida de otro instrumento o procedimiento, en cuyo caso, es posible conocerla desde antes –salvo por el ruido que la degrada). Una entrada puede ser un estímulo o excitación (conocidos o generados) a un sistema o dispositivo. Un proceso o cálculo también tiene *entradas*. En un sistema de control, su entrada (o la salida que produce para un actuador) se llama **mando**.

Puede no haber entradas *explícitas* (como en un reloj, que "mide" el tiempo indirectamente al medir movimientos periódicos), o no ser mesurandos, sino otra información (una referencia, una señal de control, un resultado, etc.).

(A-bis) Salida(s) (*output(s)*). En caso de sensores e instrumentos, una salida es el valor (o valores) físico (medido o deducido) de un mesurando, posiblemente variable en el tiempo. Puede también generarla un instrumento, un sensor (tras *sensar*), transductor o una etapa de medición o procesamiento, por lo que puede ser "parcial" o "final" y la denominación es relativa: una salida puede ser la entrada para otra etapa del mismo dispositivo o de otro; puede ser la **respuesta** a un estímulo, excitación o un mesurando modificado. También puede ser el **resultado** de un proceso o cálculo. La salida de un sensor o instrumento es la información (respuesta o efecto causado) que se tiene a partir de la entrada, para ese instrumento. En vez de dispositivos, se pueden tener procedimientos o cálculos que producen *valores de salida*.

Notas:

- ♣ En la *retroalimentación*, *realimentación* o [feedback](#), una salida puede bifurcarse y combinarse con la entrada que dio lugar a tal salida; esto si son de la misma naturaleza o hay una conversión a la forma de energía, estructura, dimensionalidad y formato de la entrada. Lo contrario es posible: si una entrada y una salida son de la misma naturaleza (o la entrada puede convertirse a la forma de energía, etc. de la salida, es posible que la entrada no sólo conecte al dispositivo que da origen a la salida, sino que también se bifurque antes y se combine con dicha salida (*feedforward*). Puede haber otras combinaciones, si se tienen varios dispositivos (o sistemas o procedimientos) y/o varias entradas o salidas. La *retroalimentación cruzada* es un ejemplo.

Salidas o entradas pueden ser constantes o cambiar con el tiempo o cambiar bajo diversas condiciones. Pueden ser escalares, múltiples, vectoriales (*multicanales*), señales o arreglos de señales, etc., independientemente de la dimensionalidad de las entradas o salidas respectivas. Por ejemplo, consideremos la operación de promediar (o un circuito electrónico que promedia N señales): sus entradas son los N valores x_n a promediar y la salida, un sólo valor escalar $\bar{x}$. El formato también puede ser muy diferente; recordar que una función posible es de codificar señales, *multiplexarlas*, etc.

Aunque la entrada se mantenga constante, en muchos instrumentos o en ciertos casos, la salida puede variar y viceversa (v. g., el parámetro de frecuencia de un generador de ondas o bien, un frecuencímetro cuya entrada es una señal que ondula regularmente: la salida es su espectro).

En prácticamente cualquier sensor tiene sentido pensar en la **entrada como un estímulo** al cual responde el sensor; la **salida es esa respuesta** y puede o no estar en el mismo dominio de la entrada (si hay conversión entre formas de energías, el sensor es un transductor). Por ejemplo la entrada puede ser una señal química o de temperatura mientras la salida es una señal eléctrica, o también simplemente la salida se halla en un intervalo distinto (de infrarrojo a visible, por ejemplo). Entradas, salidas, respuestas y estímulos son términos relativos y una respuesta puede ser un nuevo estímulo, etc. Sea como interpretación en general, o en algunos contextos, *entradas y salidas* equivalen respectivamente a *causas y efectos*.

