



CCADET

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Notas de Curso (NC-INME-2016-460)

Introducción a la Instrumentación y Señales

II. INFORMACION, DATOS, FUNCIONES, SEÑALES E IMAGENES

Jorge Alberto Márquez Flores

Agosto 2017, CCADET-UNAM

Presentación y alcance:

Estas notas, recopiladas desde 2001, constituyen el Capítulo II del Temario del Curso del Posgrado en Física (UNAM): ***Introducción a la Instrumentación y Señales***, materia obligatoria en el primer semestre de la maestría de física médica y opcional en el posgrado de física y en el posgrado de ingeniería (opción Biomédica o Instrumentación). El curso está orientado a estudiantes con licenciatura en Física, ingenieros biomédicos o en instrumentación o bien, profesionistas con formación equivalente: fisicomatemáticos, ingeniería eléctrica, o quien haya aprobado los exámenes de admisión al Posgrado de Ciencias Físicas. En este capítulo se examinan conceptos básicos de información científica y tecnológica, las características más importantes de datos, señales e imágenes en una o más dimensiones y elementos para su estudio cuantitativo, con énfasis en fundamentos, criterios de aplicación y conceptos en instrumentación y aplicaciones científicas y médicas. Este material se complementa con prácticas de laboratorio (notas aparte) y es prerequisite de los capítulos posteriores. Para el curso mencionado, no es necesario, aunque sí conveniente haber estudiado el Capítulo I: *Introducción y Definiciones en Instrumentación* (notas aparte).

II. INFORMACION, DATOS, FUNCIONES, SEÑALES E IMAGENES

por Jorge Márquez Flores – CCADET-UNAM 2016

Tabla de contenido temático

<u>Conceptos interrelacionados</u>	4
<u>Canal y modalidad</u>	4
<u>Información</u>	4
<u>Información o datos no estructurados</u>	5
<u>Dominio, Argumento, Co-dominio, Soporte y Atributo</u>	6
<u>Atributo(s)</u>	7
<u>Información estructurada, datos estructurados o coherentes</u>	9
<u>Funciones, secuencias y señales</u>	12
<u>Imágenes</u>	16
<u>Imagen generalizada</u>	20
<u>Características de Datos, Señales y distribuciones</u>	22
► <u>Máximo y mínimo</u> <u>Moda</u> <u>Media</u> <u>Mediana</u>	25
<u>Aplicaciones de los rasgos principales</u>	33
<u>FWHM = Full Width at Half Maximum</u>	35
<u>Razón o Tasa Señal a Ruido SNR</u>	38
♣ <u>Exceso de Señal</u>	40
<u>Histograma o distribución de un conjunto de datos, PDFs</u>	41
♣ <u>Características de un Histograma</u>	52
♣ <u>Comparación de Dos Señales Discretas</u>	59
<u>Fasores e Impedancia I</u>	62
► <u>Frecuencia – Transformada de Fourier</u>	65
<u>Convolución y Teorema de Convolución</u>	70
<u>Modulación</u>	73
<u>Filtros</u>	79
► <u>Teorema y Criterio de Nyquist-Shannon</u>	84

♣ Aliasing	86
▶ Modelo Lineal de Degradación	90
Amplitud RMS y Potencia	93
♣ Espectro de Potencia o (o densidad espectral) y PSD	97
Propagación de Incertidumbres en Mediciones Indirectas	99
▶ Imperfecciones Típicas en Datos, Señales e Imágenes	103
 ANEXOS:	108
♣ A. Representación Matemática de Datos, Señales, Imágenes,	108
B. Formas de Onda de Señales... , Bases de Fourier , Ondas Viajeras	115
C. Promedio ponderado	118
♣ D. Promedio local (o móvil)	123
♣ E. Histogramas de eventos en general	128
♣ F. "Somatotipos" de un pico en señales... Curtosis y Sesgo	130
♣ G. Convenciones de definición de la Transformada de Fourier	134
H. Transformada Discreta de Fourier y Transformada Rápida de Fourier	137
♣♣ I. Notas Musicales	140
 Bibliografía Recomendada	144

▶ **Nota:** Las secciones, notas, ejemplos y ejercicios precedidos por "♣" pueden omitirse en la 1a. lectura. Aquellos precedidos por "▶" son muy importantes y deben recibir especial atención.

Nota: Si considera que existe ambigüedad en un ejemplo, nota, definición o ejercicio, antes de preguntar al profesor, intente establecer usted mismo las interpretaciones posibles, información faltante o aclaratoria y las respuestas correspondientes.

Nota: Al final de cada sección se citan los textos correspondientes de la bibliografía recomendada; en particular para profundizar en los temas tratados.

Conceptos interrelacionados

(En estas notas sólo se revisarán los subrayados a continuación):

- Canal, modalidad
- Información. *Teoría de la Comunicación de Shannon*
- *Mensaje, contenido, símbolo, signo, significado, significante*
- Datos, Señal e Imagen
- *Codificación/Decodificación, diccionarios de códigos*
- *Comunicación; Transmisión/Recepción*
- *Fuente, remitente, emisor*
- *Destinatario (o blanco = target), receptor*
- *Interpretación, semiología, semántica, diagnóstico.*

Los **canales** o **líneas** (medios) de **comunicación** tienen **interfaces** que interconectan los elementos de **recepción** y **transmisión**. La **señal** y la **información** que porta son afectados por los fenómenos de **interfaz finita**: su *función de dispersión puntual (PSF)*, el **ruido** y la **impedancia** (oposición a un flujo o un esfuerzo en un canal). Usualmente se usa *canal* como sinónimo de una banda de frecuencias dada, pero a veces *canal* se refiere a una de varias líneas de la misma naturaleza (como en un vector o los canales de TV) pero en otros contextos se refiere a un tipo totalmente distinto; por ejemplo, el *canal visual, auditivo, olfativo*, o también el *canal rojo, azul, verde*, etc.

Modalidad. Se refiere a la naturaleza de la información, a veces en términos de la tecnología empleada para obtenerla o generarla. Esto es aparte del o de los canales por los que es transmitida o recibida. Las imágenes de ultrasonido, rayos X y resonancia magnética son modalidades distintas de adquisición de imágenes. Aunque la información sea señales o imágenes en un mismo dominio de energía, puede haber varias modalidades posibles y corresponder a respuestas diferentes (del objeto bajo estudio) a estímulos de naturaleza distinta; por ejemplo: hay ultrasonido en modo "A" ó "B" y como ecografía Doppler; la resonancia magnética puede ser anatómica o funcional y esta deberse a actividad cognitiva, sensomotora, por lesiones o ser visible por fármacos, productos de contraste, etc.

Información. Decimos con frecuencia que "extraemos información de los datos". Una relación simplificada entre información y datos es:

$$\text{Datos} = \text{Información} + \text{Ruido} \quad (1)$$

donde el ruido puede incluir *errores* y *fluctuaciones estadísticas intrínsecas* (variación natural, propia del fenómeno o sistema) y *extrínsecas* (contaminación, distorsiones) pero también puede incluir o consistir

en *información no deseada* o *irrelevante*. El "+" en la relación (1) no es simple adición. Adelante veremos un [modelo lineal de degradación](#) más adecuado. Por ahora hablaremos de información y de datos como si fueran lo mismo dado que, el ruido es relativo y depende de aquello que interese como información.

Información no Estructurada o Datos no Estructurados.

Es un *conjunto* de datos (v.g., números) cualesquiera, o muestras, mediciones u observaciones, también pueden ser [muestras-sin-orden](#) a partir de [información \(sí\) estructurada](#) (cada muestra). Son valores escalares, vectoriales, arreglos, etc., que no tienen orden específico, o bien, su orden es **arbitrario** e **irrelevante** respecto al problema de estudio: estaturas de un grupo de individuos, sus edades o nombres¹, resultados de una simulación o de una ecuación, etc. En general, tales muestras no tienen información *intrínseca* de localización en espacio o tiempo, ni [dominio](#), ni primitiva de representación. Pero suelen enumerarse arbitrariamente:

$$\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^N \triangleq \{u_1, u_2, \dots, u_N\} \quad (2)$$

Nota: Aquí los u_i son valores escalares, pero pueden ser conjuntos o entidades estructuradas (individualmente): muestras vectoriales, funcionales, imágenes, ecuaciones, sistemas, modelos, letras, ideas, teorías, etc., **pero sin existir ningún tipo de ordenamiento propio entre tales muestras** (las imágenes de un video tienen orden temporal, un conjunto de fotografías de personas, **no tiene orden único**). El índice i es sólo para identificación. Cuando sí importa el orden, el índice i indica tal orden y ya no es arbitrario (por ejemplo en una sucesión temporal: $t=i$, ó $t=i\Delta t$) y pasa a ser [información estructurada](#). Si i es orden temporal, podemos ver u_i como muestras de una función $f(t)|_{t=i}$, con $i = 1, \dots, N$; es decir, una [señal](#).

Ejemplo: $\mathcal{A} = \{1, 1.03, 0.9, 4.8, 1.05, 0.98, 1, 1.03\}$ son mediciones del largo en m de una mesa y llama la atención el cuarto valor que se aleja de los otros. No hay aquí un índice explícito, aunque tuvimos que "enumerar" mentalmente para **identificar** el valor más alejado del promedio. El conjunto $\mathcal{A}$ es el mismo si reordenamos las muestras al azar.

Nota: Si tenemos dos conjuntos de muestras, por ejemplo, edad y peso de M personas, podríamos formar vectores ($edad_m, peso_m$) con $m = 1, \dots, M$, y referirnos al conjunto de tales *duplas*. Alguien dirá que es "información semi-estructurada", pero es menos erróneo pensarla como no-estructurada, aunque cada componente (ítem) sean datos estructurados (o decimos que *está internamente estructurada*).

Nota: Siempre es posible establecer algún criterio de ordenamiento e imponerlo a un conjunto no estructurado: los índices pueden ser al azar o indicar el orden en que fueron tomadas las muestras,

¹ La información no es sólo numérica; pueden ser frases, ideas, actividades, acordes, elementos químicos, etc.

aunque se desconozca el instante temporal exacto; o se pueden ordenar de mayor a o menor, o con otro criterio (el nombre de sujetos que dieron su altura y peso).

► **Nota:** Los datos (o información) estructurados pueden ser tratados como no-estructurados si se ignora el orden subyacente, coordenadas y en general toda información de dominio; un ejemplo es listar todos los valores del atributo de intensidad de una imagen, sin importar las coordenadas del pixel correspondiente. Un uso común es estudiar su estadística; el promedio y la desviación estándar no requieren de la información de dominio; el orden en una suma o en una doble sumatoria no importa, ver además el tópico de los [histogramas](#). Hay procesamiento de datos que tampoco requieren de conocer un orden o estructura intrínsecos.

Ejemplo: Considerar el conjunto A del atributo de color (r, g, b) para cada pixel de una fotografía digital. Si la resolución es 400×400 , A tendrá una *cardinalidad* de 16×10^4 ítems y muchos (vectores de color) se pueden repetir. A no incluye coordenadas de los pixeles u otra información del dominio y es una lista *no estructurada* de vectores, aunque la imagen original y cada vector de color son datos estructurados.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Smith 2010).

Fin§ [►Índice](#)

Para poder definir [datos o información estructurada](#) requerimos establecer antes los siguientes conceptos.

Dominio, Argumento, Co-dominio, Soporte y Atributo.

El **dominio** de [datos o información estructurada](#) (señal, imagen, etc.), es el conjunto sobre el cual están definidos (la variable correspondiente es el **argumento**). Por ejemplo, en la función $f: A \rightarrow B$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}^2$, el dominio de f es A . En el mismo ejemplo, el argumento de una señal $f(t)$ es la variable t . que representa el tiempo. En una imagen discreta $I: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, con [atributo](#) escalar $u = I(x, y)$, el dominio es $\text{dom}(I) = \mathbb{Z}^2$, el argumento son las coordenadas (x, y) que representan una posición (localización) en el plano $\mathbb{Z}^2$. Un **pixel** es una región rectangular que en una **rejilla regular ortogonal discreta** permite visualizar una imagen; ocupa la posición (x, y) y le corresponde una intensidad $u = I(x, y)$.

El **co-dominio** es el conjunto de valores al que pertenece el **atributo**; en el ejemplo anterior B es el co-dominio (atributo vectorial, en ese caso). En una imagen discreta $I: \mathbb{Z}^2 \rightarrow B$, con $B = [0, 255] \subset \mathbb{N}$, el codominio es $[0, 255]$.

♣**Nota:** En Matemáticas el término *imagen* es el subconjunto de valores y en el codominio tales que $y=f(t)$, con t en $dom(f)$; tal *imagen* no necesariamente coincide con el codominio: considerar por ejemplo t^2 y el dominio y codominio de los enteros $\mathbb{Z}$: no hay un argumento entero mapeado a 24 ó 23.

El **sopORTE** de una función f , denotado $supp(f)$, es el subconjunto del **dominio** donde dicha función tiene valores distintos de cero (distintos a (0,0) en una imagen I , etc.); puede comprender valores aislados, o uno o varios intervalos, o regiones desconectadas:

$$supp(f) = \{p \mid f(p) \neq 0, p \in dom(f)\}. \quad (3)$$

Nota: Aunque parecen iguales argumento y dominio, sólo lo son en su naturaleza y en unidades; por ejemplo en la señal $f(\omega t + \phi)$ definida en $[0, T]$, el argumento es $(\omega t + \phi)$ el dominio es $[0, T]$, aunque uno puede decir que es un "dominio temporal" y el argumento también es "temporal".

♣**Nota:** En la nota anterior hay otro punto de vista: $f(\omega t + \phi)$ se escribe así porque es usualmente una señal o función armónica y por eso hay dependencia explícita, pues se escribe o se aproxima (por ejemplo) por una expresión $\sum_k \sin(\omega_k t + \phi)$; esto se interpreta como la *composición de funciones* $\sin(\omega_k t + \phi) = \sin(g_k(t)) = (\sin \bullet g_k)(t)$, donde $g_k(t) = \omega_k t + \phi$. En tal caso $\arg(f(g(t))) = t$.

Puede haber *dominio temporal, espacial o de transformada*; si es la Transformada de Fourier, habrá un *dominio de frecuencia temporal o espacial* (1, 2 ó más dimensiones, como (ω_x, ω_y)). Un dominio de n dimensiones (nD) puede tener diferentes variables por cada dimensión; por ejemplo el tiempo en una señal $f(t)$ y su espectro de frecuencia (parte real), pueden combinarse y formar un *dominio tiempo-frecuencia*; dos entradas u_1 y u_2 pueden formar otro dominio 2D con un co-dominio escalar que por ejemplo combine las salidas.

Atributo(s).

Un atributo es una propiedad, rasgo o característica de interés, como intensidad, forma, altura, color, temperatura, edad, acidez, velocidad, etc. Si se puede medir o se quiere medir, se llama mesurando. Una vez medido, seguimos hablando de "atributo de intensidad", "de temperatura", etc. Pero puede ser también atributo de una señal o dato de salida. Su valor (medido o producido como sea) es un dato. Cambie o no cambie (mismo objeto/sujeto o en una población, pueden hacerse una o varias mediciones; son **datos** o muestras. El atributo suele ser un valor numérico escalar, vectorial o inclusive matricial y tensorial y está asociado a un punto o conjunto o región de un dominio. Ejemplo de atributo matricial: una imagen de $N \times M$ pixeles asociada a un instante (cuadro (*frame*)) de una película digital.

♣ Un atributo puede ser el valor medido al principio, mitad o fin del intervalo entre muestras, el promedio o, en el caso de captadores de radiación EM, ser la acumulación de fotones o partículas durante el tiempo de muestreo. O sea, hay una ventana espacial y una temporal aún si la señal no es temporal, sino espacial, como en las imágenes); hay quizás también una *ventana de energía* y una *espectral*. Cuando un *bin* (intervalo entre muestras), pixel o voxel se encuentra en un borde, el valor medido se encuentra promediado con el fondo y no es el correspondiente al atributo de interés. Ver [efecto de valor parcial](#).

Podemos hablar de "una muestra con uno o varios atributos de interés", un conjunto de muestras y en general, considerar [dominios](#) coordinados (o indexados) donde cada punto tiene asociado un **valor de atributo** (que puede ser vectorial, matricial, etc.). Sus valores posibles forman el [co-dominio](#). En mediciones o procesos, se discretizan ambos, dominio y co-dominio (en este caso es *cuantización*).

Atributo Binario. Cuando el atributo tiene un *valor binario* (una de dos posibilidades), se establece **fondo y forma** (*background & foreground*). Cuando tal valor es **Booleano**, o sea, *verdadero o falso* (representados respectivamente por un "1" lógico y "0" lógico), puede en particular ser un **atributo implícito**: por ejemplo lo define la presencia o ausencia de un dato (medición de un atributo) en un punto del dominio. Para visualizar este tipo de imágenes se aplica una [función de transferencia](#) que *mapea* 0 a negro (valor de intensidad 0) y 1 al blanco (valor 255 en una imagen con pixeles de 8 bits para la escala de grises). De otro modo, el "1" como intensidad resulta visualmente indistinguible del negro.

La información o datos (salvo por los definidos por la ecuación (1)) son los valores medidos de uno o más atributos, sea como muestra aislada, una secuencia ordenada, una imagen, etc. Los datos pueden o no provenir de un proceso de medición, por ejemplo, pueden ser leídos de un archivo (no hay sensores, sólo transferencia o reproducción), producidos por una ecuación, un programa o una persona.

► **Nota:** Existen características de un conjunto de datos que se definen y calculan a partir del atributo explícito, del dominio y la distribución global o local de tal atributo. Estas características a veces son confusamente denominadas atributos también, o "atributos derivados", o "[implícitos](#)"; en estas notas se denominarán [rasgos y eventos de señal, imagen](#), etc. La gama de tales características es muy grande y en ocasiones pueden tener todas las propiedades de un atributo propiamente dicho, y se puede estudiar su distribución, estadística, etc. Por ejemplo, a posición de una muestra en un sistema coordinado, o su distancia a la posición de otra muestra tomada como referencia.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Baird 1995), (Collazo 1980), (Dudgeon y Rusell 2013).

Fin§ [►Índice](#)

Información Estructurada, Datos Estructurados o coherentes. Son muestras (valores, mediciones, observaciones) obtenidas o acomodadas en orden (temporal como en [señales](#)), o con localización ([dominio](#)), organización espacial, configuración (relativa), geometría, topología, interconectividad o inclusive con una jerarquía determinada. El orden o configuración **sí es relevante**; si sólo son dos muestras entonces son “parejas ordenadas” (o *tuplas* ordenadas, en nD). Existen relaciones antecesor/sucesor (*causalidad*) o de *vecindad* (a *primer orden* hay un *vecino causal* y uno *anticausal* en 1D, en 2D puede haber 3, 4, 8 vecinos, dependiendo de la retícula o estructura y de la *conectividad*); para las parejas ordenadas se considera una relación de *variable independiente* y *variable dependiente*, pero no necesariamente existe correlación causa/efecto. Como ejemplos de información estructurada tenemos: *secuencias, funciones, señales y distribuciones, textos, imágenes o arreglos matriciales* en 2, 3 ó más dimensiones, *rasgos y subconjuntos de lo anterior, estructuras de datos, trayectorias, contornos, árboles, superficies, variedades, membranas, branas, interfaces, configuraciones, patrones, relaciones, complejos celulares, grafos, fractales, etc.*

Nota: También puede imponerse (*estructurar*) un criterio de ordenamiento o de localización: ordenar de menor a mayor, por múltiplos de un atributo numérico, u otras características que producen un valor escalar que da el criterio de orden.

Ejemplo: $\mathcal{R}=\{(38,1), (37.8,2), (37.5,3), (37.5,4), (37.4,5), (36.8,6)\}$ son *valores de temperatura* (atributo) de un paciente; por simplicidad decimos “las temperaturas”, tomadas en el orden que indica la 2ª. coordenada. Notar que el orden es en sí un atributo, aunque puede también constituir el dominio $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Hay un índice explícito, la 2a. coordenada, que indica progresión, aunque la separación entre muestras no sea constante. El conjunto $\mathcal{R}$ es representado más adecuadamente como el vector (38, 37.8, 37.5, 37.5, 37.4, 36.8), o bien como una función continua que ha sido muestreada y que tabulamos como $T(1) = 38$, $T(2) = 37.8$, $T(3) = 37.5$, etc., y también como una secuencia discreta que representa lo mismo: $T_1=38$, $T_2=37.8$,... etc. Notar que hay cierta diferencia si las temperaturas se reportan regularmente cada media hora a partir de las 8:30, y tenemos $T(8.5) = 38$, $T(9.0) = 37.5$, pero en términos de subíndice debemos numerar el instante de medición como 1, 2, etc. (unidad = 1/2 hr), para seguir usando T_i con i entero.

Nota: En el ejemplo anterior, el vector de muestras (38, 37.8, 37.5, 37.5, 37.4, 36.8), también podría haber sido una señal discreta (el orden es el tiempo) o un punto en un espacio de 6 dimensiones; notar que la interpretación de los datos y su estructura y qué representan (los datos y las dimensiones) es lo que da sentido a interpretar el vector como conjunto ordenado, señal o *hipervoxel* (hay más

posibilidades). Sin el orden coordinado, el conjunto de muestras {38, 37.8, 37.5, 37.5, 37.4, 36.8} es información no-estructurada.

Nota: En el ejemplo anterior, la 2ª coordenada fue interpretada como un orden, pero no necesariamente temporal y podría ser un orden arbitrario; podrían también ser varios pacientes (el 1, el 2, etc.), o varios sitios anatómicos i de toma de temperatura en un mismo paciente, o la temperatura oral bajo el efecto del medicamento i -ésimo, o inclusive la temperatura medida por el método o termómetro i . El dominio no es necesariamente espaciotemporal.

► **Nota:** En muchas situaciones, tal como al aplicar herramientas para análisis estadístico, el orden o posición, o sea la información sobre dominio, incluyendo dimensionalidad, **pierde relevancia** (no es usada, no importa) y los datos son tratados como no estructurados. Ejemplos típicos: el promedio, su desviación estándar, la mediana y el histograma de los valores del atributo; notar que son definidos sin tomar en cuenta el orden, la organización temporal o espacial (el dominio de los datos). Los datos estructurados fácilmente se convierten a *no estructurados* al descartar o ignorar su orden, coordenadas (dominio) u organización espacial. Notar la dependencia de la interpretación y del uso o aplicación.

♣ **Nota:** Siempre es posible tratar la información de dominio (v. g., coordenadas de muestras de intensidad) como atributo(s) adicional(es). Por ejemplo, una imagen de $N \times M$ píxeles, con atributo u_{nm} , puede representarse como el conjunto de NM vectores $\{(0,0,u_{00}), (0,1,u_{01}), \dots, (N-1,M-1,u_{N-1\ M-1})\}$. Se puede entonces hablar del *atributo de localización* (primeras dos coordenadas). Una ventaja de tal representación es el poder aplicar la *Teoría de Conjuntos* y sus diversos operadores.

♣ **Datos reestructurados o reformateados.** Se puede hallar o imponer un ordenamiento (1D) o una estructura en 2D, 3D, etc. (*estructuración* o *formato*) a datos o información que originalmente no la tienen: *se estructuran*. También es posible asignar una nueva estructura o modificar aquella existente en información originalmente estructurada de otra forma. Un ejemplo típico es la **vectorización**: se toman los píxeles de una imagen y se ordenan, renglón tras renglón, con un sólo índice i que cumple la relación: $i = x + yN$; donde los píxeles originales tienen las coordenadas (x,y) y cada línea o renglón de la imagen tiene un total de N columnas. La nueva estructura (una **vectorización**) refleja por ejemplo la forma en que la imagen es almacenada en memoria digital pero también es la manera de aplicar herramientas del *Álgebra Lineal* (matrices). Notar que en la reestructuración no necesariamente interviene el atributo. Otro ejemplo es una transformación geométrica: cambia un dominio, alterando las coordenadas (v. g., rotar o deformar una imagen). En cambio, la Transformada de Fourier (FT) extrae frecuencias de una señal y establece un dominio de frecuencias en donde se estudia esa información.

Sin embargo, no se habla de *reestructuración* con la FT, dado que se ha extraído información tanto de los datos como de su dominio original para formar el nuevo dominio de la transformada (i. e., aquí sí interviene el atributo en la constitución de tal dominio). NOTA: a veces *formato* se refiere, además de la estructura, a toda información adicional, en un encabezado del archivo de datos, por ejemplo, fecha y lugar, autor o responsable, parámetros de generación, etc. En ciertos casos, se denominan **metadatos**.

♣ **Nota:** La plataforma de programación *Matlab* funciona intensivamente con formulaciones matriciales, de modo que se *vectorizan* funciones e imágenes para realizar una operación y el resultado-vector se regresa luego al formato original. Consultar, por ejemplo (Hahn y Valentine 2016) y el sitio internet especializado en Matlab: <https://www.mathworks.com/help/index.html>

♣ **Ejercicio:** Considere una imagen $I(x,y)$ de $N \times M$ píxeles. Dada su representación vectorial: $V[indice]$, donde $indice = x + yN$, encuentre las coordenadas (x, y) para cada pixel de intensidad $V[indice]$, donde explícitamente $indice = 1, 2, \dots, NM$.

♣♣ **Ejercicio:** (A) Ahora escale el ejercicio anterior a un volumen ("imagen 3D") de $N \times M \times L$ voxels. (B) encuentre también el valor del *índice*, dadas las coordenadas (x, y, z) .

♣ **Datos "duros" (Hard data).** Se definen en el *Cambridge Dictionary* como información tal como números o hechos **que pueden ser probados** (o confirmables) y la fuente es conocida y confiable.

♣ **Datos "suaves":** (*soft data*) es información sobre cosas muy difíciles de medir objetivamente, tales como opiniones personales o sentimientos. Los comunicadores abusan del término "datos duros", cuando podrían decir *datos*, *cifras*, estadística o *información*; su intención es dar seriedad e importancia a información de la que se tienen cifras a veces sólo aproximadas o la fuente no es confiable..

♣ **Datos "crudos" (raw data),** También *datos primarios*, se refiere a datos que no han sido procesados o manipulados, o seleccionados y son tal como provienen de alguna fuente (instrumento de medición, señales probablemente con redundancia, ruido o contaminación, estadística que no es robusta, etc.). Tampoco han sido organizados en algún formato estándar, encriptados, etc.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Rusell 2013), (Hayes 2011), (Kiyosi ,1996), (Kutz 2013).

Fin§ ► [Indice](#)

Funciones, secuencias y Señales

Una señal (unidimensional, por omisión) es información estructurada *seriada* o *en secuencia* (usualmente ordenada en el tiempo), una función $f(x)$, con $x \in \mathbb{R}$ el tiempo, distancia, etc. En el caso **discreto** se denominan **secuencias** o **sucesiones**: $f(x_i), f[i]$, o bien $u_i = f(x_i)$, donde el (sub)índice es $i=1, 2, \dots, N$, ó en cualquier intervalo en $\mathbb{Z}$. Las unidades de i pueden ser adimensionales, o fracciones de segundos, horas, o unidades de longitud, etc. El valor $f(x)$ es el [atributo](#) de la función o señal en x . Es común que la discretización (periodo del muestreo o separación entre muestras) sea regular. A diferencia de los [datos no estructurados](#), existe un orden explícito y muy probablemente *intrínseco* ("natural", "propio"). La señal puede también representarse por un vector ($u_i = f(x_i)$):

$$\mathbf{u} \triangleq (u_1, u_2, \dots, u_N), \text{ o como vector columna: } \mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T \quad (4)$$

Tales representaciones permiten formular muchas propiedades y problemas (v. g., un filtro, una transformación) en términos de *Algebra Lineal*.

Nota: Estrictamente hablando, toda señal muestreada es una **secuencia**, pero la práctica ha impulsado el uso universal del término **señal** tanto para el caso discreto (o también: *señales digitales*) como el caso continuo (*señales analógicas*).

Notación: Debido al subíndice, en vez de un conjunto (sin estructura) de muestras $\mathcal{X} = \{u_n\}_{n=1, \dots, N}$, se tiene una secuencia $[u_n]$, o una función $u_n \equiv f(t=n)$, o bien, $u_n \equiv f(n\Delta t)$ (notar las diferencias), o también un vector de muestras $(u_1, \dots, u_N)$. También puede expresarse como un conjunto de parejas ordenadas $\mathcal{X} = \{(u_n, n)\}_{n=1, \dots, N}$, que es un **conjunto estructurado**, isomorfo a una función discreta. El paso, o lapso de muestreo Δt , o bien $\Delta u = u_{n+1} - u_n$, o separación entre muestras, suelen ser constantes.

► Una función $f(x)$ puede ser:

- (1) Una **secuencia** o **señal temporal** cuando $x \equiv t$ es el tiempo. El conjunto de muestras $\{f(t_n)\}$ también suele denominarse **serie temporal**. El dominio de la señal puede ser también el de *frecuencia temporal* o *frecuencia espacial* (pero en una dimensión). ♣ Una representación (específicamente un *isomorfismo*) como *conjunto de elementos* $\{(k, u_n)\}_{n=1}^{n=N}$ permite aplicar operadores de la teoría de conjuntos (unión, intersección, etc.),
- (2) Una función de un desplazamiento, altura o distancia x , una entrada (mesurando) o algún parámetro. Ejemplo: una **función de transferencia**. Dos variables x, y , pueden tener una relación " $y(x)$ " o bien $y=f(x)$; donde x no es necesariamente tiempo ni función del tiempo (v.

g., una medición en circunstancias diversas, sin orden intrínseco, o de diferentes sujetos, o bajo distintas temperaturas, etc.),

- (3) La **descripción** (matemática o empírica) de curvas o trayectorias como *funciones univalueadas*. Un **perfil** y en general, un **contorno** o **silueta** como: ♣ Una pareja de funciones $(y_1, y_2) = (f(s), g(s))$ que describe una *curva paramétrica* arbitraria, en 2D,
- (4) Un **vector** (si es función discreta o secuencia de muestras ordenadas), como ilustra la ecuación (3). Es además posible vectorizar arreglos matriciales o multidimensionales. Por otro lado, un vector puede representar los **coeficientes de una base de funciones o de operadores**, por ejemplo, potencias de una variable (" $a_3x^3 + a_1x + a_0$ " $\leftrightarrow$ " $(a_0, a_1, 0, a_3)$ "), o bien, frecuencias, enésimas derivadas, etc. Una formulación vectorial o matricial adecuadas permiten aplicar todos los recursos del *Algebra Lineal*. ♣ Las componentes de un *vector generalizado* pueden ser puntos (v.g. las trayectorias), señales, imágenes, etc.
- (5) Una distribución probabilística, de un atributo en un conjunto de datos, o más en general de un *evento* probabilístico en muestras, señales, imágenes, etc. (ejemplo de atributo: intensidad, densidad, voltaje, edad, velocidad, tensor de inercia, etc.),
- (6) Una serie ordenada y *coherente* de señales (se alinean y tienen un mismo número de muestras); pueden constituir los perfiles de un **relieve** superficial (alturas) o de una **imagen** (intensidades).

En el caso (1) y (3), sea como señal o función matemática, la función puede jugar un papel especial, como en la modulación (es una **señal portadora**) o en el caso de los filtros donde puede ser una ventana, núcleo, o kernel. Otro papel posible: como Función de Dispersión Puntual (¿hay otras?), que en muchos sentidos funciona como la ventana de un filtro. Algunos rasgos o eventos de señal tal como el máximo tienen sentido en cada caso, pero otros son más usados en distribuciones probabilísticas.

Notar que aunque gráficamente vemos "curvas funcionales", los dominios y el papel de *variable independiente* o *dependiente* puede cambiar. Cuando el atributo es una frecuencia (misma señal o de otras) la función puede describir el llamado *dominio tiempo-frecuencia*. Una partitura musical es un ejemplo *sui géneris* muy usado de tal dominio (♣ ver Notas Musicales). En general, la información de una señal $f(t)$ puede ser convertida y re-escalada a cualquier sensación humana: audio, luz, olor, tacto, sabor, vibración, presión, temperatura, dolor, etc.

Una señal $f(x)$ puede tener asociadas varias funciones derivadas de la misma; están por ejemplo: su espectro de frecuencias $F(\omega_k)$, la distribución del atributo (frecuencia de ocurrencia de valores $u=f(x)$), la

respuesta $g(x)$ de un sistema cuando la entrada es $f(x)$, la tasa de cambio en la propia señal (o sea su primera derivada $f'(x)$ en función de x) o su función cumulativa (integral desde 0 hasta x , por ejemplo), etc. Las "características de $f(x)$ " pueden a veces referirse (y por tanto confundirse) con características de estas funciones obtenidas a partir de $f(x)$. Esto ocurre también con otros tipos de información.

Una **señal multicanal**, son varias señales $f_m(t)$ (analógicas o digitales), usualmente sincronizadas; cada una constituye un *canal de información*. Se puede representar como *señal vector* $\mathbf{f}(t)$. Ejemplos: el **bus** de direcciones en una computadora (un canal por bit), una señal de radio o TV (varias estaciones) o una pieza musical, etc. Alternativamente una señal multicanal $\mathbf{f}(t)$ es aquella con atributo vectorial $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots, u_M)$, donde $u_m = f_m(t)$ es una señal escalar. Los electroencefalogramas en Neurociencias llegan a tener 300 canales. Varias señales podrían ocupar un solo canal, mediante *multiplexación* (o *multiplexado*), *entrelazado* o diferentes técnicas de [modulación](#) y codificación. Un ejemplo claro es la señal de TV o la de radio que recibe un receptor o que transmite un cable y que incluye decenas o hasta centenas de canales diferentes.

En ciertos contextos una señal especial, sea transitoria o periódica, puede recibir el nombre de *onda X*, con X un nombre o símbolo que identifican tal señal. Por ejemplo, en un electrocardiograma, las *Ondas Q, R y S*, son las componentes principales del pulso cardíaco observado como un pico denominado [Complejo QRS](#) (a veces PQRST, al incluir picos adyacentes).

♣**Nota:** Un **texto**, aunque es información secuencial (cadenas de símbolos que forman palabras con significado conocido, en algún lenguaje convenido y que expresan uno o varios mensajes), suele ser representado como un impreso, ocupando una o varias líneas, de modo que es desplegado mediante imágenes (páginas en libros, ventanas y pantallas en una computadora o dispositivo móvil); notar la operación contraria a la [vectorización](#). Cuando es leído en voz alta, es una señal de audio. Notar que el dominio de un texto no es exactamente temporal, la secuencia es ordenada, pero es "extemporánea" (y en literatura moderna, la propia secuencia ya no es única), no hay frecuencias fijas, ni lapsos constantes. Hay métodos de lectura rápida que "rompen" el carácter secuencial de una lectura.

♣ Tampoco el atributo de un texto es alguna magnitud o intensidad; un texto escrito es información que más bien usa conjuntos de [primitivas de representación](#): alfabetos de símbolos, letras, ideogramas, etc., y el orden y el contexto que va estableciendo permiten codificar y comunicar significados. No es claro cómo hacer un gráfico *texto vs. tiempo*.

Nota: Una señal muestreada (secuencia) se puede representar como el conjunto de N observaciones con subíndice $\{x_n\}$, donde, en el caso más general, podemos tener subíndices arbitrarios: o sea, $n \in [N_1, N_2] \subset \mathbb{Z}$, donde se satisface $N = N_2 - N_1 + 1$.

Ejercicio: Explique por qué se requiere el offset “+1” en la última expresión (*Hint:* por ejemplo, cuente los elementos de $[-87, 87] \subset \mathbb{Z}$).

♣ **Nota:** Hay muchos *signos y alfabetos de símbolos y lenguajes*, unos son de tipo técnico, otros no recurren a palabras, sino a **significados**, ideas o **mensajes** completos en un contexto particular, otros pertenecen a un arte u ocupación, etc. Las señales que usan tales signos y símbolos se estructuran de varias formas; los textos (o mensajes textuales) en sílabas, palabras, frases, líneas, párrafos, secciones, capítulos, libros, etc. El lenguaje hablado también reproduce palabras y frases, agregando atributos de entonación e intensidad. El lenguaje corporal comunica mediante poses, gestos, movimientos, tensión muscular, expresiones faciales o *ausencias* de los mismos.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Rusell 2013), (Hayes 2011), (Hsu 2014) , (Kiyosi ,1996), (Kreyszig 2011), (Proakis y Manolakis 2006).

Fin§ [►Índice](#)

Imágenes

Suele definirse como información dispuesta como una función bidimensional $I(x, y)$, con $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$. En una imagen, existe además un atributo visual asociado a $u = I(x, y)$: una intensidad, tono de gris o color. Las **imágenes discretas** (o *secuencias 2D*) se representan y procesan como arreglos matriciales de $N \times M$ elementos I_{ij} ($(i, j) \in A \subseteq \mathbb{Z}^2$) ó $N \times M \times L$ en 3D. Puede disponerse también en tramados hexagonales o retículas que *adoquinan* el espacio (*paving*), o siguiendo otra geometría (sobre cilindros, esferas, o mallados de objetos irregulares). A veces las **imágenes 3D** se llaman también *volúmenes*, aunque este término se reserva mejor para el dominio, del mismo modo que el dominio de una imagen convencional es un *plano*. El atributo $u = I(x, y)$ puede ser escalar, en punto flotante, vectorial, complejo, etc. Si es negativo, es necesario transformar su valor para despliegue visual, mediante una función de transferencia que incluye un *offset*. El dominio $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{Z}^2$) suele ser espacial, pero es posible uno de frecuencia espacial, bi-temporal (tiempo en 2D), parámetros, etc.

► Una función $f(x, y)$ puede jugar uno de varios papeles:

- (1) Representar una **imagen** $I(x, y)$, con atributo en niveles de gris (escalar), color (vector), etc., para visualizar intensidad, profundidad, etc. Un volumen o imagen 3D, con atributo(s) en cada punto de un dominio 3D, suele representarse como una pila de imágenes (llamados a veces cortes, rebanadas o secciones, y también *cortes axiales* o *transaxiales*). Además, hay imágenes que en principio no son visibles, pero su atributo es re-escalado en frecuencia y llevado a intervalos de intensidad y frecuencia perceptibles por el ojo (espectro visible).
- (2) **Señal bidimensional o 2D** (no es señal 1D de atributo vectorial, sino escalar $h = g(u, v)$), un caso es la *función de transferencia* bi-dimensional; en variable compleja, tal señal 2D puede ser el espectro en dominio de frecuencia espacial de otra señal en *dominio espacial*. En este caso puede no considerarse el atributo visual (no existe o no es relevante).
- (3) La **descripción** (matemática o empírica) de una **superficie** o **relieve** (función univaluada).
♣ Las *variedades paramétricas* en 3D, de *dimensión topológica 2*, son descritas como:

$$(x, y, z) = (f(r, s), g(r, s), h(r, s)) \quad (5)$$

Notar que al hallarse en 3D, la noción de imagen con niveles de gris se transforma o reinterpreta como un objeto 3D binario: el interior (“tierra”) son los puntos bajo el relieve y el exterior (“cielo”) aquellos encima. También es posible reinterpretar un relieve como una imagen donde las alturas corresponden a niveles de gris.

- (4) En el caso discreto, puede ser un **arreglo matricial** (una imagen discreta suele representarse por matrices), o también una "lista de listas". ♣ Las *matrices generalizadas* pueden tener como entradas puntos en $\mathbb{R}^N$, señales, vectores, otros arreglos, funciones, etc.
- (5) Una ventana, kernel o núcleo en 2D; su intensidad es un valor de ponderación,
- (6) Una **distribución probabilística 2D** o sea los *histogramas de co-ocurrencia*. El dominio son dos atributos (tratadas como variables aleatorias y consideramos *probabilidades conjuntas*). La intensidad es la frecuencia de ocurrencia y una vez normalizada es una probabilidad.
- (7) ♣ En el caso discreto, puede ser un *grafo atribuido* (a veces grafo es llamado "gráfico") cuyos nodos son los pixeles y el atributo es el atributo de la imagen.

♣ **Nota:** Las imágenes de video y audio que se transmiten por TV e internet, se encuentran codificadas en señales analógicas o digitales, que contienen muchas bandas de frecuencias (aparte de los métodos de modulación, la vectorización es un caso particular del llamado *multiplexado*, para juntar bloques de varios canales formando bloques compuestos, transmitirlos por un sólo canal y luego separarlos).

♣ **Nota:** Ver la nota texto, en la sección de Señales.

Nota: Las imágenes, estáticas o en sucesión (videos, películas) pueden transmitir mensajes (incluyendo ideas, sensaciones y emociones) que no es posible transmitir mediante señales (textos, en lenguaje verbal, lectura visual o en audio), o que requerirían mucha más información textual que la que proporcionan las imágenes usando el canal visual. Lo contrario es también válido; en particular las señales acústicas en la forma de música, comunica "mensajes" que no logran comunicar una sucesión de imágenes o un texto, hablado o escrito.

Región de Interés (ROI, de Region Of Interest). Con frecuencia nos interesa considerar un subconjunto R de pixeles (quizás conexos) de una imagen I . Cuando existían limitaciones de memoria, R debía tener forma rectangular y se conocía también como *ventana de interés*. Hoy día una ROI R puede tener cualquier forma y estar compuesta de varias *componentes conexas*. Una ROI muy común es la forma circular: un disco de radio r , con centro en un punto de interés (pixel $\mathbf{p}$). Tal disco es una **vecindad** de $\mathbf{p}$ y es común el filtrado, procesamiento o análisis local, en tal vecindad. Existen también *Zona de Interés (ZOI)*, *Volumen...* (VOI), *Detalle o Rasgo...* (del inglés DOI, FOI, *Detail* o *Feature Of Interest*), etc.

♣ **Trayectorias y contornos:** información acomodada como sucesión de puntos en el espacio, por ejemplo una trayectoria discreta (llamada también *poli-línea*): $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N))$. Si

se cumple que $(x_1, y_1, z_1) = (x_N, y_N, z_N)$, la trayectoria se cierra y forma un contorno (el índice puede ser el tiempo, la parametrización, en vez de unitaria, puede ser respecto la longitud de arco: $(x(s), y(s), z(s))$, o incluso desigual). Pueden haber "trayectorias" de objetos, imágenes, etc. y son necesarios parámetros adicionales de orientación, además de la posición. Notar que trayectorias o contornos se pueden describir como secuencias o como vectores de N dimensiones, cuya i -ésima "coordenada" (o elemento de la secuencia) son puntos en el espacio $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

♣ **Superficies:** información embebida en 3D y localmente isomorfa a un plano 2D, o acomodada en la [frontera](#) entre objetos 3D y fondo. Pueden ser cerradas, con interior, o abiertas. Las superficies discretas suelen representarse también mediante voxels, pero hay otras primitivas de representación que combinan el carácter discreto y el continuo: las *facetas* y los *mallados poligonales*. Una superficie parametrizada se representa como $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$, que indica correspondencias entre regiones del plano y regiones de la superficie (la función-vector es al menos *inyectiva*).