Cuando una línea de transmisión (señal de entrada, salida o de control) sufre bifurcación (se divide en dos líneas) o más ramificaciones es claro que la energía se reparte y podría resultar insuficiente para excitar/activar un sensor u otro dispositivo. La capacidad de un dispositivo de salida o entrada para enfrentar este fenómeno (en una señal eléctrica el voltaje se conserva pero la corriente se divide) se denomina *fan-out*. Conversamente dos o más señales pueden converger, sumando sus corrientes y tal capacidad se denomina *fan-in*. La problemática es parte del tema de *acoplamiento de impedancias*. Un dispositivo que refuerza la potencia (corriente en el caso de una señal eléctrica) se denomina *buffer* y se verá en el tema de *Amplificadores Operacionales*.

Ejercicio: Inclusive en un sistema retroalimentado, las entradas y salidas equivalen a causas y efectos. Explique entonces la contradicción (aparente) de que la entrada (causa) contiene también como componente a la salida (efecto) a la que da lugar. Formule tal situación, en un sistema con ganancia G . *Hint parcial:* ¿Cómo “despeja x ” en la ecuación $x = \sin(x)$.

Fin§ [►Índice](#)

(B) Componentes o Dispositivos en Cascada

En un sistema o instrumento con componentes o dispositivos *en cascada* (bloques, ver [Figura 10](#)), si cada bloque tiene asociada una *ganancia* o *función de transferencia* G_k para cada pareja k de entradas/salidas al elemento o bloque k de la cascada (pueden ser K "sub-sistemas", distintos dispositivos, etc.), entonces, si cada elemento o bloque es lineal, el conjunto lo es y la ganancia total G_{total} es el producto de cada ganancia G_k por la anterior:

$$y_{output\ K} = G_{total}(x_{input\ 1}) = G_K \cdot G_{K-1} \cdots G_2 \cdot G_1(x_{input\ 1}) \quad (33)$$

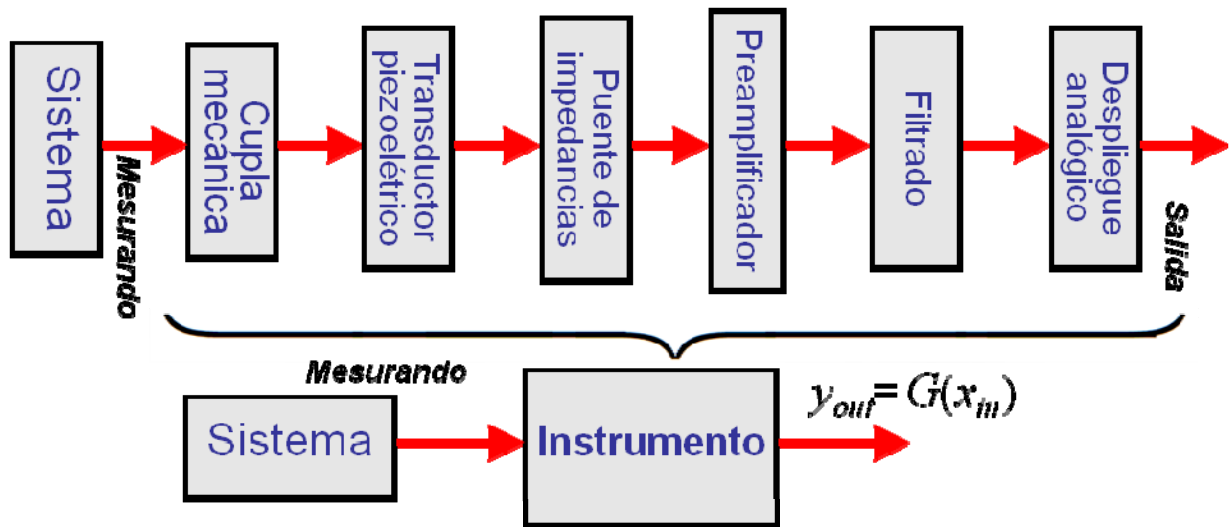


Figura 10. Diagrama en bloques de un instrumento que mide presión y despliega el valor directamente, (un medidor de aguja). Cada etapa k tiene asociada una ganancia o función de transferencia G_k y cada salida se convierte en entrada de la etapa siguiente.