♣ **Variedades:** En N dimensiones el equivalente a superficie se denomina **variedad** (*manifold*) y su *dimensionalidad intrínseca* (o *topológica*) es menor a la del espacio en el cuál reside (dimensión *Euclideana*). La generalización a N dimensiones de una *membrana* o *interfaz* se denomina *brana*. Los objetos amorfos pueden ser "nubes", "manchas" o *blobs* (sin traducción adecuada).

♣ **Nota:** Existen muchas formas para organizar datos, por ejemplo, una superficie digital no univaluada que contiene información acomodada en mallas poligonales. En un flujo de energía, la señal consiste en variaciones en atributos de tal flujo; voltaje en el caso de flujos de electrones, y las variaciones de la propia corriente constituyen otra señal. Al interpretar las variaciones, existiendo quizás una forma de codificación de información (natural o artificial), la energía es un *sustrato físico*, o [portadora de una señal con información de interés](#) (+ información que no es de interés, definiendo el ruido en la señal).

♣ **Fractales.** *Variedades de dimensión intrínseca fraccionaria* (v. g., un modelo fractal del brócoli tiene una dimensión fractal de 2.66, la superficie del cerebro humano es de 2.98; ver otros ejemplos [aquí](#)). Una definición más técnica requiere de distinguir entre *dimensión Euclidiana* D_E , *topológica* D_T y de *Hausdorff* D_H . Otras características de los fractales: alta complejidad visual, demasiado irregulares como para poder ser descritos localmente por la geometría Euclideana tradicional, espectro de Fourier infinito (detalles a cualquier escala), *auto-similitud* determinística o estadística, características *invariantes a escala* (*scaling*) y pueden modelarse por procesos de construcción recursivos. Los fractales tienen relaciones íntimas con las señales y procesos *caóticos*, los sistemas dinámicos no-lineales y complejos.

► La información puede ordenarse o estructurarse en un espacio o [dominio](#), de acuerdo a diversas reglas, o para modelar objetos, fenómenos o abstracciones. En instrumentación a veces las reglas corresponden al diseño de un transductor y formación es transformada (geométricamente o en el atributo) y *re-muestreada* para facilitar su análisis y visualización.

♣ **Ejercicio:** Proponga ejemplos de variedades embebidas en 3D, que tengan dimensión local menor o igual a 2D. ¿Qué ocurre con los fractales?, investigue cómo se interpreta una dimensión fraccionaria, en términos de la dimensión topológica y aquella Euclidiana en que está embebido el fractal.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Gonzalez y Woods 2017), (Jähne1999), (Jain 1996).

Fin§ [►Indice](#)

Imagen generalizada (o información multidimensional) :

Primitiva de representación + Atributo + Localización

(6)

♣ **Nota:** En *Graficación Computacional y Visualización Científica* es importante un elemento adicional que depende de la tecnología de despliegue y el software; este cuarto elemento define *cómo se presenta (o comunica) la información*: el **atributo(s) de visualización**; puede coincidir con la primitiva de representación, pero no siempre, pues tal elemento puede incluir información adicional a la primitiva y los atributos de la imagen.

♣ **Multimedia.** Otra extensión asociada a *información multidimensional* es el **atributo perceptual (o sensorial)**. En el caso de las imágenes es el canal visual, óptico o visible, en el caso general de los *multimedios* hay además canal auditivo, táctil, olfativo, no-verbal, cognitivo, etc.

► **Nota:** Si la información debe responder a las preguntas “qué”, “cuándo y dónde” y “cómo”, entonces:

- el “qué” es el **atributo** (información intrínseca, observación o medición) asociado a la **primitiva de representación**. Como función $I(x,y)$, es el valor del co-dominio y puede ser escalar, vectorial, etc.
- el “cuándo y dónde” son la **estructura o localización** espaciotemporal y las dimensiones del dominio (podría preguntarse “a qué temperatura”, “a qué escala”, u otros dominios) y,
- el “cómo” es cómo se representa, codifica, y se transmite, correspondiendo a la **primitiva de representación** y (si procede) al **atributo de visualización, o perceptual**.

En otras notas se verá la noción de *codificación*, que corresponde a la representación interna, formato, o de implementación en un instrumento, computadora u otro medio, pero también simbólica, icónica, etc.

Recordar sin embargo que un **dominio** no es necesariamente espacial o temporal; puede ser de naturaleza distinta (y las preguntas de arriba son sólo un caso particular y popular en *Teoría de la Información*).

Ejemplos de primitivas de representación: puntos, líneas, símbolos, facetas, píxeles, texeles, voxeles, contornos e isocontornos, mallados poligonales, PSFs, partículas suavizadas, líneas de flujo, etc.

A menudo el atributo es un promedio de valores o una cuenta de ocurrencias dentro de la primitiva de representación; en vez de muestra puntual, se tiene una región V , un *bin*, clase o intervalo-muestra, o bien un *elemento discreto* en general (píxeles, voxeles).

♣ A veces tal región V se define como una [región de Voronoi](#) del centro al que se asocia el atributo. V puede ser también el interior de la [frontera](#) ∂A de un objeto o rasgo A .

Ejemplos de atributo escalar: intensidad, voltaje, amplitud de una variable, brillo, densidad, opacidad, distancia, altura, *incidencia de eventos*, (en el caso de histogramas sobre otro atributo), etc.

Ejemplos de atributo en variable compleja: amplitud y fase en dominio de frecuencia temporal o espacial ([dominio de Fourier](#)), [impedancias](#) $R+jX$ (resistencia y reactancias), funciones de transferencia en frecuencia (dominio de Laplace), etc.

Ejemplos de atributo vectorial: color (vectores (R, G, B) , (Hue, Sat, Lum) o en otros espacios de color), *flujo óptico*, amplitud de deformación por desplazamiento 2D o 3D, espacio fase, en sistemas dinámicos, un vector de atributos texturales en particular el de rasgos de las *matrices de co-ocurrencia de niveles de gris* (14 dimensiones), etc.

Puede haber atributos matriciales, tensoriales, o hasta ser (cada atributo) información no estructurada o estructurada: funciones, imágenes, etc. Un ejemplo es el *tensor de difusión* en imágenes funcionales de MRI (un tensor por voxel).

Ejemplos de localización: orden temporal, de menor a mayor valor de atributo, la *retícula ortogonal discreta regular* en 2D, 3D, nD , entre otras retículas (hexagonal, triangular, poligonal, tetraedral, poliédrica); espacio de multi-escala (parámetro sigma en caso del espacio de escala Gaussiano), grafos atribuidos, etc.

♣ **Ejemplos de atributos de visualización** (quizás con color, transparencia, animación e interacción): puntos y círculos, manchas, líneas, facetas, triángulos, íconos, *widgets*, flechas, curvas, superficies, símbolos y etiquetas; configuración espacial, estereotomías, sombreado, brillo, texturas, etc.

♣ Otros canales sensoriales pueden formar [atributos perceptuales](#) o *de multimedia* (ver arriba).

♣ Para conocer formulaciones de diferentes tipos de señales y ejemplos adicionales ver el anexo A: [Representación Matemática de Datos, Señales, Imágenes](#).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Jähne1999), (Jain 1996).

Fin§ [►Índice](#)

Características de Datos, Señales y distribuciones

Rasgos y eventos fundamentales en una señal.

Hay gran cantidad de rasgos para caracterizar señales 1D, pero nos limitaremos a los básicos o primitivos. Los **eventos o rasgos morfológicos** (forma del perfil) de $f(t)$ más importantes son (ver también el anexo [Formas de Onda](#)):

Eventos o rasgos (morfológicos) en señales 1D	Modelo matemático (funciones más comunes)
Pulso o impulso (pico instantáneo), espiga (glitch) y pulso invertido	Delta de Dirac $\delta(t)$,
Pico suave o curvado (y su inverso), también cresta o y valle (<i>through</i> o <i>pit</i>)	Función normal, Gaussiana o curva de campana y función campana generalizada
Escalón (positivo y su inverso) en t_a (discontinuidad en 1a. derivada)	Función de Heaviside (step)
Escalón suave (positivo y su inverso) en t_a	Función Sigmoide (sigmoid)
Pico con meseta (y su inverso) en $[a,b]$ Pulso finito o discreto	Función puerta $\Pi(t)$ ó ventana rectangular Delta de Kronecker
Pico suave con meseta	Función campana generalizada
Rampa (y su inverso, rampa negativa) en $[a,b]$	$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \notin [a,b] \\ m(t-a) & \text{if } t \in [a,b] \end{cases}$
La señal alcanza en t_θ un valor de umbral	$u_\theta = f(t_\theta).$
Ocurre un cruce(s) por cero	Todo t tal que $f(t) = 0$
Máximo local (en $[a,b]$) y moda , mínimo local (en $[a,b]$)	f_{max} y $t_{moda} : df(t)/dt=0, d^2f(t)/dt^2 < 0$ $f_{min} : df(t)/dt=0, d^2f(t)/dt^2 < 0$
Punto de inflexión (subida o bajada) en t_a Punto de inflexión plano	$d^2f(t)/dt^2 = 0, df(t)/dt > 0$ $d^2f(t)/dt^2 = 0, df(t)/dt < 0$ *ejercicio*
Convexidad local en $[a,b]$ Concavidad local en $[a,b]$	$d^2f(t)/dt^2 < 0,$ $d^2f(t)/dt^2 > 0$

Tabla 1. Eventos o rasgos morfológicos en una señal y sus modelos matemáticos.

Estos rasgos y eventos pueden estar asociados a otros cuya interpretación determina un cambio, diagnóstico, decisión, buen funcionamiento del equipo o defectos, etc. Su detección revela la presencia de objetos o eventos en el mundo real, de los cuáles se estudia una propiedad. Por simplificación consideramos en la tabla anterior una señal analógica $f(t)$ con atributo escalar (v.g., intensidad de voltaje). Dicha señal puede tener en muchos casos prácticos un **valor base** usualmente igual a cero, opcionalmente un **valor nominal** no cero, **intervalos** de definición, por simplicidad $[t_0, t_{final}]$, un **soporte**, un **intervalo de variación**, y un **intervalo dinámico** (ver las notas *Características Estáticas*).

Nota: Pueden existir *eventos de señal compuestos* por dos o más de los rasgos básicos; por ejemplo, dos pulsos consecutivos, el 2o. con un ancho y altura del doble del primero; una rampa superpuesta a una curva de campana; una función sinusoidal modulada ("ventaneada") por una ventana rectangular (función Π), un tren de N pulsos separados por intervalos T_{comb} , etc. Son posibles eventos y rasgos más complejos que pueden requerir una formulación propia. Un ejemplo en medicina es el Complejo QRS, que es una "firma" característica observada en un electrocardiograma y es el resultado de la superposición de varias señales transitorias y cuasi-periódicas, generadas durante la actividad cardiaca. La propiedad de **periodicidad** se verá en el tópico sobre Frecuencia.

Ejercicio: Escriba fórmulas matemáticas (ya sea de memoria (calificación de "9"), dedúzcalas ("10") o búsquelas ("7")) de las funciones *Delta de Dirac* (no hay una única), *función normal o Gaussiana*, ♣ *función campana generalizada*, *función de Heaviside* (escalón), ♣ *función sigmoide* (hay varias) y *función puerta o rectangular*, de acuerdo a los parámetros a , b , indicados a la izquierda, en la Tabla 1, y complete los parámetros no indicados (puede haber otros).

Ejercicio: Programe en Matlab gráficos de las funciones anteriores (seleccione al menos cuatro); para ello el mínimo de parámetros que caracterizan cada función y normalice las fórmulas para exhibir los picos y características principales en el intervalo $[-1, +1]$ y de modo que la amplitud máxima sea 1.0. Describa cómo cambia cada curva al variar los parámetros asociados.

♣ **Ejercicio:** Considere las tres versiones de *diferencias finitas*, para aproximar en dominio discreto la derivada de una señal, en términos de la definición $\pm(f(t \pm \Delta t) - f(t))/\Delta t$, note que la tercera es el promedio de las dos primeras dando lugar a: la derivada *hacia adelante* (forwards), la *derivada hacia atrás* (backwards) y la *derivada simétrica* o de *diferencias central*. Programe en Matlab y compare los gráficos de la señal y cada una de sus derivadas; estudie tales comparaciones en función de Δt . Escriba la formulación equivalente para la integral de una señal.

♣**Ejercicio:** ¿Qué dificultades se presentan al aplicar las definiciones de la [Tabla 1](#) a señales discretas?
¿Cómo detectar un valor extremo en una señal discreta cuando el muestreo apenas satisface el [criterio de Nyquist-Shannon](#)?

Revisamos a continuación algunas características importantes en una señal $y=f(t)$, o de un conjunto de muestras (de la misma) $\mathcal{F}=\{f_i\}_{i=1}^N$, y pueden ser también aplicados a distribuciones probabilísticas de una población de observaciones $\mathcal{X}=\{x_i\}_{i=1}^N$.

Nota: Aunque los conceptos que siguen son aplicables tanto a señales e imágenes como a distribuciones (*PDF*), algunos tienen más sentido y una interpretación probabilística clara en el último caso. Es también importante entender las diferencias: en una señal el dominio es temporal o espacial (por ejemplo) y el co-dominio es del atributo; en una distribución el nuevo dominio (variable independiente de la curva de distribución) es el atributo y la variable dependiente es la frecuencia de ocurrencia o densidad probabilística (o probabilidades discretas); esto se verá en mayor detalle en la sección de [Histogramas](#).

Nota: Los *eventos de imagen* o *señales bidimensionales* son más complejos al combinar eventos unidimensionales diferentes y haber nuevos que no son combinación de aquellos en señales. Se estudian en cursos de *Visión Computacional* y *Análisis de Imágenes*. Por ejemplo, en términos de mínimos máximos y otros rasgos de relieve, existe el *Topographic Primal Sketch* que trata una imagen como un relieve o *superficie de intensidad* y generaliza a 2D los eventos o rasgos de señal de la [Tabla 1](#). En vez de eventos (temporales), se habla de *accidentes*, en la interpretación de una imagen como relieve, pero es más usual hablar de rasgos (features) o características

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Hahn y Valentine 2016), (Kiyosi ,1996), (Kreyszig 2011), (Jähne1999), (Smith 2010), (Walpole et al 2011).

Fin§ [►Índice](#)

Máximo (y mínimo)

Es el valor máximo del atributo (en el co-dominio de una función $u=f(x)$), o bien, es el máximo entre los miembros de un conjunto $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$ de datos/muestras (en este caso, sin importar el orden):

$$u_{\max} = \max_x f(x), \text{ o bien } u_{\max} = \max_i \{f_i\}_{i=1}^N, \quad (7)$$

el primer caso corresponde gráficamente a la altura máxima o amplitud de un *pico* (*peak*), *cima* o *cresta* en una señal. Puede haber varios máximos idénticos (inclusive una “meseta”), en una señal. El **mínimo** (máxima profundidad de un “valle” (*trough*), más baja altura) se define de manera análoga. Ambos o cualquiera de estos valores se denomina **valor extremo** (*extrema*). El **máximo en una distribución** ([PDF](#)) es el máximo número de ocurrencias de uno o más eventos (o atributo).

Ejercicio: determine qué propiedades satisfacen la 1ª y 2ª derivadas de una función $f(x)$ (siempre que existan), justo en el valor x donde se alcanza el mínimo o el máximo de f . Ilustre con gráficos.

Moda

Es el (o los) valores del argumento x en el dominio de una función $u=f(x)$, o índice(s) i del dato/muestra de un conjunto $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^N$, para el cual (o los cuales) el atributo u alcanza un valor máximo (localización del pico):

(A) $x_{\text{moda}} = x_{u_{\max}} = \operatorname{argmax}_x f(x)$, valor(es) de x que maximiza(n) $f(x)$, (argumento de f o sea la ordenada donde se alcanza el máximo), o bien, en discreto:

(B) $i_{\text{moda}} = i_{\max} = \operatorname{argmax}_i \{u_i\}_{i=1}^N$, es el índice(s) i de la(s) muestra(s) $\mathcal{F}$ con valor máximo $u_{\max}$.

Hay **moda de datos** (función $f(\cdot)$ o conjunto $\mathcal{F}$ (en este caso el índice del valor máximo)) y hay **moda de distribución**, quizás aquella de los mismos datos. Por omisión *moda* suele entenderse como la moda de distribución (o del histograma de un atributo); el contexto aclara.

Como el máximo de una distribución (o [histograma](#)) es el *máximo número de ocurrencias de un evento* (usualmente un valor de atributo), en una distribución y en un histograma la moda es el evento (usualmente **valor de atributo**) **más frecuente** (con máximo número de ocurrencias) **y no necesariamente es único** (caso **unimodal** = un sólo pico): si hay dos o más máximos, la señal o distribución es “**bimodal**” o “**multimodal**”. Al igual que con $f(x)$ se cumple, además, para una función o una distribución $h(u)$:

$$\left. \frac{dh(u)}{du} \right|_{u=u_{\text{moda}}} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{d^2h(u)}{du^2} \right|_{u=u_{\text{moda}}} < 0 \quad (8)$$

Estos criterios caracterizan también al máximo de $h(u)$.

Ejercicio: Formule los criterios (8) para una señal discreta h_k con $k=0,1,\dots,K$.

► **Nota:** En la distribución $h(u)$ de los valores de una función $u=f(x)$, la moda (valor más frecuente) y el respectivo máximo (esa frecuencia de ocurrencia $h_{\max}$) no necesariamente coinciden con la moda $x_{\max}$ de $f(x)$ (moda de datos que simplemente indica la localización en el dominio de $f(x)$ del valor más alto (del atributo) de un pico) ni coincide el máximo $u_{\max}=f(x_{\max})$ con $h_{\max}$.

Nota: En algunas aplicaciones podrían interesar el o los **valores menos frecuentes** (argumentos del **mínimo** local o global), pero carecen de nombre.

Nota: Los valores extremos están definidos para conjuntos estructurados y no estructurados, pero este último caso no siempre hay argumentos (moda), dado que no hay orden o tal orden es irrelevante ($\text{argmax}(\cdot)$ requiere de un dominio). Sin embargo, si se identifica cada muestra, es posible decir "cuál tuvo el valor máximo" (o mínimo); es el caso de identificar qué persona fue la más alta (y pueden ser dos o más con la misma altura), a pesar de que no exista orden intrínseco. Notar que tal identificación (una etiqueta, número o nombre) acompaña a la muestra (o sea que es en la práctica una pareja ordenada, trío, etc.; otro atributo "llave" o una estructuración temporal).

Ejercicio: ¿Qué ocurre con los valores extremos y moda de $\mathcal{F}$ o de una función con dominio $\mathcal{F}$ cuando este es un intervalo discreto $[u_{\min}, u_{\max}]$ en $\mathbb{Z}$?

Ejercicio: Cuando una señal tiene valores arbitrarios en $\mathbb{R}$, ¿puede haber mínimos negativos o máximos negativos? ¿Qué ocurre en una imagen?

Ejercicio: Si el subíndice "es irrelevante" (datos no estructurados), la moda sigue identificando al elemento(s) con el valor máximo del atributo. ¿Qué significa esto, si las muestras son simplemente mediciones repetidas de un atributo, como $A = \{1.1, 1.3, 0.9, 6, 1.15, 0.98, 1.1, 1.05\}$?

Ejercicio: (A) Calcule la moda (de datos) de la señal $A_0 \cos(\omega t + \phi)$ en el intervalo $[-6\pi - \phi, 10\pi - 2\phi]$.
¿Hay valores de ω para los que no hay moda?

♣ (B) Defina y encuentre el *mínimo local* de $\sin(\omega x - \phi) e^{-\beta x}$ en $[0, 4\pi/(\omega\beta)]$.

Media (*arithmetic mean* o *average*)

O *promedio aritmético* de un conjunto de N observaciones $\{u_i\}_{i=1}^N$:

$$\mu_u = \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i \quad (9)$$

Es de la misma dimensionalidad que las muestras (en este caso, un escalar). Las muestras pueden ser de: una señal como $u_i = f(i)$, con $i=1, \dots, N$, o un vector, una imagen (en cualquier orden), etc.

La *media en continuo*, para una señal $f(t)$ en un intervalo $[T_1, T_2]$, es:

$$\overline{f(t)} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} f(t) dt}{\int_{T_1}^{T_2} dt} = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} f(t) dt \quad (10)$$

► **Nota:** Algunos autores igualan (erróneamente) la media al *valor esperado* o *esperanza matemática* o *expectancia* ($E[u]$ o bien $\langle u \rangle$), o usan la misma notación, pero estrictamente son nociones distintas, aunque pueden coincidir numéricamente en ciertas condiciones (prácticamente coinciden en caso de *eventos equiprobables* si hay suficientes muestras N , uniformemente distribuidas), pero aunque puedan coincidir, el cálculo es cualitativamente distinto. Es válido obtener la media de todos los valores de una señal $f(t)$ en un intervalo (o en todo su dominio), aún si fluctúa mucho, pero es más usual obtenerla en mediciones similares, o en una señal que se supone constante, con lo cual se obtiene un *valor representativo*, se aumenta la precisión y se puede caracterizar a partir de la media las variaciones entre muestras. Para evaluar la validez de un valor medio en una señal o datos ordenados que fluctúan o que muestran una tendencia creciente o decreciente, se puede examinar el **coeficiente de variación** $CV = \sigma/\mu$.

Ejercicio: Se definió la media de un conjunto de muestras, suponiendo que dichas muestras sin datos escalares, pero pueden ser vectoriales (cada dato u observación), matriciales, etc. Defina el promedio de N señales discretas $f_n[k]$, con $n=1,2,\dots, N$, y $k=1,2,\dots, K$. ♣ ¿Qué ocurre si la única diferencia entre cada observación (señal-muestra f_n) es un ruido aditivo η_n cuyo promedio tiende a cero cuando N tiende a infinito?

Ejercicio: Proponga una definición de media de: (A) un conjunto de N vectores 3D de K dimensiones, (B) la intensidad media en una imagen $I(i, j)$ de $N \times M$ y (C) la "imagen promedio" de un conjunto de K imágenes $I_k(i, j)$ de $N \times M$.

Ejercicio: Compare *Media* y *Esperanza Matemática*, ¿cuándo son iguales (dar condición matemática)? ¿Pueden coincidir por mera casualidad?

Ejercicio: Sea $V(x, y, z)$ un campo vectorial con atributo (u, v) ; defina el valor medio de dicho campo en la región definida como $[x_2, x_1] \times [y_2, y_1] \times [z_2, z_1]$.

Ejercicio: Si muestras u_n tienen una misma incertidumbre δu_n ¿qué precisión tiene su promedio? Si $N=10^M$ con $M \in \mathbb{N}^+$, ¿qué ocurre con las cifras significativas? ¿qué ocurre en señales $f_n(t)$ con un ruido aleatorio $\eta_n(t)$?

Ejercicio: ¿Cómo podría tomar en cuenta en un promedio una situación en que las muestras tienen distinta importancia o unos son más confiables que otro, pero no se desea descartarlos?

♣ **Ejercicio:** Recordando sus cursos de *Cálculo Integral* establezca relaciones entre la *media continua* (ecuación (10)), la *esperanza matemática* y el *Teorema del Valor Medio*. ♣♣ Haga el ejercicio para los casos discretos.

Mediana

Valor de $f(x)$ a la mitad de las N muestras ordenadas de menor a mayor (si N es par). Si las muestras son valores $f(x_n)$, $n=1, \dots, N$, quizás con repeticiones, se reordenan para obtener, reordenando: $f_{\min}(x_{n=1}), \dots, f_{\max}(x_{n=N})$; la **mediana** es:

- **Opción A:** $mediana = f(N/2)$ si N es par; $f((N+1)/2)$ si N es impar (índice reordenado).
- **Opción B:** $mediana = f(N/2+1)$ si N es par; $f((N+1)/2)$ si N es impar.
- **Opción C:** $\frac{1}{2} (f(N/2) + f(N/2+1))$ si N es par; $f((N+1)/2)$ si N es impar.

Las opciones (A) y (B) son asimétricas, y (C) es un compromiso, aunque es probable que el valor asignado no sea entero y al redondear o truncar, el resultado equivaldrá a (A) ó (B). Si N es grande, las opciones suelen resultar iguales para la mayoría de los casos. En notación discreta, para la sucesión $[y_n] = f(x=n)$, con $n=1, \dots, N$ (ojo, sólo es cambio de notación a subíndices):

- **Opción A:** $mediana = y_{N/2}$, si N es par, $mediana = y_{(N+1)/2}$ si N es impar.
- **Opción B:** $mediana = y_{N/2+1}$, si N es par, $y_{(N+1)/2}$ si N es impar.
- **Opción C:** $mediana = \frac{1}{2} (y_{N/2} + y_{N/2+1})$, si N es par, $y_{(N+1)/2}$ si es impar.

Como ayuda mnemónica, observe en el siguiente ejemplo que, al señalar las muestras con "I", la opción 1 (valor de la mediana) es la "I" grande y en negrilla (caso par y caso impar):

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & \mathbf{y_3} & y_4 & y_5 & y_6 \\ \text{I} & \text{I} & \mathbf{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} \end{array} \quad \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \mathbf{y_4} & y_5 & y_6 & y_7 \\ \text{I} & \text{I} & \text{I} & \mathbf{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} \end{array}$$

La *media*, *mediana* y *moda* son los "valores representativos" más comunes de un conjunto de datos; no necesariamente coinciden, como muestra el ejemplo de la [Tabla 2](#). Las tres tienden al mismo valor en observaciones que siguen una distribución Gaussiana y otras simétricas. En inglés, *average* (promedio, pero...) es más general que *media*: "*the arithmetic mean, the mode and the median are forms of average*". Sin embargo, en general se manejan como sinónimos en varios idiomas y por diversos autores.

Comparación de medidas representativas del conjunto de valores muestra: $\mathcal{X} = \{ 31, 1, 2, 2, 69, 3, 2, 4, 7, 22, 2 \}$			
Tipo	Descripción	Ejemplo	Resultado
Media aritmética	Suma dividida por el total de muestras: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n = \frac{(x_1 + \dots + x_N)}{N}$	$\frac{(31+1+2+2+69+3+2+4+7+22+2)}{11}$	13.182
Mediana	Valor en medio, entre la mitad mayor y menor de los datos ordenados	1, 2, 2, 2, 2, 3 , 4, 7, 22, 31, 69	3
Moda de distribución	Valor más frecuente en $\mathcal{X}$	31, 1, 2 , 2 , 3, 2 , 4, 7, 22, 69, 2	2

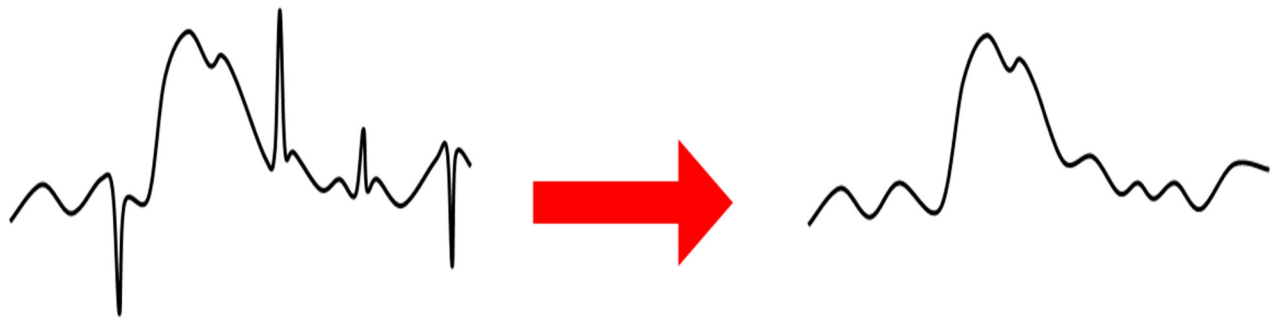
Tabla 2. Ejemplo comparativo de medidas representativas de un conjunto de datos.

► Como la comparación de la tabla es de *medidas representativas* del conjunto $\mathcal{X}$ de muestras (mediciones, observaciones), no hay dependencia del dominio: el conjunto del ejemplo no es información estructurada y si lo fuese, sería tratada como no estructurada para extraer media, mediana y moda de la distribución. Por ello, aquí no interesa saber que 69 es el máximo valor en $\mathcal{X}$; lo que analizamos *de forma implícita* es la distribución de los datos (obtener el [histograma](#) sería ya un análisis explícito de tal

distribución). El máximo relevante (para la moda de la distribución como *el valor más frecuente*) es la *incidencia máxima* que es 4 (hay cuatro valores "2" en $\mathcal{X}$). La moda del conjunto (el ítem con valor máximo, o sea 69) depende del orden enumerativo, arbitrario en un conjunto, pero puede reportarse a reserva de conservar ese orden (o sea una "estructuración transitoria"): aquí es el 6º ítem de $\mathcal{X}$.

Ejercicio: Se definieron *máximo*, *moda*, *media* y *mediana* para un atributo numérico; ¿es posible definirlos para otro tipo de atributos como letras, palabras, caras, colores o texturas? Establezca condiciones para estos y qué ocurre cuando el resultado no pertenece al conjunto de posibles atributos.

♣ **Ejercicio:** Estudiando la [Figura 2](#), "invente" un *filtro mediana local* y compare con el filtro media local –"invéntelo" también. Se verá con mayor detalle en los temas de *Procesamiento & Análisis de Imágenes* y [Ruido](#). Intente definir un filtro semejante para imágenes.



♣ **Figura 2.** (Izquierda) Señal con [ruido impulsivo](#) (*glitches*, *spikes* o *pulsos de espiga*). (Derecha) misma señal tras aplicar un filtro mediana en una vecindad de ± 3 muestras (siete, en total). ¿Qué haría un filtro basado en la *media* local?

♣ **Ejercicio:** Hay muchas formas de promedios; sin revisar los anexos, proponga o encuentre las definiciones de los siguientes: ***media recortada (trimmed mean)***, ***media armónica***, ***media geométrica***, ***media ponderada***, ***promedio cuadrático***, ***promedio móvil (o local)***, ***media "sigma"*** y ***media generalizada***. Estudie las diferencias en inglés entre *average* y *mean*. Vea qué ocurre en español entre *promedio* y *media*.

► **Ejercicio:** Dado un conjunto de valores $\{x_n\}_{n=1}^N$ y su media aritmética $\bar{x}$, escriba las formulaciones de ***Varianza***, ***Desviación Estándar***, ***Varianza de muestra***, ***Desviación Estándar de muestra***. ¿Puede generalizarse a dos y más dimensiones? ¿Y si en vez de muestras x_n tiene matrices, o sea N imágenes de $K \times L$ dimensiones? ¿Hay "varianzas" usando la mediana o la moda en vez de la media?

♣**Ejercicio:** Considerando las diversas formas de promedios definidas con el ejercicio previo al anterior, ¿es posible definir equivalentes a la desviación estándar para cada promedio? Programe en Matlab los diversos promedios y sus desviaciones estándar, para una población de unas 20 muestras y haga comparaciones.

► Se definen como **características globales**: *media*, *mediana*, valores extremos (*máximo* y *mínimo*), *moda* (y su equivalente *argumento del mínimo*), *puntos de inflexión* y el [FWHM](#) (ver adelante). Es posible considerar tales características como aspectos **regionales** o **locales** (*punto-a-punto*), y se refieren a un intervalo o dominio (datos estructurados). Además es necesario examinar una *vecindad de cada punto x del dominio* y definir una función asociada al rasgo tal como *moda*(x) (la moda más cercana, por ejemplo), o *moda* [t_1, t_2], aunque en la práctica mejor se enumeren como el conjunto de modas (picos) locales en la señal o en un intervalo: *moda_k*, $k=1, \dots, K$, con $K>0$ (mas el caso "0", si no hay moda).

Una [región o zona de interés](#) puede ser un subconjunto del dominio, tal como un intervalo 1D ó una zona en 2D. Pero ya dentro de cada vecindad o región, el orden o estructura vuelve a ser irrelevante. En el caso del promedio en cada punto ($\bar{f}_N(x)$), en un vecindad N de cada x , en vez *del* valor único $\bar{f}(x)$, se usa el [promedio local o corrido](#), para el máximo local es posible contar un número finito de modas locales (excepto en las mesetas), etc. Al final se obtiene una nueva señal (o imagen) donde el atributo en cada punto del dominio (muestra en t o por pixel, por ejemplo) es el valor (medio, mediana, etc.) en la vecindad de ese punto; el tamaño de la vecindad (o intervalo temporal) se determina usando el [Criterio de Nyquist-Shannon](#).

Ejercicio: Formule las propiedades de las derivadas de una función f para definir sus extremos cuando f es discreta, es decir una secuencia $f[k]$, con $k=0,1,\dots, K-1$. Misma pregunta para sus puntos de inflexión; ya en la práctica, ¿qué situación se puede presentar en el caso discreto y cómo la abordaría?

Ejercicio: ¿Cuántos valles y crestas locales tiene la función $\sin(2x) \cos(3.5x+5) + 2\sin(6x+2) + 0.4\cos(x)\sin(1.5x-3)$, en el intervalo $[-12, 55]$? ¿Cuál es el período?

♣**Ejercicio:** Considere la señal discreta (0, 1, 3, 5, 7, 4, 2, -3, -2, 0, -4, -2, 1, 8, 8, 3, -2, 2, 4, 4, 4, 1, 1, 0, 3). Diseñe un algoritmo para encontrar los máximos locales y sus modas; impleméntelo en Matlab.

Ejercicio: Si se tiene algún atributo que no es numérico, incluso puramente cualitativo, siempre es posible obtener la moda ("valor" más frecuente) pero, ¿se puede obtener su promedio, o su mediana? Proponga ejemplos o contraejemplos.

Ejercicio: (A) determine las modas, las medianas y las medias del siguiente conjunto de muestras y las de su distribución: $\mathcal{X} = \{ B, H, K, A, D, B, C, E, B, A, A, K, Z, C, E, D, D, C, A, B, K, J, A, D \}$.
(B) ¿Es posible definir una “letra promedio”?; si sí, proponga un método y halle la “letra media” de $\mathcal{X}$.

Ejercicio: Considere una señal con atributo vectorial (o un vector de señales, como las de un electroencefalograma), ¿pueden definirse vectores de valores extremos, modas, medianas y promedios?, si sí, escríbalos, si no, explique por qué; ¿hay sólo una definición posible en cada caso?

Ejercicio: Considere una señal bidimensional $f(x, y)$, note que el dominio ya no es el tiempo sino un espacio coordinado. Defina máximo, moda media y mediana tanto globales como locales y enumere sus propiedades, indicando si existen nuevas, respecto al caso unidimensional.

Recomendación: revisar antes qué es "distribución" (tema siguiente).

Observación: si no existen letras intermedias; ¿cómo define $(1/n)(A "+" B)$?, con $n < 2$, $n = 2$ y $n > 2$?

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Hahn y Valentine 2016), (Kiyosi ,1996), (Kreyszig 2011), (Smith 2010), (Walpole etal 2011).

Fin§ [►Indice](#)

Aplicaciones de los rasgos principales

Todos los rasgos de conjuntos, funciones, señales o PDF's, sus variaciones, así como las desviaciones y varianzas derivadas de ellos, se extienden a dos y más dimensiones (y aparecen nuevos, propios de la dimensionalidad), presentando mayor complejidad; por ejemplo, la moda no sólo no es necesariamente única; en n dimensiones (nD) puede además ser una curva u otra [variedad](#). No sólo describen los picos de una señal o una distribución de datos, sino que son fundamentales para:

- Aplicaciones en estadística y probabilidad. En particular, definir y calcular varias [características de una distribución](#) de valores en información de cualquier dimensionalidad.
- Criterios de comparación y similitud de distintos conjuntos de datos.
- [Filtrar](#) (atenuar) ruido o detalles; un ejemplo simple es la media de varias instancias de una señal cuyo ruido aleatorio cambia entre cada señal-muestra: el ruido se reduce al promediar,
- Suavizar una señal o imagen (*smooth*, *blur*), un rasgo en particular, o sólo el fondo o la textura,
- Realzar o afinar detalles (*sharpening*), un rasgo en particular, la textura, etc.,
- Remover el fondo (generaliza el filtrado de bajas frecuencias),
- Detectar y eliminar *datos intrusos* (*outliers*) en *Estadística Robusta*,
- Al complementar un filtrado, se mejora la nitidez, se hace realce y restauración de rasgos, o se pueden separar (¿cómo, en cada caso?),
- Detectar diversos [eventos o rasgos](#) (v. g., bordes en una imagen),
- Extraer puntos característicos para procesos de *registro geométrico*.
- Diversos métodos de segmentación regional en imágenes nD ,
- Diversos descriptores en análisis textural y *morfométrico* (de forma),
- Enfocar (nitidez), reducir efectos de la *función de dispersión puntual* en sistemas de imagenología,
- ♣ *Fusión de imágenes*, v. g.: (a) para alinear y combinar imágenes de modalidades diferentes; (b) sintetizar una *imagen de campo focal extendido* en microscopia; (c) ídem, para super-resolución.
- Promedios morfológicos (de forma).
- ♣ En n dimensiones, la varianza se generaliza a la *matriz de covarianza* y su estudio permite caracterizar los *modos principales de variación* de un conjunto de características de una población, a través de *Análisis de Componentes Principales (PCA)*.

♣ **Ejercicio.** Encuentre o proponga otras aplicaciones posibles.

♣ **Ejercicio.** Formule las características vistas en imágenes escalares en 2D: $u = I(x, y)$. Reproduzca las definiciones anteriores y cómo se definen matemáticamente (ver [Tabla I](#)). ¿Cómo son los rasgos definidos por combinaciones de derivadas (0, 1ª y 2ª.) de $I(x, y)$? Intente contestar la pregunta anterior para imágenes vectoriales $(u, v, w) = \mathbf{I}(x, y)$?

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Kreyszig 2011), (Smith 2010), (Walpole et al 2011).

Fin§ [►Indice](#)

FWHM

FWHM (*Full Width at Half Maximum*) significa **ancho “total o completo” a medio máximo**, o a la mitad del máximo. Sin embargo “total” en español parece referirse a todo el dominio y la noción de “máximo” parece implicar uno absoluto (cuando es local, la definición no es clara). Si usamos la traducción **Ancho Neto a Media Altura (del Máximo del pico)**, intuitivamente considera sólo la parte más importante de la señal bajo el criterio de medir el ancho a “la mitad”. Si se aplica a un valle, en vez de máximo, se usa el mínimo (misma notación). En picos simétricos a veces se usa el parámetro **HWHM** (*Half Width at Half Maximum*). La definición matemática del FWHM es intrincada (♣♣inténtela) y mejor resulta mucho más clara, intuitiva y comunicable una definición gráfica ([Figura 3](#)). Otra traducción usada en Física es *ancho de pulso a media altura* (notar la especificidad).

En una *Función de Dispersión Puntual* (PSF o **respuesta a impulso**, en el tema sobre [Características Estáticas](#)), el **FWHM es una medida del ancho de la PSF y por lo tanto de la resolución** del sistema de adquisición, pues al superponer dos PSFs (como respuesta a dos puntos separados por una distancia FWHM), queda una sola mancha, no dos (o sea que no se *resuelven* los puntos observados), pues los picos individuales se interceptan a una altura que es la mitad del máximo, por lo que su suma es justo dicho máximo (verifíquelo).

Cuando existen muchos picos en una señal o una distribución, los valores de FWHM permiten darles importancia por su ancho, si además se combina este criterio con la altura de cada máximo.

Una medida asociada al FWHM es **FWTM**, (*Full Width at Tenth Maximum*), el *ancho neto a un décimo de la altura máxima* del pico; permite tomar como parte del ancho la base del pico y asociarle un triángulo cuya base mide FWTM. Se pueden definir otros criterios de anchura, como la separación entre los valores donde ocurren los puntos de inflexión antes y después del máximo, pero es una medida muy sensible al ruido en la señal.

Ejercicio: Intente hacer una formulación matemática de la FWHM de una señal $f(x)$ con un pico principal. Use las expresiones de máximo y argumento, vistas anteriormente.

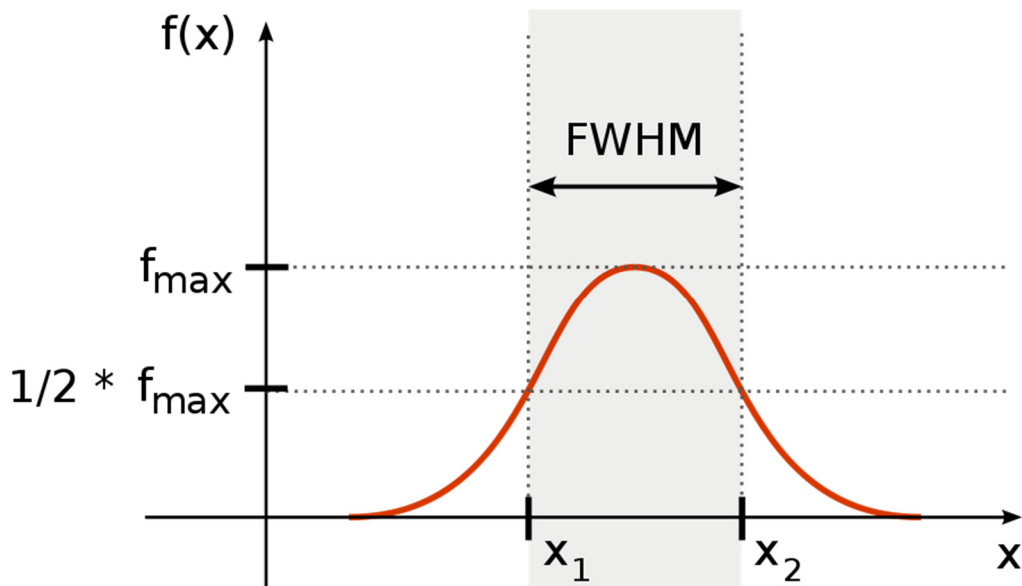


Figura 3. FWHM de una función Gaussiana $f(x)$.

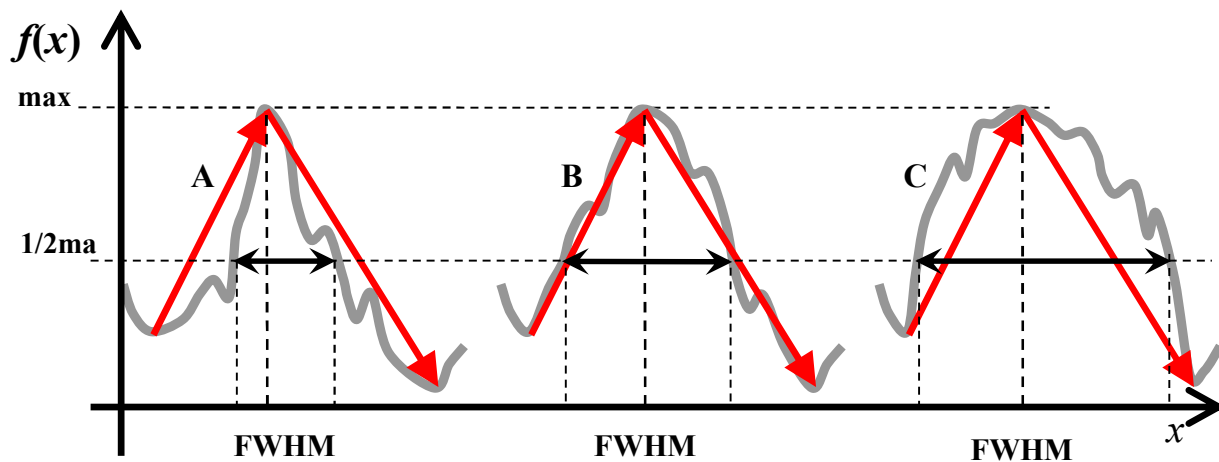


Figura 4. Tres valores FWHM diferentes de tres picos con idéntico cociente *ancho/altura*. Lo contrario también puede ocurrir.

Nota: El FWHM tiene sentido para **un pico individual**, por lo que en una señal se deben filtrar las fluctuaciones pequeñas (o separar los picos que define un umbral dado).

► **Ejercicio:** Calcule el FWHM y el FWTM de una Normal $G(x)$ con parámetros (μ, σ) . Idem, en 2D.

♣ **Ejercicio.** Estudie las relaciones entre el FWHM y dos nuevos parámetros que llamaremos $FH(1/4)M$ y $FH(3/4)M$; estos parámetros miden el ancho neto del pico a $1/4$ y $3/4$ del máximo, respectivamente. En comparación, FWHM es igual a $FW(2/4)M = FW(1/2)M$.

♣ **Ejercicio.** De la [Figura 4](#) se intuye el caso contrario: picos diferentes (en forma) con FWHM idénticos (mismo o distinto **cociente ancho/altura** (¿respecto a...?). Proponga medidas que permitan caracterizar tales casos. Que su propuesta sea distinta a la del ejercicio anterior.

Nota: En 2D, es práctico usar coordenadas polares y tener $FWHM_r$ ("FWHM polar" o "radial") para la coordenada r , esto presupone que la PSF es *isotrópica*, o sea que r no cambia con la orientación θ . Una aproximación para PSFs *anisotrópicas* son elipses concéntricas como isocontornos de la PSF, y se usan coordenadas cartesianas, de modo que hay dos componentes: $FWHM_x$ y $FWHM_y$ que corresponden a los anchos orientados con los ejes mayores y menores de cualquiera de las elipses.

Aplicación en Modelado.

Ejercicio: Siendo relativamente fácil de medir el FWHM, es usado para ajustar una curva Gaussiana a un pico. Tras resolver el [ejercicio de hallar la FWHM de una Gaussiana](#), proponga cómo modelar cualquier pico con una función Gaussiana (μ , σ), escalada en amplitud igual al máximo del pico.

♣ **Nota:** Si la distribución (o pico de señal) no es [mesocúrtica](#), o tiene [sesgo](#), entonces la FWHM no es la medida más adecuada para ajustar una curva Gaussiana y de hecho esta última, que sí es mesocúrtica y sin sesgo, no da tampoco el mejor ajuste. Aunque es posible usar la [FWTM](#) en vez de la FWHM, u otros criterios de ancho, hay además otras [funciones de densidad probabilística](#).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Brown et al 1999), (Collazo 1980).

Fin§ [►Índice](#)

Razón o Tasa Señal a Ruido (SNR: *Signal-to-Noise-Ratio*).

La *Taza o Razón Señal a Ruido* (SNR) es una medida de cuánto ha corrompido a una señal $f(t)$ (o imagen $f(x, y)$) un ruido $\eta(t)$, (o ruido de imagen $\eta(x, y)$). Permite evaluar la información, en particular la presencia o ausencia de eventos (v. g., picos o transiciones) que pueden confundirse con ruido. Si en vez de ruido se tiene una segunda señal, el SNR sigue sirviendo como indicador del grado de contaminación entre ambas señales, siendo una la de mayor interés o de referencia.

Dados los valores de potencia (es decir, las [magnitudes RMS](#) ⁽²⁾ al cuadrado de las amplitudes de la señal $f(t)$, y del ruido $\eta(t)$), la SNR se define, en escala logarítmica, como el **cociente entre la potencia de la señal y la potencia del ruido**; o en términos de las amplitudes:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{f_{rms}^2}{\eta_{rms}^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{f_{rms}}{\eta_{rms}} \right) \quad (\text{en decibels}), \quad (11)$$

o también, *dos veces la diferencia entre los logaritmos de las amplitudes*, medidas en decibels (log base 10) o decibelios (notar que es adimensional). Una tasa menor a 1:1 indica más ruido que señal. En general esta definición se limita a la [banda](#) de frecuencias de interés. También el SNR se define a veces en escala lineal (sobre todo al relacionado con conteo de eventos) y el ruido RMS corresponde a la desviación estándar de la señal (o sea, el promedio de diferencias cuadráticas respecto al valor RMS de una señal $f(t)$ –ver abajo). Recordemos que el valor RMS *en el intervalo* $[T_1, T_2]$ se define (señal continua, integrable):

$$f_{RMS} = \left[\frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} f^2(t) dt \right]^{1/2} \quad (12)$$

y en el caso de muestras discretas $\{f_n\}$, con $n=1, \dots, N$:

$$f_{RMS} = \sqrt{f(t)^2} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n^2 \right)^{1/2} \quad (13)$$

♣ A veces, la *gama* o [intervalo dinámico](#) (*dynamic range* o *DR*) de una señal se define en términos no del nivel base (por omisión 0), sino del nivel de ruido η_{RMS} , pues pierde sentido una medición donde la señal es del orden del ruido η : $DR = f_{max} / \eta_{RMS}$. Notar diferencias con el *intervalo de variación* $f_{max} - f_{min}$; puede coincidir con el DR cuando se miden en una escala logarítmica en decibels.

² Root Mean Square, o sea el *promedio cuadrático* (a veces *suma en cuadratura*).

Una definición alternativa de la SNR, en escala lineal, es el recíproco de CV (*coeficiente de variación* = desviación estándar dividido entre la media); notar la lógica de tal definición y que asume que el intervalo dinámico de los datos no es grande (si lo fuera, se cambia a escala logarítmica):

$$SNR' = \mu / \sigma \quad (14)$$

Aunque usualmente no se conoce ruido η y lo que se observa es la señal ya corrupta por η , es posible conocer a través de modelos la potencia o energía de ambas componentes. La definición (14) es también una forma práctica de estimar el SNR, a través de muestras (observaciones de la señal o imagen) y la desviación estándar respecto a su media.

Nota: El SNR se define como cociente de potencias o de energías de una señal, y como ambas se definen como cantidades proporcionales a amplitudes RMS al cuadrado, tales constantes se cancelan, quedando la expresión en términos de amplitudes RMS.

♣ **Ejercicio:** Compare el SNR con el Exceso de Señal descrito a continuación y con el *inverso del coeficiente de variación*, del tema de Histogramas.

♣ **Ejercicio:** Formule un valor de SNR para imágenes $I(x,y)$.

Relación Señal a Ruido Pico (PSNR)

La PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) es el cociente de la máxima potencia o energía posible (potencia o energía pico) de una señal y el ruido o fluctuaciones que afectan a su representación fidedigna. Debido a que muchas señales tienen un elevado intervalo dinámico, el PSNR se expresa como la SNR, en decibeles. Su expresión matemática es semejante al de la SNR:

$$PSNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{f_{max}^2}{f_{mse}^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{f_{max}}{f_{mse}} \right) \quad (\text{en decibeles}), \quad (15)$$

Donde f_{max} es el valor pico de la señal o imagen y f_{mse} su error cuadrático medio (mean square error), definido como el valor RMS de $(\bar{f} - f)$.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Brown et al 1999), (Collazo 1980), (Kutz 2013).

Fin§ [►Índice](#)

♣ Exceso de Señal

Una medida de la importancia de un pico, para poder distinguirlo de fluctuaciones en una señal $f(t)$ con ruido, es el **Exceso de Señal (SE)**. Se define como la diferencia entre el máximo del pico y el valor medio de la señal, normalizando respecto a la desviación estándar de $f(t)$:

$$SE = \frac{Peak - Mean}{Std.dev.} = \frac{f_{\max} - \bar{f}}{\sigma_f} \quad (16)$$

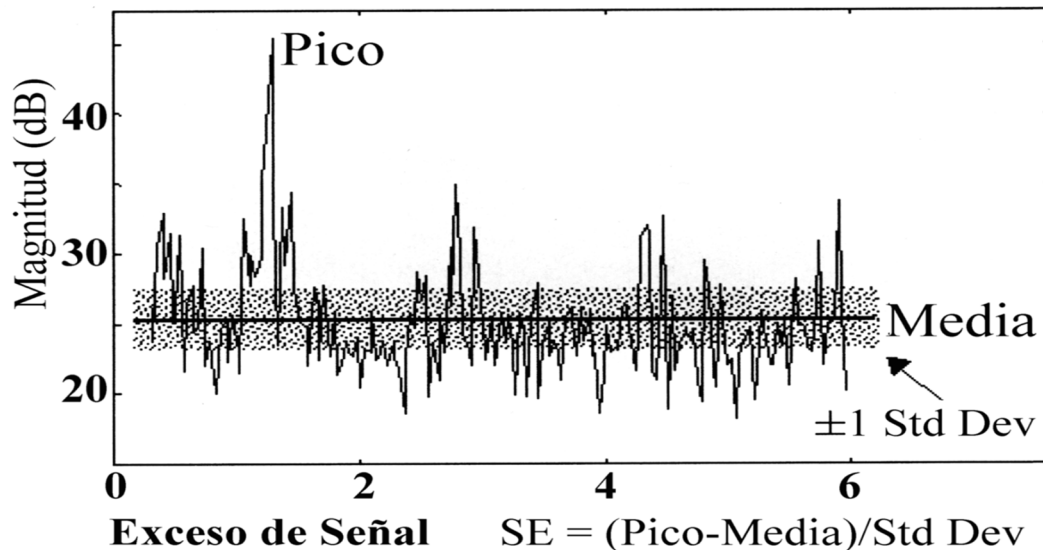


Figura 5. El **exceso de señal** de un pico es la proporción en que su altura rebasa la altura que alcanza la desviación estándar de la señal respecto a la media. La región sombreada en la imagen representa mas/menos una desviación estándar (*Std Dev*) de la media.

Nota: *SE* suele medirse en “desviaciones estándar” (en muchos ámbitos se habla de “**sigmas**”) y un pico (en general, cualquier rasgo de interés) se considera significativo cuando su *SE* es como mínimo dos desviaciones estándar ($=2\sigma$) en el caso de un *ruido con distribución Gaussiana*.

► **Nota:** La *moda*, *media*, *máximo/mínimo*, *mediana*, etc., suelen presentarse como características de poblaciones de datos y en particular de *distribuciones*, pero como resulta claro, también son útiles en conjuntos de muestras, señales, imágenes etc.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Brown et al 1999), (Collazo 1980), (Kutz 2013).

Fin§ [►Índice](#)

Histograma o distribución de un conjunto de datos; PDF's

Consideremos un conjunto de datos $\mathcal{X} = \{u_n\}$, donde $n = 1, \dots, N$. Puede o no existir un dominio D (por ejemplo $u=y(x)$, con $x \in D$, en cuyo caso u es atributo de x). Hay funciones $h(u)$ que no son “señales”, en el sentido de que no son observaciones adquiridas en función del tiempo. Algunas son funciones derivadas de tales datos $\{u_n\}$. Un tipo importante son las **distribuciones probabilísticas** o **funciones de densidad probabilística** (PDF, o a veces PDF) de justamente un atributo u que puede ser elemento de un conjunto $\mathcal{X}$ de muestras no estructuradas, o los valores de una función $f(t)$ o $y(x)$, o de imágenes $I(x,y)$, pero el dominio de u , resultará irrelevante, aunque $h(u)$ sí tenga ciertas características de señal (o imagen) y se pueda procesar y analizar como tal (v.g., suavizarla, obtener un umbral, máximos, etc.).

► Pueden interesar distribuciones de rasgos combinados del atributo y dominio (en cuyo caso *este sí es relevante*, ver [♣ eventos en general](#)), o de rasgos del puro dominio (y es entonces el atributo original el que resulta irrelevante). Por ahora nos limitaremos a histogramas/distribuciones de un atributo tal como intensidad.

► Así como existe la [frecuencia temporal](#) (ciclos/seg), o *frecuencia espacial* (puntos o líneas por cm, dpi, lpi), existe una **frecuencia de eventos**, **ocurrencias** o **incidencias**. Por ejemplo (el más común): *qué tanto se repite cada valor de atributo u en una imagen $u=I(x,y)$.*

Un **histograma** $H(u)$ es un **gráfico** (plot) de:

los valores posibles del atributo u (eje “X”), contra el número de veces (la ocurrencia) en que aparecen (eje “Y”). $H(u)$ permite visualizar aproximadamente la distribución probabilística (o función de densidad probabilística, pdf) de un conjunto de N muestras $X=\{u_n\}$, $n=1, \dots, N$. (Ver la [Figura 6](#)).

Trataremos los datos como información “[no estructurada](#)”, descartando la información de dominio, si la hay. En un [histograma normalizado](#), la ocurrencia respecto al total de observaciones (**frecuencia relativa**), o sea *ocurrencias/Total* queda normalizada a valores en $[0,1]$ y corresponde entonces a la representación discreta de la *probabilidad a posteriori* p_k del **evento** “tener el atributo u el valor k -ésimo” (o más en general, en el intervalo de valores $[u_k, u_{k+1}]$). Al igual que el promedio y otras medidas

estadísticas, un histograma del atributo no requiere de la información de orden, estructura o dominio (si la hay, en este caso no se usa y el histograma no la preserva).

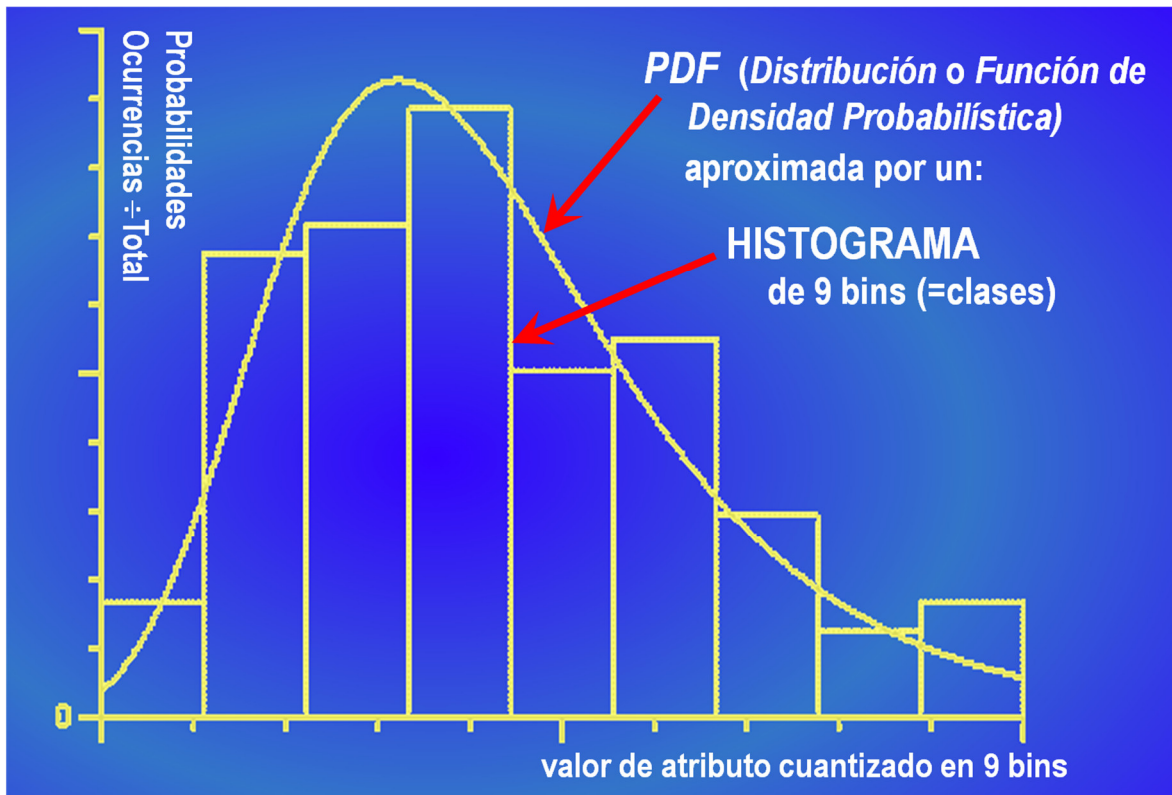


Figura 6. El gráfico en barras es un histograma de 9 clases; el cuarto bin es aquí el **intervalo de valores** (del atributo) **más frecuentes**, o sea un "**intervalo moda**". La curva continua es la *función de densidad probabilística* (PDF) aproximada por el [histograma normalizado](#) $\{p_k\}_{k=1}^L$, o bien un modelo funcional ajustado al histograma.

Corolario 1: No existe el "inverso" de un histograma.

Corolario 2: Infinidad de conjuntos de datos o información diferente (hasta de distinta dimensionalidad) puede tener un mismo histograma (ver el ejemplo de la [Figura 7](#)). Al mismo tiempo es posible que dos imágenes aparentemente iguales (sin considerar detalles "de cerca") presenten histogramas radicalmente diferentes.

Notar que algo semejante ocurre con promedios y desviaciones estándar: se pierde la información de cada sumando y coordenadas (dominio), si las tiene.

► **El propósito o utilidad** de un histograma es de exhibir gráficamente la distribución de un conjunto de datos univariados (un histograma multidimensional corresponderá a la distribución de un conjunto de datos multivariados). El histograma muestra gráficamente:

1. **Centro** (localización) de los datos; dónde se concentran; μ
2. Presencia y localización de **modas** (una o varias) en los datos; más de una moda importante puede reflejar la presencia de más de una población (si cada una se caracteriza por tener una moda principal).
3. **Dispersión** y escala de los datos (extensión ocupada *–range*).
4. **Sesgo** de los datos (*skewness*, hacia dónde se cargan más, izquierda o derecha, en 1D).
5. Presencia de **datos intrusos** (*outliers*, externos a la población).
6. Grado de **uniformidad** o de predominancia en la distribución de intervalos de valores (*curtosis* de cada moda).
7. El ancho de una moda local (un intervalo del atributo) puede usarse como medida del **contraste** local (o sea en ese intervalo). En una imagen binaria o casi binario (v. g., un claro-oscuro) hay dos modas, una en cada extremo de intensidad.

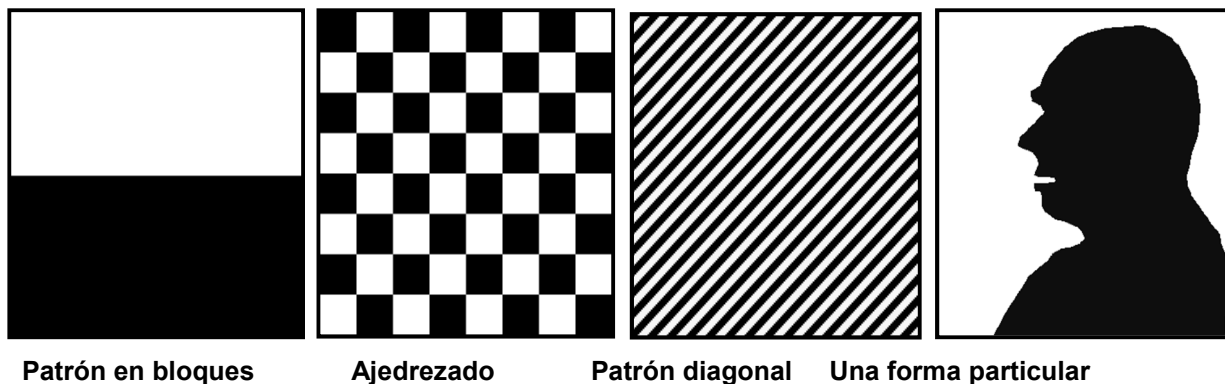


Figura 7. Cuatro imágenes diferentes con la misma distribución global (histograma) de negro y blanco: un pico en 0 (negro) y otro en 255 (blanco) -*verifíquelo*. El conjunto de valores escalares {0, 0, 255, 0, 255, 255, 255, 0, 0, 0, 255, 255, 0, 255}, sin ningún orden, tiene exactamente el mismo perfil de histograma que el de estas imágenes, tras normalización.

Nota: La **media** no necesariamente coincide con el centro de los datos ni con la **moda** (en una PDF Gaussiana **sí coinciden**). Tampoco la **desviación estándar** es la única medida de dispersión y escala, y puede ser distinta a otras medidas que, por ejemplo, penalizan más o menos valores grandes.

Clases o bins: La gama de todos los valores posibles de un atributo (valores posibles que pueden tener las muestras $\mathcal{X}$) son el dominio $[u_0, u_{L-1}]$ del histograma (co-dominio de los datos). Tal intervalo se divide en la práctica en K sub-intervalos, que pueden ser o no ser unitarios (caso $K=L$), y son llamados **clases** o **bins** (“bandejas” o compartimientos); a cada bin le corresponde el número de ocurrencias que “cae” en ese bin, permitiendo que valores cercanos, dentro de cada sub-intervalo cuenten como una misma ocurrencia (evento " $u_k \leq u \leq u_{k+1}$ ").

► **Histogramas normalizados.** Al normalizar las **ocurrencias** respecto al **total de muestras** N , la abscisa queda delimitada a $[0, 1]$ y aproxima las frecuencias probabilísticas p_k del evento “hay $N \cdot p_k$ observaciones u que caen en el bin $[u_k, u_{k+1}]$, con $k=0, 1, \dots, L-2$ ”. Los histogramas normalizados a veces se llaman también *relativos*. La normalización es necesaria para hacer comparaciones cuando N varía entre histogramas y para que $H(u_k)$ pueda interpretarse como una *PDF* discreta, y $H(u_k) = p_k$.

Nota: Los L intervalos, clases o bins, no son necesariamente de un mismo tamaño Δu_k y los valores u_k no necesariamente coinciden con muestras particulares. Un histograma de información no estructurada tiene típicamente unas 20 clases; en imágenes digitales frecuentemente se maneja la totalidad de los niveles de gris; en 8 bits de resolución, estos son: $u = 0, 1, \dots, 255$. Hay aplicaciones donde sólo se manejan de 2 a 4 clases; en análisis textural se re-cuantiza a 4, 8 ó 16 y en raras ocasiones, a 64 niveles.

♣ **Nota: Clasificar** tiene dos sentidos diferentes (*EN: to class & to classify*, o *FR: classer & classifier*), respectivamente: (1), establecer cuántas clases (bins) hay o se requieren, y definir sus límites (pueden ser intervalos de distintas longitudes, pero no deben traslaparse) y (2), dado un ítem o evento, “incluirlo” (usualmente *contarlo*) en la clase o bin que le corresponde. Por ejemplo, en el primer significado, establecemos grupos de edad como bebé-o-niño (intervalo: $[0, 12]$ años), adolescente: $(12, 18]$, joven: $(18, 30]$, adulto-o-tercera-edad: $(30, \infty)$. Con este conjunto de clases la tarea que sigue es (2): clasificar un grupo de 10^6 habitantes, para obtener el histograma o distribución de edades discretizada o cuantizada (preferible, dado que es el atributo, no el dominio) en los cuatro grupos de edad definidos.

Ejemplo: Se tiene un conjunto de $N=15$ observaciones (para su histograma, el orden es irrelevante; podrían provenir de información multidimensional, tal como los valores de gris de una imagen 3D):

$$\mathcal{X} = \{ 4, 1.2, 6.3, 11.8, 1.4, 7.1, 4.1, 1.6, 4, 6, 6.2, 11, 3.9, 1, 1.2 \}, \quad (17)$$

donde $N = \text{card } \mathcal{X} = 15$.

Establecemos $K = 6$ clases o intervalos: $[0, 2)$, $[2, 4)$, $[4, 6)$, $[6, 8)$, $[8, 10)$ y $[10, 12)$.

Tabulamos cuántas veces caen los valores de $u \in \mathcal{X}$, en cada intervalo:

Atributo u (clase k)	Número de ocurrencias	Frecuencia normalizada = # Ocurrencias/ N
Intervalo 1	1+1+1+1+1=5	0.333...
Intervalo 2	0	0.000
Intervalo 3	1+1+1=3	0.200
Intervalo 4	1+1+1+1=4	0.266...
Intervalo 5	1	0.066...
Intervalo 6	1+1=2	0.133...

Tabla 3. Tabulación de las ocurrencias por clase del conjunto de muestras de (17).

Nota: La suma del total de ocurrencias (15 en el ejemplo, suma de la 2ª. columna) coincide con $N = \text{card } \mathcal{X}$. La suma de todas las frecuencias relativas (o normalizadas a $N=15$, en la 3a. columna) debe ser 1 y entonces cada una aproxima la *probabilidad a posteriori* $p(u)$ de cada valor de atributo. El histograma normalizado es la gráfica de u (valores posibles en $[0,12)$, divididos en 6 clases uniformes) vs. la frecuencia relativa p_k (3a. columna).

Nota: No confundir el máximo valor de las muestras $u_{\max} = \max \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_N\}$, con el máximo número de ocurrencias (cuyo argumento es la moda = el evento más frecuente = mayor probabilidad *a posteriori*: $p_{\max} = \max \{p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_{L-1}\}$).

Nota: Al considerar una variable aleatoria continua (el atributo de interés), se tendrían clases de tamaño infinitesimal y la distribución que visualiza el histograma se aproxima a la *Función de Densidad Probabilística* (PDF, no confundir con PSF) de los datos. Su integral de $u=0$ hasta una $u=u_{\text{específica}}$ es la probabilidad de que u tenga un valor menor o igual a $u_{\text{específica}}$. Cuando se integra sobre todo valor posible de u (a veces se indica “de 0 a ∞ ”), la probabilidad es 1. Es decir que el área bajo la curva del histograma (*histograma acumulativo*) de 0 a $u_{\text{específica}}$ aproxima la probabilidad $P[u \leq u_{\text{específica}}]$.

Nota: El perfil del histograma usualmente cambiará un poco si se cambia el número de clases, y más aún, si no son del mismo tamaño. También cambiará si se *decima* el total de muestras (sub-muestreo), pero si no es por mucho, se mantendrá su perfil, siempre que el muestreo sea uniforme (v.g., 20% de los píxeles de una imagen). Sin embargo, al aumentar el número de datos y disminuir el tamaño de los bins, el histograma tenderá a tener un mismo perfil.

Nota: En la gráfica de un histograma, en el eje de las ordenadas **no se marcan** las observaciones (los elementos de la población $\mathcal{X}$), sino la **gama de valores posibles** (en orden, usualmente ascendente) que pueden tener dichas muestras, o intervalos que los contienen. En el caso de valores de una señal, es todo el intervalo dinámico = co-dominio de la señal, y estrictamente, su *imagen*. Por todo lo anterior la gráfica indica *cómo se distribuyen* estos valores en $\mathcal{X}$.

Ejercicio: Haga el gráfico del histograma de $\mathcal{X}$, definido por (14). ¿Cuál es la moda? ¿y la “moda” de $\mathcal{X}$? ¿Cuándo tiene sentido obtener la moda de $\mathcal{X}$?

Ejercicio: Dada una imagen con atributo $u = I(x, y)$ e histograma $Histo(u)$, ¿cómo podría construir N imágenes con exactamente el mismo histograma?

Ejercicio: Grafique el histograma (normalizado) de la siguiente imagen de 6×5 píxeles (el atributo es el nivel de gris; elabore una interpretación adecuada y enliste exactamente los elementos de $\mathcal{X}$: todos los valores del atributo):



Ejercicio: Obtenga la mediana y la moda del histograma del problema anterior.

Ejercicio: Si las intensidades del ejercicio anterior son afectadas por un ruido de magnitud máxima η_{max} , es decir, en vez de $I(x, y)$ se tiene $I(x, y) + \eta_{max}$, ¿cómo afecta el ruido al histograma de la imagen con ruido, en función de η_{max} y del tamaño de los bins?

Ejercicio: Dado un conjunto de datos $\mathcal{X}$, ¿Es posible hallar la mediana de $\mathcal{X}$ a partir de su histograma?, si sí, describa cómo.

♣**Nota:** Para comparar dos histogramas no es necesario que tengan el mismo número de bins: se comparan los perfiles. Pero es preferible que su número sea tal, que los anchos de los rasgos de interés

de los perfiles ocupen al menos dos bins ([Criterio de muestreo de Nyquist-Shannon](#)). Lo que sí es importante es que los histogramas estén normalizados; es decir que las cuentas divididas entre $\text{card}(\mathcal{X})$, (o sea como frecuencias de ocurrencia), estén contenidas en $[0, 1]$, o si no se normalizan, se encuentren en un mismo intervalo $[N_1, N_2]$, para que la comparación tenga sentido. Si el número de bins es el mismo, se pueden comparar bin-a-bin, pero es importante que exista una alineación en el eje del atributo del cual se está obteniendo cada histograma (intensidades en una imagen, por ejemplo).

♣**Nota:** En física experimental, el espectro de energías de una muestra radioactiva se puede obtener mediante un instrumento llamado "analyzer multicanal": construye y grafica por medios electrónicos un histograma de picos de energías. Muestras diferentes se caracterizan por distribuciones de energías diferentes. Algunos analizadores cuentan pulsos (la frecuencia de tales pulsos es proporcional a la energía) y si la cuenta cae en un intervalo $[N_k, N_{k+1}]$, ese *canal* k incrementa su propia cuenta sobre ese intervalo de energías, y se va generando un histograma.

Nota: Cuando las observaciones pertenecen a dos o más poblaciones (por ejemplo, las estaturas de niños de menos de 6 años y las de adultos), aparecerán **modas distintivas** de cada población, pero no necesariamente son diferentes, por ejemplo, si los niños son de 10-12 años, de la tribu Watusi –muy altos– y los adultos son, pigmeos –muy bajos–; pero entonces no sería posible distinguir las poblaciones mediante el atributo de estatura. Sin embargo, no siempre es posible identificar (resolver) las modas individuales si las poblaciones son muy semejantes.

♣**Ejercicio:** Dadas dos distribuciones normales $G_A(u)$ y $G_B(u)$ con parámetros (μ_A, σ_A) y (μ_B, σ_B) , determine qué relación debe haber entre dichos parámetros para que en una población modelada por $(G_A(u) + G_B(u))$ se puedan *resolver* (identificar) las dos modas. Como criterio de *resolución* tome una diferencia entre el valor mínimo entre modas y cada máximo mayor o igual a $1/10$ de dicho máximo.

♣**Ejercicio:** ¿Cómo se relaciona el *valor esperado* de una variable aleatoria $\mathcal{U}$ y el histograma de un conjunto de N muestras de $\mathcal{U}$ suficientemente representativo?

Interpretando el histograma de una imagen escalar.

1. Si el histograma es más o menos uniforme, todos los L valores posibles de intensidad aparecen en las mismas proporciones (en consecuencia, si cada bin es unitario, $p_k = 1/L$, para todo bin k). La imagen es de alto contraste aunque no tanto en apariencia ya que no dominan ni tonos claros ni oscuros. Algo semejante ocurre si se puede modelar el histograma por una curva normal con

una sigma (desv. std.) de la mitad de su dominio (intervalo dinámico del atributo) o si las colas son importantes en los valores extremos. **Nota:** lo anterior puede ser local, o sea sólo para un intervalo de valores del atributo.

2. Si el histograma se concentra principalmente en un intervalo de valores de atributo (equivalentemente, tiene colas cortas y modas pequeñas fuera de tal intervalo), la extensión del intervalo ([soporte](#)) define el contraste en intensidades: es bajo si el intervalo es pequeño (por ejemplo 1/3 de todo el intervalo dinámico de intensidades), y es mayor si el soporte es grande (pero ver inciso 1). El máximo contraste posible lo presenta una imagen binaria (fondo negro y Figuras en blanco o viceversa).
3. Si el histograma es bimodal, es común que una moda sea el fondo y la otra los objetos de interés, contrastados respecto al fondo; en una imagen de 8 bits, si la 1a. moda es 0 ó cerca de 0 (negro) y la segunda es 255 ó cerca de 255 (blanco); en tal caso la imagen presenta gran contraste global y aparente; si tal histograma tiene valores $H(u) = 0$ excepto en $u=0$ y $u=255$ entonces es una imagen binaria, como en los ejemplos de la [Figura 7](#).
4. Las características anteriores pueden ser globales o locales (histograma de una región de interés, o de un conjunto de puntos, contornos, etc). En consecuencia, es posible hacer un cambio de contraste local, binarizar sólo una región, etc.

♣ “Agujeros en el histograma” o problema de clases vacías.

Es claro que, en distribuciones discretas, el número de [clases](#) debe ser menor o igual a los niveles del atributo. Por otra parte, una selección descuidada del número de clases, y/o una definición inadecuada de cada intervalo, puede dar lugar a “falsas modas” y “agujeros”, si el atributo no tiene valores que caigan en un intervalo definido. Tales problemas afectan el análisis y la interpretación. Si la población es baja, es mejor manejar un número proporcionalmente bajo de clases, típicamente de 6 a no más de 20 para unos 50-100 datos, aunque en ciertas aplicaciones pueden ser 4 ó inclusive 2 (caso de las imágenes binarias).

Un ejemplo clásico de “hoyos” es tener una imagen oscura que se re-escala en intensidad, multiplicándola por cuatro; desaparecen los valores 1, 2, 3, 5, etc. existiendo sólo múltiplos de 4. Con 255 clases (es decir, “intervalos” unitarios, cuando deberían ser de longitud 4), se obtiene un histograma con valores sólo en los bins $4n$; los demás tienen “cero”, creando discontinuidades artificiales en el perfil del histograma. Si se quiere detectar un pico o suavizar el perfil, se genera un histograma que no corresponde al esperado. La solución es refinar el algoritmo de obtención de histograma, para que

considere intervalos sin huecos, o que maneje un atributo re-escalado (*re-cuantizado*) o bins sólo en valores existentes, en nuestro ejemplo sería en 0, 4, 8...), para evitar producir agujeros. Una interpolación también puede funcionar, pero debe cuidarse que no altere los valores válidos.

♣ **Suavizado del perfil de un histograma.**

Al igual que con una señal $f(t)$ muestreada, es posible suavizar un histograma $H(n)$, con $n = 0, \dots, N-1$, usando un [promedio local móvil](#), o también *filtro de caja* (*box filter*), teniendo la ventana el soporte $[-(K-1)/2, (K-1)/2]$ y ancho de la caja (o cardinalidad de ventana) igual a $K < N$, K impar y es igual a la diferencia entre los extremos del soporte ($K = (K-1)/2 - (-(K-1)/2)$). El histograma suavizado es:

$$H_{\text{suavizado}}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=-(K-1)/2}^{(K-1)/2} H(k-n) \quad (18)$$

El suavizado, [filtrado](#) y otros procesamientos de la curva e $H(n)$ son útiles para su análisis, como si fuera una señal: atenuar variaciones cuya información no es relevante y sobre todo detectar picos ([modas](#)) y otros [rasgos o eventos](#).

♣ **Ejercicio:** La ecuación de suavizado del histograma (18) presenta problemas en los extremos, por ejemplo en $n < (K-1)/2$. Identifique tales problemas y proponga alguna solución.

♣ **Ejercicio:** Todo suavizado es resultado de aplicar un [filtro pasa-bajas](#). Después de estudiar el apartado sobre [convolución](#), identifique en la ecuación (18) las funciones f y g , y reescribala como una convolución con núcleo simétrico.

♣ **Ejercicio:** Después de estudiar el tema del [Criterio de Nyquist Shannon](#), establezca un criterio para escoger el valor de K para suavizar un histograma.

♣ **Ejercicio:** Si u es el atributo estudiado en un histograma (abscisa) ¿Cómo relacionaría y aplicaría el [Criterio de Nyquist Shannon](#) para establecer el tamaño de los bins Δu ?, o equivalentemente, dados L valores posibles de atributo, ¿cómo determinaría el número de clases mínimo?

Nota: Es fácil confundir el papel del atributo u en un histograma y en el conjunto de datos (instancias de u), o señal (por ejemplo, $u=f(t)$), imagen, etc.: el *dominio* del *histograma-de-u* (*variable "independiente"*) es usualmente el co-dominio de la señal o imagen (*variable "dependiente"*) correspondiente al dominio de

los datos estructurados). En datos no estructurados (conjunto de muestras u observaciones), son los datos mismos, sin dominio explícito.

Formas típicas de un histograma.

Es común modelar una población mediante una función o curva Gaussiana (Normal o "de campana"); si hay dos o más poblaciones presentes en los datos (por ejemplo, estaturas de niños y estaturas de adultos), cada población podría manifestarse como una moda separada, y el conjunto se modela mediante dos curvas de campana. Puede haber otros casos y diversas combinaciones de una distribución (formas del histograma). Las más frecuentes son:

1. Normal.
2. Uniforme.
3. Simétrica, no-normal, colas cortas.
4. Simétrica, no-normal, colas largas.
5. Simétrica y bimodal.
6. Bimodal en general, mezcla de dos poblaciones (normales).
7. Binario; caso especial del bimodal: sólo hay dos valores del atributo (usualmente en los extremos, si no, suele llamarse, "bi-nivel" y en imágenes se habla de "duo-tono").
8. [Sesgada](#) (no simétrica) hacia la derecha.
9. Sesgada (no simétrica) hacia la izquierda.
10. Simétrica con uno o varios *outliers*. Idem, asimétrica.
11. Multimodal (varias poblaciones; los valores del atributo pueden hallarse *semi-cuantizados*).

Una curva simétrica pero no Gaussiana puede tener un pico más delgado que el de una gaussiana de base aproximadamente equivalente (curva [leptocúrtica](#)), o al contrario, su pico puede ser más ancho que el de una gaussiana de base aproximadamente equivalente (curva [platicúrtica](#)). En el histograma de una imagen compleja (v.g., la foto familiar), suelen haber varias modas locales.

♣ Las [características o rasgos de un histograma](#) (*histogram features*) son parámetros descriptivos (o *descriptores*) basados en las frecuencias de ocurrencia (muestras de la PDF, cuando dichas frecuencias están normalizadas y son probabilidades discretas). Los más comunes se examinan en la sección siguiente. Estas medidas se extraen del histograma de un conjunto de datos (*población*), una o varias señales, una imagen (o varias) o una región de interés en una imagen. En la [Tabla 4](#) que sigue requerimos de normalización, es decir: $\sum_k p(u_k)=1$, de otro modo, es necesario introducir una constante de normalización en cada definición, tal como el número de píxeles en la región de interés de la imagen cuyo histograma es obtenido.

♣ **Co-ocurrencia.** Cuando se tienen dos variables aleatorias u , v , se consideran *probabilidades conjuntas (joint) de eventos* y el histograma es bidimensional. Se habla, como ejemplo de evento, de la *co-ocurrencia* de que la variable u tenga un valor i mientras que la variable v tiene un valor j . En análisis textural un histograma bidimensional de atributos conjuntos (v.g., niveles de gris), denomina también *matriz de co-ocurrencia (de niveles de gris)*; a veces también se denomina matriz de coocurrencia de dependencia espacial, y pueden considerarse atributos conjuntos distintos a la intensidad.

Ejercicio. Se tienen cientos de pinturas de diversos autores en un museo; hay escenas nocturnas, al atardecer, paisajes con cielo nublado, en la playa, etc. El curador del museo las ha clasificado como pinturas “muy oscuras”, “oscuras”, “de intensidad media”, “luminosas”, “muy luminosas”; todas son realistas y se consideran de bajo contraste; hay además otros dos grupos con ambos extremos que son los “claro-oscuros” con pocas intensidades intermedias y unas que llama “de contraste intermedio”. Proponga cómo serían los histogramas de intensidad de cada grupo, si la gama de intensidades en fotos digitales es de $[0,255]$.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Gonzalez y Woods 2017), (Jähne 1999), (Kreyszig 2011), (Walpole et al. 2011).

Fin§ [►Índice](#)

♣ Características de un Histograma $\{p(u_k)\}$

Sean $p(u_k) \triangleq \text{Prob}[u = u_k]$ y $u_k \in \{u_0, u_1, \dots, u_{L-1}\}$ es el atributo cuantizado de los datos. Definimos:

$$\begin{aligned} p_{\max} &= \max_k \{p(u_k)\}, & \text{Máximo de probabilidad,} \\ u_{\max} &= \underset{k}{\operatorname{argmax}} \{p(u_k)\} & \text{Moda (valor más frecuente, v.g., intensidad)} \\ u_{\text{med}} &= \text{median}\{p(u_k)\} & \text{Mediana} \end{aligned} \quad (19)$$

$$m_1 = \langle u \rangle = E[u] = \sum_{k=0}^{L-1} u_k p(u_k) \quad \begin{array}{l} \text{Primer momento (centroide)} \\ \text{o Valor medio estadístico} \end{array} \quad (20)$$

$$m_n = E[u^n] = \sum_{k=0}^{L-1} u_k^n p(u_k) \quad \begin{array}{l} \text{Momentos de orden } n \\ \text{Orden 2: Contraste} \end{array} \quad (21)$$

$$\hat{m}_n = E[|u|^n] = \sum_{k=0}^{L-1} |u_k|^n p(u_k) \quad \text{Momentos absolutos, orden } n \quad (22)$$

$$\mu_n = E[(u - E[u])^n] = \sum_{k=0}^{L-1} (u_k - m_1)^n p(u_k) \quad \begin{array}{l} \text{Momentos Centrales, orden } n \\ \mu_0 = m_0 = 1 \text{ y } \mu_1 = 0. \end{array} \quad (23)$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = \sum_{k=0}^{L-1} (u_k - m_1)^2 p(u_k) \quad \begin{array}{l} \text{Varianza o} \\ \text{Momento Central de orden 2} \end{array} \quad (24)$$

$$\hat{\mu}_n = E[|u - E[u]|^n] = \sum_{k=0}^{L-1} |u_k - m_1|^n p(u_k) \quad \text{Momentos absolutos centrales} \quad (25)$$

$$m_{-n} = E[u^{-n}] = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{p(u_k)}{u_k^n}, \quad u_k \neq 0 \quad \text{Momento Inverso de orden } n \quad (26)$$

$$E(u) = E[p] = \sum_{k=0}^{L-1} p^2(u_k) \quad \text{Uniformidad o Energía} \quad (27)$$

$$H = E[-\log_2 p] = -\sum_k p(u_k) \log_2 p(u_k) \quad \text{Entropía (en bits)} \quad (28)$$

$$H_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_k p(u_k)^\alpha \right) \quad \text{Entropía de Rényi de orden } \alpha \quad (29)$$

Tabla 4. Fórmulas de rasgos o *descriptores* que caracterizan un histograma.