En un sistema de orden mayor a cero (para ciertas etapas), algunas ganancias dependen del contenido espectral de la entrada correspondiente y la Transformada de Laplace de cada salida se denomina respuesta en frecuencia.

Como características estáticas, las funciones de transferencia G_k y G son estrictamente *funciones de transferencia estáticas* y pueden ser distintas de aquellas dinámicas que en dominio de frecuencia son funciones de $(j\omega)$; por desgracia suele usarse la misma notación. De acuerdo a la ecuación (4), podemos escribir (33) de la siguiente manera en términos de entradas y salidas (notar el paso del denominador y el hecho de que cada salida $y_{output\ k}$ es la entrada $x_{input\ k+1}$):

$$G_{Total} = \frac{y_{output\ K}}{x_{input\ 1}} = \frac{y_{output\ K-1}}{x_{input\ K-1}} \cdot \frac{y_{output\ K-2}}{x_{input\ K-2}} \cdots \frac{y_{output\ 2}}{x_{input\ 2}} \cdot G_1 \quad (34)$$

Ejercicio: Verifique las expresiones (33) y (34); primero en el caso de bloques que satisfacen la ecuación (4) y luego, por inducción, con cada ganancia entrada/salida en cada expresión $y_{\text{output } k} = G_k(x_{\text{input } k})$ haciendo la k -ésima entrada ($k > 1$) igual a la $(k-1)$ -ésima salida (bloque anterior) y aplicar la regla del producto en cascada: $G_k(G_{k-1}(x_{\text{input } k-1})) \equiv G_k \cdot G_{k-1}(x_{\text{output } k-1})$.

♣♣ **Ejercicio:** Tras estudiar el capítulo *IV Características Dinámicas*, escriba la formulación de todo lo anterior en dominios temporal (transformada de *Laplace*) y dominio de frecuencia ω . ¿Cómo haría tal formulación en sistemas no invariantes a posición? ¿Es posible hacerlo en sistemas no lineales?

Fin§ [►Índice](#)

(C) LSF (*Line Spread Function*) y ESF (*Edge Spread Function*)

Dos ejemplos especiales de las [PSFs](#) anisotrópicas se pueden generar artificialmente a partir de una PSF isotrópica y ciertos filtros de la fuente de iluminación (por ejemplo, en un microscopio):

(A) la ***Función de Dispersión Lineal*** (*Line Spread Function LSF*), o ***de ranura*** (*slit*), o ***respuesta a línea*** (en vez de punto, notar que se evita decir "respuesta lineal", que es confuso).

(B) la ***Función de Dispersión a Borde*** (*Edge Spread Function ESF*) o ***respuesta a escalón***.

La ESF es la más fácil de medir en un sistema óptico: se promedian varias ESFs a lo largo de un escalón en 2D (una lámina rectangular, con un borde muy fino, que cubre la mitad de la fuente de iluminación, por ejemplo en el campo brillante de un microscopio óptico). La imagen resultante será mitad negra y mitad blanca, con un borde difuso debido a la ESF (para una fuente puntual, la mancha difusa que se obtiene es debido a la PSF del sistema óptico).

La derivada de la ESF es la LSF, pues en el eje x la derivada de un escalón es la función *delta de Dirac*, y en nuestro caso se forma un borde haciendo en y el escalón. Medir experimentalmente la LSF es más complicado, por la dificultad de contar con fuentes luminosas lineales de abertura muy estrecha; el efecto de ventana espacial aplica. Varias muestras de la estimación de la LSF mediante derivadas de la ESF, con perfiles en varias orientaciones ($x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$) (reorientando la entrada escalón) permiten finalmente estimar la PSF del sistema, que requeriría una fuente puntual de luz para su medición directa. Adicionalmente permiten determinar si tal PSF es isotrópica, y si no, se obtiene explícitamente como $PSF(\theta)$.