♣ **Nota:** en estas características de histograma de un atributo u , el dominio de los datos (si tienen) no aparece (pero ver [Anexo E](#)); las ecuaciones podrían referirse a un conjunto de muestras sin orden explícito, una señal (o varias, o el valor en un cierto instante para varias señales), una imagen o pila de fotos, o cualquier dominio nD con un atributo escalar discreto u_k . A veces se incluyen en la tabla anterior los *momentos estandarizados* μ_k / σ^k , donde $k=1, \dots, N$.

Sumario de las Características de Histograma más usadas:

$m_1 = \mu = \bar{u}$	Media (Mean or <i>statistical average value</i>)
u_{med}	Mediana (Median)
u_{max}	Moda (Mode), valor más frecuente
$\hat{\mu}_1$	1er. Momento Central Absoluto
$\sigma^2 = \mu_2$	Varianza (Variance)
m_2	Contraste o Energía Promedio (también: valor cuadrático medio)
σ^2 / μ	Dispersión (índice de) o esparcimiento = Factor de Fano
σ^2 / μ^2	Eficiencia o Lacunaridad en análisis textural
$\mu / \sigma = 1 / CV$	SNR ' (definición alternativa) = (Coeficiente de Variación)⁻¹
μ_3 / σ^3	Sesgo (Skewness)
μ_4 / σ^4	Curtosis (Kurtosis)
$\mu_4 / \sigma^4 - 3$	Curtosis de exceso (=0 para una distribución normal)
μ_k / σ^k	Momento estandarizado (orden k)
H	Entropía (no confundir con <i>histograma Histo</i> , $\{p_n\}$)
E	Energía (no confundir con <i>valor esperado E</i>) o Inercia

Tabla 5. Características o descriptores de histograma más empleados.

♣ En algunos textos, las ecuaciones (19) a la (29) son escritas con notación simplificada, con $\Delta u_k = 1$, para toda k , haciendo $u = 0, 1, \dots, L-1$ (normalizando a bins unitarios), y $p(u_k)$ se escribe entonces p_k . Por ejemplo, la entropía es definida también como:

$$H = \langle -\log_2 p \rangle = -\sum_k^{L-1} p_k \log_2 p_k, \text{ con } p_k > 0. \quad (30)$$

Nota: Hay mucho en común entre una distribución y un espectro (ver tema de [frecuencias](#)); cuando el atributo es alguna intensidad, se habla de "espectro de intensidad", donde la variable independiente son clases o intervalos de intensidad.

Ejercicio: Establezca las diferencias entre un espectro de frecuencias (en Hertz) de una señal eléctrica y un histograma (normalizado) de las mismas.

Ejercicio: Un haz electromagnético contiene longitudes de onda y energías correspondientes en distintas proporciones (si faltan varias, se puede estudiar el llamado “espectro de absorción”). ¿Es equivalente (por ejemplo, proporcional) un histograma de tales energías que el espectro obtenido mediante la Transformada de Fourier? Si no, ¿cómo se relacionan?

Nota: Así como muchos conjuntos distintos de datos pueden tener exactamente el mismo histograma, muchos histogramas diferentes pueden tener un mismo valor de sesgo, entropía, media, etc. Incluso varios histogramas (aunque menos que en el caso anterior) pueden tener exactamente el mismo conjunto de características de la Tabla 1. Sólo si se toman todos los momentos de una distribución ($n = 0, \dots, \infty$) hay una correspondencia única.

Fin§ [►Índice](#)

♣ **Histograma Acumulado o Cumulativo.**

O bien, CDF, de *Cumulative Distribution Function*. En una imagen o una [ROI](#) rectangular de dimensiones $N \times M$ y L niveles de intensidad, definimos en discreto:

$$cpdf_n = 1/(NM) \sum_{k=0}^n card(u_k) = \sum_{k=0}^n p(u_k) \quad (31)$$

Con $n=1, 2, \dots, L$. Para una variable aleatoria continua v :

$$cpdf(u) = \int_0^u p(v) dv \quad (32)$$

Con $u \leq u_L$. De la expresión anterior es claro que la *cpdf* es la probabilidad de que la variable aleatoria v tenga un valor menor o igual a u , o sea $P[v \leq u]$ y se satisface que $cpdf(u_L) = 1$.

♣ **Igualación o Ecuilización de Histograma (Histogram Equalization).** Es el proceso de aplicar a los datos una función de transferencia usando el histograma cumulativo, o sea la probabilidad de que el atributo sea menor o igual al valor de entrada:

$$u_{out} = cpdf(u_{in}) = \int_0^{u_{in}} p(v) dv \quad (33)$$

Se puede demostrar que la PDF de los niveles de salida (i.e., $p(u_{out})$) (histograma de la imagen modificada) es uniforme:

$$p(u_{out}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq u_{out} \leq u_{L-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

La transformación (33) genera una imagen cuyas intensidades son equi-probables (o sea *ecualizadas*) cubriendo todo el intervalo $[0, 255]$. El intervalo dinámico aumenta y usualmente la imagen resultante **exhibirá mayor contraste** que la imagen original si su soporte era un intervalo menor a $[0, 255]$. Es importante saber que el tratar de imponer una distribución uniforme (o cualquier otra) a una imagen (se dice que “se aplicó a su histograma”, pero en realidad fue a la imagen) es una operación aproximada, pues puede haber menos pixeles con un valor de gris que el exigido por la distribución uniforme ($NM/256$, para una imagen de 8 bits). O sea que se crearán “[agujeros en el histograma](#)” transformado (es decir, aparecen agujeros en el histograma de la imagen a la que se aplica (33)).

♣ **Especificación de Histograma (histogram matching).**

La ecualización de una imagen es un caso particular de transformar los niveles de gris para que sigan en forma aproximada una $PDF(u)$ arbitraria. En general se pre-calculan los valores de la función de transferencia en una tabla (LUT : *Look-Up Table*) de modo que $I_{out}(x,y) = LUT(I_{in}(x,y))$.

♣ **Comparación de Histogramas**

A veces nos interesa comparar la distribución del atributo en dos conjuntos de datos, dos señales, dos imágenes, etc. Un ejemplo común es comparar la distribución de los niveles de gris de dos [ROIs](#) R_1, R_2 de una misma imagen o de dos imágenes I_1, I_2 . Como vimos, dos imágenes distintas pueden tener un mismo histograma, de modo que la comparación es puramente de distribuciones y no nos dirá nada sobre otras semejanzas entre ambas imágenes (o regiones). Existen varias medidas de similitud; una es la *distancia Chi-square* entre dos histogramas $\{p_i\}$ y $\{p_j\}$ locales en un intervalo (señales) o ventana (imágenes); ambos índices i, j corren sobre todos los bins posibles del atributo en $[0, L]$; los i corresponden a pixeles en R_1 (o en la imagen I_1), con intensidad i , mientras que los j corresponden a pixeles en R_2 (o en la imagen I_2); los $\{p_i\}, \{p_j\}$ están normalizados respecto a la cardinalidad de R_1, R_2 (o de I_1, I_2 , respectivamente). La **distancia Chi-square** entre ambos histogramas se define como:

$$\chi^2(p_i, p_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L-1} \frac{(p_i(u_k) - p_j(u_k))^2}{p_i(u_k) + p_j(u_k)} \quad (35)$$

También se pueden emplear los métodos de [comparación entre señales](#).

♣ **Definición Matemática de un Histograma**

El histograma (sin normalizar) de una imagen con L niveles de gris y dimensiones $N \times M$ se obtiene contando ocurrencias n_i del evento “el pixel en (x, y) tiene una intensidad que cae en el bin i ”, o sea:

$$n_k = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \begin{cases} 1 & \text{if } (I(x, y) = u_k) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

con $k=0, \dots, L$. Si $\delta_{a,b}$ es la función *delta de Kronecker*, entonces $\delta_{a,b} = 1$ si y solo si $a=b$, y $\delta_{a,b} = 0$ si $a \neq b$; así podemos reescribir (36) como:

$$n_k = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \delta_{I(x,y), u_k} \quad (37)$$

El evento “ $I(x, y) = u_k$ ” es uno de muchos posibles [eventos](#) (por ejemplo podríamos contar la incidencia del evento “ $(I(x, y) < u_k) \text{ AND } (I(x, y) \geq \frac{1}{2} u_k)$ ”). Una forma más conveniente de escribir la definición (36) es usando el *paréntesis de Iverson* $[P]$ igual a 1 cuando la proposición P es verdad y 0 si es falsa; así que, antes de la normalización tenemos³:

$$n_k = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} [I(x, y) = u_k] \quad (38)$$

Histogramas regionales o locales pueden obtenerse para una ROI arbitraria o ventana $W \subseteq I$, o una vecindad alrededor de un punto de interés particular (o inclusive para todos los píxeles de una imagen):

$$n_k = \sum_{(x,y) \in \text{ROI}} [I(x, y) = u_k] \quad (39)$$

Para una discretización más fina del atributo u , o en general para una imagen analógica, el predicado lógico P puede expresarse como el evento “ u cae dentro del bin k ”:

$$n_k = \sum_{(x,y) \in \text{ROI}} [I(x, y) \in \text{bin}_k] \quad (40)$$

para histogramas regulares, bin_k corresponde al intervalo $[u_k, u_{k+1})$.

³ Notar que “ $[x=a]$ ” equivale a la expresión en lenguaje C: “ $(x == a)$ ”, que devuelve un valor Booleano, o sea, “0” si es falsa (x no es igual a a) o bien “1” si es verdadera (x sí es igual a a).

Notar que estas definiciones no son adecuadas para implantaciones computacionales de histogramas y son usadas sólo por claridad e interpretación. Enseguida veremos una formulación práctica.

Histogramas con MATLAB u otros Lenguajes

Para calcular histogramas en la práctica, se usa *indireccionamiento* de datos en memoria, recorriendo el conjunto de datos (para una imagen, barriendo pixel por pixel (x, y)) e incrementando la cuenta en la entrada k del vector que representa al histograma $\{n_k\}$, indicada la entrada k por el atributo (tenemos $u_k = I(x, y)$). Antes debe realizarse una [cuantización](#) a L niveles (la normalización de probabilidades se hace luego), de modo que los nuevos niveles sean $u'_k = k$ y coincidan con direcciones válidas del arreglo $\{n_k\}$. En el caso de una imagen $N \times M$, tal histograma reemplaza las formulaciones (36) a (39):

$$\begin{aligned} \forall_{(x,y)} : \quad n_{k=I(x,y)}^{t+1} &= n_{k=I(x,y)}^t + 1 \\ \text{con } n_k^0 &= 0, \quad \forall_{(0 \leq k < L)}, \quad y : \quad t = 0, \dots, (NM - 1) \end{aligned} \quad (41)$$

El código (simplificado) en Matlab es el siguiente:

```
Ima = imread(cualquierimagen.tif,'TIF');

% a matrix Ima contains the image read from disk

image(Ima);           % display it to compare with histogram
hold on;              % leave it on the screen

n=zeros(256,1);      % initialize histogram vector to 0
[M,N] = size(Ima);  % get dimensions to set loop limits
for x=1:M             % scan all columns
    for y=1:N          % scan all rows
        n(Ima (x,y)) = n(Ima(x,y))+1;    % n has to be float
                                           % Ima(x,y) has to be integer
                                           % and start at value 1
                                           % use data Ima (x,y) as the
    end                % address to count occurrences
end

plot(n);              % now display it

HistoNorm = n /(M*N); % finally, normalize it
```

NOTA: En la práctica, los índices de Matlab deben iniciar en 1, y ser de tipo *unsigned integer*; además, la suma de variables en Matlab requiere de tipo *float* o *double*, así que deben hacerse algunas conversiones (ida y vuelta). Notar que la instrucción central usa datos (intensidades de imagen) como la dirección o índice de la clase (valor de intensidad escalada a número de bin) a ser incrementada; para que funciones adecuadamente el algoritmo anterior, **la imagen tiene que ser re-cuantizada al número deseado de clases del histograma.**

♣**Ejercicio:** Considere un histograma *bidimensional* (de [co-ocurrencia](#)). Generalice a 2D las formulaciones (36) a (41) y el código en Matlab arriba expuesto. Compruebe su algoritmo usando la función de Matlab para cálculo de *matrices de co-ocurrencia de niveles de gris* (GLCM, en inglés).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Hahn y Valentine 2016), (Gonzalez y Woods 2017)

Fin§ [►Índice](#)

♣ Comparación de Dos Señales Discretas

Dadas dos señales digitales o secuencias ordenadas $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$, con $n = 1, \dots, N$, suelen interesar comparaciones muestra a muestra. Se presupone que no hay retardos entre las señales (están sincronizadas) y sus rasgos coinciden, aunque tal vez es esto justamente lo que se evaluará. Una aplicación es comparar mediciones repetidas de un mesurando, para verificar repetitividad del procedimiento o protocolo de medición, aquella del instrumento y eventualmente del propio mesurando, si los dos primeros son 100% repetitivos. Otra: detectar desfases o efectos de distorsión en adquisiciones de una misma señal. La diferencia muestra a muestra forma una nueva señal o secuencia $\{\delta_n\}$:

$$\delta_n(f, g) = f_n - g_n, \quad (42)$$

también se puede extraer una señal de *diferencia cuadrática*:

$$\delta_n^2(f, g) = (f_n - g_n)^2, \quad (43)$$

podemos además calcular la siguiente media cuadrática:

$$\langle \delta^2 \rangle = 1/N \sum_n (\delta_n^2(f, g))^{1/2}, \quad (44)$$

y su respectiva desviación estándar:

$$\sigma(\delta^2) = 1/N \sum_n (\delta_n^2 - \langle \delta^2 \rangle)^{1/2}. \quad (45)$$

Observaciones: $\langle |\delta| \rangle$ y $\langle \delta^2 \rangle$ son medidas del *offset relativo* entre f y g , y podemos considerarlas **diferencias sistemáticas**, mientras que $\sigma(\delta^2)$ es una diferencia más "interna", pues descarta el offset relativo. Si se conoce el nivel de ruido presente, es posible compararlo con $\sigma(\delta^2)$ e indica si la diferencia entre f y g es significativa, comparada al ruido. $\langle \delta^2 \rangle$ es una medida más robusta de diferencia que $\langle |\delta| \rangle$, pues penaliza los valores pequeños y por tanto al ruido, siempre y cuando el exceso de señal sea importante para los rasgos de interés de cada señal. Es también posible definir las estadísticas anteriores localmente, sólo para rasgos de interés que serán comparados entre ambas señales.

Una medida global de similitud discreta es la *distancia Chi-square*:

$$\chi^2(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\delta_n^2(f, g)}{\delta_n(f, g)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{(f_n - g_n)^2}{f_n - g_n} \quad (46)$$

A veces se toma el valor absoluto en el denominador. Se pueden comparar también los valores extremos individuales (crestas y valles), sus formas u otros rasgos de cada señal. Esta tarea permite ignorar la localización exacta de los picos bastando con "alinearlos" individualmente (pero ver más abajo). En el dominio de frecuencia, se comparan los espectros de Fourier discretos $F[\omega_k] = F(f_n)$ y $G[\omega_k] = F(g_n)$.

También se podrían [comparar las distribuciones probabilísticas](#) de ciertos rasgos o eventos en cada señal, mediante sus [histogramas](#). Finalmente, la importancia del ruido se reduce al comparar en decibels los logaritmos de las funciones.

Ejercicio: Es también posible comparar los valores de [SNR](#) (*taza señal a ruido*) de cada señal. Proponga cómo. Inspirándose en la definición de la SNR, proponga además alguna tasa relativa, que sea independiente del ruido presente en ambas señales (si es el mismo nivel en ambas).

Función de Correlación Cruzada.

Cuando no se tiene una sincronización natural, se desconoce o no tiene sentido, y en algunos casos de señales complejas y largas, la **correlación cruzada** sirve como medida de similitud entre dos señales f y g en función de un retardo (*lag*) o corrimiento temporal aplicado a una de ellas. Se conoce también como *producto punto deslizante* (*sliding dot product*) o *producto interno deslizante* (*sliding inner-product*). Es además común usar esta medida cuando por ejemplo f es una señal larga y se busca en ella la presencia de un rasgo corto g . En el caso continuo la correlación cruzada es una función del retardo definida como:

$$(f \star g)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt, \quad (47)$$

donde f^* es el complejo conjugado de f y la variable τ es el retardo temporal (*lag*). Para el caso discreto:

$$(f \star g)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^*[m] g[m + n]. \quad (48)$$

Notar las similitudes con la operación de convolución de dos señales y con el [promedio ponderado local](#) (o corrido), con pesos g . A través de la transformada de Fourier, existe un teorema análogo al [Teorema de Convolución](#). Además, la correlación cruzada se relaciona con la función de [densidad espectral](#).

Nota: En estadística existe también una medida de correlación entre muestras, definida a través de la *expectancia* o *esperanza matemática*.

La **Autocorrelación** o *correlación serial* es el caso especial en que $g=f$ y es una herramienta matemática para detectar patrones repetitivos que pueden no ser evidentes debidos a otras variaciones superpuestas, ruido o (cuasi) periodicidad desconocida. Nótese que la autocorrelación de una señal (distinta de cero) es un único pico cuando el retardo es cero.

Hay otros métodos que permiten comparaciones entre señales o rasgos de señales; unos son estadísticos, otros en dominios espectrales, como por ejemplo la *coherencia espectral*, basada en [espectros de potencia](#).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Hayes 2011), (Kiyosi 1996).

Fin§ [►Índice](#)

Fasores (*phasors*) e Impedancia (eléctrica) I

Un *fasor* es la *forma polar* de una variable compleja (con $j = (-1)^{1/2}$):

Sea $\mathbf{z} = a + jb$; de la *identidad de Euler*: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$, y si $Z = \|\mathbf{z}\| = (a^2 + b^2)^{1/2}$, podemos escribir $\mathbf{z} = Z\cos(\varphi) + jZ\sin(\varphi)$, o sea $\mathbf{z} = Z e^{j\varphi}$, donde $\varphi = \arctan(\text{Im}(\mathbf{z})/\text{Re}(\mathbf{z})) = \arctan(b/a)$.

► **NOTACIÓN:** En ingeniería eléctrica, instrumentación y señales suele escribirse $\mathbf{z} = Z \angle \varphi$ indicando que $\mathbf{z}$ tiene magnitud Z y fase φ . No confundir $\text{Re}(\mathbf{z})$ con Z , ni φ con ω (frecuencia angular de una señal sinusoidal).

► **Ejercicio:** La magnitud Z y la fase φ de $\mathbf{z}$ tienen una clara interpretación física. ¿La tienen individualmente $\mathbf{z}$, $\text{Im}(\mathbf{z})$ y $\text{Re}(\mathbf{z})$?

Cuando un fasor $\mathbf{z}$ varía con el tiempo (arriba es una constante), se tiene por ejemplo una señal armónica $\mathbf{z}(t)$ con una frecuencia angular ω . La fase total φ es igual a $\omega t + \theta$, donde θ es la constante $\varphi(0)$ (o bien, podríamos multiplicar $\mathbf{z}$ por $e^{j\omega t}$ y mantener φ como una fase constante, esto es cuestión de notación y a qué se le llama fasor: un $\mathbf{z}$ constante o a $\mathbf{z}(t)$). El fasor como señal armónica elemental o simple (sinusoidal), de frecuencia ω , es entonces de la forma:

$$\mathbf{z}(t) = Z e^{j(\omega t + \theta)} \quad (49)$$

Ejercicio: En términos de frecuencias y fases, ¿cuál es el efecto de sumar dos fasores (distintas frecuencias, amplitudes y fases)? ¿Cuál es el efecto de multiplicarlos? ¿Cómo escribe una función armónica $f(t)$ en el caso más general, si contiene N frecuencias ω_n ? ¿Qué falta para tener una serie de Fourier? Escriba tal función $f(t)$ en representaciones con y sin variables complejas (parte real, parte imaginaria y fasor) y compare las representaciones, sus ventajas y desventajas.

Nota (resolver antes el ejercicio anterior): Para un $\mathbf{z}$, sus componentes $\text{Re}(\mathbf{z})$ e $\text{Im}(\mathbf{z})$ relacionan la representación compleja (polar) con la magnitud y la fase (entidades físicas, reales); ello involucra funciones sinusoidales sin que haya señal armónica (o sea, sinusoides con frecuencias, fases y amplitudes). Para funciones armónicas, se aprovechan los senos y cosenos de la identidad de Euler para asimilar a la representación el contenido armónico, al pasar de un argumento φ constante a uno variable igual a $\omega_n t + \theta_n$, por cada armónico $n=0, \dots, N-1$.

Impedancia en circuitos electrónicos (Unidades: *ohms* $[\Omega]$): Cuando tenemos $\mathbf{z} = R + jX$, el fasor $\mathbf{z}$ se denomina *impedancia* si $R = \text{Re}(\mathbf{z})$ es la *resistencia neta* del circuito y $X = \text{Im}(\mathbf{z})$ la *reactancia neta* del circuito. Veremos que el concepto se generaliza a otras formas de energía, aunque los nombres de resistencia y reactancia pueden cambiar.

♣ La impedancia anterior $\mathbf{z}$ se interpreta aquí como (A), una medida de la *oposición al flujo de corriente* a través del circuito; tal oposición depende de R y de X y en el caso de X , depende de las variaciones en esa corriente. La misma impedancia puede también interpretarse como (B), *una oposición del circuito a la fuerza electromotriz* aplicada, o sea al cambio de la diferencia de potencial eléctrico (el voltaje), el cual se verá atenuado por R y X , aunque para X , la atenuación dependerá de cómo varíe tal voltaje. Tales variaciones son la(s) frecuencia(s) en la parte imaginaria de $\mathbf{z}$. Cada interpretación se pueden deducir (o formular), en el caso particular de la impedancia eléctrica, (*interpretación (A)*) manteniendo constante al voltaje en la ecuación *corriente = voltaje / impedancia* o bien (*interpretación (B)*) manteniendo constante la corriente en la ecuación *voltaje = corriente $\times$ impedancia*. Un ejemplo es el circuito descrito por la ecuación (53).

Impedancia de un circuito en serie RLC: con magnitud Z (a veces llamada “impedancia” a secas en textos elementales) :

$$\boxed{\mathbf{z} = R + j(X_L - X_C)} \quad (50)$$

$$\mathbf{z} = Z \angle \varphi \begin{cases} Z = \|\mathbf{z}\| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \varphi = \arg(\mathbf{z}) = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \end{cases} \quad (51)$$

En general, la impedancia neta de circuitos eléctricos y electrónicos, puede siempre escribirse como $\mathbf{z} = R + jX$ donde:

Resistencia neta del circuito: $R = \text{Re}(\mathbf{z})$, la parte **real** de la impedancia $\mathbf{z}$, en $[\Omega]$. No depende de la frecuencia ω .

Reactancia neta del circuito: $X(\omega) = \text{Im}(\mathbf{z})$, la parte **imaginaria** de la impedancia, en $[\Omega]$.

Siempre depende de la frecuencia ω .

Reactancia de inductor: $X_L = \omega L = 2\pi f L$, f es la frecuencia [Hz] del voltaje AC, y ω está en radianes/seg, en un circuito RLC.

Reactancia de capacitor: $X_C = 1/(\omega C) = 1/(2\pi f C)$, con $f > 0$ en un circuito RLC. En algunas generalizaciones, se denomina *compliance*.

$$\text{Corriente, parte real: } i = \frac{v}{Z} = \frac{v}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \quad (52)$$

Como *fasores* (variables complejas, pero usando notación vectorial):

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{z}} = \frac{v e^{j\omega}}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))} \quad (53)$$

♣ La **admitancia** es el inverso de la impedancia y permite medir la facilidad con la que fluye una corriente en un circuito eléctrico: $\mathbf{Y} = \mathbf{z}^{-1}$

Nota: El enunciar "resistencia neta", "reactancia capacitiva neta" o "reactancia inductiva neta", no significa que exista una sola resistencia y un sólo capacitor o inductor *explícitos*; se trata del equivalente en un circuito, en cada caso. Una resistencia ideal no depende de frecuencias, pero la resistencia neta ($=\text{Re}(\mathbf{z})$) puede contener capacitancias e inductancias sin depender (idealmente) de la frecuencia. A su vez, la *reactancia neta* ($=\text{Im}(\mathbf{z})$) puede contener resistencias; la forma de estas expresiones es tal que su unidades son ohms; por ejemplo los términos $R(C_1/C_2)$, o $(\omega L(R_1/(R_1+R_2)))$. También, no siempre es posible separar una reactancia X en reactancias capacitiva e inductiva equivalentes, como en la ecuación (50), válida para un circuito *RLC* en serie.

Ejercicio: Encuentre la reactancia de un circuito cuya impedancia está dada por:

$$\mathbf{z} = \frac{R_1 + j\omega L_1 R_2 / R_3}{R_2 / R_1 + 2\alpha / (j\omega L_2) - j\beta \omega C} \quad (54)$$

¿Qué unidades deben tener las constantes α y β para que la ecuación (54) sea dimensionalmente consistente (impedancia en Ohms)?

Bibliografía recomendada para esta sección: (Blackburn 2000), (Kutz 2013).

Fin§ [►Índice](#)

► Frecuencia – Transformada de Fourier

La **frecuencia**⁽⁴⁾ ν es aquel *atributo implícito* (i. e., debe ser extraído) de datos estructurados que **caracteriza rasgos periódicos o repetitivos** (en tiempo o en espacio). Pueden haber varias frecuencias presentes, y de hecho un continuo, formando una **distribución o espectro** $F(\nu)$.

- En señales temporales la **frecuencia** se mide en *Hertz* [Hz], igual a **oscilaciones** o **ciclos por segundo**, y $\nu = 1/\lambda$, con λ ó T la **longitud de onda** o **período** de la señal. También se mide en *radianes por segundo*, como **frecuencia angular** $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/\lambda$. Notar que la variación temporal es de la amplitud del atributo, o sea un voltaje, una oscilación mecánica o acústica. ♣ En algunos contextos, en vez de "ciclos/seg.", se indica "repeticiones/seg." u "ondas/seg." e inclusive "eventos/seg., picos-o-pulsos/seg.", aunque se puede introducir cierta vaguedad si los eventos, valles o crestas no se definen con claridad.
- En funciones de una variable x , el período λ tiene unidades de $[x]$ y la frecuencia asociada tiene *unidades inversas* $[x]^{-1}$.
- En señales N -dimensionales, tenemos **frecuencia espacial**; variación del atributo en función de la posición, hay una frecuencia espacial por cada dimensión y pueden ser distintas, por ejemplo, en 2D la frecuencia espacial es un vector $(\omega_x, \omega_y) = (2\pi\nu_x, 2\pi\nu_y)$. Se mide en *dpi* (dots per inch), *lpi* (lines per inch), *ciclos/cm*, o sea puntos, líneas, crestas, ondulaciones u ondas por unidad de longitud (*oscilación* tiene una connotación temporal). ► Es error común hablar de frecuencia espacial "en Hertz", lo cual no tiene sentido pues un Hertz tiene como unidades ondas/segundo o ciclos/segundo.
- Existe además **frecuencias de eventos probabilísticos, ocurrencias (relativas) o incidencias**; definen un histograma (normalizado).
- La información multidimensional puede cambiar en el tiempo, de modo que además de frecuencias espaciales, puede existir una **frecuencia temporal** [Hz] de dichas variaciones locales y a su vez depender de cada punto en el espacio. Un ejemplo son los videos y películas en que hay variaciones espaciales y temporales.
- **Frecuencia en el atributo**: Un atributo puede ser vectorial (o sea multi-canal) pero incluso de dimensionalidad ilimitada, tal como la radiación electromagnética (EM), teniendo asociada

⁴ Evitaremos usar en esta sección " f " para no confundir con función $f(*)$ y en vez de i usamos j para $\sqrt{-1}$, como es común en las áreas de Ingeniería e Instrumentación.

frecuencias en Hz (espectro electromagnético); el intervalo de longitudes de onda de la luz visible es de 400 nm a 700 nm. Las imágenes en color usan normalmente tres bandas o canales que engloban los intervalos de frecuencia electromagnética que perciben los conos de la visión humana: rojo [400, 480] THz, verde [525, 575] THz y azul [610, 670] THz. Notar que un espectro EM no es la transformada de Fourier de variaciones en el atributo; son frecuencias de naturaleza distinta.

- El inverso de toda frecuencia de un rasgo es un ciclo o período (*onda completa que comprende un valle y una cresta*, o más en general: la separación entre dos rasgos que se repiten –o separación entre eventos) y se denomina también longitud de onda λ . ♣ Notar que hay cierta relatividad en lo anterior y que tal vez se requieren criterios de umbrales (cuáles son los rasgos “que cuentan”).
- En espacio discreto se usa el término “número de onda” $k=1/\lambda$ (de *Kayser*) para el inverso de longitud de onda (o sea, *número de ondas por unidad de longitud*); sus unidades son cm^{-1} , m^{-1} , etc. Equivale a *frecuencia* $^{-1}$. Hay una λ por cada coordenada o sea $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \dots)$.
- El rasgo elemental del que se obtiene una frecuencia “canónica” ν es la onda completa de una función sinusoidal: $\sin(2\pi \nu t + \phi)$, con argumento en radianes. El teorema de Fourier indica que toda función $f(t)$ puede expresarse en una base de funciones como la anterior, y en la práctica se usa mejor la base ortonormal de funciones complejas $e^{-j2\pi \nu t} = \cos(2\pi \nu t) + j \sin(2\pi \nu t)$ (*identidad de Euler*), con un continuo de frecuencias o un conjunto discreto $\{\nu_k\}$, con $k=1, \dots, K$.
- En una **señal cuasi-periódica** el período λ (ó T) no es constante (o es casi constante) y fluctúa en el tiempo o en el espacio alrededor de un valor fijo, al igual que la fase.

Las señales $f(t)$ en dominio temporal (1D) se relacionan con su **espectro** $F(\nu)$ en **dominio de frecuencia** mediante la **Transformada de Fourier (FT)**, o **dominio espectral** o *de la transformada*, o bien, *espacio*, o *dominio de Fourier*. Una definición matemática de la *transformada de Fourier* continua en una dimensión es:

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi j \nu t} dt \quad (55)$$

► En radianes, hay un factor $(2\pi)^{-1/2}$ en la definición (55) (ver [definiciones alternativas](#)).

► La **Transformada de Fourier** de una señal (imagen) **caracteriza la distribución de frecuencias** en dicha señal (imagen). El dominio de frecuencia(s) (temporal o espaciales) permite estudiar dicha distribución $F(\nu)$ denominada también **espectro de frecuencias**. La ecuación (55) es una formulación en

variable compleja del *proceso de proyección de $f(t)$ en la base de funciones complejas* $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, con $\omega = 2\pi \nu$. La función $F(\nu)$ se puede expresar en forma polar como la pareja (*magnitud, fase*); ver [fasores](#). La **magnitud** indica la intensidad (≥ 0) o la importancia de la componente en frecuencia angular ω , y la **fase** es el corrimiento de esa componente armónica respecto al origen. Se grafica, en escala log-log, la magnitud $|F(\nu)| = (F^*(\nu) F(\nu))^{1/2}$, donde $F^*(\nu)$ es el complejo conjugado de $F(\nu)$. Para señales multidimensionales también distinguimos entre **dominio espacial** y **dominio de frecuencia espacial**. Tal dominio exhibe la *distribución de frecuencias espaciales* ($\nu_x, \nu_y, \dots$) en la señal, imagen, etc., por cada dimensión.

La **Transformada Inversa de Fourier** correspondiente a (55) es:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi j \nu t} d\nu \quad (56)$$

El **Teorema de Inversión de Fourier** asegura que, si existe F , la función f puede recuperarse (reconstruirse) a partir de F . Ambas funciones se conocen como *pareja de transformadas de Fourier*.

La **Transformada de Fourier en dos dimensiones** la definimos como:

$$\mathcal{F}(f(x, y)) = F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \quad (57)$$

Ejercicio: Escriba en 2D la *Transformada de Fourier Inversa* y verifique que se cumpla la expresión:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f(x, y))] = f(x, y).$$

► **Ejercicio:** ¿Por qué el dominio de frecuencia se maneja en escala logarítmica? ¿Por qué, al considerar frecuencias versus amplitud, se consideran escalas log-log?

Ejercicio: Considere la señal $f(t) = A \sin(2\pi \nu t + \phi) + b$; el factor A es la amplitud de la onda sinusoidal, pero ¿cuál es la amplitud de la señal $f(t)$?

Ejercicio: A partir de la definición (55), obtenga la TF de las siguientes funciones de t en $\mathbb{R}$: a , $\delta(at)$, $\sin(at)$, $\Pi_c(at)$ (c es el ancho de la puerta, en segs.), Ae^{at} . Obtenga ahora la TF⁻¹ de las siguientes funciones: b , $\delta(b\nu)$, $\sin(b\nu)$, $\Pi_d(b\nu)$ (d es el ancho de la puerta en Hz), $Be^{b\nu}$. ¿Qué relaciones observa entre a , b , c , d , A y B , si, por ejemplo, $a > b$ y $A > B$? Observe que el ancho 2sigma de la TF de la Gaussiana (en función de B y b) es “X veces” el ancho original en función de A y a , etc.

Ejercicio: Si $F(\nu)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, escriba en términos de $F(\nu)$ a las FTs de: (A), $f(t-t_0)$, con t_0 constante, (B), $(e^{j\omega_0 t + q} f(t))$, con ω_0, θ constantes y (C), $df(t)/dt$, o sea la derivada de $f(t)$. Mismo ejercicio para la TF⁻¹ de las funciones equivalentes en dominio de frecuencia (F en vez de f y ω en vez de t). ¿Cómo interpreta lo que obtiene en dominio temporal y en dominio de frecuencia? (cierto producto equivale a un corrimiento, se re-escala algo, etc.).

♣♣ **Ejercicio:** Formule y resuelva los tres ejercicios anteriores en dos dimensiones (dominio espacial x, y y el correspondiente dominio de frecuencias espaciales).

♣♣...♣ **Ejercicio:** Idem, en n dimensiones. Consulte la tabla de la [FT en \$\mathbb{R}^n\$](#) .

Banda de una señal es un intervalo $[\nu_{inf}, \nu_{sup}]$ de frecuencias (a veces las de corte, pero pueden haber otros criterios). La amplitud dentro de ese intervalo puede ser arbitrario; *banda* suele referirse a un intervalo de interés, y más específicamente alrededor de una frecuencia de interés.

Ancho de banda (bandwidth). Separación, en Hertz, entre las frecuencias inferior y superior de una señal, definidas por el [soporte](#) del espectro o algún umbral mínimo en la amplitud, o en la [densidad espectral](#). El *ancho de pasabanda* es la diferencia entre las [frecuencias de corte](#) inferior y superior de la señal. No confundir con "banda ancha" (*broadband, a veces wideband* ó *wide bandwidth*).

► El ancho de banda dedicada a una conexión determina cuántos datos pueden transmitirse/recibirse por seg., o sea la velocidad (usualmente en *símbolos o pulsos por segundo* o *bauds; baudaje* o *taza de modulación*).

Señal armónica simple o elemental. Es aquella señal de la forma $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, donde A es la *amplitud*, ω la *frecuencia angular*, y ϕ la *fase* (=desplazamiento inicial ωt_0). Ver [fasores](#). Una señal compuesta por N armónicos es por ejemplo:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (58)$$

Armónicos. Dada una frecuencia ν , sus *armónicos* son las frecuencias $(n/m) \cdot \nu$, con n, m enteros. Una **octava** es ya sea el intervalo de frecuencias $[\nu, 2\nu]$, o el intervalo $[(1/2)\nu, \nu]$. Ver también el concepto de octava en el anexo [Notas Musicales](#).

Ejercicio: ¿Cuántas octavas hay entre las frecuencias 3Hz y 24hz? ¿Qué es una *década* como diferencia entre dos cantidades?

♣ **Ejercicio (Separabilidad de la FT):** Considere la FT en 2D, para una imagen de $N \times M$ pixeles muestras; demuestre matemáticamente la propiedad de *separabilidad*: la FT en 2D equivale a realizar N transformadas 1D, una por cada renglón y luego, a esta imagen la descomponemos en M columnas y se obtiene para cada una su FT, el resultado es la FT en 2D. *Hint:* recuerde que $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$.

La FT se encuentra implementada en Matlab; para más teoría, aplicaciones y uso de la FT en Matlab, consultar el sitio de internet <https://www.mathworks.com/help/signal/ug/discrete-fourier-transform.html>

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Jähne 1999), (Smith 2010).

Fin§ ► [Indice](#)

Convolución y el Teorema de Convolución.

En dominio de frecuencia, dos funciones $F(\omega)$, $H(\omega)$ se multiplican ([modulación en frecuencia](#)), dando $G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$. El inverso de la transformada de Fourier de $G(\omega)$, en términos de $F(\omega)H(\omega)$ es:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega)F(\omega)) = h(t) * f(t) \\ &= (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f^*(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) h^*(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (59)$$

donde el primer "*" denota el **producto de convolución** para señales 1D; mientras que el segundo asterisco (superíndice) denota "conjugado complejo" y no debe confundirse con el primero (interpretación por contexto). El **Teorema de Convolución** expresa que:

$$\mathcal{F}\{f * h\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{h\} = F \cdot H, \quad (60)$$

Conversamente (*convolución en dominio de frecuencia* = [modulación en amplitud](#)):

$$F * H = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{h\} = \mathcal{F}\{f \cdot h\}, \quad (61)$$

La convolución en dominio temporal (o espacial) permite expresar y realizar una [modulación en dominio de frecuencia](#) y por tanto [filtros](#) donde $h(t)$ es la señal-ventana o [núcleo](#) (sin pérdida de generalidad). El beneficio de realizar así tales operaciones es la simplificación y rapidez de aplicar la [FFT](#), sobre todo si el dominio de una de las dos funciones es grande.

► Usualmente una de las dos funciones de la convolución, por ejemplo, $f(t)$, es interpretada como la señal o información de interés, mientras que $h(t)$ es interpretada como el filtro y contiene coeficientes de ponderación. Si es simétrica ($h(t) = h(-t)$), la convolución se interpreta como un [promedio ponderado](#) de $f(t)$ con la [ventana, núcleo o kernel](#) $h(t)$. Adelante veremos que, en *sistemas lineales invariantes a corrimiento* (o *en el tiempo*), la convolución expresa el efecto del sistema sobre una entrada f , siendo h la *respuesta a impulso* (o *PSF*) del sistema.

► **Ejercicio:** Escriba una versión discreta, con N muestras h_n, g_n, f_n de la ecuación (59). ¿No falta algún factor de normalización? ¿Cuál? ¿Qué sucede si no se incluye? ¿Cómo interpreta tal factor o su ausencia? ¿Se normaliza sobre g_n o sobre f_n o ambas? ¿de qué depende?

► **Ejercicio:** Si se tiene $g = f * h$ y se conocen tanto f como g , proponga cómo obtener h a partir de la convolución. Analice los problemas que pueden ocurrir y proponga posibles soluciones.

Ejercicio (pregunta de Física): El espectro de un haz electromagnético (por ejemplo, luz proveniente de una estrella) exhibe la distribución de las longitudes de ondas presentes. Cuando se estudia el espectro de las frecuencias correspondientes, tal espectro equivale al espectro de energía del haz. ¿Por qué? ¿Es tal espectro la transformada de Fourier de la señal?, es decir, ¿un espectrógrafo estelar obtiene la TF de la luz que entra?

♣ **Ejercicio:** Escriba la versión en dos dimensiones de la ecuación (59) en continuo y en discreto ($\mathbb{Z}^2$), con dominio espacial (x, y) (muestras n, m , respectivamente) y con el dominio de frecuencias espaciales (ω_x, ω_y) ; considere $N \times M$ muestras.

♣ **Ejercicio (separabilidad de la convolución):** Repase el ejercicio sobre la [separabilidad de la FT](#) y ahora demuestre que una convolución en 3D discreta también es separable y escriba en pseudo-código cómo hacer tal convolución discreta en 3D aprovechando tal propiedad.

► **Ejercicio:** Demuestre el *Teorema de Convolución* en 1D. Idem, en 2D, en continuo y en discreto.

Periodicidad (fuerte) y ♣ Periodicidad débil.

Una señal (o un pico o serie de picos y valles) es *periódica* cuando se repite cada lapso T (período); o sea, si se tiene definida $f(t)$ arbitraria en $[a, b)$ que extendemos como $f(t)=0$ fuera de $[a, b)$. Podemos generar una función periódica como:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t - n(b-a)) \quad (62)$$

El período es $T=b-a$. Puede ocurrir que una $f(t)$ definida para todo t satisfaga: $f(t) = f(t-nT)$, para un solo valor de t (o cierto número, pero no para toda t). En el primer caso (por omisión) se tiene **periodicidad fuerte** (toda la señal) en el último, **periodicidad débil** (sólo algunos valores o sub-intervalos). En suma, una señal con periodicidad fuerte es un perfil finito definido en $[a, b)$ que se repite en $[a + n(b-a), b + n(b-a))$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: Una función sinusoidal $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ tiene periodicidad fuerte; si T_1, T_2 son dos valores reales que satisfacen $T_2 - T_1 = n2\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$ y para cualesquiera valores de A, ω y ϕ , se cumple que $f(T_1) = f(T_2)$; además $f_{rms} = 0$ (verifíquelo). Por omisión, el término "periodicidad" suele significar "periodicidad fuerte".

♣♣ **Periodicidad con bordes continuos**

Cuando $f(t)$ definida en $[t_a, t_b)$ es periódica con período T , además de tener $f(t) = f(t+nT)$, para todo t y n entero, tiene *bordes continuos* (izquierda y derecha) si y sólo si $f(t_a) = f(t_a+nT) = f(t_b) = f(t_b+nT)$. No es necesario que las derivadas también sean continuas (caso de bordes en C^n , con $n>0$).

♣♣ **Ejercicio:** Para una imagen periódica tanto en x como en y , con dominio $[x_{min}, x_{max}) \times [y_{min}, y_{max})$ y con períodos T_x y T_y , defina la condición de continuidad en los bordes horizontales y verticales.