Es notable que la ESF no sufre del efecto de ventana finita por no haber ninguna abertura. Aunque tal condición permite conocer la respuesta a escalón, no permitiría usarlo para formación de imágenes, como sí es posible con una fuente puntual; su valor es permitir estimar la PSF. Aún así el problema de la difracción de la luz está presente, y afecta la respuesta ESF. Un segundo problema afecta la estimación de la LSF: la derivada de una señal funciona como filtro de realce de altas frecuencias; de modo que amplifica componentes de alta frecuencia del ruido presente en la ESF. Las [Figuras 11-13](#) ilustran la PSF, la LSF y la ESF en sistemas de imagenología en general.

Nota: Desde luego pueden existir funciones de respuesta a entradas arbitrarias (ver *eventos de señal*, en el tema de [Información y Señales](#)), por ejemplo la respuesta a una imagen producida por arreglo de lentes o bien una fila de ranuras separadas por una distancia del orden de la longitud de onda en la entrada, estos ejemplos en un sistema óptico donde se estudian fenómenos de difracción o de patrones de interferencia.

Ejercicio: Proponga un modelo del *astigmatismo* visual (ojos de seres vivos pero también en instrumentos ópticos) a partir de alguna PSF anisotrópica.

- ♣ **Ejercicio:** Si en una ESF no hay ventana (recordar el modelo de la cámara lúcida o lo que ocurre con lentes no ideales), ¿por qué el borde producido por el sistema presenta dispersión y no es tan perfecto como la plantilla (entrada escalón), ¿qué factores producen la dispersión de la ESF (i.e., qué la compone)?



Entrada: función impulso $\delta(x,y)$ **Salida:** $PSF(x,y) = h(x,y) = \mathbf{T}(\delta(x,y))$

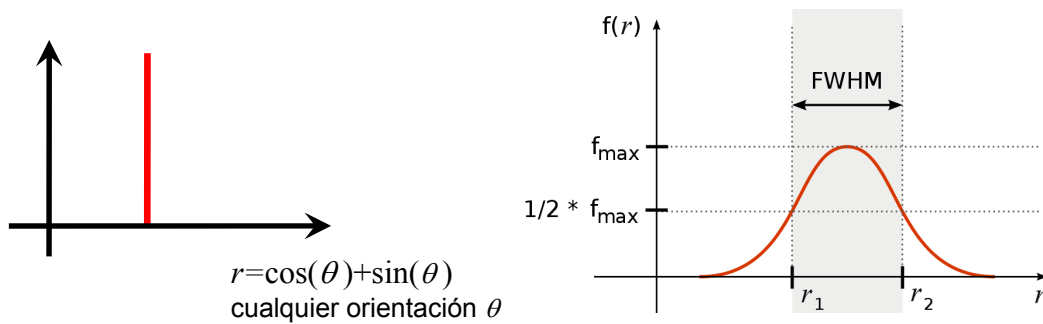


Figura 11. PSF: Point Spread Function (Función de Dispersión Puntual o Respuesta a Impulso).

FWHM: Full Width at Half Maximum (Ancho Neto a Medio Máximo). Como no existen fuentes puntuales de luz perfectas, la PSF se estima a través de la LSF media o de la ESF. Es común modelar la PSF mediante una función gaussiana, cuya sigma es $\sigma \approx 0.4246 \text{ FWHM}$.