♣♣ **Ejercicio:** ¿Qué objeto geométrico tridimensional τ sirve de modelo para (o bien, τ es “isomorfo” a) una imagen cuyos bordes no se notan, al generar un mosaico periódico, gracias a que no hay discontinuidades entre bordes opuestos?, por ejemplo, se cumple $I(x_{max}, y) = I(0, y)$, ídem en y .

Bibliografía recomendada para esta sección: (Gonzalez y Woods 2017), (Jähne 1999), (Smith 2010).

Fin§ ► [Indice](#)

Modulación

Modulación es el proceso de variar una o más propiedades de una forma de onda (*waveform*), usualmente sinusoidal, de frecuencia ν conocida, denominada **(señal u onda) portadora** (*carrier*) mediante las variaciones de una **señal moduladora** que contiene información que se desea transmitir y usualmente contiene frecuencias menores a las de la portadora. Si ν es del orden de MHz, en frecuencia modulada, la información puede contener frecuencias de 20 a 20 kHz; en el dominio acústico incluye voz y música. También puede ser imagen, video, o datos numéricos. El resultado se transmite por un canal de comunicación (cables, la atmósfera, el vacío) y el receptor realiza la operación contraria (*demodulación*) para recuperar la información de la señal moduladora. Los parámetros que suelen modularse son: **amplitud** (no es *magnitud* (siempre ≥ 0)), **frecuencia** (o tono, *pitch*) y **fase** (*timing*). Aunque en el espacio de Fourier se manejan frecuencias positivas y negativas, en una modulación sólo la amplitud y fase pueden cambiar de signo y la fase se manifiesta como corrimiento temporal o retardo. Notar que *modular* es hasta cierto punto sinónimo de *multiplicar*, lo que cambia es el dominio.

AM (Amplitud Modulada):

Sean $f(t)$, $g(t)$ señales arbitrarias; realizamos el producto: $h(t) = f(t) \cdot g(t)$, o bien: $f(t)g(t)$. La señal h es igual a la señal f modulada en amplitud por g (o al revés), o sea el producto escalar punto a punto de f por g . Si en particular $f(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i t)$, $g(t) = B \sin(\omega_g t)$, y $\omega_g > \max_i \{\omega_i\}$, entonces $g(t)$ es la “portadora” modulada por $f(t)$ que suele contener información de interés y g permite su transmisión a altas frecuencias. Puede haber tanto fases positivas como negativas ϕ .

Ejemplos (ver gráficos abajo, [Figura 11](#)): El más elemental es cuando definimos $h(t) = A \sin(t)$, donde $f(t) = A$, $g(t) = \sin(t)$. Otros ejemplos:

$$\begin{array}{cc} \sin(t) \cdot 2e^{-0.06t} & \sin(t) \cdot \cos(0.05t), \quad t \in [0, 100], \quad \omega = 1 \\ f(t) & g(t) \end{array}$$

FM (Frecuencia Modulada):

Escribimos una señal que será modulada en frecuencia como $f(\omega t)$ con $\omega > 0$ la frecuencia (angular) que la caracteriza (o como $f(2\pi \nu t) = f(2\pi \nu / T)$, con ν la frecuencia temporal y $T = 1/\nu$, el período). Si $g(t)$ es la **moduladora** (cualquier otra señal), tenemos: $h(t) = f(\omega_g t)$, donde la nueva frecuencia

característica es: $\omega_g = \omega g(t)$. Es un producto en el dominio de frecuencias. Notar que no hay la simetría de la AM.

Ejemplos (ver gráficos de la [Figura 12](#)):

$$\begin{array}{ll} \sin(t e^{-0.01 t}) & \sin(t \cdot \cos(0.05 t)), \quad t \in [0, 100], \quad \omega = 1 \\ f(t \cdot \omega g(t)) & f(t \cdot \omega g(t)) \end{array}$$

Nota: No confundirse con el orden tradicional " ωt "

► **Falacia:** "La amplitud se mantiene constante". Si "amplitud" se refiere a la A_0 en la expresión: $A_0 \sin(\omega g(t))$, en efecto "es la misma A_0 ", pero la amplitud suele referirse la de toda la función y la de $f(\omega t)$ o de $f(\omega \cdot g(t))$ puede cambiar, pues ambas son funciones arbitrarias. Además, el efecto del muestreo hace que la amplitud máxima (que debería ser A_0) fluctúe, pues las muestras rara vez coinciden exactamente con los picos locales.

Como podemos ver, en el dominio temporal, la modulación en frecuencia no se expresa como producto de funciones, pero veremos que se formula como una [convolución](#) y en dominio de frecuencia, como el producto de las [transformadas de Fourier](#) de ambas funciones.

PM (Fase Modulada; a veces *modulación en ángulo*):

Si la señal tiene la forma $f(\omega t + \phi)$, una señal con fase modulada por $g(t)$ es: $h(t) = f(\omega t + \phi g(t))$.

Ejemplos (ver también gráficos de la [Figura 13](#)):

$$\begin{array}{ll} \sin(t + 20 \cdot 2\sin(0.05t)) & t \in [0, 100], \quad \omega = 1, \quad \nu = 20 \text{ Hz} \\ f(\omega t + \phi g(t)) & \leftarrow \text{producto con la fase} \end{array}$$

♣ Modulación de parámetros:

Si tenemos $f(a, b, c, t)$ con a, b, c diversos parámetros, es posible modular la señal en cada uno:

$h(t) = f(a g_a(t), b g_b(t), c g_c(t), t)$. Podrían no tener nada que ver con amplitudes, frecuencias o fases.

♣ PM (pulsos modulados, mismo acrónimo que *fase modulada*):

Frecuencias características cercanas (número de ciclos en razones $\leq 1/3$) producen **pulsaciones** (paquetes de ondas distanciados por $1/\nu_{\min}$), con $\nu_{\min}$ la frecuencia dominante más baja.

Hay otros tipos de modulación, más sofisticados. Cualquiera puede aplicarse a información en nD y forman parte de los métodos de codificación de señales, permitiendo transmitir varias bandas (canales) en una sola señal de radio/TV. Notar que al ser un producto, la modulación sirve como [filtro](#) (por ello a veces se llama “ventana”, v. g., la [función puerta](#)), o sirve para ponderar, privilegiar o penalizar componentes o subconjuntos de la información. La modulación en amplitud da lugar a filtros en dominio temporal mientras que la modulación en frecuencia, a filtros en dominio de frecuencia, donde es expresado como un producto.

Nota: En las siguientes Figuras llamamos "envolvente de $f(t)$ " a la señal resultante de muestrear $f(t)$ siguiendo sus máximos y mínimos locales (asumimos por obvia su localización en $f(t)$).

Ejercicio: Considere la señal $g(t) = \cos(8t) + \cos(9t)$ en el intervalo $[0,4]$ segs.; gráfiquela en Matlab y diga qué tipo de modulación observa; encuentre las funciones $f(t)$ y $h(t)$ que componen tal modulación (sea un producto en amplitud o en frecuencia); reescriba $g(t)$ en términos de $f(t)$, $g(t)$ indicando cuál es la moduladora y cuál la portadora, y qué criterio propone para designarlas así.

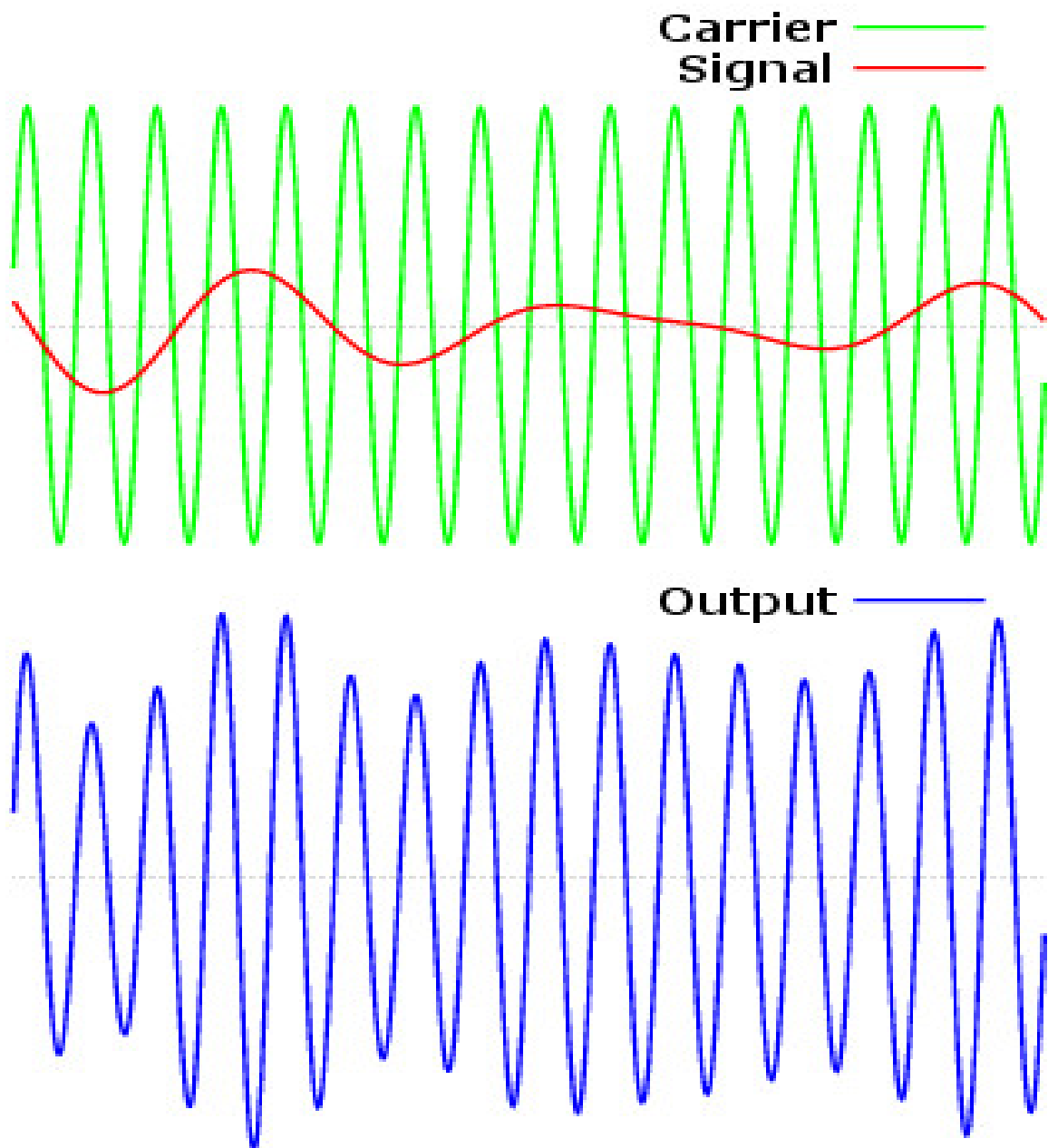


Figura 11. Amplitud modulada (AM). (Arriba) Señal de interés (en rojo) y señal armónica a modular o "portadora" (*carrier*; en verde). (Abajo) Resultado de modular en amplitud la portadora por la señal roja (producto de amplitudes, en dominio temporal). La frecuencia del producto se preserva; notar que la envolvente es la señal moduladora (en rojo, arriba). Pueden modularse señales arbitrarias.

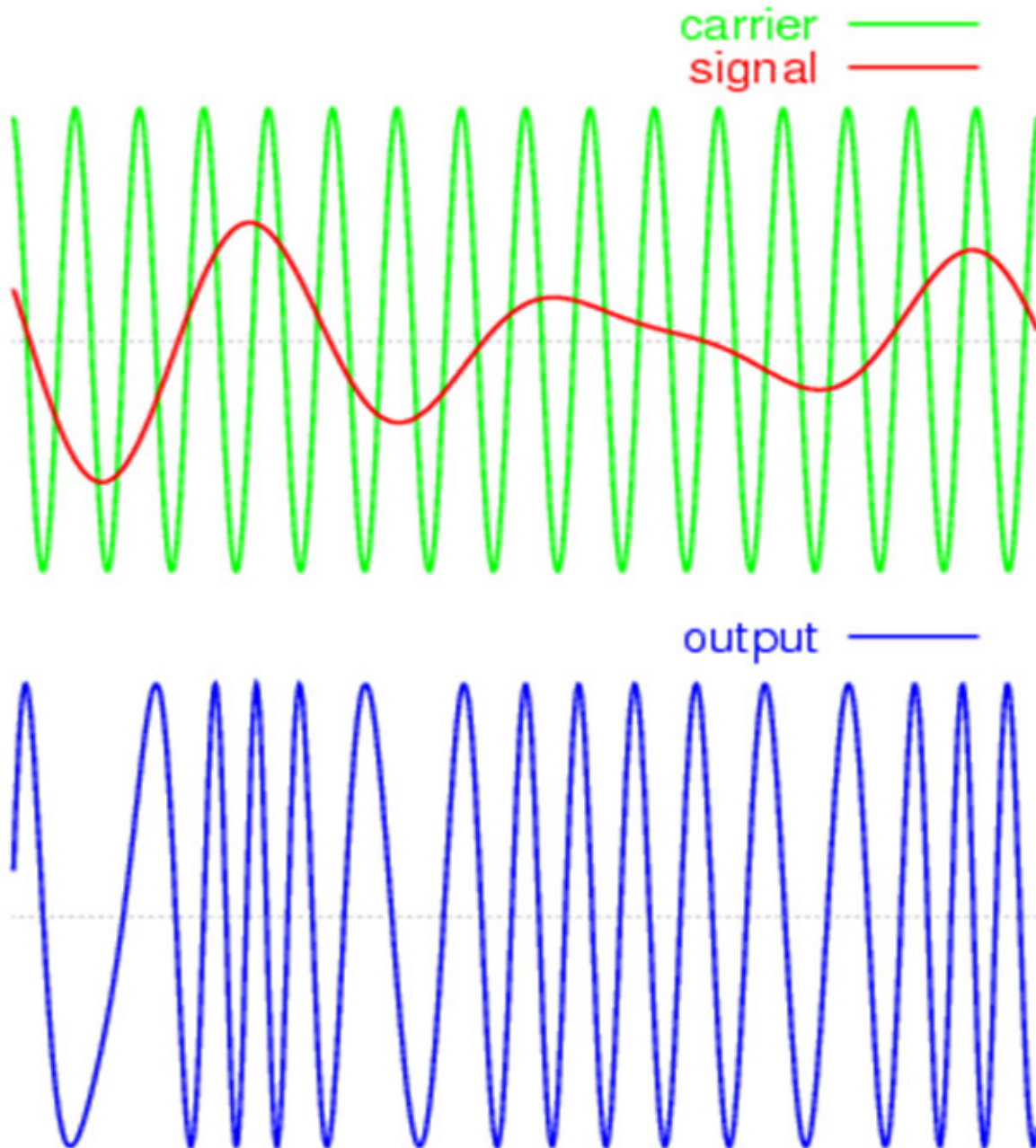


Figura 12. Frecuencia modulada (FM). (Arriba) Señal de interés (curva en rojo) y señal a modular en frecuencia o "portadora" (curva en verde). (Abajo) Resultado de modular en frecuencia la portadora (producto en el dominio de frecuencias de portadora por la amplitud de la señal roja moduladora), el cambio en frecuencia se manifiesta como un estrechamiento o estiramiento en la curva azul (portadora modulada en frecuencias). La amplitud se preserva en cierto sentido (misma envolvente). Notar que operativamente, la modulación entre portadora y señal se realiza en dominio de frecuencia (= producto de sus [espectros de Fourier](#)).

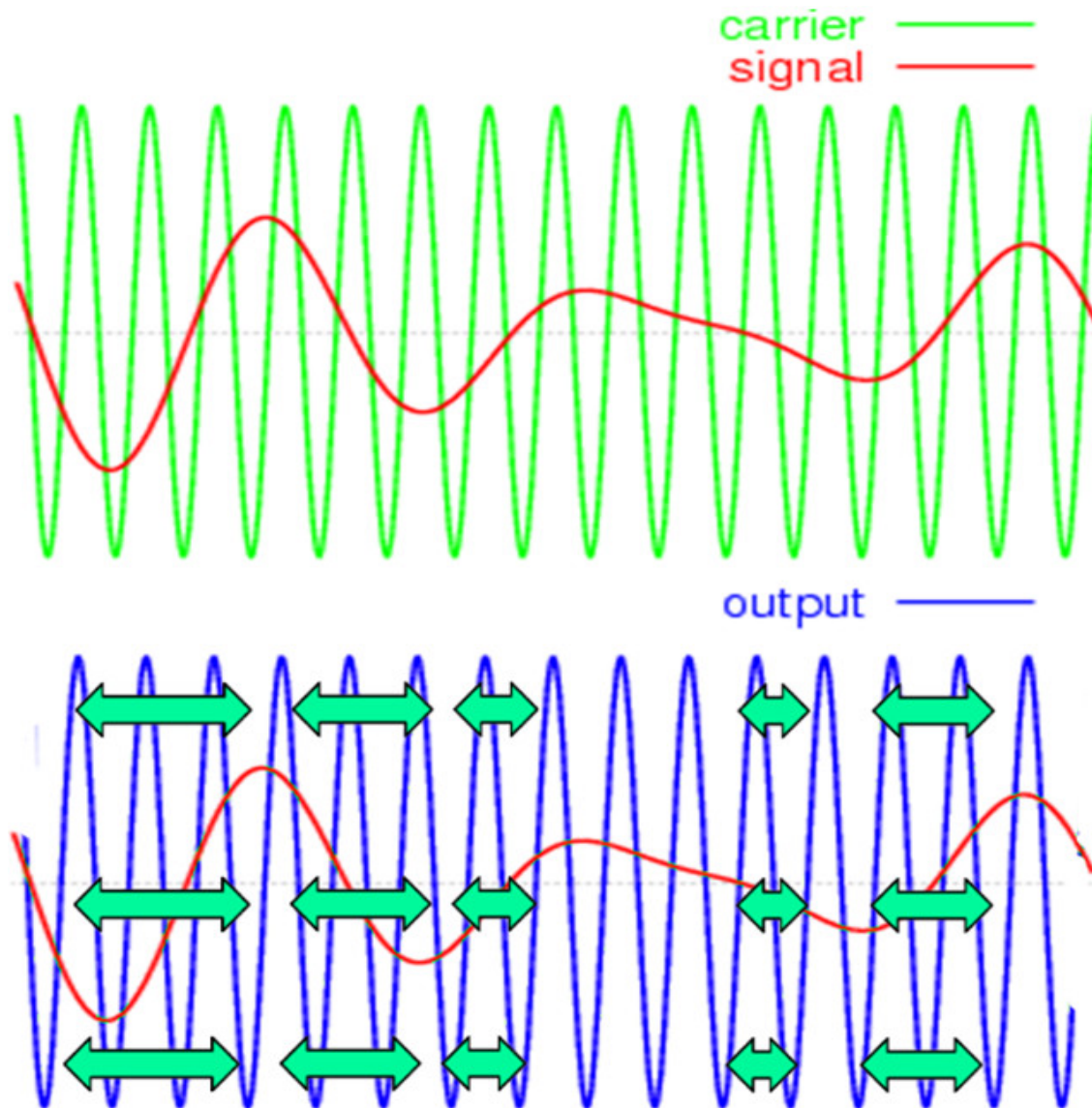


Figura 13. Fase modulada (PM). (Arriba) Señal de interés (curva en rojo) y señal a modular en fase o "portadora" (curva en verde). (Abajo) Las flechas verdes indican el desplazamiento (corrimiento o *desfase*) que sufre la portadora (azul) modulada en fase, en función del tiempo de acuerdo a la información en la señal roja (mayor amplitud implica mayor corrimiento en fase a izquierda (valores negativos) o a la derecha (valores positivos). La amplitud se preserva en cierto sentido (misma envolvente que portadora). El efecto sólo se aprecia correctamente en una imagen dinámica (v. g., en un osciloscopio o en el video de una señal).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Jähne 1999), (Kiyosi 1996), (Kutz 2013), (Proakis y Manolakis 2006), (Smith 2010).

Fin§ [►Índice](#)

Filtros

Frecuencia de corte (*cutoff frequency, corner or break frequency*):

1. Es aquella frecuencia f_c [Hertz] (o también ω_c [radianes]), por arriba o por debajo de la cual el nivel de salida de un circuito, tal como una línea, amplificador o filtro se reduce por un factor ⁽⁵⁾ de $0.707945 \approx \sqrt{1/2}$ de la amplitud de referencia A_0 , en decibels; esto es -3.01 dB = 70.8% respecto al nivel A_0 (tomado como "0 dB" = 100% de A_0). Esta caída equivale a la mitad de la potencia cuando el nivel es A_0 . Pueden haber una o más frecuencias de corte, de subida o de bajada, definiendo bandas de frecuencia donde debe hallarse la información de interés que se desea preservar.
2. ♣ ♣ La frecuencia por debajo de la cual una onda de radio no logra penetrar una capa de la ionosfera con el ángulo de incidencia requerido para transmitir radio por reflexión en la capa.
3. ♣ ♣ La frecuencia por debajo de la cual una onda electromagnética no puede ser transmitida en un *medio guiado*.

Filtros en dominio de frecuencia. Se refieren a una función $h(t)$, llamada **ventana**, **núcleo** o **kernel**, cuya transformada $F(h(t))$ multiplica a $F(f(t))$, siendo $f(t)$ la señal de interés; el resultado es una "señal filtrada". En dominio temporal (o espacial), tal producto equivale a la convolución $f(t)*h(t)$.

- Un filtro **pasa banda** tiene dos frecuencias de corte (f_{inf} , al subir y f_{sup} , al bajar la respuesta en frecuencia) y una central $f_{central}$. Para un ejemplo, ver la [Figura 14](#) ($f(t)$ en rojo, $h(t)$ en negro).
- Los **filtros pasa altas** y **pasa bajas** tienen una sola frecuencia de corte (respectivamente al subir o al bajar la respuesta en frecuencia del filtro); en el 1º se atenúan las bajas frecuencias y en el 2º las altas; la atenuación (caída) se mide en *dB/octava*, o en *dB/década*.
- El filtro **rechaza-banda** (o *corta-* o *elimina-banda*) inverso del pasa banda, con f_{inf} al bajar desde el valor de referencia A_0 y f_{sup} al subir de vuelta a A_0 .
- El filtro **notch** atenúa "una" frecuencia específica; en la práctica es más bien una banda muy estrecha, v. g., el intervalo [59,61] Hertz, para eliminar la frecuencia de la línea AC que suele contaminar muchas señales.

⁽⁵⁾ Como $-3.01\text{dB}=20\log_{10}(A_{caída}/A_0)$, por tanto $\Rightarrow A_{caída}=A_0 10^{-3.01/20}=(0.7079\dots)A_0 \approx \sqrt{1/2}A_0$

En Inglés los filtros se denominan *lowpass*, *highpass*, *bandpass*, *band-stop* y *notch filter* respectivamente; el último a veces se toma como el *rechaza-banda*. Notar que un pasa altas puede ser el complemento de un pasa bajas y un rechaza-banda el de una pasa-banda, como se demuestra en el siguiente:

► **Ejercicio:** Si $f_{low} = f * h_{low}$ es la señal (o imagen) resultante de aplicar un filtro pasa-bajas, se puede obtener lo filtrado (altas frecuencias) de la relación de complemento: $f_{high} = f - f_{low}$, pues el filtro pasa-altas h_{high} complementario se puede definir en términos de h_{low} . Encuentre tal relación y verifique que $f_{high} = f * h_{high}$.

En señales, telecomunicaciones e instrumentación electrónica, tanto la amplitud como la frecuencia se miden en escala logarítmica (por ello los *decibels* en los párrafos anteriores, pero estos sólo para la magnitud relativa), así que la **frecuencia central** de un filtro de pasa banda es la *media geométrica* de las frecuencias de corte superior e inferior (i. e., $f_{central} = \sqrt{f_{inf} f_{sup}}$); en escala lineal sería la *media aritmética*).

♣ **Nota:** En diseño óptico, espectroscopia en infrarrojo, astronomía y otras áreas, las [ventanas o núcleos](#) de convolución que filtran o modifican una señal (suelen interesar los bordes, o por ejemplo se busca mejorar el intervalo dinámico) o imagen reciben el nombre de **funciones de apodización** (*window-, apodization- o tapering function*).

Ejercicio: Si g es una señal f_{in} filtrada (por ejemplo, $g = f_{in} * h$ para alguna PSF h), proponga algún *filtrado gradual o parcial* f_{λ} , con parámetro λ y h fija, de tal modo que cuando $\lambda=0$ se tiene $f_{\lambda=0} \equiv f_{in}$, y cuando $\lambda=1$ se tiene $f_{\lambda=1} \equiv g$. ♣ Intente interpretar qué ocurriría con tal filtrado parcial cuando $\lambda \notin [0,1]$.

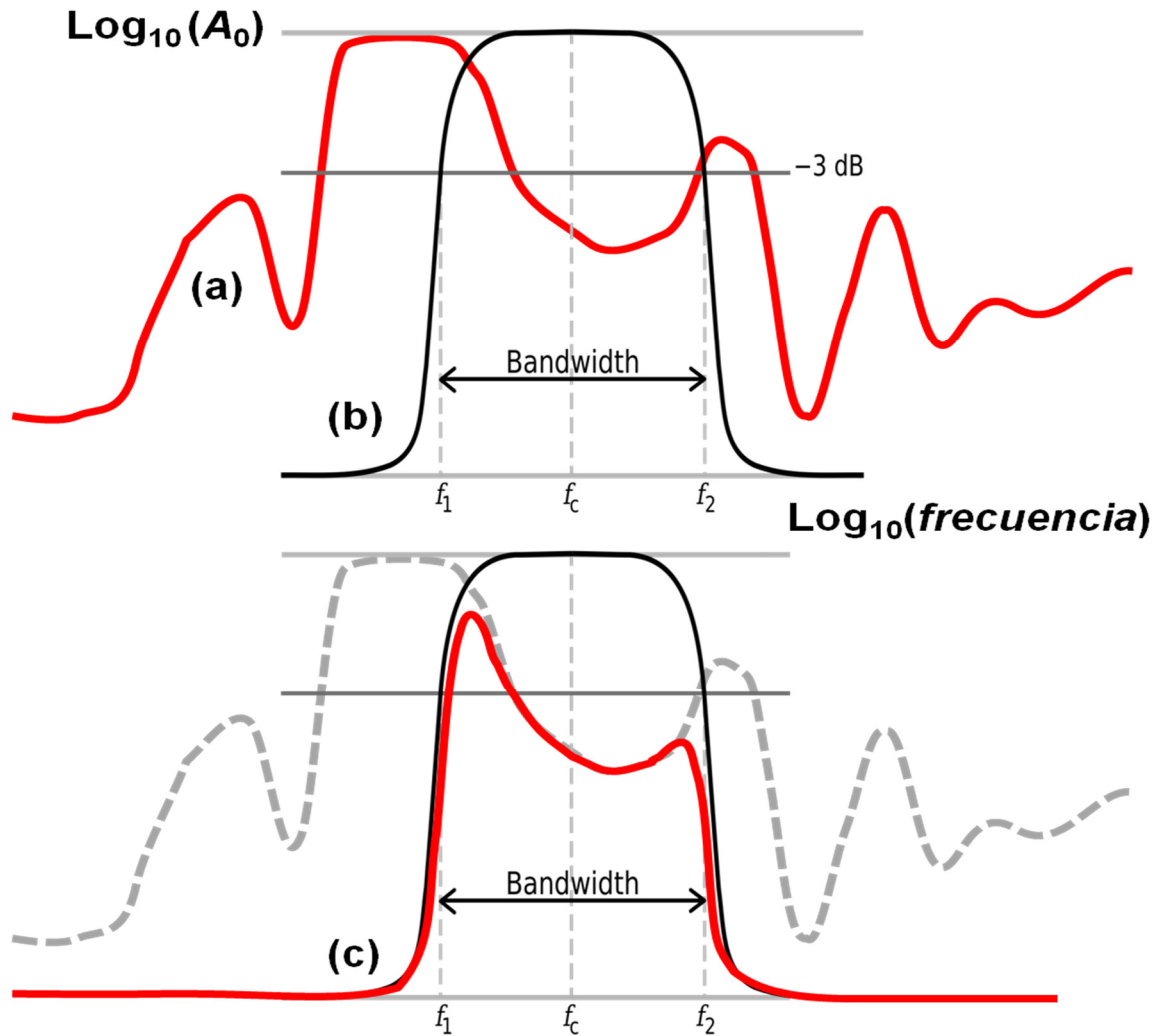


Figura 14. (a) Señal original $F(f)$ (en rojo) en dominio de frecuencia o de Fourier (en decibeles). (b) Señal-ventana $H(f)$ (en negro) o *kernel*, tipo *pasa-banda*. El ancho de banda (*bandwidth*) es la separación entre las frecuencias de corte f_1 y f_2 a las cuales dicha señal cae por debajo de -3.01 dB de la amplitud de referencia A_0 (también en dB). (Abajo) en línea punteada gris aparece la transformada de Fourier (=espectro) de la señal original, en negro la ventana y en rojo el espectro filtrado $F(f)H(f)$ ("ventaneado" o modulado en frecuencia); las frecuencias fuera de la banda $[f_1, f_2]$ se hacen 0 y se conservan aquellas dentro. La señal filtrada resultante, en dominio temporal, se verá suavizada si f_{central} es baja, casi cero, siempre que $f_1 \geq 0$.

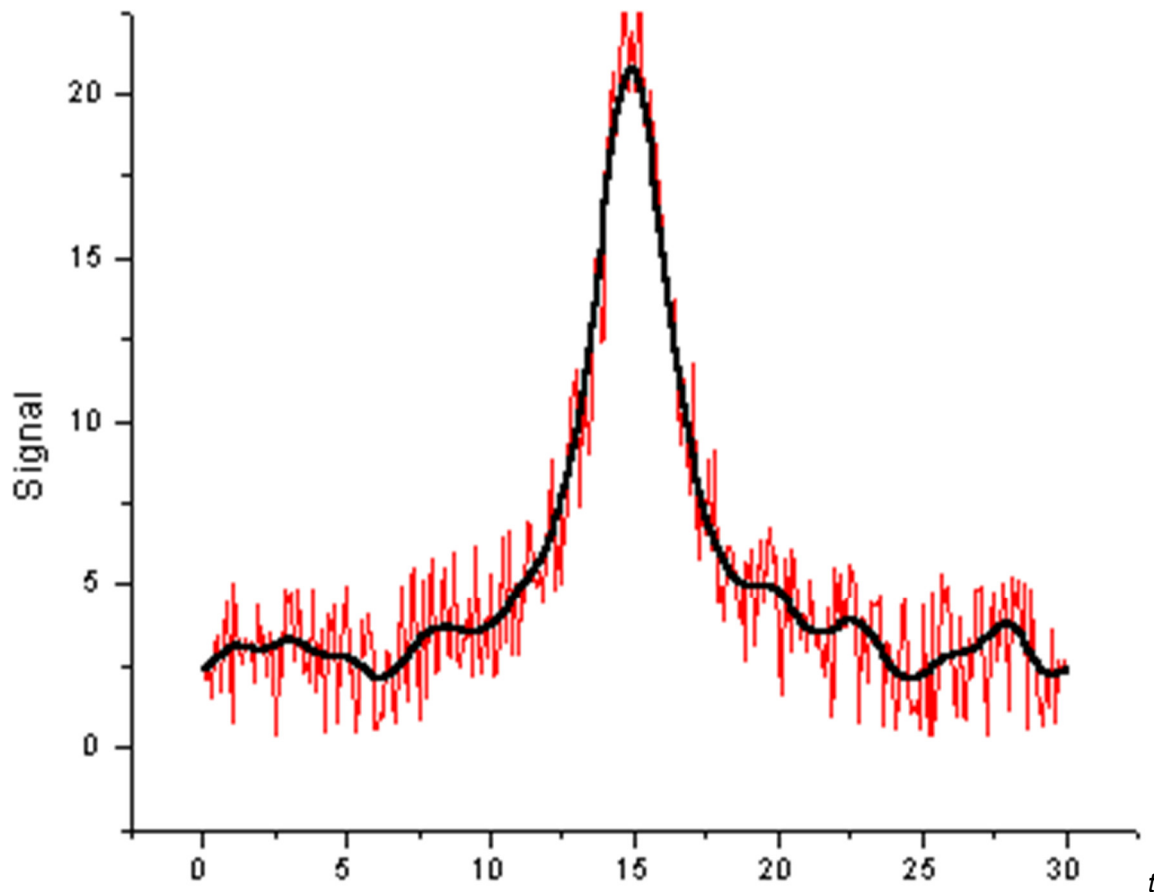


Figura 15. Un filtro pasa-bajas (no se muestra) "suaviza" el perfil de una señal (en dominio temporal o espacial, eje t); en rojo está la señal original $f(t)$, incluye ruido y detalles que podrían no interesar (como la "textura" de la señal). En negro se muestra el resultado del filtrado, realizado éste en dominio de frecuencia (no se muestra tal dominio), usando de ida y vuelta la *Transformada Rápida de Fourier* (FFT). Se ha atenuado el ruido (no parece, pero influye en el perfil final, en negro) al grado que se eliminaron las fluctuaciones en principio aleatorias del original. En dominio temporal (o espacial, en el caso de una imagen, ver [Figura 16](#)), hay cierta equivalencia del filtro pasa-bajas con un [promedio local](#) (o *promedio corrido*), por cada muestra de la señal –esto sólo coincide si la ventana o *kernel* de filtrado es simétrica. En general, el equivalente, en dominio temporal (o espacial) es la convolución entre la señal y la función [ventana o kernel](#).

Ejercicio: De lo que ilustran las Figuras anteriores y las definiciones de filtro, haga figuras, tanto en dominio temporal como en dominio de frecuencia para: (A) filtro pasa-bajas (arriba aparece el resultado, pero haga la parte en dominio de frecuencia), (B) filtro pasa-altas, y filtro rechaza-banda; dibuje cada ventana, una señal de prueba y el resultado.

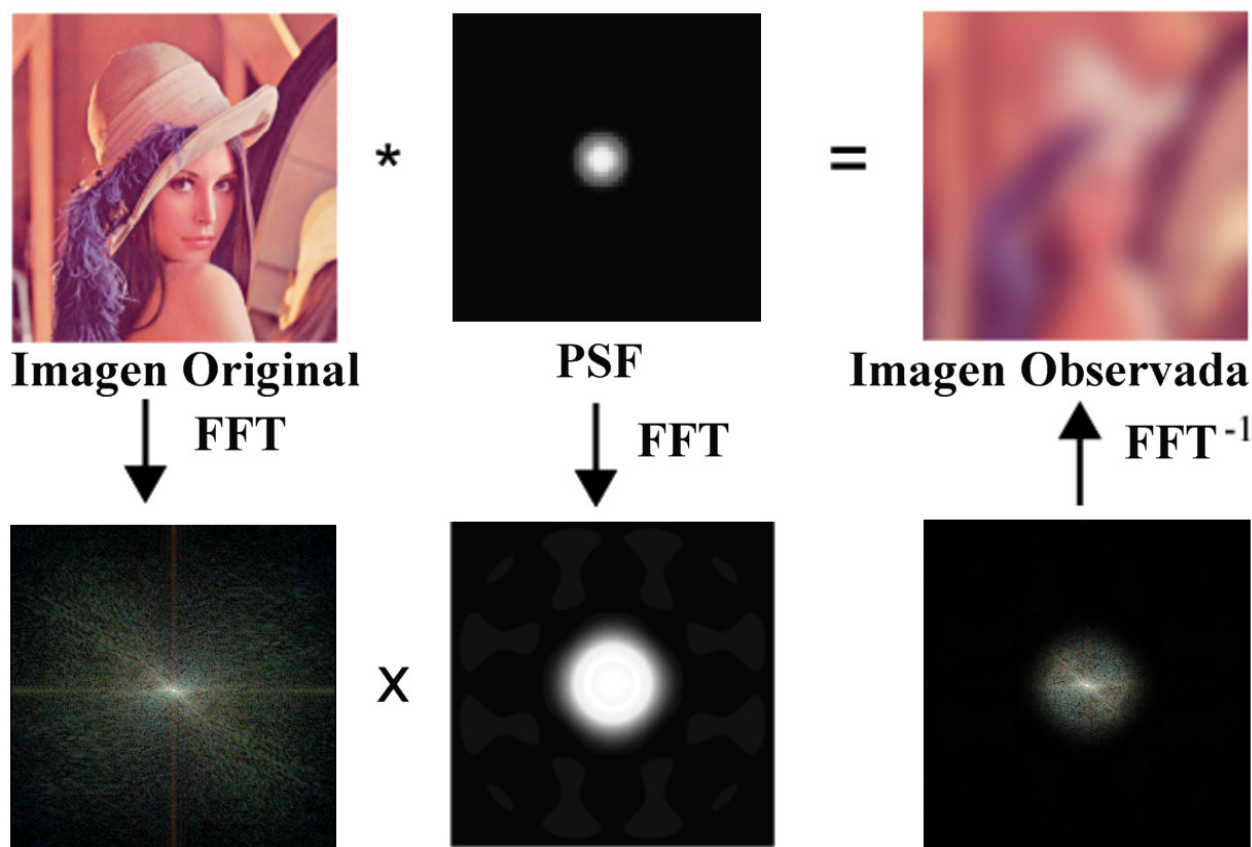


Figura 16. (Primer renglón): Efecto de un filtro pasa-bajas en dos dimensiones en una imagen (⁶) (arriba, izquierda) con un atributo vectorial (tres canales de color RGB). Por cada canal se realiza una convolución 2D con la función ventana (arriba, centro), que en este caso es la *función de dispersión puntual* (PSF) de una cámara fotográfica. El resultado suaviza (arriba, derecha) la imagen "eliminando" detalles de un tamaño la mitad del ancho FWHM de la PSF que aquí es más grande que la boca de *Lena*, por lo que la imagen filtrada aparece borrosa. Abajo (segundo renglón) aparece el espectro de cada imagen (amplitud); es decir la imagen en dominio de frecuencia espacial, resultado de aplicar la transformada (rápida) de Fourier (FFT) a cada canal. La convolución (denotada por " $\star$ ") en dominio de frecuencia espacial es una modulación, igual al producto $\times$ de ambas transformadas de cada imagen –ver renglón inferior. La *deconvolución* (operación inversa) equivale a "dividir" (de derecha a izquierda) la transformada del resultado entre la transformada de la ventana, recuperando (en teoría, o sea idealmente) el espectro de la imagen original. En la práctica, hay aproximaciones y errores debidos al ruido, discretización y el hecho de que ambos dominios son finitos (truncados). Hay aparte errores de cálculo por la *precisión de máquina*. Notar que el mesurando es la modelo (*Lena*, izquierda) y lo medido es su imagen fotográfica (derecha).

⁶ La modelo de la foto es *Lena Söderberg*, *Miss Playboy 1974*; y su imagen es un estándar de referencia todavía muy usado en *Procesamiento de Imágenes* y en *Visión Computacional*. Imagen de dominio público.

Teorema de Nyquist-Shannon en 1D

(en dominio de frecuencia)

Una señal unidimensional $g(t)$ de banda limitada, con frecuencia de corte f_{corte} Hz, puede ser unívocamente representada por sus muestras $g_d(t=n)$, si y sólo si el período de muestreo Δt satisface:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_{\text{corte}}}$$

Corolario:

► Criterio de Muestreo de Nyquist-Shannon en 1D

(en dominio frecuencia Y en dominio temporal)

Para detectar un rasgo (**de interés**) en una señal, la resolución temporal del sensor ($1/f_{\text{muestreo}} = T_{\text{muestreo}}$) debe ser menor a $1/2$ de T_{detalles} (duración o "tamaño" en el eje t de dicho rasgo). Equivalentemente, en *dominio de frecuencia temporal*, tenemos:

$$f_{\text{muestreo}} > 2f_{\text{detalles}} \quad f_{\text{muestreo}} > \frac{2}{T_{\text{detalles}}} \quad T_{\text{muestreo}} < \frac{T_{\text{detalles}}}{2}$$

La frecuencia de muestreo tiene que ser del doble a la más alta frecuencia de interés en la señal o, equivalentemente, la resolución temporal (duración) debe ser menor a la mitad de la duración de los detalles (ancho de picos) de interés en la señal.

► **Nota:** La modificación que introdujimos: "de interés" a la definición tradicional de libros de texto de ingeniería eléctrica permite **relativizar** y **generalizar** tanto el *Teorema* como el *Criterio de Nyquist-Shannon* a muchas situaciones y problemas que van más allá del mero problema de *muestreo* y *representación discreta de una señal continua*. Un corolario de la generalización, es que tanto teorema como criterio se aplican también a señales ya muestreadas y discretizadas (en el tiempo u otro dominio) cuando se desea *re-muestrearlas*, es decir, aumentar el período de muestreo siempre y cuando se sigan cumpliendo teorema y/o criterio. ♣ Una ventaja del *re-muestreo* es reducir el número de datos, pero hay casos, como en ciertas transformaciones, en que son necesarios varios re-muestreos, pues son parte de las interpolaciones que implican esas transformaciones.

Nota: un ejemplo de la relativización del muestreo es el hacer que una señal g "muestree" a otra h (a través de sus intersecciones o interacción). Esto ocurre en los **patrones de Moiré** ([Figura 18](#)). Otro ejemplo y aplicación útil es determinar el tamaño óptimo de un filtro necesario para eliminar (o *separar*) ciertos detalles (como ruido o rasgos que *no son de interés*) y preservar otros.

Ejercicio: Generalice y "traduzca" el *Teorema* y el *Criterio de Nyquist-Shannon* a 2D, o sea, al **dominio espacial**; "duración" cambia a "tamaño" o "extensión", y "período" a "separación" (entre muestras, para el período de muestreo y entre los extremos en la longitud del rasgo de interés). El *dominio de frecuencia temporal* (1D) cambia al *dominio de frecuencias espaciales* (sean en 1D, 2D, 3D, etc.).

♣ **Ejercicio:** ¿Son aplicables el *Teorema* y el *Criterio de Nyquist-Shannon* al atributo de la señal o imagen, es decir al co-dominio? Hay [cuantización](#) y *re-cuantización*, pero no es obvia una noción de frecuencia; si son aplicables, ¿cómo se interpretaría cumplir o no el criterio en una baja o alta cuantización del atributo?

♣ **Ejercicio:** Aplicando lo aprendido en el [ejercicio sobre derivada e integral de una señal](#), proponga alguna relación entre (A) filtros pasa-altas y pasa-bajas de una señal y (B) su derivada e integral. ¿Qué puede concluir de sus observaciones?

♣ **Ejercicio:** Combinando las medidas de [amplitud RMS](#), [filtro mediana local](#) y [Exceso de Señal](#) proponga por dos o más formas de medir el grado de suavidad de una señal, descartando picos aislados (tal vez requiera resolver el ejercicio anterior). ¿Cómo lo aplicaría en forma simplificada para imágenes 2D?

♣♣ **Ejercicio:** En la transformada de Fourier tiempo y frecuencia son *variables conjugadas*. La relación entre ambas aparece como una desigualdad en el *Teorema* y *Criterio de Nyquist-Shannon*. Si es usted físico(a), ¿nota el parecido con el *Principio de Incertidumbre de Heisenberg*? ¿Es coincidencia?; explique y justifique su respuesta. Recuerde que la constante de Planck $\hbar$ se relaciona con una *cuantización* de la energía, etc. (un " Δx ", pero no confunda el papel del tiempo en cada caso, ¿se discretizan o cuantizan cosas distintas?). Investigue "cuál fue primero", cómo se relacionan (si es el caso) y cuál es más general.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon Dan E. y Russell 2013), (Gonzalez y Woods 2017), (Hayes 2016).

Fin§ [►Índice](#)

♣ Aliasing (o efecto Nyquist, recubrimiento o traslape de espectro)

Cuando un proceso de muestreo o de re-muestreo de una señal digital no satisface el *criterio de muestreo de Nyquist-Shannon*, no sólo se pierden detalles menores a la separación entre muestras⁷, sino que se produce un efecto, denominado **aliasing** o **Efecto Nyquist** o también de **traslape o recubrimiento de espectros**. Este efecto consiste en que señales continuas distintas se tornan indistinguibles cuando se muestrean digitalmente, en particular con muestreos a baja frecuencia. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma unívoca a partir de sus muestras. Una imagen de bandas limitadas (frecuencias espaciales), muestreada por debajo de su *frecuencia de Nyquist* en las direcciones "x" e "y", resulta en una superposición de las replicas periódicas del espectro (dominio de frecuencia espacial angular (ω_x, ω_y)). Este fenómeno de superposición periódica sucesiva, en señales o imágenes, es lo que se conoce como *aliasing*. La [Figura 17](#) ilustra la constitución de una onda "falsa" en azul, a partir de muestras insuficientes de la onda "verdadera" en rojo. Un ejemplo visual común es ver algo girar (una rueda o ventilador con aspas). En un cierto momento, el ojo, que muestrea a unos 10 cuadros por segundo (por la persistencia visual), verá las aspas "detenerse", girar más lento, o en sentido contrario (un cambio de fase de 180 grados causa esta ilusión del muestreo: por ejemplo el perfil falso sube en vez de bajar); lo que se ve es un giro "alias" del real (ver [Wagon wheel effect](#)). El *estroboscopio* (o *efecto estroboscópico*) explota el aliasing para hacer visibles eventos periódicos de frecuencia $f > 24$ Hz, siendo f múltiplo exacto de 24.

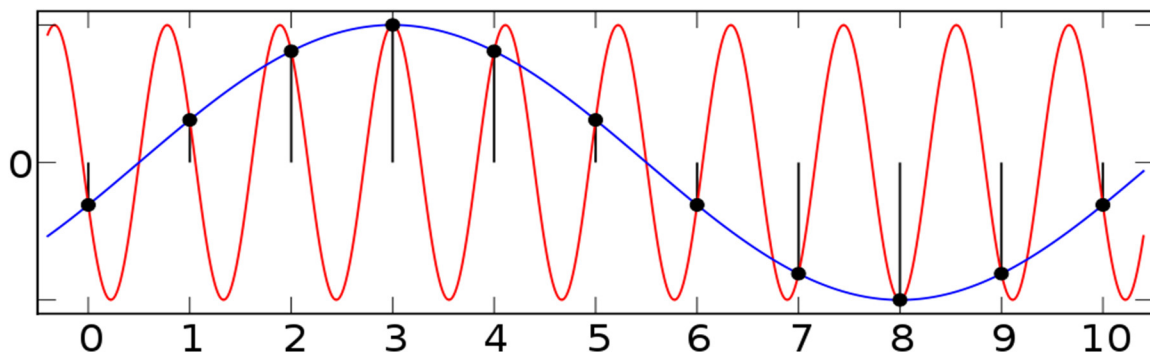


Figura 17. Fenómeno de *aliasing* en dominio temporal. La señal en rojo se muestra "completa", antes de cualquier muestreo. Los puntos en negro son los valores de un muestreo insuficiente para representar los valles y crestas originales: la separación entre muestras es mayor a la separación entre ondas; aún si fuese justo la mitad, los picos se podrían contar, pero la forma se perdería. En azul aparece la señal observada (o que se recupera a partir de las muestras en los puntos negros); hay menos de una onda completa en vez de nueve y media (en rojo). Un muestreo diferente cambia nuevamente lo que es observado: la *señal alias* o con *traslape de espectro*.

⁷ Equivalentemente, pérdida de frecuencias superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo.

Nota: Un tipo de artefactos de imagen debido al *aliasing* son los *patrones de Moiré* ([Figura 18](#)); para una señal o imagen, estos patrones cambian con la frecuencia de muestreo y se atenúan o desaparecen cuando esa frecuencia cumple con el criterio de muestreo de Nyquist-Shannon.

Para prevenir o atenuar el efecto de aliasing hay dos soluciones: (A) incrementar la tasa de muestreo, (B) introducir un filtro anti-aliasing antes del muestreo. Con (B) se filtran o atenúan los detalles (altas frecuencias) que de todos modos no son resueltos (el muestreo no cumple el [criterio de Nyquist-Shannon](#)) pero producen el aliasing; se reduce el [ancho de banda](#) de la señal de entrada para satisfacer la condición de muestreo de acuerdo con el sistema o procedimiento de adquisición. Hay varias técnicas *anti-aliasing* aparte del obvio filtro pasa-bajas.

Ejercicio: El Sol se mueve (aparentemente) del Este al Oeste en el cielo, con un período de 24 horas entre amaneceres. Si uno toma una fotografía del cielo, incluyendo el paso del Sol, pero cada 23 horas, durante 24 días, en la secuencia final el Sol parecería moverse de Oeste a Este con $24 \times 23 = 552$ horas entre amaneceres. Describa este fenómeno de alias mediante un gráfico sinusoidal semejante a la [Figura 17](#). Haga lo mismo para la ilusión óptica de una rueda que parece girar en sentido contrario (u observe un ventilador al arrancar o detenerse).

♣**Nota:** El *aliasing* mínimo que puede ocurrir en un sistema de adquisición está determinado por la resolución del sensor. Esta resolución es al menos *temporal*, *espacial* y *energética*: el lapso necesario para capturar una muestra (digitalizarla y procesarla, si se incluye la cadena completa hasta la salida del sistema), las longitudes, áreas y volúmenes involucrados (tamaño de pixel, voxel), y la energía necesaria para la excitación en el sensor, efecto de transducción y el consumo de potencia inevitable por la impedancia de entrada finita, luego, como en la discretización espacio-temporal, otro factor de reducción en resolución es la cuantización de intensidad en la medición, etc. Los parámetros de funcionamiento y ajuste de un instrumento, los procedimientos y algoritmos de filtrado y análisis también determinan la resolución final. Por ejemplo, por las razones anteriores, un arreglo de sensores o captores, como en una cámara digital o en el propio ojo humano, implica un *patrón de muestreo* que entra en interferencia constructiva/destructiva con el patrón de entrada (por ejemplo, una textura muy fina); se produce un **patrón de Moiré** (a veces *Moaré* o *Muaré*) en la representación de la imagen capturada, inclusive antes del despliegue, que tendrá sus propios efectos de sub-muestreo, tales como la escala.

Nota: Un pobre entendimiento del fenómeno de *aliasing* puede confundir y desorientar un trabajo experimental: por ejemplo, una señal de 300 Hz muestreada en un osciloscopio a 1/10 de segundo y no a 1/600 seg (como mínimo) ocasiona que al sincronizar la señal con el barrido aparezca erróneamente como una señal de 60 Hz (el alias) y sea confundida con la línea de AC (que podría aparecer como ruido y empeorar la interpretación). En el caso de imágenes puede interpretarse como una textura inexistente y de hecho entrará en conflicto con cualquier textura repetitiva de frecuencias cercanas a los múltiplos de

las frecuencias de muestreo espacial, creando artefactos de texturas muy diferentes al original o a la que debería observarse con un muestreo correcto.

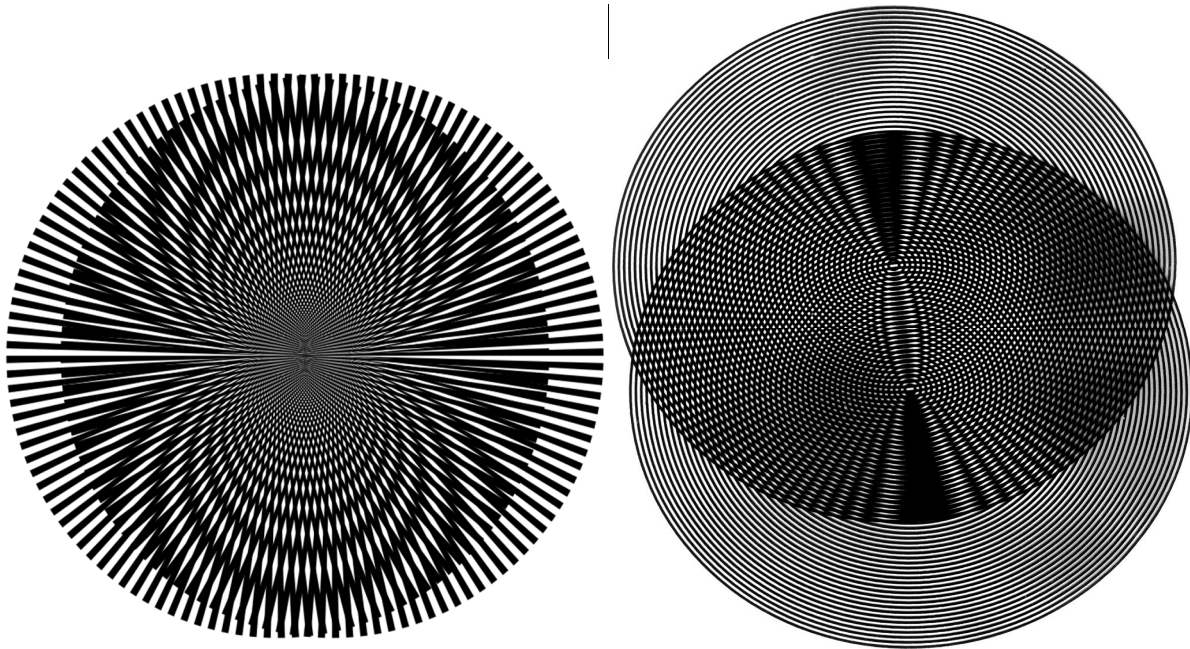


Figura 18. Patrones de Moiré. (Izquierda) dos patrones radiales producen un patrón de Moiré de bandas elípticas, aunque sólo había rectas. (Derecha), se produce el efecto contrario: dos patrones con puras elipses concéntricas produce un patrón de Moiré con rectas.

♣ **Filtros en dominio de la señal o imagen (temporal o espacial).**

Los [filtros](#) anteriores funcionan como [modulación en frecuencia](#), es decir las ventanas multiplican las FT de la señal a filtrar. En otras palabras, se realiza un *filtrado en dominio de frecuencia* (temporal o espaciales). El filtrado se puede aplicar también en el dominio temporal o espacial de las señal o imagen, sin recurrir a la transformada de Fourier. Para esto se usa la [convolución](#) entre señal y señal-ventana. Si la ventana (núcleo) es simétrica, equivale a un [promedio ponderado local o móvil](#) (por ejemplo, la ecuación (18) para [suavizar un histograma](#)). Para ventanas "grandes", la transformada rápida de Fourier (FFT) es más eficaz que la convolución correspondiente, aun cuando se realizan las transformadas individuales, el producto (modulación en frecuencia) y su transformada inversa ($\mathcal{F}^{-1}$).

♣♣ **Filtrado de atributo por criterios de amplitud.**

Otro tipo de filtrado, en cualquier dominio, son los *filtros del atributo* (e. g., intensidad) *por criterios de amplitud* (o filtrado de intensidades), que atenúan o eliminan los rasgos de la señal en función de algún intervalo (ventana) de amplitudes $[A_1, A_2]$, que también son cada una ordinariamente llamadas *umbral*. Se puede considerar que este es un filtrado que se realiza "en el histograma de la señal", en el sentido de

que el efecto neto es cambiar la distribución probabilística, filtrando el espectro de intensidades (o del atributo que sea). En dominio de frecuencia equivale a preservar (o eliminar) frecuencias de cierta potencia (o sea en un intervalo $[A_1^2, A_2^2]$).

♣♣ **Valor de filtrado.** "Eliminar" ha significado "asignar el valor 0", pero también podría asignarse un valor fijo (al alcanzar un umbral o hallarse en un intervalo), que puede ser el de *saturación* (máximo valor posible). Llamamos a este valor asignado el *valor de filtrado* . Por ejemplo, una imagen escalar 2D "es truncada" a un valor A_1 :

$$I(x, y) = \begin{cases} A_1 & \text{if } I(x, y) \in [A_1, A_2] \\ I(x, y) & \text{if } I(x, y) \notin [A_1, A_2] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \blacktriangleleft \text{ se asigna valor de filtrado } A_1 \\ \blacktriangleleft \text{ queda igual} \end{array} \quad (63)$$

La **binarización** es más general: por ejemplo, se asigna "0" si se cumple el criterio de filtrado en amplitud y se asigna "1" si no se cumple (puede ser al revés). En imágenes, los filtros por umbral (o *umbralización*) de niveles de gris (en imágenes escalares) permiten por ejemplo separar el fondo (*foreground*) de los rasgos de interés ("figura" = *foreground*). Al resultado, si se asignan valores binarios, también se le conoce como *segmentación por umbral* .

Ejercicio: Todos los filtros vistos atenúan o eliminan intervalos de frecuencia (o de amplitudes); ¿es posible *acentuar* o *realzar* ? ¿Cómo formularía tal filtro?

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon Dan E. y Russell 2013), (Gonzalez y Woods 2017), (Hayes 2016), (Jähne 2017).

Fin§ [►Índice](#)

► Modelo Lineal de Degradación

Elementos que alteran una medición.

Cuando se obtienen mediciones u observaciones $\mathcal{X}_{obs}$ de un mesurando (atributo o propiedad de interés) $\mathcal{X}_{in}$, usualmente el valor del mesurando y el de las mediciones no coinciden perfectamente. Hay varias formas de ruido y alteraciones que provienen ya del mismo mesurando en contacto con el medio o interfaz con un sensor; el propio sensor introduce otras componentes de ruido y distorsión, así como el proceso de medición. Las definiciones y tópicos del *ruido* y de la *función de dispersión puntual* son tratados en mayor detalle en notas aparte. Aun en ciertos procesos de filtrado y análisis, es posible hallar fuentes de error y distorsión, tales como los errores de discretización, cuantización, redondeo e interpolación y cálculos con *precisión finita* o soluciones con métodos numéricos iterativos). Aquí presentamos elementos que alteran una medición y su relación en el *modelo lineal de degradación* de una señal de entrada, y en general, en los instrumentos y *sistemas lineales e invariantes a corrimiento* (o *invariantes en el tiempo*). El modelo lineal de degradación canónico es:

$$\mathcal{X}_{obs} = \mathcal{X}_{in} * \psi + \eta \quad (64)$$

donde:

$\mathcal{X}_{in}$: **Entrada** (mesurando, dato, señal, vector, imagen, estímulo, etc),

$\mathcal{X}_{obs}$: **Observación** (la medición obtenida, lo muestreado, la respuesta o salida),

ψ : **PSF del sistema o sensor** (*Función de Dispersión Puntual* - efecto de apertura finita), usualmente no tiene unidades, o bien, incluye el factor dimensional de transducción, si la hay.

η : **Ruido aditivo** en el espacio de $\mathcal{X}_{obs}$ (sensor),

$*$: Operador de convolución, dominio de $\mathcal{X}_{in}$ y de la PSF ψ ,

$\varepsilon = \mathcal{X}_{obs} - \mathcal{X}_{in}$: **error diferencial** por degradación (simplificación a mismos espacios; podría haber transducción y re-escalamiento). Una buena calibración, los procesos de filtrado y restauración de la señal (imagen) permiten minimizar ε , en ocasiones hasta por debajo de las resoluciones temporal, espacial, energética, de frecuencia y de los atributos (co-dominio de los datos).

El ruido η ya incluye ruido en la entrada $\mathcal{X}_{in}$, pues factorizando ψ en la expresión $(\mathcal{X}_{in} + \eta_{in}) * \psi + \eta'$, obtenemos el ruido total: $\eta = \eta' + \eta_{in} * \psi$.

Normalmente se conoce $\mathcal{X}_{obs}$, acaso ψ y quizás algunas propiedades de η . Aunque en teoría se debería poder *de-convolucionar* las señales, el ruido lo dificulta y de hecho la deconvolución bajo ruido es un *problema mal planteado* ([ill-posed](#)) o *mal condicionado*, que se aborda con técnicas especiales donde es muy útil todo conocimiento sobre la PSF y el ruido (sus [espectros de potencia](#), por ejemplo).

Ejercicio: Muestre matemáticamente lo anterior, rehaciendo el [ejercicio sobre deconvolución](#), con $\mathcal{X}_{obs}$ y ψ conocidas y encuentre $\mathcal{X}_{in}$, cuando hay un ruido η .

► Es común que en el modelo no se incluyan la amplificación o la atenuación global (se trata aparte), de modo que la PSF ψ suele estar normalizada a $[0,1]$ para **no alterar la energía** o potencia global de la señal de entrada (formalmente: $\int \mathcal{X}_{out}^2 = \int (\Psi * \mathcal{X}_{in})^2$, o también $\int \Psi^2 = 1$). Una manera de garantizar lo anterior es justamente normalizando la convolución respecto al [núcleo](#), es decir, dividir $\psi * \mathcal{X}_{in}$ entre $\int \Psi$.

Pueden haber muchas causas y fuentes del ruido y de la PSF global del sistema: los *efectos de interfaz y apertura finita*, un acoplamiento deficiente de impedancias, las pérdidas (en flujos y esfuerzos) por conversiones de energía no controladas, un pobre aislamiento frente a factores externos, etc.

► La salida $\mathcal{X}_{obs}$ y la entrada $\mathcal{X}_{in}$ sólo puede ser iguales si el ruido η es cero y si la PSF es $\psi \equiv \delta$, la *delta de Dirac*, definida por ejemplo como: $\lim_{\beta \rightarrow 0} \exp(-(x-x_0)^2/(2\beta^2))/(\beta\sqrt{2\pi})$.

Hay varias modificaciones y refinamientos del modelo (64), en particular para incluir efectos de discretización y las distorsiones en el dominio de $\mathcal{X}_{in}$ ([ruido de fase, o fluctuaciones morfológicas](#), por ejemplo).

Como en principio es posible deshacer hasta cierto punto los efectos del ruido y la PSF, restaurando la entrada $\mathcal{X}_{in}$ a partir de observaciones $\mathcal{X}_{obs}$ y cierto conocimiento de η y de Ψ , se considera que (64) es también un *modelo del proceso de degradación/restauración*.

Nota: En la sección de [Imperfecciones Típicas en Señales Digitales](#) se enlistan y definen los principales elementos que alteran las señales y que contribuyen al error diferencial ε . Algunas de sus causas y tratamiento se verán más adelante.

► **Ejercicio:** ¿Están ya incorporados los posibles problemas de retardo entre la entrada y la salida, en la relación (64)? Si no es así, ¿cómo los tomaría en cuenta?

Ejercicio: Si un mesurando x_{in} es la temperatura de la sangre y el sensor se basa en un termistor, dando un valor de impedancia x_{obs} como respuesta, ¿qué unidades debe tener la PSF?

♣**Ejercicio:** Inspirado en el modelo (64), proponga un modelo para un sistema que es lineal pero no es invariante a corrimiento (puede formular un caso en particular, modificando la definición de [convolución](#)).

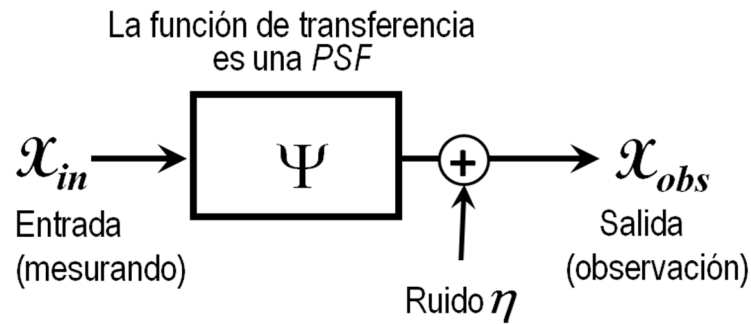


Figura 19. Diagrama en bloques del modelo de degradación lineal. Se sobreentiende que la *función de transferencia* y la entrada (mesurando) se convolucionan (sistemas lineales invariantes a corrimiento) para producir la salida (medición u observación).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Gonzalez y Woods 2017), (Jähne 2017).

Fin§ [►Índice](#)

Amplitud RMS y Potencia

La **amplitud RMS** (*root-mean-square* = *raíz cuadrática media*, o también *valor eficaz*) de una señal $x(t)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es el *promedio temporal del cuadrado de la señal*; dadas N muestras de $x(t)$ (a veces considerada como *variable aleatoria*), $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1, \dots, N}$:

$$x_{RMS} = \sqrt{\overline{x(t)^2}} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2 \right)^{1/2} \quad (65)$$

Nota: El valor RMS de $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1, \dots, N}$, también se conoce como **suma en cuadratura** o **promedio cuadrático** de los N valores muestra $\{x_n\}$ de $f(t)$. Por otro lado, el conjunto $\mathcal{X}$ puede ser [información no-estructurada](#) en vez de muestras de una señal, imagen, etc. Obviamente la definición (65) no depende del orden en que se sumen los cuadrados de x_n .

Ejemplo: En una superficie, la *rugosidad RMS* se define como el valor h_{RMS} , siendo h_n , con $n=1, \dots, N$, las N alturas respecto a un valor de referencia (base).

Nota: En vez del valor RMS, a veces se usa el **valor pico-a-pico** de $x(t)$. Por ejemplo, si $x(t) = A \sin(\omega t) + B$, la amplitud pico-a-pico no es A ni $A+B$, sino $\max_t(x(t)) - \min_t(x(t)) = A \sin(\pi) + B - A \sin(-\pi) - B = 2A$.

Nota: Si en vez de x_n se tienen las diferencias respecto a la media (o sea errores), la ecuación (65) define la [desviación estándar](#) de $\mathcal{X}$ (o sea σ_x^2), por ello se llama también *Error Cuadrático Medio* (Root Square Mean, RSM) o *promedio cuadrático de las diferencias* ($x_n - \bar{x}$) o inclusive, *suma en cuadratura del error*.

♣**Nota:** En los denominados *modelos estocásticos*, es usual encontrar ecuaciones diferenciales o integrales donde la variable es la media o el valor RMS de otra variable, es decir que se modela, predice o analizan descriptores estadísticos de la variable de interés. El *cálculo estocástico* es una generalización del *cálculo (determinístico)* que toma en cuenta aspectos probabilísticos y estadísticos.

Ejercicio: Dado un conjunto de muestras $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1, \dots, N}$, ¿cómo se compara el promedio RMS con la media (promedio aritmético) de $\mathcal{X}$? Demuestre su respuesta y justifique por qué se prefiere el promedio cuadrático de errores al promedio de sus valores absolutos.

♣**Ejercicio:** Defina un parámetro textural de rugosidad en una imagen texturada $u=I(x, y)$. Si puede identificar los píxeles con ruido o que de algún modo no son válidos, ¿cómo se ve afectado el parámetro de rugosidad? ¿Puede pensar en un parámetro de rugosidad "robusto"?

En continuo, con (T_2-T_1) igual a un número entero de ciclos completos (o sea igual a $n2\pi$, $n \in \mathbb{N}^+$):

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|^2 dt}, \quad (66)$$

Y en todo el tiempo:

$$x_{RMS} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}. \quad (67)$$

Potencia (de una señal): Es el cuadrado de la amplitud *RMS* de la señal; comparando con la ecuación (10) para promedios continuos:

$$(x_{RMS}(t))^2 = \overline{x(t)^2} \quad (68)$$

En dominio de frecuencia, por el *teorema de Parseval* para señales muestreadas complejas, se tiene, con $X(\nu)$ en $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)^2 = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \|X(\nu)\|^2 \quad (69)$$

De donde vemos que el valor *RMS* en dominio de frecuencia es el mismo que en dominio temporal:

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)^2} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{\nu=1}^N \|X(\nu)\|^2} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^N \left\| \frac{X(\nu)}{N} \right\|^2} = X_{RMS} \quad (70)$$

♣**Nota:** En la representación vectorial de una señal de N muestras $x_n = x(n\Delta t)$, o sea que cada muestra es una componentes del vector $\mathbf{x}$ (o dimensiones), tenemos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$; alternatively como vector-columna (matriz de $1 \times N$), escribimos $\mathbf{X}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]$; el promedio cuadrático (65) se puede entonces escribir como:

$$x_{RMS}^2 = \frac{1}{N} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad (71)$$

Potencia clásica. En Física, si $x(t) = V(t)$ es el potencial eléctrico a través de una resistencia R , la potencia disipada por R es:

$$P_R = \overline{V(t)^2} / R \quad (72)$$

y es la cantidad de energía disipada por unidad de t por el circuito resistivo. También, en la definición clásica, siguiendo la definición de *potencia mecánica* (taza con la que se realiza trabajo), la potencia eléctrica, en Watts, producida por una corriente I (en amperes) consistente de una carga de Q Coulombs, cada t segundos, pasando a través de una diferencia de potencial eléctrico V (Volts) está dada por el *trabajo realizado por unidad de tiempo*:

$$P = QV / t = IV \quad (73)$$

Para un voltaje o corriente AC sinusoidal, de amplitud (o magnitud) V_{Mag} e I_{Mag} (llamados “valores pico” de voltaje y corriente, respectivamente), se puede demostrar (**TAREA**, cualesquiera valores de ω , pero $T_1=0$, $T_2 \rightarrow \infty$, o bien $T_2 - T_1 = n2\pi$, $n \in \mathbb{N}^+$) que sus valores RMS son:

$$I_{RMS} = \frac{I_{Mag}}{\sqrt{2}}, \quad V_{RMS} = \frac{V_{Mag}}{\sqrt{2}} \quad (74)$$

Nota: De la definición de desviación estándar y la ecuación (65), para una población $\{x_n\}$ o muestras x_n de una señal $x(t)$, se tiene:

$$x_{RMS}^2 = \bar{x}^2 + \sigma_x^2 \quad (75)$$

Como el valor medio de una señal constituye la componente DC de la señal y la desviación estándar es el valor RMS de la componente AC (variaciones), la ecuación (75) equivale al valor RMS total:

$$x_{RMS \text{ Total}} = x_{RMS} = \sqrt{\underbrace{x_{RMS \text{ DC}}^2}_{\text{media } \bar{x}^2} + \underbrace{x_{RMS \text{ AC}}^2}_{\text{desv.std. } \sigma_x^2}} \quad (76)$$

♣♣ **Potencia reactiva.** Si el voltaje es AC, en general la potencia AC incluye un término llamado *potencia reactiva*, y se deben considerar $\mathbf{I}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{V}$ complejos (fasores). La llamada potencia “aparente” es la magnitud y la parte real es la que transmite energía. También, en general, la impedancia $\mathbf{Z}$ comprende un término resistivo R (parte real) y una reactancia neta X (parte imaginaria); en términos también de la corriente en la impedancia $\mathbf{Z}$ se tiene, con $I_{Mag} = |\mathbf{I}| = \mathbf{I} \mathbf{I}^*$, $V_{Mag} = |\mathbf{V}| = \mathbf{V} \mathbf{V}^*$:

$$P_{RMS} = V_{RMS}^2 / |\mathbf{Z}| = I_{RMS}^2 |\mathbf{Z}| = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 |\mathbf{Z}| = \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 / |\mathbf{Z}| \quad (77)$$

Para voltajes y corrientes no sinusoidales, las relaciones entre potencia reactiva, potencia real, potencia aparente total son algo más complejas. El cociente de las últimas dos se denomina “factor de potencia” e indica cómo afectan la eficiencia de la fuente tanto la fase como el contenido armónico de la corriente.

Ejercicio: Se tiene una resistencia R de $1\text{k}\Omega$ y a través de ella pasa una corriente $I_0 \sin(2\pi \nu t + 0.5\pi)$ definida en $[3, 7/2]$ Amp. y es cero fuera del mismo intervalo. $I_0 = 4$ Amp., $\nu = 0.5$ Hz. Calcule la potencia disipada a través de R para t en $[0, \infty)$.

Ejercicio: La señal anterior es contaminada por un ruido uniforme cuya potencia RMS es de 3 Watts. ¿Cuáles es la [taza señal a ruido](#)? (dé unidades). (B) Si la medición sólo resulta útil para una taza de 5 db, ¿qué potencia RMS y qué amplitud debe tener la señal de entrada si la potencia del ruido es de 2 Watts?

Ejercicio: Demuestre que si $\mathcal{X} = \{x_n\}_{n=1, \dots, N}$, y si $x_n \geq 0$, se cumple: $\bar{x} \leq x_{RMS}$.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Blackburn 2000), (Hayes 2011).

Fin§ [►Índice](#)

♣ Espectro de Potencia (o densidad espectral) y PSD

Es la distribución de potencia correspondiente a componentes en frecuencia de la variable $x(t)$ cuando es una **función periódica** de t :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)), \quad \omega_0 = 2\pi/T, \quad (78)$$

donde los *coeficientes de Fourier* A_n, B_n se definen por:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (79)$$

con ω_0 la frecuencia angular de base (representación discreta).

Potencia total:

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (80)$$

para una función **no** periódica,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (81)$$

donde $X(\omega)$ es la *transformada de Fourier* de $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (82)$$

El dominio temporal es el intervalo de t donde está definida la variable $x(t)$. El intervalo de valores de $x(t)$ es el codominio (o dominio de intensidad, etc.). El *dominio de frecuencia (temporal)* es el intervalo de ω donde está definida $X(\omega)$.

La potencia de la señal está dada por:

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (83)$$

donde $S_{xx}(\omega) \equiv |X(\omega)|^2$ se denomina **densidad de energía espectral (ESD o PSD Power Spectral Density)**. De la ecuación (82) obtenemos:

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (84)$$

Nota: El factor $1/(2\pi)$ puede variar según la [convención de definición de la Transformada de Fourier](#); en Hz la frecuencia es $f = \omega / 2\pi$.

Nota: no confundir con *Teorema de Parseval*, donde la 1ª integral da justo raíz del valor *RMS* (potencia), que es la energía de la señal $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (85)$$

Bibliografía recomendada para esta sección: (Jain 1996), (Hayes 2011), (Kiyosi 1996), (Proakis y Manolakis 2006).

Fin§ [►Índice](#)

Propagación de Incertidumbres en Mediciones Indirectas

Dado un valor x (muestra, señal, etc.) con incertidumbre δx (usualmente su varianza s_x^2 (desviación estándar al cuadrado)), y una medida indirecta calculada como $y=f(x)$, la incertidumbre δy (ó s_y^2) se evalúa a partir de:

$$\delta y \equiv \frac{d f(x)}{dx} \delta x \quad (86)$$

Nota: se asume el valor de δx pequeño en comparación con el valor de x ; en caso contrario se debe analizar $\delta y = |f(x) - f(x \pm \delta x)|$.

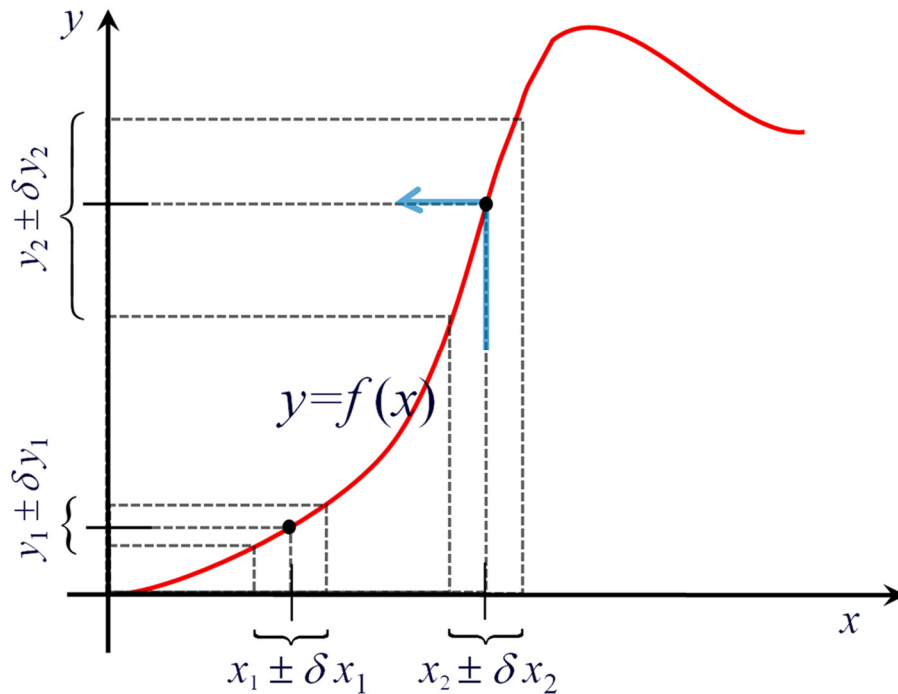


Figura 20. Propagación de incertidumbres (intervalos con centros en x_1 y en x_2) de la entrada x a la salida y (intervalos con centros en y_1 y en y_2), a través de un procedimiento o función de la entrada en la forma $y = f(x)$.

♣ **Ejercicio:** En la Figura 20, ¿Cuál es la incertidumbre justo en el máximo de la función?

Aproximación Optimista de δy para $y = f(x_a + x_b + x_c)$, con errores sistemáticos δx_a , δx_b , δx_c :

$$\Delta y \equiv f'(x + y + z) \sqrt{(\delta x_a)^2 + (\delta x_b)^2 + (\delta x_c)^2} \quad (87)$$

Caso general $y = f(x_a, x_b, x_c, \dots)$ (error aleatorio, varianzas):

$$\delta y \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_a} \right) \delta x_a + \left(\frac{\partial f}{\partial x_b} \right) \delta x_b + \left(\frac{\partial f}{\partial x_c} \right) \delta x_c + \dots \quad (88)$$

Para errores sistemáticos - Sobreestimación (máxima incertidumbre posible):

$$\Delta_{max} y \equiv \left| \frac{\partial f}{\partial x_a} \right| \delta x_a + \left| \frac{\partial f}{\partial x_b} \right| \delta x_b + \left| \frac{\partial f}{\partial x_c} \right| \delta x_c + \dots \quad (89)$$

Subestimación (mínima incertidumbre posible):

$$\Delta_{min} y \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_a} \right)^2 (\delta x_a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_b} \right)^2 (\delta x_b)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_c} \right)^2 (\delta x_c)^2 + \dots} \quad (90)$$

Nota: La expresión anterior es el *error cuadrático medio* (o [RMS](#)) o también conocido como la *suma en cuadratura* de los errores parciales (independientes)

Ejemplos:

1. Sea $y = 2x$; $\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow \boxed{\delta y = 2\delta x}$
se duplica la incertidumbre en x

2. Sea $z = x^n$

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} = \frac{nz}{x} \quad \boxed{\delta z = nx^{n-1} \delta x}$$

Incertidumbre relativa : $\boxed{\frac{\delta z}{z} = n \frac{\delta x}{x}}$

3. Sea $z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

Truco: derivamos z^2 : $2z \frac{\partial z}{\partial R} = 2R$, $2z \frac{\partial z}{\partial L} = \omega^2 2L$

Y finalmente obtenemos: $\delta z = \frac{\partial z}{\partial R} \delta R + \frac{\partial z}{\partial L} \delta L$

$$\boxed{\frac{\delta z}{z} = \frac{R\delta R + \omega^2 L \delta L}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Ejemplo con funciones trigonométricas:

Sea $z = \sin x$

1. Usando derivadas :

$$\frac{dz}{dx} = \cos x \Rightarrow \boxed{\delta z = (\cos x) \delta x} \quad \text{ecuación (A)}$$

2. Substituyendo $x \rightarrow x_0 \pm \delta x$:

$$\begin{aligned} z_0 \pm \delta z &= \sin(x_0 \pm \delta x) \\ &= \sin x_0 \cos \delta x \pm \cos x_0 \sin \delta x \end{aligned} \quad \text{ecuación (B)}$$

como $z_0 = \sin x_0$ y $\cos \delta x \approx 1$,

$$\boxed{\delta z = \cos x_0 \sin \delta x} \quad \text{ecuación (C)}$$

Notar que en la ecuación (A) tenemos: $\sin \delta x \approx \delta x$

Conclusiones:

1. Si la incertidumbre es $\delta x \approx 0 \Rightarrow$ usar ecuación (A)
2. Si la incertidumbre es $\delta x \gg 0 \Rightarrow$ usar ecuación (B) ó (C)
3. Medir en radianes la incertidumbre angular δx

♣ **Resolución en el cálculo de la propagación de incertidumbres.**

Sean

- x , una medición con incertidumbre asociada δx , y
- y , una variable dependiente obtenida a partir de x mediante $y = g(x)$.

Además, $g(x)$ tiene variaciones (“picos”) cuya frecuencia máxima es f_{max} , equivalentemente, los detalles del perfil $g(x)$ tienen anchos (períodos, separación entre máximos o mínimos locales) inferiores a:

$$L = 1/f_{max} \quad (91)$$

Si deseamos calcular la propagación de incertidumbre de δx a δy , dicho cálculo sólo tendrá sentido si:

$$\delta x < L/2 \quad (92)$$

(y entonces, por ejemplo $\delta y = \delta x \cdot d g(x)/dx$ o bien,

$$\delta y = \max \{ |g(x) - g(x+\delta x)|, |g(x) - g(x-\delta x)| \} \quad (93)$$

Dicho criterio se debe a que los valores $x-\delta x$, x , $x+\delta x$ son **tres muestras** (la frecuencia de muestreo es por tanto $f_{muestreo} = 1/\delta x$) y el [Criterio de Nyquist-Shannon](#) (en resolución espacial) indica que se debe satisfacer la relación:

$$f_{muestreo} > 2/L \quad (94)$$

para poder detectar un rasgo de tamaño (=ancho) L . Tal ancho puede ser estimado por ejemplo mediante la FWHM del pico, o la desviación estándar σ^2 , si se modela con una distribución normal (Gaussiana).

Bibliografía recomendada para esta sección: (Baird 1995), (Kiyosi 1996), (Kutz 2013).

Fin § [►Índice](#)

► Imperfecciones Típicas y Problemas Comunes en Datos, Señales e Imágenes

Un primer problema es ignorar que ocurre una o varias de las situaciones abajo enlistadas. Si se determina que ocurrieron, es necesario identificar y separar (si es posible) cada componente de degradación y evaluar su importancia, así como el grado de deterioro o pérdida producida en los datos. El [Modelo Lineal de Degradación/Restauración](#) ya visto es una simplificación que agrupa en dos partes (ruido y PSF) algunos problemas y limitaciones. Por otro lado, una imperfección pequeña podría acumularse a lo largo de varias transformaciones, o ser parte de un circuito retroalimentado, amplificándose o causando otros problemas (por ejemplo: resonancia, inversión de fase, etc.). Explicamos a continuación los siguientes problemas e imperfecciones que pueden aparecer antes de la adquisición, durante la misma, o al procesar la información, sea analógica o digital.

- **Baja resolución** (o resolución insuficiente, o sea **submuestreo**). Puede ocurrir en: dominios temporal, espacial y espectral (longitud de onda representada dentro de una banda limitada), o en el atributo del co-dominio (insuficientes niveles de cuantización). También, si la tasa de muestreo, por efecto de la ventana temporal, no alcanza para capturar movimientos rápidos, ocurre *borrosidad* aún con una PSF pequeña (y no es falta de enfoque). Estos defectos provienen del *efecto de ventana finita generalizada* y llevan a no cumplir adecuadamente el [Criterio de Muestreo de Nyquist-Shannon](#). Hay dos componentes que constituyen una baja resolución en dominio temporal o espacial y en el atributo (co-dominio):
 - **Baja resolución en discretización/cuantización** (submuestreo): el tamaño de los rasgos de interés es menor al doble de la separación entre muestras (independientemente de la PSF) más **artefactos de discretización**: *escaleras* y [aliasing](#). El “efecto de escaleras” en el atributo de una imagen, aún con alta discretización del dominio, hace que un gradiente aparezca escalonado, siendo visibles los *isocontornos* entre regiones en que el atributo cambia. El efecto de “borrosidad” por movimiento en una imagen o video se produce al superponerse muestras integradas en el captor durante un tiempo mayor a 0 (como un movimiento, una vibración o un temblor son continuos, aunque sean lentos, siempre hay un grado de borrosidad).
 - **Artefactos de discretización angular (anisotropía)**: Al cuantizar las direcciones en, por ejemplo, múltiplos de $\pi/4$ el procesamiento o análisis tenderán a privilegiar direcciones ortogonales o diagonales (por ejemplo) y una medida de distancia dará valores diferentes en direcciones diferentes. los efectos son variados, por ejemplo, tras procesamiento o generación de patrones las formas circulares se vuelven octagonales y una medición como el perímetro depende de la orientación del objeto.