Entrada: función ranura $\delta(x)$

Salida: $LSF(x)$

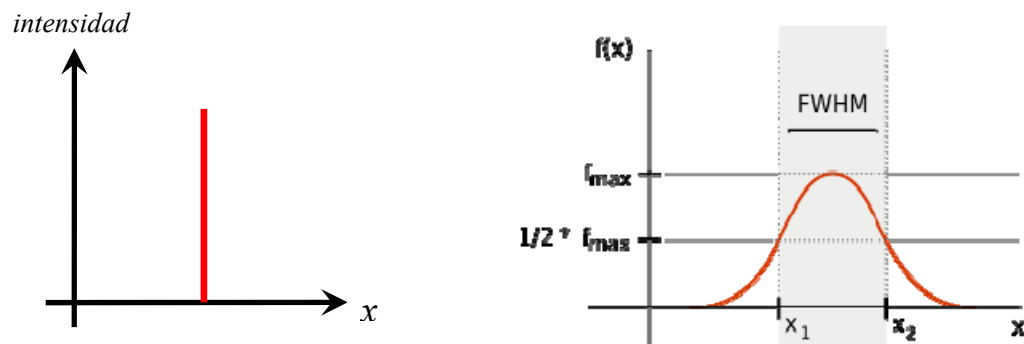


Figura 12. LSF: Line Spread Function (Función de Dispersión Lineal (a Línea) o Respuesta a ranura o a línea). La PSF suele estimarse al medir un promedio de varias mediciones de la LSF a lo largo de la ranura.



Entrada: función escalón $\square(x)$

Salida: $ESF(x,y)$

$$LSF(x) = \frac{\partial}{\partial x} ESF(x, y)$$

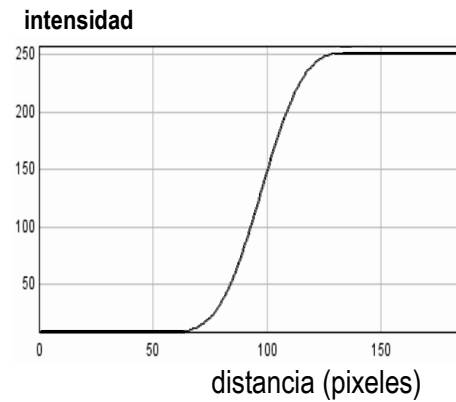
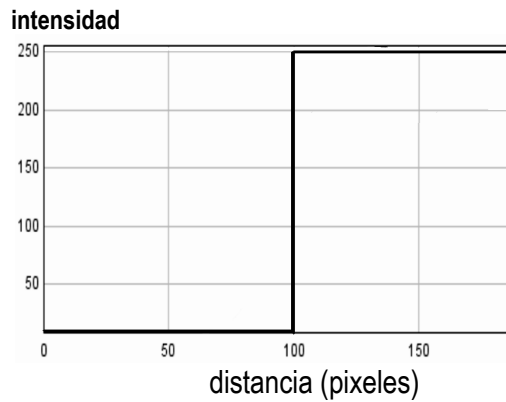


Figura 13. ESP: Edge Spread Function (Función de Dispersión de Borde o Respuesta a escalón).

Advertencia: Derivar una señal amplifica el ruido, mientras que integrarla lo atenúa. La ESF es mucho más fácil de medir que la LSF y la PSF; se promedian varias mediciones de la ESF, o bien se promedian sus derivadas, o cuál atenúa el ruido producido al derivar. Al hacerlo a diversas orientaciones para el caso 2D, se vuelve a obtener un promedio que es la mejor estimación de la PSF.

Fin§ [►Indice](#)

(D) Función de Transferencia Óptica en 2D (OTF y MTF)

Consideremos sistemas [lineales e invariantes a corrimiento](#) (LSI, o *espacialmente invariantes*) en dos dimensiones. Cuando las entradas y salidas representan cantidades positivas o cero, tales como la intensidad luminosa en un *sistema de imagenología* (formación y adquisición de imágenes, *imaging system*), entonces la [PSF](#) es la *respuesta a impulso*, $h(x, y)$, de tal sistema. La *respuesta en frecuencia espacial* $H(x, y)$ es la transformada de Fourier de $h(x, y)$.