- **Degradación por la PSF** (desenfoque, independientemente de la resolución en discretización y ventanas temporal/espacial). Si la entrada es un punto, lo observado es una mancha.
- **Excesiva atenuación:** Es el equivalente converso a una **baja resolución** y causa problemas similares, pues es otra forma de no cumplir el [Criterio de Muestreo de Nyquist-Shannon](#). El equivalente en dominio temporal o espacial es un escalamiento excesivo por un factor $1/N$, (o sea, una magnificación $\ll 1.0$). aunque no exista truncamiento, como en la *saturación en dominio*, el paso de discretización es demasiado grande respecto a los detalles.
- **Otros artefactos y errores por aliasing.** Aparte de bajo muestreo, pueden provenir por la interferencia entre patrones en la señal y patrones en el sistema de adquisición. En imágenes: "dientes de sierra" en los bordes entre regiones, *ringing* (ondas alrededor de bordes entre regiones) y *patrones de Moiré*.
- **Presencia de ruido.** Hay muchos tipos, por ejemplo: aditivo, multiplicativo, en la fase, estructurado, correlacionado, morfológico, etc. Interferencia (combinación, modulación, etc.) con otras señales o canales. Hay además multitud de fuentes y de causas posibles. Puede haber "ruido" hasta en la interpretación de resultados (el equivalente a la PSF sería la vaguedad, falta de claridad o precisión).
- **Información incompleta y oclusión.** Ocurre cuando algo impide que la información de interés se encuentre completa: tras adquirir una imagen pueden aparecer objetos o basuras que "tapan" alguna región de interés, o bien la imagen fue "recortada", excluyendo rasgos de interés. Estos defectos pueden ser difíciles de prevenir, pero a veces es posible interpolar, extrapolar o completar la región ocluida, mediante modelos de la información faltante, cortada o substituida por basura.
- **Fondo o base no uniforme.** Deriva (*drift*) en una señal; deformaciones que afectan al atributo, inhomogeneidades discontinuas y gradientes en imágenes de 2 y 3D. La deriva en fase o asincrónica puede ocurrir en señales y video. Puede también ser ruido con cierta coherencia y/o alta correlación.
- **Bajo contraste.** Bajo [intervalo dinámico](#) del atributo, inclusive con una cuantización elevada (por canal espectral). Este puede ser un efecto relativo y subjetivo, si se trata de una señal mal escalada a los intervalos de los sentidos humanos. En general, el atributo ventana-de-interés puede presentar bajo contraste. Peor caso: cuando una amplia gama de niveles del atributo, en un intervalo de interés aparece entre dos divisiones de escala. El contraste disminuye al aumentar las frecuencias presentes, debido al efecto suavizador de la [PSF](#) del sistema o proceso: los detalles están al límite de resolución y dejan de cumplir con el [Criterio de Muestreo de Nyquist-Shannon](#).

- **Saturación en atributo (=amplificación excesiva).** Se pierde información si el intervalo de variación de la señal es mayor que el de medición del sistema de adquisición: el atributo se trunca al mayor valor posible para representarlo, o bien, los valores más bajos aparecen representados como cero o el mínimo valor de la escala.
- **Dominio insuficiente.** Equivalente a una "saturación" en dominio: la señal o imagen tiene información fuera del dominio de captura (no cabe) o de representación; aparece truncada, quizás de forma irregular o se desconoce cuánta información falta; una señal comienza antes o termina después del periodo de captura empleado. Las pérdidas incluyen "huecos" de información aún si la información está dentro del dominio (ver [información faltante u oclusión](#)).
- **Señal o información equivocada.** Aunque no existiesen imperfecciones importantes, puede simplemente tenerse información de otro canal, haber capturado información que no es de interés, mezclarse, etc. Esto incluye alteraciones causadas por terceros, sea por error o intencionalmente.
- **Señal pre-procesada.** Cuando la entrada proviene de otro sistema de análisis o de algún modo ha sido previamente filtrada o modificada y no se conoce qué procesamiento se ha realizado. Esto puede ser importante si el procesamiento no fue el correcto (un realce que hace perder información, distorsiona o cambia alguna escala de forma desconocida), o se han introducido otras señales ("acotaciones", o "acompañamiento") que habrá que filtrar con la consecuente degradación de lo que interesa. Una modulación AM/FM/PM o codificación incorrectas son casos comunes.
- **Distorsión en el atributo.** En particular, debido a relaciones no lineales entre entrada y salida, pero se está modelando como relación lineal. Se incluye cualquier desviación de la [función de transferencia](#) elegida para modelar la relación entrada/salida. Suele ser diferente al fondo o deriva.
- **Distorsiones geométricas (o en el dominio).** Desde una deformación lineal (desalineación, cambios de escala, en imágenes 3D proyecciones a 2D) hasta no lineal (v.g., estiramientos irregulares, atenuaciones, pliegues no reversibles, etc.); puede incluir [fluctuaciones morfológicas](#), corrimientos en fase y deriva de fase, entre otros ejemplos. En una señal también es necesario poder distinguir entre *variaciones intrínsecas* y *variaciones extrínsecas*. En una imagen en color, cuando dos o más canales no se encuentran en registro, aparecen fantasmas de colores primarios o secundarios, especialmente en los contornos de rasgos y regiones.
- **Retardos.** Caso especial de *distorsión en dominio temporal*; el [Modelo Lineal de Degradación](#) para señales temporales debería escribirse como $\mathcal{X}_{obs}(t) = \mathcal{X}_{in}(t-t_0) * \psi(t-t_0) + \eta(t-t_0)$. La razón es que todo sensor toma un tiempo finito t_0 en responder al estímulo de entrada (mesurando), al igual que todo el proceso de medición. Un **desfasamiento** es un retardo relativo a una referencia.

- **Presencia de [artefactos](#).** Estos son rasgos en los datos que se confunden con aquellos rasgos de interés (manchas y basuras como polvo, partículas, cabellos, escamas dérmicas, insectos, etc.); también pueden ser cambios de fase y patrones de interferencia estructurada de origen distinto al [aliasing](#). En las técnicas de microscopia y en reconstrucción 3D pueden haber muchos artefactos especiales introducidos por rasgos de la señal (polarización, desfases, fenómenos ondulatorios, resonancias, etc.,) quizás en combinación con otros problemas de esta lista. Hay artefactos que son el *efecto colateral* de un procedimiento mal diseñado (o son inevitables), procesamiento o defectos del sistema de adquisición.
- **Errores de sincronización** (temporal) con otras señales; es también una forma de ruido en la fase, conocida como *jitter*. También se habla de *incoherencia*. En dominio espacial los **errores de correspondencia** son por alineación imperfecta entre imágenes, o entre canales (imágenes en color, multimodales o multiespectrales).
- **Efecto de valor parcial.** Suelen combinarse los errores de discretización y cuantización con **efectos de borde**; uno particular abarca, en 1D el **efecto de longitud parcial**, en 2D el **efecto de área parcial** y en 3D el **efecto de volumen parcial**. Por ejemplo, un pixel-borde, i.e., en la [frontera o interfaz](#) entre dos regiones, tiene asignado un valor ponderado entre ambas regiones (v.g., 1/4 de una intensidad y 3/4 de otra); este valor intermedio puede corresponder a otras regiones e impide asignarle a ese pixel una etiqueta a una u otra región (el redondeo no resuelve el problema). Otra forma de *efecto parcial* es cuando los detalles son más pequeños que el muestreo (no se cumple el criterio de Nyquist-Shannon); como el valor puede consistir de integración o acumulación en el *bin*, intervalo-muestra o elemento discreto, (v.g., un pixel parcialmente ocupado por una partícula más pequeña o una hebra más delgada que el pixel), este tiene un valor parcial de intensidad. **Nota:** Este efecto se combina y a veces se confunde con la pérdida de contraste debido a la PSF del sistema; tal degradación la mide la [Función de Transferencia en Modulación](#) (MTF). del sistema.
- **♣ Errores** de representación digital, codificación/decodificación, cálculos e interpretación; errores numéricos debidos a redondeos y la *precisión de máquina* (finita) y se acumula en operaciones iterativas, como la inversión de matrices (*condicionamiento mal definido* o *ill-conditioned*). La deconvolución con ruido es un caso típico. La [FFT](#) es más precisa que la DFT de la misma señal, por requerir menos cálculos. Algunos de estos errores pueden ser de carácter caótico y presentar el popular [efecto mariposa](#) aún con muy elevados muestreo, discretización, precisión, etc.: una pequeña diferencia en condiciones iniciales (en el sistema o en las entradas) puede resultar en cambios muy grandes en el estado final (del sistema o en las salidas).

- **♣ Problemas causados por *feedback*.** El uso inadecuado de la retroalimentación o *feedback* en alguna etapa de un circuito o sistema (v.g., para reducir ruido) puede ocasionar efectos colaterales, algunos como los ya enlistados, más otros. Los efectos de *resonancia por feedback positivo* o *respuestas sub-amortiguadas* en sistemas de orden superior a 1, no sólo afectan los datos: pueden hasta dañar partes del sistema o dispositivo, aún si el objetivo es pura medición. Se verán detalles de tales problemas en el tema de [Feedback](#).

♣Ejercicio: Imagine y dibuje ejemplos de cada problema. Tenga siempre presentes tales problemas y vaya identificándolos en su experiencia con información (contexto, causas, consecuencias, importancia) y observaciones. Identifique si hay otros, no enlistados.

Ejercicio: Vimos el problema de los retardos como desfase temporal en una señal $x(t)$. Imagine y describa cómo es el equivalente en dominio espacial.

Ejercicio: En la *saturación en dominio*, el truncamiento de una señal es una forma de distorsión conocida en inglés como *clipping*; considere una señal $x(t)$ y un valor de saturación x_{trunc} que es menor en magnitud a los valores absolutos de los [extremos](#) de $x(t)$. Formule matemáticamente la señal resultante cuando hay distorsión por saturación en $x(t)$.

Ejercicio: Supongamos que en una imagen de MRI el tejido de la materia gris del cerebro aparece con un valor de gris de 90, mientras que el de la materia blanca aparece con un valor de gris de 175. Un pixel entre ambas regiones tiene un 25% de su área ocupando materia blanca y el resto en materia gris. ¿Qué valor de intensidad presenta? ¿Cuál es el error respecto a pixeles 100% ocupando materia blanca o 100% en materia gris? Si hay una tercera región de fondo en negro (valor de gris 0), ¿qué porcentaje de área debe tener un pixel situado entre materia blanca y fondo negro para que sea clasificado como "pixel de materia gris"?

Bibliografía recomendada para esta sección: (Collazo 1980), (Kutz 2013), (Gonzalez y Woods 2017), (Jähne 2017), (Kutz 2013), (Proakis y Manolakis 2010), (Smith 2010).

Fin § [►Indice](#)

ANEXOS

♣ A. Representación Matemática de Datos, Señales, Imágenes,...

Datos (no estructurados). Conjunto de muestras u observaciones, señales o imágenes.

$\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ (datos escalares, información simple sin orden intrínseco),
o también: $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, etc. (datos vectoriales, matriciales, complejos, tensoriales, etc.).
No hay una función o mapeo, y la enumeración es arbitraria e irrelevante, sólo para identificación.

Datos estructurados. Noción de orden, enumeración relevante, estructura en la localización, existen y se distinguen dominio y co-dominio:

dominio $\downarrow$ $\downarrow$ co-dominio

Señal unidimensional escalar analógica (modelo continuo):

$\downarrow$ $\downarrow$
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ parejas $(t, f(t)) \leftarrow$ **gráfica continua**

Señal unidimensional escalar discreta (N muestras en secuencia u orden)

$\downarrow$ $\downarrow$
 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ o secuencia $[f_n]$, o un vector $\mathbf{f} \in \mathbb{Z}^N$
Parejas $(k, f_k) \leftarrow$ **gráfica discreta**

paso discreto (muestra) $\Delta t = \Delta k = 1$, $\mathbf{f} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

$f(t)$ de n muestras representadas como un vector nD

Nota: $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ es ordenado, pero $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ **no**.

Señal unidimensional vectorial: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$

Señal bidimensional escalar: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Señal compleja (fasores): $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Ejemplo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: curva parametrizada $(x(s), y(s))$, o trayectoria, si s es el tiempo t .

Ejemplo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: terreno (elevación), imágenes 2D

Señal n -multidimensional y m -vectorial: $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$

Ejemplo $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$: imagen discreta en color (3 canales RGB)

A veces se define **imagen escalar** como “**señal bidimensional**”: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sin embargo, estrictamente en una imagen se requiere de la noción visual de *intensidad luminosa* mediante un atributo visual de “intensidad”. Dicho atributo se combina con la primitiva de representación (*pixel*, de *picture element*) que es coloreado de acuerdo a una escala (de grises o colores) que se hace corresponder con cada valor discreto del atributo; por ejemplo el 0 es negro, y el 255 es blanco. El atributo, la información u observación podría no ser intrínsecamente visible: voltaje, presión, temperatura, número de ciertos elementos, una probabilidad, una medida de error, etc. Pero si depende de la posición en un espacio, es susceptible de ser visualizado como un nivel de gris. Este concepto es parte de la disciplina de *visualización científica*.

Además se define con frecuencia *imagen digital* como un “*arreglo matricial de valores escalares*” (caso particular, cuando la primitiva de representación son píxeles rectangulares en una *retícula ortogonal regular discreta*).

Imagen generalizada (o información multidimensional):

conjunto de muestras coherentes de información que consiste de los siguientes elementos:

Primitivas de representación

+

Estructura o configuración espacial

(geometría, localización de primitivas)

+

Atributo(s) asociado(s)

(escalares, multidim., tensoriales, etc.)

+ *opcionalmente*, sobre todo para visualización:

(Atributo de visualización o de representación visual)

“Imagen”

Se puede considerar en la información multimedia una generalización de atributo a diferentes canales sensoriales y se tiene entonces un **atributo perceptual**.

Casos particulares:

Señal (temporal) discreta:

puntos + $\mathbb{Z}^2$ + valor escalar = *Muestras ordenadas*

Se sobreentiende que el paso discreto es constante: $\forall_i: t_i - t_{i-1} = \Delta t$

Imagen analógica:

puntos + en $\mathbb{R}^2$ (sist. coordenado cartesiano) + valor escalar.

En la práctica el punto $\delta(x,y)$ es una *PSF* (“mancha” *Point Spread Function*) = respuesta a impulso del sistema de adquisición.

Imagen discreta en tonos de gris:

pixeles + malla ortogonal regular + valor escalar “nivel de gris”

Imagen discreta en color o policromática en la retina humana:

hexeles + malla hexagonal irregular + valor vectorial “intensidad por canal” (entero, por ser imagen discreta): “hexel” = pixel hexagonal

Aunque conceptualmente el pixel es rectangular, en la práctica (al menos entre 1970 y 2000) son de 1 a 3 discos = PSFs de 3 cañones componentes RGB. Es común referirse al pixel no sólo como la mínima región rectangular (elemento de imagen) sino también a su atributo (nivel de gris, o vector de atributos en N canales).

El píxel, matemáticamente **es una región asociada (regiones, dominios o [celda de Voronoi](#))** al punto o nodo de la retícula discreta i, j , y es la esquina superior izquierda de tal región de área $\Delta i \Delta j = 1$. Como región continua el “píxel i, j ” es el intervalo bidimensional $[i, i+1) \times [j, j+1)$, al cual se le asigna el valor de atributo constante $u = I(i, j)$ o nivel de gris. En imágenes en color es el vector $\mathbf{u} = (r, g, b)$.

♣ **Ejercicio:** formule con una definición de conjunto al píxel como dominio o celda de Voronoi, con centro en $(i/2, j/2)$. Reformule todo lo anterior más la pregunta anterior para un *hipervoxel* en 4D.

Imagen binaria o booleana en K dimensiones:

Como función, se puede definir como:

$$I : [0, N_1-1] \times [0, N_2-1] \times \dots \times [0, N_K-1] \rightarrow [0, 1] \quad (\text{A1})$$

En un despliegue visual en tonos de gris, usualmente el "0" se hace corresponder a negro y el "1" a blanco. " K dimensiones" se refiere a la dimensionalidad dominio, pero el tamaño de la imagen tiene diferentes dimensiones (número de elementos de imagen en cada dimensión $k = 1, 2, \dots, K$): $N_1, N_2, \dots, N_K$. el término "hipervolumen" a veces se usa, pero es correcto hablar de *imagen de K dimensiones*.

♣ Frontera (*boundary*) e interfaz.

Una **frontera** es el conjunto de puntos que delimita un intervalo, región, objeto o conjunto y una **interfaz** generaliza la definición de **frontera** al conjunto de puntos que separa dos intervalos, objetos, regiones o conjuntos diferentes (transición). "Diferente" puede significar que tienen atributos (o propiedades) diferentes. Por tanto, la frontera ∂A del objeto, región o conjunto es un caso particular de la interfaz $\partial(A, B)$ entre las regiones A y B , cuando $B \equiv A^c$, o sea el *fondo* de A . Matemáticamente:

$$\partial A \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{p} \in A \mid \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{N}_\varepsilon(\mathbf{p})} (\mathbf{q}_1 \in A) \wedge (\mathbf{q}_2 \notin A) \} \quad (\text{A2})$$

$$\partial(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{p} \in A \cap B \}, \quad \text{o bien:} \quad (\text{A3})$$

$$\partial(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{p} \in A \cup B \mid \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{N}_\varepsilon(\mathbf{p})} (\mathbf{q}_1 \in A) \wedge (\mathbf{q}_2 \in B) \} \quad (\text{A4})$$

donde $\mathcal{N}_\varepsilon(\mathbf{p})$ es un vecindad de $\mathbf{p}$, de radio ε . En 1D, ∂A es una o más parejas de puntos: los extremos de cada intervalo que constituye a A . En 2D, ∂A es un contorno cerrado o conjunto de contornos cerrados pero la línea (quizás curva y hasta con ramificaciones) $\partial(A, B)$ no es necesariamente cerrada. En 3D, ambas son superficies, pero ∂A es cerrada. En diferentes representaciones continuas y discretas hay más de un tipo de frontera o interfaz y también hay más de un tipo de interior correspondiente a una frontera ∂A .

Ejercicio: comparar con el concepto de *interfaz* en instrumentación, visto en [Introducción y Definiciones](#).

♣ **Ejercicio:** Haga diagramas de una frontera y una interfaz en 2D, un punto y una vecindad (disco), etc., ilustrando las definiciones dadas por las definiciones (A2) - (A4).

♣ **Grafo atribuido.** Los **nodos** del grafo son píxeles con atributos, los **arcos** son relaciones de vecindad, que permite introducir información adicional a la de otras representaciones. Cada arco puede además tener un atributo. Esta representación es útil en problemas donde es necesario manipular, cambiar o preservar la topología (conectividad entre nodos, cardinalidad de configuraciones, etc.). En este sentido

una imagen se define como un grafo donde los píxeles son muestras de una imagen real y se representa por nodos que son puntos en $\mathbb{Z}^2$ y los arcos, en función de la conectividad y de la aplicación, unen nodos en direcciones ortogonales y tal vez diagonales (caso de la *8-conectividad*). Las representaciones por grafos son más útiles en problemas de campos aleatorios y en segmentación de contornos discretos, definiéndose una retícula dual, donde los nuevos nodos son los centros de cada pixel.

Notas y comentarios.

- Puede haber “señales” que consisten en una sucesión (temporal) de imágenes.
- Igualmente, pero la señal codifica las imágenes en un barrido secuenciado = **señal de video**.
- Imágenes cuyos “píxeles” varían con el tiempo = una matriz o arreglo de señales.

La noción de imagen generalizada (o información multidimensional) permite estructurar problemas de análisis o procesamiento de información de forma tal que es posible aplicar el procesamiento de imágenes (o análisis de imágenes). La vectorización es también útil para usar el análisis de señales o el álgebra lineal en problemas con información multidimensional. Conversamente, ciertos problemas con señales, vectores, etc., conviene “subirlos” a más dimensiones, o a variable compleja (o a cuaternios) para simplificarlos y aprovechar cuadros teóricos definidos en otras dimensiones.

Otros ejemplos:

- La lista de estaturas medidas de un grupo de estudiantes es ejemplo de **Datos escalares no-estructurados**, donde no importa ni el orden ni las coordenadas de dónde está el sujeto del cual se está tomando la muestra (medición). Aunque se orden por apellidos, edades u otro dato, éste es solo para un orden en la lista, pero no interesa en el análisis. La estadística usualmente trata con datos no estructurados y se obtienen por ejemplo promedios y desviaciones estándar. Es usual que se tomen varias muestras teniendo un vector por sujeto (denominado a veces ítem), por ejemplo, la estatura, peso y edad del grupo de estudiantes, forma una lista de datos vectoriales no estructurados. Nótese que se puede formar un volumen de tales datos (y aparecer como estructurados), pero las dimensiones son en espacio paramétrico (ver abajo).
- Aunque una imagen es en sí ejemplo de datos estructurados, sus atributos pueden constituir una lista donde no interviene la posición, o sea, datos no estructurados. El histograma (global) de intensidades tal imagen es igual al histograma de la lista de valores de (todos) sus píxeles y es ejemplo de rasgos extraídos de datos no-estructurados, así como las características del histograma (moda, media, ancho, momentos estadísticos, etc.).

- Una superficie en 3D es localmente isomorfa a imágenes 2D. Puede descomponerse en parches bidimensionales curvos, embebidos en 3D.
- El video es una “señal” analógica (líneas de barrido) pero puede interpretarse también como una señal de cuadros (imágenes).
- Un encefalograma es un vector o matriz de 20 canales = señales. Puede generar una imagen por interpolación: mapa cerebral.
- ♣ Una “escena” suele entenderse como un recinto o lugar, del cual se tienen sólo una o más imágenes (o videos) desde distintos puntos de vista y el objetivo es inferir (o reconstruir) la disposición de los objetos que aparecen en dicha imagen (o video). En este análisis participan la visión en estéreo o estereovisión, la perspectiva, y los paradigmas “shape from shading”, “pose from texture”, etc,) y la noción de “depth cues” o “pistas de profundidad”.
- Dos señales temporales y su evolución conjunta pueden analizarse en un espacio 3D, o bien, en un espacio complejo y temporal: $\mathbf{z}(t) = x(t) + jy(t)$. Su transformada de Fourier da una frecuencia en un plano complejo $\mathbf{Z}(\omega)$.
- Relieves 3D, imágenes en 2.5D (superficies de intensidad)
- Iso-superficies y Conjuntos de Nivel.
- Los parámetros extraídos de objetos detectados e individualizados en una imagen 2D, pueden formar un espacio paramétrico de N -dimensiones (N parámetros); es en este espacio donde se aplican técnicas de reconocimiento y clasificación de patrones, requiriendo a veces herramientas de procesamiento de imágenes aplicadas al espacio paramétrico y sus “objetos” (usualmente nubes de puntos = vector de valores paramétricos de un objeto).
- Una imagen $I(x, y)$ de la córnea del ojo se obtiene mediante un escáner que produce muestras distribuidas en una espiral logarítmica; tales datos se almacenan como una señal $h(t)$, pero la reconstrucción de la imagen en retícula ortogonal requiere de interpolar los valores disponibles y conocer la ecuación paramétrica $(x(t), y(t))$ de la espiral y su inversa o pseudo inversa.
- Las imágenes “omnivista”, de 360° pueden representarse mediante un arreglo en coordenadas esféricas de imágenes en mosaico continuo. El paso discreto es la resolución de cada parche y puede ser grande (sin traslape, coincide con las propias dimensiones de cada imagen componente).

- Las imágenes “alrededor” de un objeto (técnica multi-cámara, o multiproyección) también son un arreglo matricial de parches, pero el paso discreto debe ser pequeño para evitar saltos y equivaler, en movimiento (*panning*, *zoom*, etc.) en película, a 1/24 seg. por cuadro.
- ♣ Dos tipos especiales de imágenes escalares son: **imagen de profundidad** (o alcance, “range image”) y la **imagen de transformada de distancia euclidiana**. No confundir, pues ambas involucran alguna distancia y son de tipo “imagen paramétrica”, donde el parámetro es tal distancia. En el primer caso, se obtienen de objetos 3D, a partir de un scanner que mide distancias entre un punto, línea o plano hasta el objeto de interés y la imagen de profundidad, en cada pixel, almacena esta distancia que es visualizada en tonos de gris. En el segundo caso, la fuente no es necesariamente un objeto 3D, sino contornos identificados en una imagen 2D y a partir de estos contornos se define una imagen 2D llamada de “transformada de distancia (euclidiana)”, o **mapa de distancia**, cuyos pixeles tienen la distancia más corta al contorno más próximo. En una imagen 3D, se crea otra 3D cuyos voxels contienen la distancia más corta a la superficie del objeto más cercano, en 3D); en este caso se habla de un **campo de distancia**.

Bibliografía recomendada para esta sección: (Dudgeon y Russell 2013), (Gonzalez 2017), (Kisyosi 1996), (Márquez Jorge 1999).

Fin§ [►Índice](#)

B. Formas de Onda Periódicas Fundamentales (*waveforms*)

Las cuatro ondas o formas de onda más importantes son (ver [Figura B1](#)):

- **Seno** u **onda sinusoidal de frecuencia** f [Hz]:

$$A \sin(2\pi f t - \varphi) = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (\text{B1})$$

Junto con la **onda coseno o cosinusoidal**, forma la **base de funciones armónicas**.

♣ Las funciones sin, cos son soluciones de la ecuación diferencial: $df(x)/dx = -\lambda f(x)$. También son *eigenfunciones* del operador *Laplaciano* en $\mathbb{R}^n$.

- **Onda cuadrada**. Hay varias formulaciones, por ejemplo: $sqrw(t) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(\sin(t)) + 1)$; o también: $sqrw(t) = \text{saw}(t) - \text{saw}(t - T_0)$. En términos de la *función escalón* $u(t)$ (o *función de Heaviside*):

$$sqrw(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(u \left[t - nT + \frac{1}{2} \right] - u \left[t - nT - \frac{1}{2} \right] \right); \quad (\text{B2})$$

usando la **función puerta** (o *rectangular*):

$$sqrw(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi(t - nT); \quad (\text{B3})$$

con la **función piso**: $sqrw(t) = 2\text{floor}(t) - \text{floor}(2t) + 1$.

(B4)

Las formas de onda cuadradas son usadas para representar información digital en *bits* (dos niveles). Una onda cuadrada de período constante contiene armónicos impares que decaen a -6 dB/octava.

- **Onda triangular**. Hay varias formulaciones, por ejemplo:

$$\text{tri}(t) = \left(t - 2 \text{floor} \left((t+1)/2 \right) \right) (-1)^{\text{floor} \left((t+1)/2 \right)}; \quad (\text{B5})$$

o como valor absoluto de un *diente de sierra*:

$$\text{tri}(t) = \left| 2 \left(\frac{t}{a} - \text{floor} \left(\frac{t}{a} + \frac{1}{2} \right) \right) \right|; \quad (\text{B6})$$

puede formularse también como la integral de una onda cuadrada. La onda triangular contiene armónicos impares que decaen a -12 dB/octava.

- **Onda diente de sierra** (sawtooth):

$$\text{saw}(t) = 2(t - \text{floor}(t)) - 1. \quad (\text{B7})$$

Es muy usada en *bases de tiempo* para el barrido (*scan*) de despliegues CRT. Es también usada para *síntesis de audio*. Un diente de sierra de período constante contiene armónicos tanto pares como impares que decaen a -6 dB/octava.

Ejercicio: ¿Por qué escribimos la fase φ con signo menos en la definición (B1)? Interprete. En las otras ondas se omitió la fase, ¿dónde la agregaría en $\text{sqrw}(t)$, $\text{tri}(t)$ y $\text{saw}(t)$?

Ejercicio: Reformule la definición de la onda seno mediante: (A) variables complejas, (B) en términos de las funciones $\sin()$, $\cos()$, de modo que la fase φ quede implícita (no requerir de esta variable, pero escriba cómo quedaría definida en función de la nueva formulación).

♣ **Ejercicio:** Proponga formulaciones *por pedazos* de la onda cuadrada, triangular y diente de sierra, cuando tienen un período T_0 y el valor de la amplitud (valor absoluto del mínimo o máximo de la función) es igual a 1.0.

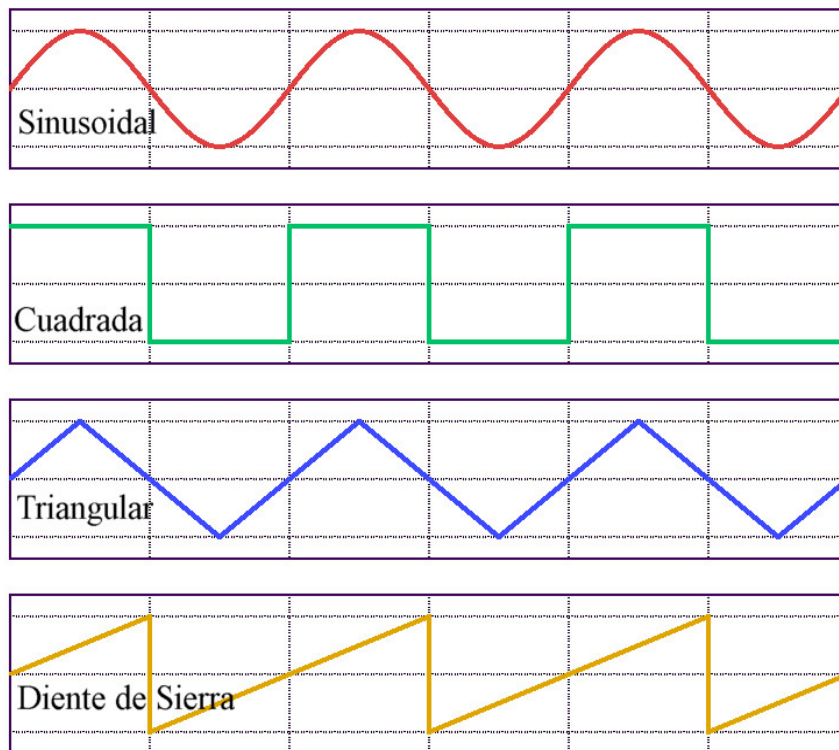


Figura B1. Cuatro tipos fundamentales de ondas periódicas (*waveforms*).

♣ Bases de Fourier

Las funciones seno y coseno pueden formar una *base ortonormal de funciones*. Para los espacios de funciones conocidos como " $L^2(0,1)$ " un ejemplo de base es:

$$\{\sqrt{2} \sin(2\pi nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sqrt{2} \cos(2\pi nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} \quad (\text{B8})$$

Sin normalización es posible establecer una base ortogonal para el espacio de funciones " $L^p(0,2\pi)$ ", con $p > 1$ de forma simplificada:

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x), \dots\} \quad (\text{B9})$$

o en el caso complejo:

$$\{1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{2ix}, e^{-2ix}, e^{3ix}, e^{-3ix}, \dots\}. \quad (\text{B10})$$

♣ Ondas viajeras.

La función sinusoidal puede también modelar una *onda espacial* que se propaga con una velocidad v , ya sea en un medio, o en el vacío:

$$\text{Onda moviéndose hacia } +x: \quad y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi) + D \quad (\text{B11})$$

$$\text{Onda moviéndose hacia } -x: \quad y(x,t) = A \sin(kx + \omega t + \varphi) + D \quad (\text{B12})$$

Donde el número de onda k , la longitud de onda λ , las frecuencias angular y lineal ω, f y la velocidad lineal de la onda desplazándose por ejemplo a lo largo de un cable, el agua, etc., se relacionan como:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{B13})$$

La **supersposición** de dos ondas viajeras que se desplazan en direcciones opuestas genera una **onda estacionaria** (*standing wave*).

Ejercicio: Una señal con forma sinusoidal tiene un soporte temporal de 15 segundos y en ese lapso hay tres y media ondas completas y la fase es de -3 segundos. Si la amplitud A es 1, encuentre el valor de la frecuencia f en la definición (B1).

Bibliografía recomendada para este anexo: (Blackburn 2000), (Hayes 2014), (Kreyszig 2011), (Proakis y Manolakis 2006), (Smith 2010).

Fin§ [►Índice](#)

C. Promedio ponderado

O *media ponderada*, *promedio pesado* (*weighted mean or average*), o con pesos o factores de penalización o de privilegio.

- **Ponderación implícita**

Sean N pesos $\mathbf{W} = \{w_i\}_{i=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}$, tales que:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad (\text{C1})$$

definimos el *promedio ponderado* (notar que el factor $1/N$ del promedio ya está incluido en la normalización de $\mathbf{W}$):

$$\bar{x}_W = \langle x \rangle_W = \mu_{x,W} = \sum_{i=1}^N w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_N x_N \quad (\text{C2})$$

Si
$$w_i = \left(1/(N\sigma\sqrt{2\pi})\right) e^{-i^2/2\sigma^2}, \quad (\text{C3})$$

entonces la ponderación es *Gaussiana*.

Nota: A un peso w_i también se le llama *penalización*, especialmente si es menor a $1/N$. Si entre varios w_i hay un valor w_j que es mayor a los demás, en vez de penalizar está *privilegiando* al dato x_j correspondiente (en relación con los otros factores). Un promedio ponderado depende del conjunto $\mathbf{W}$.

Nota: Si existe o se establece un orden en las muestras x_i , el orden se extiende a los pesos; por ejemplo, dada una secuencia o muestras de una señal $x_i = f(i)$, tenemos entonces los vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$, en cuyo caso la ecuación (C2) se puede escribir como producto escalar:

$$\bar{x}_W = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{C4})$$

En una representación matricial, con los vectores columna $\mathbf{X}^T = [x_1 \ x_2 \dots x_N]$ y $\mathbf{W}^T = [w_1 \ w_2 \dots w_N]$, escribimos:

$$\bar{x}_W = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \quad (\text{C5})$$

Nota: No confundir lo anterior con los promedios vectoriales (ni matriciales); (C2) y (C4) se refieren a muestras escalares y las componentes de los vectores son las muestras. Recordemos que en un promedio vectorial cada muestra es un vector; un conjunto no estructurado de N muestras vectoriales es entonces $\{\mathbf{x}_n\} = \{(x_n, y_n, z_n)\}$.

- **Ponderación explícita**

Si el conjunto de pesos W no se encuentra normalizado (o no se sabe si lo está), definimos el promedio ponderado como:

$$\bar{x}_W = \langle x \rangle_W = \mu_{x,W} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_N x_N}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N}. \quad (C6)$$

Con pesos w_i arbitrarios (por ejemplo, negativos, o sin normalización), no suele hablarse de promedio, sino de *suma ponderada*. En particular, el puro numerador $\sum_{i=1}^N w_i x_i$ se denomina *combinación lineal* (sin restricciones en los pesos). El promedio ponderado normalizado también se denomina *combinación convexa*; si los pesos satisfacen sólo $w_i \geq 0$, entonces se llama *combinación cónica*. Si $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ pero algún w_i es negativo, entonces es una *combinación afin*. Muchas aplicaciones e interpretaciones requieren normalización para, por ejemplo, conservar la energía total.

Ejemplo 1: Centro de masa en 3D (se normaliza respecto a los pesos $W = \{m_i\}$, $i=1, \dots, N$):

$$[x_{CM} \ y_{CM} \ z_{CM}] = \frac{\sum_{i=1}^N m_i [x_i \ y_i \ z_i]}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (C7)$$

El promedio ponderado (centro de masa) es un vector (posición). Notar que se tienen muestras vectoriales $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$ que localizan cada masa m_i .

♣ **Ejercicio:** ¿A qué altura (o profundidad) sobre/bajo el nivel del mar se encuentra el CM del sistema Tierra-Luna? ¿Puede el CM del sistema solar estar fuera del Sol? ¿Siempre o nunca?

Nota: Si los pesos de ponderación dependen de los datos, o por ejemplo, dependen de la posición: $w_i(x, y)$, el promedio ponderado se denomina *adaptivo* y puede ser “robusto” si la ponderación penaliza datos lejanos al promedio neto (ponderado), o aquellos en los que no se tiene la misma confianza que con los demás. Si existen dos o más criterios de penalización, se pueden multiplicar, acumulando su efecto.

Nota: Cuando los pesos de ponderación $\mathbf{w}$ son exactamente iguales a $\mathbf{x}$ (o, respectivamente en representación matricial $\mathbf{W} = \mathbf{X}$), la suma ponderada (ecuaciones (C4) y (C5)) se convierte en $N(x_{rms})^2$ o sea el N veces el promedio cuadrático o RMS de $\mathbf{x}$.

♣**Ejercicio:** Escriba las ecuaciones de un *promedio cuadrático ponderado* y el equivalente a una desviación estándar para este promedio.

Ejemplo 2: Penalización de observaciones lejanas a la media con precisión diferente (incertidumbres individuales s_i). Se toman como pesos los inversos de las varianzas de cada observación x_i . Si $\forall_{i \in \{1, \dots, N\}} s_i^2 > 0$, definimos $w_i = 1 / s_i^2$ y la media ponderada es:

$$\langle x \rangle_w = \frac{\sum_{i=1}^N x_i / s_i^2}{\sum_{i=1}^N 1 / s_i^2} \quad (C8)$$

Para tratar el caso de $s_i^2 \approx 0$, se propone utilizar la siguiente variación de (C8):

$$\langle x \rangle_w = \frac{\sum_{i=1}^N x_i / (\varepsilon + s_i^2)}{\sum_{i=1}^N 1 / (\varepsilon + s_i^2)} \quad (C9)$$

Con ε un parámetro positivo que puede hacerse depender de $\max_i \{s_i^2\}$.

Ejemplo 3: El valor esperado con densidades de probabilidad, o bien la evaluación de un curso, v.g. 60% exámenes +30% tareas +10% asistencia = 100%.

Ejemplo 4: Promedio ponderado por intervalo. Dadas parejas (x_a, y_a) , (x_b, y_b) , con $x_a \neq x_b$, donde $y=f(x)$, se puede ponderar el promedio de la variable de respuesta y por su dependencia sobre x en términos de separación relativa:

$$\bar{y} = \frac{y_b x_b - y_a x_a}{x_b - x_a} \quad (C10)$$

Ejemplo 5: Interpolación lineal. En una relación funcional $y=f(x)$, dadas dos muestras (x_a, y_a) , (x_b, y_b) , con $x_a \neq x_b$, se puede aproximar el valor para $x \in [x_a, x_b]$, sin conocer o aplicar $f(x)$, mediante:

$$f(x) = (1-\alpha)f(x_a) + \alpha f(x_b), \quad (C11)$$

o bien: $y_\alpha = (1-\alpha)y_a + \alpha y_b \quad (C12)$

donde $\alpha = (x - x_a)/(x_b - x_a)$. Notar que $\alpha \in [0, 1]$ y tenemos: $y_0 = y_a$, $y_1 = y_b$; también $y_{1/2} = 1/2(y_a + y_b)$ es el promedio ordinario. Si hacemos $w_a = (1-\alpha)$, y $w_b = \alpha$, la ecuación (C11) es un caso particular de la definición (C2) y cumple la condición (C1). El error total de la aproximación lineal es $\int_{x_a}^{x_b} (y_\alpha - f(x))^2 dx$.

Nota: Si en las ecuaciones (C11) y (C12) se permite que α sea negativo o mayor a 1, en vez de interpolación, se tiene una *extrapolación lineal*.

♣**Nota:** En la versión discreta de la interpolación lineal de (C11) y (C12) se consideran los dos vecinos inmediatos (anterior y posterior) de cada valor $f[k]$, es decir $f[k-1]$ y $f[k+1]$. Es posible definir otras formas de interpolación no-lineales más exactas al tomar en cuenta la tendencia y curvatura formada por la señal en una vecindad de $f[k]$. Para esto se recurre a las derivadas de orden 1, 2, etc., y por tanto a polinomios que tienen coeficientes basados en los $2N$ vecinos: $f[k-2], f[k-3], \dots, f[k-N]$, y $f[k+1], f[k+2], \dots, f[k+N]$.

♣**Ejercicio:** Considere la señal $\mathbf{f} = (0, 1, 3, 5, 7, 4, 2, -3, -2, 0, -4, -2, 1, 8, 8, 3, -2, 2, 4, 4, 4, 1, 1, 0, 3)$. Diseñe un algoritmo e impleméntelo en Matlab para interpolar una señal que contenga 1, luego 3 y finalmente 5 muestras adicionales entre cada muestra de $\mathbf{f}$. Grafique $\mathbf{f}$ y las nuevas señales interpoladas; compare sus detalles. Note que la información "adicional" solamente mejora la apreciación del gráfico (realce de señal, no restauración) y fue introducida por el modelo lineal de la interpolación y no existe previamente en $\mathbf{f}$.

♣**Ejercicio:** Se tiene una imagen $I_{in}(x, y)$; se aplica un filtrado que da como resultado una imagen $I_{out}(x, y)$, pero los efectos del filtro produce algunos defectos. ¿Cómo filtrar parcialmente la imagen para tener un mínimo de beneficios, reduciendo lo más posible los efectos adversos? Suponga ahora que se localizan zonas de mayor o menor afectación –puede haber una donde el filtrado total no genera defectos y otra donde no debería aplicarse el filtro: ¿cómo generalizaría la solución de filtrado parcial?

Ejercicio: ¿Cómo escribiría la ecuación (C6) para una "triple" ponderación con conjuntos de pesos W , Q , P ? No olvide normalizar.

Equivalente continuo de un promedio ponderado:

$$\langle x \rangle_{\sigma} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx} \quad (\text{C13})$$

donde $\sigma(x)$ es una densidad de distribución (el dominio de integración puede ser general una región finita fija).

Ejemplo 7: Si x es variable aleatoria y $\sigma(x) = p(x)$ es su densidad de distribución probabilística, con $\int_0^{\infty} p(x) dx = 1$, entonces $E(x)$ es el valor esperado o primer momento de x (y deberíamos mejor usar la notación de variable aleatoria χ), e indica el valor más probable de x . Recordemos que la probabilidad es $P(\chi \leq x_0) = \int_0^{x_0} p(x) dx$.

♣ **Ejercicio:** Proponga alguna forma de ponderar la *mediana* de un conjunto de datos y para qué tipo de datos es esto posible.

Ejercicio: ¿Qué ocurre con la desviación estándar de un promedio ponderado?

♣ **Nota:** Como en *Teoría Probabilística*, una ventaja de escribir explícitamente la normalización (denominador) radica que, en M dimensiones pueden interesar las componentes marginales (integración parcial) de modo que, aunque la integral total da 1, las marginales no necesariamente dan 1.

Bibliografía recomendada para este anexo: (Kiyosi 1996), (Kreyszig 2011), (Kutz 2013), (Walpole et al. 2011).

Fin§ [► Índice](#)

♣D. Promedio local (móvil) en una señal que fluctúa:

A 1^{er} orden (“el” vecino inmediato son dos: uno antes (*causal*), otro después (*anti-causal*)), sustituimos el conjunto de muestras de la señal discreta $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ por el conjunto $\{\bar{x}_i\}$, con $i=2, \dots, N-1$, donde:

$$\bar{x}_i \triangleq \frac{1}{4}x_{i-1} + \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{4}x_{i+1} \quad (\text{D1})$$

Nota: Hemos agregado pesos de ponderación tales que: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

Nota: La combinación anterior no está definida para $\{\bar{x}_1, \bar{x}_N\}$.

Nota: En este ejemplo, la vecindad incluye el valor central; no siempre es así.

En general (orden “ K vecinos”), el **promedio ponderado local (o móvil** y en inglés **running average**) de la señal o secuencia $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$ con N impar, es la señal:

$$\bar{x}_{iW} = \sum_{k=-K}^K w_k x_{i+k}, \quad \text{con } i=K+1, \dots, N-K, \quad (\text{D2})$$

donde el conjunto o secuencia de pesos $W=\{w_k\}$, con $k \in [-K, K]$, y $K \leq (N-1)/2$, se denomina *núcleo, kernel, ventana o máscara de pesos de ponderación y tamaño de vecindad* $2K+1$, y se tiene por lo común una normalización: $\sum_{k=-K}^{k=K} w_k = 1$. Notar que W es también una función o señal $w(t=i)$, jugando el papel de ventana. Comparar con la definición vista de kernel en términos de convolución continua.