Para un *sistema de imagenología* [espacialmente invariante](#), su **Función de Transferencia Óptica** (OTF) en 2D, se define como la *transformada de Fourier de la PSF, normalizada a su valor en (0,0)*, o sea:

$$OTF(u, v) = \frac{H(u, v)}{H(0, 0)} \quad (35)$$

La OTF de un sistema de adquisición de imágenes es una medida global de su resolución.

La **Función de Transferencia en Modulación** (MTF) es la magnitud de la OTF, y se mide en decibeles:

$$MTF(u, v) = \|OTF(u, v)\| = \frac{\|H(u, v)\|}{\|H(0, 0)\|} \quad (36)$$

Nota: Algunos autores aproximan la medida de la magnitud de la MTF con el valor de [contraste](#) relativo (sin "100%" en la ecuación (8)).

La **Función de Transferencia en Fase** (PTF) es el *argumento de la OTF*, o sea la parte imaginaria en forma polar o de *fasores*):

$$PTF(u, v) = \exp(j \arg(OTF(u, v))), \quad (37)$$

o sea:
$$OTF(u, v) = MTF(u, v) \cdot PTF(u, v) \quad (38)$$

La [Figura 14](#) muestra la MTF del *Sistema Visual Humano* (HVS). Para interpretar lo que ocurre, hágase el siguiente experimento: leer un texto de letra muy pequeña (como las instrucciones de un medicamento en el frasco del mismo, o la sección de anuncios de ocasión) con muy poca luz y a una distancia de 30 cm. Como no se podrán resolver detalles dado el bajo contraste (localice líneas muy juntas en la parte superior derecha del diagrama), no se podrá leer el texto. Si se aumenta cada vez más la iluminación, mejorará el contraste y se podrá resolver los detalles de las letras pequeñas: se ha pasado a la parte inferior derecha del diagrama (*moraleja: cuando haga examen de la vista, cerciórese de que haya una iluminación adecuada*).

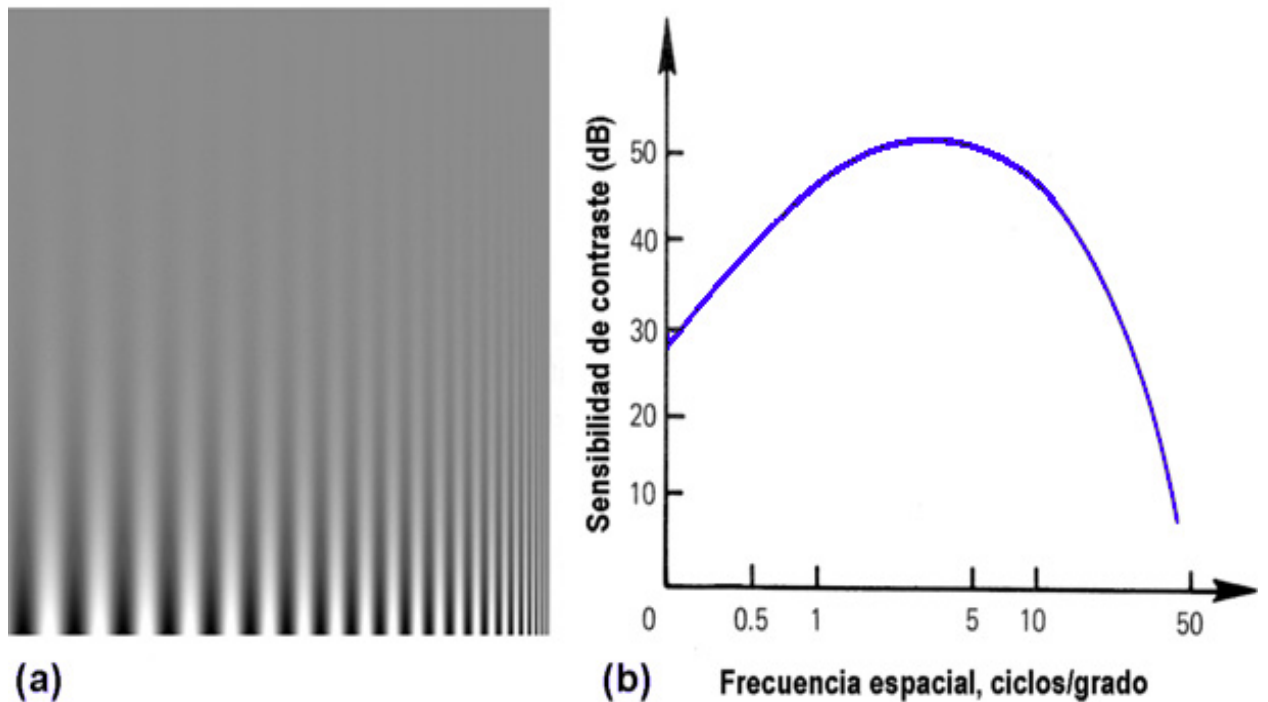


Figura 14. La Función de Transferencia en Modulación (MTF) del Sistema Visual Humano (HVS). (Izquierda) Contraste versus frecuencia espacial mediante una rejilla de intensidad sinusoidal de frecuencia creciente (hay un offset en la amplitud para tener valores positivos); (b) gráfico típico de la MTF. La curva es también conocida como CSF (Contrast Sensitivity Function) y se usa para evaluar la agudeza visual humana.

Ejercicio: En la [Figura 14](#) la rejilla es vertical; ¿puede haber una MTF que cambie con la orientación del patrón de entrada (con *variación angular*)? ¿Cómo se relaciona con el astigmatismo del HVS (o para la MTF y el astigmatismo de un sistema óptico o de adquisición de imágenes en general)?

Fin§ [►Índice](#)

Bibliografía Recomendada

(Algunas fuentes, consulta y profundización)

Esfandiari Ramin S., Lu Bei. (2014) ***Modeling and Analysis of Dynamic Systems***, 2nd Edition, EU, CRC Press.

Jain Anil.K. (1989) ***Fundamentals of Digital Image Processing***, EU, Prentice-Hall.

Collazo Javier L. (1980) ***Diccionario Enciclopédico de Términos Técnicos. Inglés-Español, Español-Inglés***, Tres volúmenes. México, McGraw-Hill Interamericana.

Fraden, Jacob. (2010) ***Handbook of Modern Sensors: Physics, Designs, and Applications***, 4th edition, EU, Springer.

Gonzalez Rafael C. Woods Richard E. (2017) ***Digital Image Processing***. 4th edition, EU, Pearson.

Kiyosi Itó (Editor). (1996) ***Encyclopedic Dictionary of Mathematics***. The Mathematical Society of Japan (2 Vol. Set). Japan. The MIT Press.

Kreyszig Erwin. (2011) ***Advanced Engineering Mathematics***, 10th Edition, EU, Wiley.

Kutz Myer (editor). (2003) ***Standard Handbook of Biomedical Engineering and Design***, EU, McGraw-Hill.

Kutz Myer. (2013) ***Handbook of Measurement Science and Engineering***. Two volume set. EU, John Wiley and Sons.

Sydenham, P.H. (1992) ***Handbook of Measurement Science***. EU, John Wiley.

Webster John, Clark J, and Neuman M. (editors). (2009) ***Medical Instrumentation: Application and Design***, 4th edition, EU, John Wiley and Sons.

Webster John. (editor). (2014) ***Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook***, (Electrical Engineering Handbook), 2nd Edition, Volumes 1 and 2, EU, CRC Press.

Wilson, E. Bright Jr. (1991) ***An Introduction to Scientific Research***, EU, Dover.

Fin\$\$ [►Indice](#)