Cuando la ponderación es uniforme, es decir, si $w_i = w_j$ para todo $i, j \in [-K, K]$ entonces W y la operación (D2) son conocidos como *filtro de caja (box filter)*, teniendo W el soporte $[-K, K]$ y un ancho de la caja (o *cardinalidad de ventana*) igual a $2K+1 \leq N$. En general el núcleo puede tener valores arbitrarios, v. g., los definidos por (C3).

► Cuando los pesos son simétricos ($w_{-k} = w_k$ para todo $k \in [-K, K]$), el promedio local coincide con la convolución $x(i)*w(i)$.

Nota: Un promedio local y ponderado depende del conjunto W que se encuentra definido en una vecindad (por ahora *invariante a corrimiento i* , o *invariante en el tiempo i*) de tamaño $2K+1$ en (D2). Si la vecindad-ventana depende de la posición i , ya no es invariante a corrimiento/tiempo. Los casos que no incluyen el valor central definen el valor de ponderación respectivo como $w_0 = 0$, pero la normalización debe hacerse a $2K$.

Ejemplo: Ver el [Suavizado de Histograma](#), ecuación (18), con pesos $w_k \equiv 1$.

Ejemplo: La [Figura D1](#) es un esquema de un proceso de promedio local móvil y sirve entre otras cosas como paso previo a una implementación electrónica; la expresión para el n -ésimo de la nueva secuencia es:

$$y(n) = \frac{1}{4} (x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)) = \frac{1}{4} \sum_{k=n-3}^n x(k) \quad (D3)$$

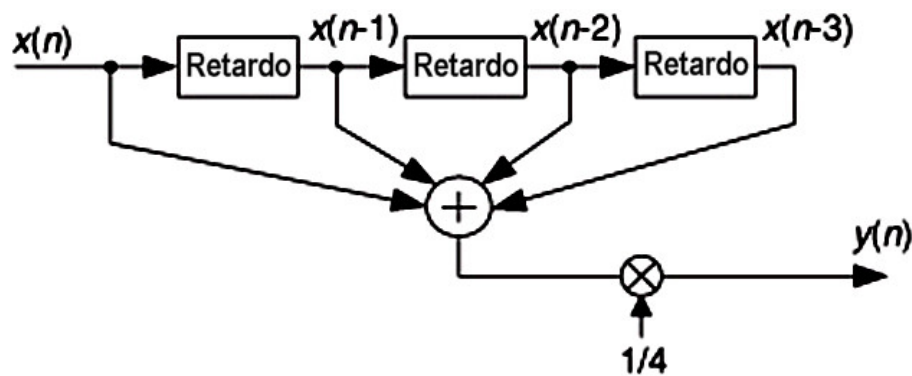


Figura D1. Diagrama esquemático de un sistema cuyas muestras de salida $y(n)$ son el resultado de promediar muestras con retardos (*delay*) de la entrada $x(n)$.

Notar en la ecuación (D2) los índices i y k el *problema del borde*: se debe reducir el dominio de la secuencia obtenida $\bar{x}_{iW}$, comenzando después de x_1 y terminando antes de x_N . Mientras más extenso sea W , mayor “borde” existirá, debiendo mejor extender el dominio para dar cabida al proceso de promedio local. ♣ En procesamiento de imágenes hay varios criterios de *extensión de imágenes*, v.g., replicar valores en los bordes, copiar en espejo, extrapolar, etc.

El efecto de substituir una señal (muestras $\{x_i\}$) por $\{\bar{x}_{iW}\}$, cuando W comprende valores positivos (v.g., *Kernel Gaussiano*), **es suavizar la señal** $\{x_i\}$ (*blur*, difuminar, desenfocar). Si hay valores negativos (correspondiente al efecto de “inhibición lateral” en modelos de visión), se pueden **afinar o acentuar detalles** (*sharp*). Sin normalización, hay **amplificación o atenuación**. Vimos que el efecto del filtro excluye los bordes; para definir allí el promedio local, existen técnicas de **extensión de dominio**, replicando por ejemplo los valores extremos.



Ver tema de [filtros](#) (si i es índice temporal, es casi una *convolución en dominio temporal*). La igualdad ocurre sólo si el núcleo es simétrico.

Nota: el [promedio local o móvil](#) también se llama **promedio corrido** (*running average*). Notar que se omite indicar que es ponderado; generalmente lo es y un conjunto de pesos constituyen el núcleo.

Nota: Las muestras $\{x_i\}$ pueden ser parejas $\{(u_i, v_i)\}$, o sea curvas 2D, valores de un campo escalar (imagen $\{u_{ij}\}_{i=1,\dots,N; j=1,\dots,M}$), vectorial (imagen en color $\{(r_{ij} \ g_{ij} \ b_{ij})\}$), *formas*, contornos, mallas, etc. ([variedades](#) en general). Notar que el adjetivo *móvil* o *corrido* tiene una connotación temporal. En dominio espacial 2D o 3D, se implica una vecindad o región.

Ejercicio: Un contorno cerrado en 2D se representa por el conjunto de vértices $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{k=N}$. Formule un nuevo contorno que suavice el anterior, usando vértices vecinos a segundo orden (dos antes y dos después); resuelva el *problema de bordes*. ♣ ¿Cómo se interpreta un "contorno" obtenido con un filtro pasa-altas, o cómo se podría implementar para que tenga algún sentido útil?

Nota: La normalización del promedio ponderado en la convolución se da en términos de la interpretación de la convolución como un filtro, por ejemplo, pasa bajas, pasa banda, realce de borde, detección de borde, etc. En tal caso no siempre se desea amplificar o atenuar el resultado (en detección de bordes sí podría haber tal interés). Es común que no se muestre la ponderación explícitamente en la definición de convolución, pero en muchos filtros (normalmente los pasa-bajas), la integral (o suma de todos sus valores) del núcleo de convolución se normalizan a 1 ([ponderación implícita](#)).

Nota: El promedio local móvil o corrido sólo tiene sentido para un conjunto de muestras ordenadas, donde es posible definir el elemento precedente, el sucesor o vecindades, en general, para cada elemento de la secuencia.

Nota: La noción de promedio de muestras semejantes (mesurando aproximadamente constante) sigue aplicándose a una señal que cambia *localmente*, e incluye una ponderación en el caso general. Para cada muestra de la señal $\{x_k\}_{k=1,\dots,N}$ el conjunto de observaciones (en el sentido de las definiciones (9) y (C2)) es justamente $\{x_{k-K}, x_{k-K+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+K-1}, x_{k+K}\}$, siendo $K < N/2$ el tamaño de la ventana (que define lo "local").

♣ **Nota:** En 2D (imágenes $I(x, y)$) la vecindad depende de la conectividad; a primer orden hay cuatro vecinos *4-conexos*: $\{I(x-1, y), I(x, y-1), I(x+1, y), I(x, y+1)\}$, o bien, hay ocho vecinos *8-conexos*: los

anteriores más “las esquinas” $\{I(x-1, y-1), I(x+1, y-1), I(x-1, y+1), I(x+1, y+1)\}$. En tres dimensiones hay 6-, 18- y 26-*conectividad*, y en cuatro dimensiones... se deja como ejercicio.

♣♣**Ejercicio:** deduzca y demuestre por *inducción matemática* las fórmulas de N conectividades posibles en una *retícula ortogonal discreta* en N dimensiones.

♣**Ejercicio:** Escriba la fórmula para el *promedio local móvil* en una imagen de $N \times M$ pixeles, generalizando a dos dimensiones la ecuación (D2). Observe que requiere usar cuatro índices i, j, k, l . ¿Qué sugiere hacer con los límites para no salirse de los bordes?

♣**Nota:** Los vecinos de orden K , requieren de considerar todas las combinaciones “antes” y “después” de cada muestra y la conectividad se generaliza a una ventana; en 2D, en una *ventana cuadrada* (por simplicidad) son todos los vecinos $I(x \pm i, y \pm j)$, con i, j valores independientes en $\{0, 1, \dots, K-1\}$. Puede existir anisotropía (por ejemplo, un orden en una dirección y otro en otra), asimetría y en general, la ventana de la vecindad puede tener una forma arbitraria (o topología, por ejemplo, consistir en un anillo).

Ejercicio: Si es posible, defina la desviación estándar de un promedio ponderado local o móvil. ¿Qué propiedades tiene?, ¿podría ser siempre el mismo?

♣**Aplicación:**

Una señal $x(t)$ puede descomponerse en 3 partes o componentes:

$$x(t) = x_{Trend}(t) + x_{Period}(t) + x_{Random}(t) \quad (D4)$$

- $x_{Trend}(t)$ representa la **tendencia** o **fondo**: un cambio sistemático, secular y predominantemente “lento” de $x(t)$;
- $x_{Period}(t)$ representa la **componente de señal cíclica**: un patrón que se repite de una manera aproximadamente regular y suele contener la información de interés (y frecuencias dominantes); puede ser también un *transiente*;
- $x_{Random}(t)$ representa **fluctuaciones** usualmente aleatorias y rápidas (puede ser ruido, textura o estructura fina). Es posible que se encuentre submuestreada y presente [aliasing](#).

El contenido en frecuencia es en general *bajas*, *medias* y *altas*, respectivamente, pero no necesariamente es siempre así, es relativo y es más bien la distribución de energía ([densidad espectral](#)): es baja en el

espectro de $x_{Trend}(t)$, alta en $x_{Period}(t)$ y baja en $x_{Random}(t)$. Otros parámetros usados son la *regularidad* y la *autocorrelación*.

El promedio móvil con K vecinos donde la vecindad promediada es mayor al período característico de $x_{Period}(t)$, da una estimación de $x_{Trend}(t)$, permitiendo separar de $x(t)$ esta componente.

La operación de filtrado $x_{out}(t) = x(t) - x_{Trend}(t)$ se denomina "remoción de fondo" (en radiología y otras disciplinas se denomina "aplanado") y es aproximadamente un [filtro pasa-altas](#). ♣ Para evitar manejar cantidades negativas, se remueve una fracción y no el 100% (en algunos textos se recomienda un valor empírico de 50%).

Bibliografía recomendada para este anexo: (Hayes 2011), (Kiyosi 1996), (Kreyszig 2011), (Kutz 2013).

Fin§ [►Indice](#)

♣E. Histogramas de eventos en general

Se definió un [histograma](#) $H(u)$ de un atributo $u \in [0, L]$ como *el gráfico de las frecuencias relativas p_k del evento: "el atributo u tiene un valor que cae en la clase (bin) k ", donde K es el número de clases en que se ha dividido el co-dominio de los datos, o sea el intervalo $[0, L]$. Se insistió *en este caso* en la irrelevancia del dominio de dichos datos cuyo atributo u (los datos mismos, cuando son información no estructurada) se distribuye de acuerdo a $\{p_k\}$.*

Lo anterior (la irrelevancia) es cierto para ese evento particular. Podría interesar la distribución de otras propiedades del atributo $\underline{Y}$ de su dominio, en caso de adquirirlo ([estructuración](#)) o tener ya uno intrínseco.

El evento arriba encomillado es también una proposición lógica con un *predicado* (" u está en la clase k ") que puede ser falso o verdadero (está o no en el bin k ; ver definición (38)), y es solamente una posibilidad entre muchas otras. Podemos concebir eventos que *no involucran al atributo*. Se pueden establecer predicados sobre eventos del dominio, alguna propiedad de los datos-en-tal-dominio o hasta un ordenamiento particular de los mismos (sean o no estructurados). En este caso tal dominio, o uno [re-estructurado](#), o propiedades del dominio se convierten en "nuevos atributos" de interés (o *pseudo-atributos*, al no ser el convencional u). Un evento se complica particularmente cuando el atributo es vectorial, o sobre dos o más conjuntos de información, dando lugar a la *co-ocurrencia* de dos o más atributos (v.g., evento $(u \in [u_k, u_{k+1}]) \text{ AND } (v \in [v_k, v_{k+1}]))$). En tales casos se tienen *histogramas multidimensionales*. Se manejarían entonces dos o más variables aleatorias y probabilidades *conjuntas*.

Ejemplo: Se tienen canicas de varios colores y tamaños. Por simplicidad el color está en una lista ordenada según el arcoíris. Un evento puede estar definido por una canica satisfaciendo el predicado: "*(tiene el color u) AND (tiene el tamaño r)*", donde "AND" es un operador Booleano, otros son "OR", "XOR" (*or exclusivo*), etc. Otro predicado es "*(tiene un color más claro que u) AND (no tiene un tamaño mayor a $2r$)*". Puede interesarnos un experimento en que las canicas son lanzadas cerca de un hoyo; el evento es "*la canica llegó a una distancia d del agujero*" y obtenemos un histograma de distancias; los bins son intervalos de 1, 2, ..., N cm. Notar que no es un dominio, sin un atributo del experimento de lanzar las canicas. Pero si se trata de una imagen podemos preguntar "el pixel se encuentra a una distancia d del punto $\mathbf{p}$ " (sin importar el nivel de gris del píxel); en tal caso, estamos involucrando coordenadas, para poder calcular d . Es un ejemplo de histograma donde el dominio sí es relevante; d es un atributo como lo es era u (el valor de gris). ¿Pero es u absolutamente irrelevante en este ejemplo?

Distribución o Función de Densidad de Espacial (SDF). Cuando el evento es "hay aquí una muestra (medición)", donde "aquí" indica coordenadas en dominio temporal, espacial o de atributos, es claro que el punto tiene un [atributo implícito](#) y es válido hablar del histograma como la densidad de la población de

muestras, indicando la probabilidad de que haya una muestra en cada punto (o bin) del dominio. Por ejemplo, tras jugar al tiro al blanco, los dardos se concentran cerca del blanco, bajando esta concentración en la periferia: la PDF adecuada en este caso es la de *Poisson*. Una diferencia con las funciones uni-valuadas, es que la PDF puede describir varios eventos positivos en un mismo punto (por ejemplo, varios dados dieron en el mismo punto, uno sobre el otro). Lo anterior es más frecuente en un dominio discreto de baja resolución (cada elemento espacial tiene varias muestras y este número puede corresponder a la intensidad en niveles de gris). La [Figura E1](#) ilustra un ejemplo, con un dominio 2D.

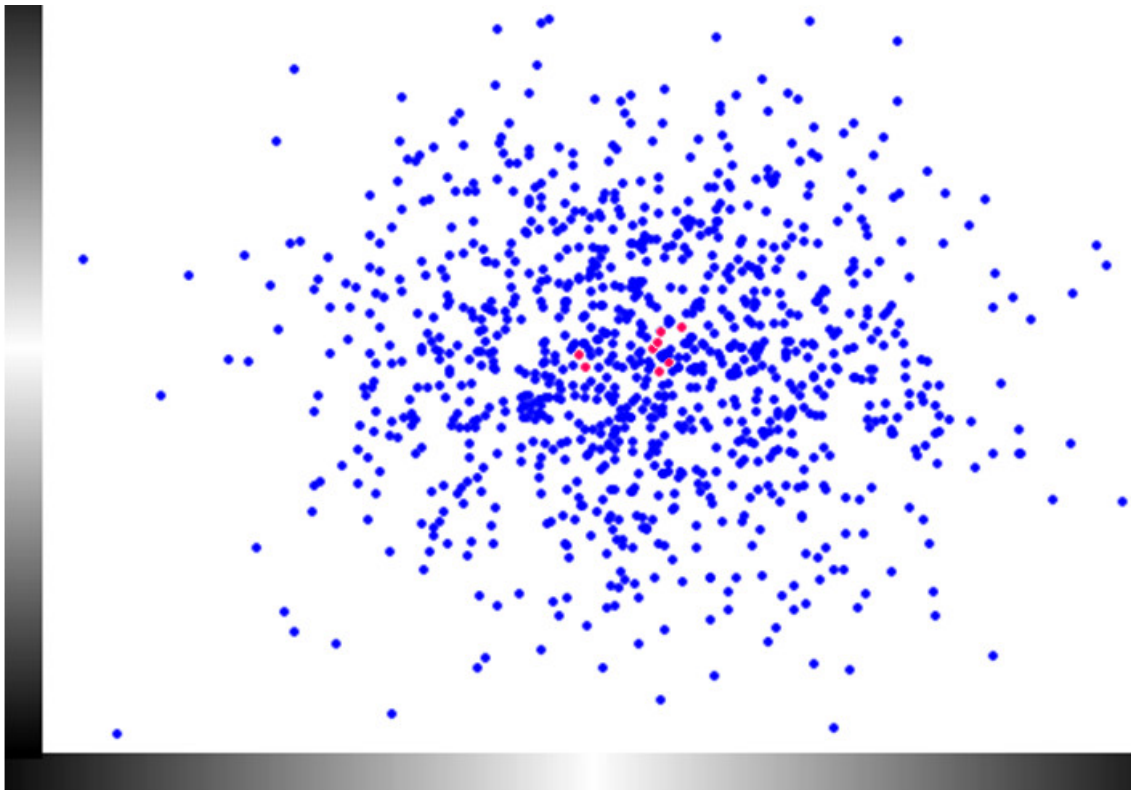


Figura E1. Ejemplo de *Distribución de Densidad Espacial* de muestras puntuales; las muestras a su vez pueden ser centros que representan N elementos o el centro de una ciudad, en un mapa. Los ejes pueden ser espaciales o de parámetros. Los puntos rojos indican que allí se superpusieron dos o más puntos azules. En este ejemplo, la PDF es una función Gaussiana 2D. Es el caso de tiradas al azar, la PDF (en este caso SDF) es más bien una distribución de Poisson. Las escalas en niveles de gris indican las proyecciones de densidad en cada eje, en el centro.

Bibliografía recomendada para este anexo: (Walpole et al. 2011), (Jähne 2017).

Fin§ [►Índice](#)

♣F. "Somatotipos" de un pico en señales o distribuciones

De manera análoga a los *somatotipos* básicos del cuerpo humano, se puede clasificar un pico en tres tipos; el **mesomorfo** (valor [FWHM](#) intermedio de referencia, v.g., una gaussiana con desviación estándar σ , cuyo FWHM es $2\sqrt{2\ln 2} \sigma \approx 2.35\sigma$), el **endomorfo** ($\text{FWHM} > \sigma$) y el **ectomorfo** ($\text{FWHM} < \sigma$). Estos tipos son relativos, y se requiere una referencia de la forma "intermedia". Puede elegirse por simplicidad, como hicimos arriba, un pico Gaussiano con sigma σ , como referencia. Esto es diferente a comparar gaussianas con distinto valor de σ .

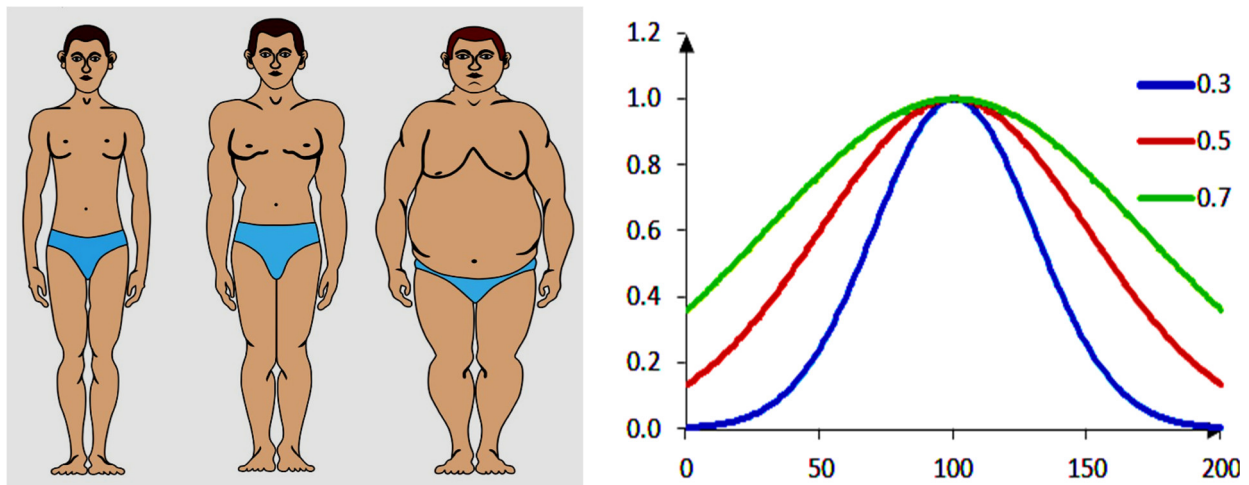


Figura F1. (a) Somatotipos humanos: **ectomorfo**, **mesomorfo** y **endomorfo**. (b) tres picos gaussianos con misma altura y diferentes σ equivalen a re-escalar el ancho. No equivalen a los picos ectomorfo, mesomorfo o endomorfo; ver Figura F2.

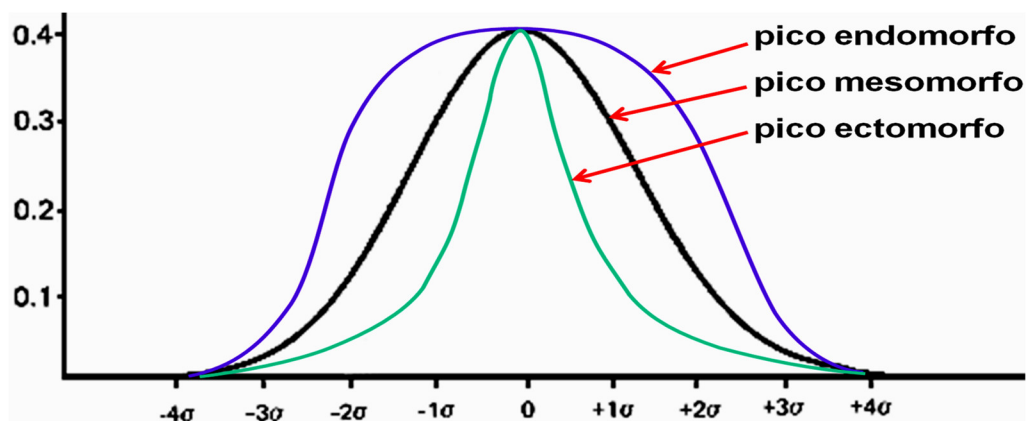


Figura F2. Somatotipos relativos de picos, respecto una gaussiana determinada; notar que los picos endomorfo y ectomorfo no son gaussianas re-escaladas, como en la Figura F1b.

Curtosis (Kurtosis)

Para una distribución probabilística (PDF), una medida cuantitativa de qué tan "puntiaguda" es (*peakeness*, también traducido como *apuntamiento*), se usa la **curtosis** (*kurtosis*), *curtosis histórica* o "planitud" (*flatness*), ya mencionada en [Características de un Histograma](#). En probabilidad, lo que arriba llamamos *pico mesomorfo* (a veces denominado como "*meso-pico*"), *endomorfo* ("*endo-pico*") y *ectomorfo* ("*ecto-pico*") se denominan, respectivamente, **distribución mesocúrtica** (tomando como referencia la distribución normal), **distribución leptocúrtica** (más puntiaguda o apuntada y con colas más anchas que la normal) y **distribución platicúrtica** (menos puntiaguda, "roma" y con colas menos anchas que las de la normal). Hoy día se usa una versión modificada, la *curtosis en exceso* (*excess kurtosis*) o *curtosis moderna*, definida rescaldando el 4o. momento de la PDF (o: *cuarto momento estandarizado*):

$$\kappa_{\text{excess}} = \frac{E[(X - \mu)^4]}{(E[(X - \mu)^2])^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (\text{F1})$$

donde $E[*]$ indica *valor esperado* (*expectancia* o *esperanza matemática*) de la variable aleatoria X ; μ es la media y σ es la desviación estándar. El valor 3 restado permite que la curtosis en exceso sea 0 para la distribución normal (definida entonces como **mesocúrtica**); una distribución con $\kappa_{\text{excess}} > 0$ es **leptocúrtica** (pico ectomorfo (magro) en la [Figura F2](#)) y una distribución con $\kappa_{\text{excess}} < 0$ es **platicúrtica** (pico endomorfo (ancho y achatado) en la [Figura F2](#)). También se habla de "peso de la cola", hombros anchos o sin hombros. Interpretación probabilística: *valores mayores de la curtosis indican que más varianza es resultado de desviaciones poco frecuentes* (más área en las colas de la distribución).

♣ **Ejercicio:** El pico "más ectomorfo" posible, dado un pico de referencia Gaussiano con media cero y sigma σ , es un pulso de ancho cero, que podemos modelar con una delta de Dirac modificada. ¿Cómo sería el pico "más endomorfo" posible? (*Hint*: se requiere un valor de tolerancia; considere para los límites el % de área de una gaussiana (como probabilidad, si se modela una población) dentro del intervalo $[-3\sigma, +3\sigma]$).

♣ **Nota.** Un criterio para definir una referencia "absoluta" (por justificar), sería definir una Gaussiana con un valor de sigma tal que 3σ sea igual a la altura $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, o sea $\sigma = (3\sqrt{2\pi})^{-1/2} \approx 0.3647$; es decir, un pico Gaussiano cuyo 99.78% de área queda dentro de un rectángulo de base igual a $6\sigma \approx 0.7293$ y altura ≈ 0.3647 (proporción 2:1, media Gaussiana ajusta en un cuadrado). Alegando criterios de estética, podríamos preferir un rectángulo con razón áurea (se normaliza la altura a 1.0 y la base es $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$). Otro criterio más práctico es establecer un valor de sigma en una población

grande (o "todo el universo") y tomar esta curva como referencia "absoluta", del mismo modo que se considera un ser humano normal mesomorfo como un individuo con ciertas proporciones, talla, peso y circunferencia abdominal (y habrá quizás un promedio mesomorfo masculino y otro femenino, para una edad de 25 años).

♣ **Ejercicio:** ¿Por qué no usar la FWHM en vez de la curtosis? (Compare las [Figuras 22b](#) y 23). *Hint:* examine y pondere razones de precisión *versus* simplicidad *versus* robustez.

♣♣ **Ejercicio:** Usando la [Función de campana generalizada](#) $G_G(x)$ (o *Distribución Normal Generalizada*), con parámetros α , β , μ , caracterice los *somatotipos* a través de dichos parámetros.

Sesgo (Skewness)

Otro rasgo que caracteriza la forma de un pico y usado en probabilidad y estadística es el **sesgo** (*skewness*); describe cuánto "se carga" o inclina el pico o distribución hacia un lado, alejándose la moda de la media. Esta definición también permite establecer un grado de asimetría (ver [Figura F3](#)). En forma semejante a la curtosis, se puede medir el grado de sesgo de una PDF mediante el *tercer momento estandarizado* definido por:

$$skewness = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{E[(X-\mu)^3]}{(E[(X-\mu)^2])^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (F2)$$

donde $E[*]$ indica valor esperado (expectancia o esperanza matemática) de la variable aleatoria X , μ es $E[X]$ (*media*) y σ es la desviación estándar.

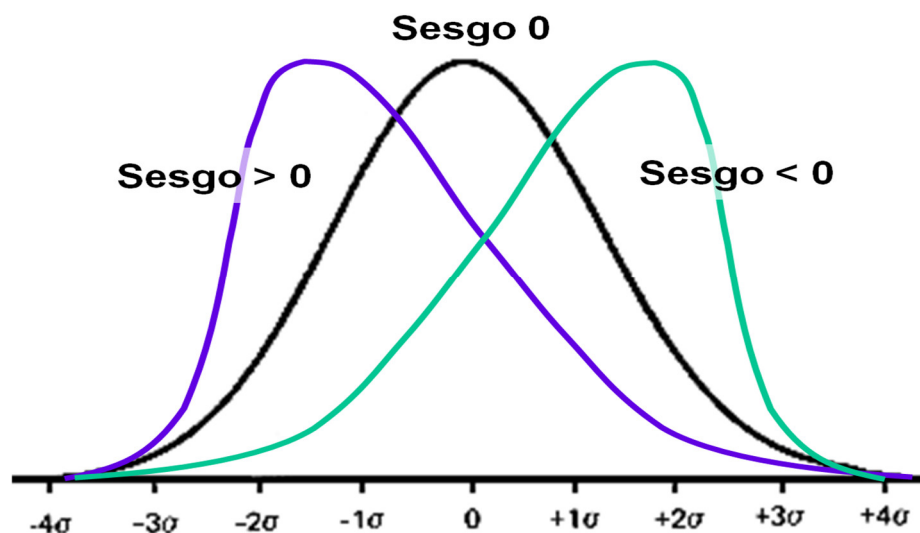


Figura F3. Picos con diferentes valores de sesgo.

En una distribución perfectamente simétrica (sesgo cero), y unimodal (un sólo pico), se cumple la relación siguiente: **moda = mediana = media**.

Nota: Como otros factores de forma o índices con una interpretación descriptiva, tanto la curtosis como el sesgo son *adimensionales*, no dependen de las escalas (atributo vs. ocurrencia, en el caso de una distribución). Además, son cero para la Normal (=referencia).

Bibliografía recomendada para este anexo: (Kiyosi 1996), (Walpole et al. 2011).

Fin§ [►Índice](#)

♣G. Convenciones de definición de la *Transformada de Fourier*

Existen varias convenciones para definir la [*Transformada de Fourier*](#) (**FT**), según la disciplina científica/tecnológica y las propiedades deseadas. Esta variedad puede causar confusión y errores. Los criterios para elegir una convención incluyen: (A) uso de frecuencia ordinaria ν (en Hz, o bien, en un dominio x , en unidades $[x]^{-1}$), o (B) uso de frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ (en rad/seg o en rad/(unidad $[x]$)), (C) la forma simétrica o asimétrica de la pareja directa-inversa, (D) el hecho de que constituyan una *transformación unitaria* (que preserve el *producto interior* en una base de funciones) y (E) la relación con la *Transformada de Laplace*, que lleva a la notación $G(j\omega)$ en la función de transferencia, la entrada y respuesta en frecuencia. Usando la frecuencia genérica k , ya sea en Hz (o "unidades inversas") o en rad/seg (a escoger, con ciertas restricciones), una forma de caracterizar todas las convenciones usadas en una única formulación general es la pareja:

$$F(k) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jbkt} dt \quad (G1)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{jbkt} dk \quad (G2)$$

donde los parámetros (a, b) generan las siguientes convenciones, introduciendo según se requiera un cambio de variable, sea $k = \omega$ ó $k = 2\pi\nu$, ó inclusive $k = \nu$.

(a, b)	Disciplina, uso de la convención (k =frecuencia)	Simetría
$(0, -1)$	Física moderna, fasores ($k = \omega$) Default del software Mathematica	<i>sim</i>
$(-1, -1)$	Física clásica ($k = \omega$)	<i>asim</i>
$(1, 1)$	Matemáticas puras, ingeniería de sistemas, electrónica, procesamiento de señales, espectroscopia ($k = 2\pi\nu$ ó ω)	<i>asim</i>
$(1, -1)$	Teoría probabilística (cómputo de la <i>función característica</i>) ($k = 2\pi x$)	<i>asim</i>
$(0, 2\pi)$	Matemáticas aplicadas, procesamiento de señales, telecomunicaciones, ondas, acústica y electrónica ($k = \nu$), Default del software Matlab	<i>sim</i>
$(0, 1)$	Matemáticas aplicadas, ondas ($k = \omega$)	<i>sim</i>

Las convenciones simétricas ("*sim*" en la 3a. columna) constituyen una *Transformación Unitaria*, mientras que las asimétricas ("*asim*"), no. Hay más opciones, como cuando se usa $F(j\omega)$; esto ocurre en procesamiento de señales cuando se relaciona la FT con la *Transformada de Laplace* $\mathcal{L}(s)$ como caso particular, con variable compleja $s = \sigma + j\omega$ (notar que $\mathcal{L}(s)$ es la FT con $\sigma=0$ (¿bajo qué convención?).

Para colmo de esta proliferación de convenciones, inclusive las ecuaciones (G1) y (G2) pueden aparecer con b substituido por $-b$, cambiando el signo del argumento de la exponencial y el signo de b en la 1a. columna de la tabla (ver por ejemplo:

<http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>).

La tabla de arriba sigue la convención de:

http://en.wikiversity.org/wiki/Fourier_transform.

En ese sitio *web* hay además una tabla de las propiedades de la FT y otra de las parejas de funciones $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$ más empleadas.

En estas notas seguimos la elección $(a, b) = (0, 2\pi)$; tal convención permite simplificaciones en la formulación de muchas transformadas y produce un par FT simétrico. Notar que el argumento del núcleo ($j2\pi\nu t = j\omega t$) nunca cambia, sino la elección para poder escribir $F(\omega)$, o $F(\nu)$ y si el par es o no simétrico. Actualmente prevalece esta selección en procesamiento de señales e imágenes, aunque a veces alterna con otras, por compatibilidad o ventajas de notación.

♣♣ **Ejercicio:** Reescriba todo este anexo generalizando a 2D, o sea al dominio espacial (x, y) , con frecuencias angulares espaciales (ω_x, ω_y) .

Ejercicio: Substituya cada pareja de la tabla en las ecuaciones (G1) y (G2) y escriba la ecuación correspondiente a cada disciplina o uso. Consulte las tablas de propiedades y pares de FT de los sitios *web* arriba mencionado y compare con otras tablas.

Ejercicio: ¿Qué valores de (a, b) se requieren (o qué hay que hacer) para poder aplicar un cambio de variable en las ecuaciones (G1) y (G2), y formular el espectro de frecuencias como $F(j\omega)$? ¿Hay también diversas convenciones para la transformada de Laplace?

Nota: Inclusive en una misma disciplina, distintos autores pueden escoger una convención distinta a la que usan sus colegas para la FT. Note que en el argumento de la exponencial no puede tenerse $j2\pi\omega$

t'' , siempre es $j2\pi\nu t$ ó $j\omega t$ (aunque son iguales); también, al hacer el cambio de variable, se tiene $d\omega = 2\pi d\nu$. Al final se escribe ya sea $F(\omega)$, o bien, $F(\nu)$, pero no " $F(2\pi\nu)$ ", aunque sí hay un uso frecuente de " $F(j\omega)$ " en instrumentación y señales.

♣♣ **Transformada de Fourier en n dimensiones ($\mathbb{R}^n$)**

La siguiente tabla es un sumario de las tres formas más populares de la FT multi-dimensional ($\mathbb{R}^n$), con $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ y $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$.

Frecuencia ordinaria ξ (hertz) Unitaria	$F_1(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi j \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} = F_2(2\pi \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{n/2} F_3(2\pi \boldsymbol{\xi})$ $f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} F_1(\boldsymbol{\xi}) e^{+2\pi j \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$
Frecuencia angular ω (rad/s) No-unitaria	$F_2(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-j \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = F_1\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi}\right) = (2\pi)^{n/2} F_3(\boldsymbol{\omega})$ $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F_2(\boldsymbol{\xi}) e^{+j \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\omega}$
Unitaria	$F_3(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-j \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} F_1\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi}\right) = \frac{F_2(\boldsymbol{\omega})}{(2\pi)^{n/2}}$ $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F_3(\boldsymbol{\omega}) e^{+j \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\omega}$

Ejercicio: Escriba en forma explícita la última pareja para tres dimensiones, o sea, por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \dots dx dy dz$$

Bibliografía recomendada para este anexo: (Dudgeon y Russell 2013), (Jähne 2017), (Kiyosi 1996), (Proakis y Manolakis 2006). *Consultar las ligas indicadas arriba.*

Fin§ [►Indice](#)

H. Transformada Discreta de Fourier (DFT) y Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Reescribiremos la definición de la FT (ver ecuación (55)) usando frecuencia angular $\omega = 2\pi \nu$ y como función explícita de $j\omega$:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (H1)$$

Si sólo se tienen o conocen N muestras de $f(t)$ en instantes separados por intervalos temporales T , se tiene una secuencia finita $f[n]$, también escrita como $\{f_n\}$ donde $n=0, 1, \dots, N-1$. Cada muestra puede verse como un impulso finito (función puerta) con área f_k . Es fácil ver que, como el integrando sólo es distinto a cero entre 0 y $(N-1)T$, la definición (H1) para $\{f_n\}$ se escribe como:

$$F(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j\omega nT} \quad (H2)$$

Aunque el espectro F se podría evaluar para cualquier ω , al contar con sólo N muestras de f , es de esperar que solamente N valores calculados a partir de (H2) serán significativos. Una propiedad de la FT continua es que se puede evaluar en un intervalo finito, que suele ser el período fundamental T_0 , en vez de $-\infty$ a $+\infty$ si la señal f es periódica. Del mismo modo, como sólo se tiene un número finito de muestras, el cálculo de la DFT da un resultado equivalente a si los datos fuesen periódicos, o sea que la señal en el intervalo $[f(N), f(2N-1)]$ es el mismo que $[f(0), f(N-1)]$. Por ello se evalúa la DFT para la frecuencia fundamental, o sea un ciclo por secuencia, $1/(NT)$ Hz ó bien $2\pi/(NT)$ rad/seg., sin olvidar la componente DC (o promedio) en $\omega=0$; de modo que en (H2) hacemos:

$$\omega = 0, \frac{2\pi}{NT}, 2 \times \frac{2\pi}{NT}, 3 \times \frac{2\pi}{NT}, \dots, (N-1) \times \frac{2\pi}{NT}, \quad (H3)$$

obteniendo en general la:

Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$DFT(f_n) = F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j2\pi kn/N}, \quad n=0, \dots, N-1 \quad (H4)$$

O también, como secuencias (notación alternativa):

$$F[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j2\pi kn/N}, \quad n=0, \dots, N-1 \quad (H5)$$

donde N es el total de muestras de $f(t)$, o sea $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ y NT es la duración total del segmento de señal; el espectro F_n es estimado en múltiplos de $\omega_{sample} = 2\pi/T = 2\pi\nu_{sample}$ (la *frecuencia de muestreo* es la *frecuencia fundamental*). A la n en F_n se le denomina a veces *número de onda*. Recordar que en términos de funciones sinusoidales, el *núcleo* de la base de funciones complejas se escribe como:

$$e^{j2\pi kn/(NT)} = \cos(j2\pi kn/(NT)) + j \sin(j2\pi kn/(NT)) \quad (H6)$$

donde las muestras del argumento temporal son $t = n\Delta t/N$ (con paso $\Delta t = 1$) y la frecuencia (discreta) es $\omega = 2\pi k \Delta\omega/T$, con $\Delta\omega = 1$ (son posibles separaciones mayores, y hasta individualmente diferentes, pero se complica mucho la formulación). Notar la normalización.

Ejercicio: Escriba el mismo desarrollo anterior para la DFT inversa de una secuencia F_n (espectro discreto) y revise la argumentación equivalente en dominio temporal.

♣ **Ejercicio:** Deduzca la DFT en 2D para una señal bidimensional (o imagen) en dominio espacial, muestreada como $\{f_{nm}\}$ con $(n, m) \in [0, N-1] \times [0, M-1]$.

► **Ejercicio:** Considerando el vector columna $\mathbf{f} = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{N-1}]^T$ y análogamente para F_n , exprese la ecuación (H4) como producto matricial; note la forma general de las entradas de la matriz como potencias de un núcleo semejante al de (H6). Verifique qué se obtiene del inverso de tal producto.

♣ **Ejercicio:** ¿Es posible hacer el ejercicio anterior para la DTF bidimensional? *Hint:* resuelva antes el ejercicio sobre [vectorización de una imagen](#).

Ejemplo de DFT

Considere la señal continua:

$$f(t) = 5 + 2 \cos(2\pi t - 90^\circ) + 3 \cos(4\pi t) \quad (H7)$$

Su contenido en frecuencia es obvio: un nivel DC (“frecuencia 0”) de 5 unidades, una frecuencia de 1Hz con amplitud 2 y fase $-\pi/2$ y una frecuencia de 2Hz, con amplitud 3 y fase 0. Sin embargo, es posible que no se obtenga f en forma explícita; puede ser un mesurando que al ser medido lo que obtenemos son muestras f_n sin conocimiento del contenido en frecuencia. Si se toman por ejemplo cuatro muestras por segundo (o sea $\nu_s = 4\text{Hz}$), entre $t=0$ y $t=3/4$, los valores de las muestras discretas están dados por:

$$f_n = 5 + 2 \cos(\frac{\pi}{2}k - 90^\circ) + 3 \cos(\pi k), \text{ donde se hizo } t = kT_s = \pi/4 \quad (H8)$$

O sea que tenemos: $f_0 = 8, f_1 = 4, f_2 = 8$ y $f_3 = 0$, pues $N=4$. Por lo tanto, los coeficientes de la DFT de f están dados por:

$$F_n = \sum_{k=0}^3 f_k e^{-j\pi/2 kn} = \sum_{k=0}^3 f_k (-j)^{kn}, \quad (\text{H9})$$

de donde: $F_0 = 20, F_1 = -j4, F_2 = 12$ y $F_3 = j4$. Es de notar que el espectro obtenido (graficar magnitudes de f_n y F_n) sólo aproxima el contenido de frecuencias de la función continua en función de las únicas cuatro muestras obtenidas en un intervalo muy reducido.

Ejercicio: Duplique la frecuencia de muestreo en el problema anterior y luego al cuádruple; aumente el intervalo de medición en dominio temporal y observe si mejora el espectro. ¿Qué ocurrió (alguna condición) con un muestreo de 4Hz?

La **Transformada Rápida de Fourier (FFT)** es un re-arreglo optimizado del orden de operaciones de la DFT, aprovechando de manera organizada las propiedades elementales de asociatividad, para minimizar el número de multiplicaciones. La DFT requiere del orden de N^2 operaciones mientras que la FFT hace el mismo cálculo con $\text{Ord}(N \log N)$ operaciones. Es un algoritmo muy usado y se encuentra en todos los paquetes de software de procesamiento y análisis de señales e imágenes. Una versión de código (para programadores en lenguaje C y C++) de la FFT en una, dos o tres dimensiones se puede hallar en: <http://www.fftw.org/>. Matlab cuenta con funciones para el manejo de la DFT directa e inversa y convoluciones mediante la FFT. La FFT es tan rápida que, para hacer una convolución con núcleos grandes, es mejor pasar al dominio de frecuencia con una FFT, realizar la modulación (producto) y regresar al dominio temporal o espacial con la FFT inversa.

♣ **Nota:** La FFT da el mismo resultado que la DFT, pero en presencia de errores de redondeo y de *precisión de máquina*, es más exacto el resultado de la FFT pues además de su rapidez, realiza mucho menos operaciones y hay por tanto un error menor que en la DFT.

♣ **Ejercicio:** Si se quiere la DFT de una señal cuando hay $N=2000$ muestras; ¿cuántas veces más rápida resulta una FFT, en comparación con la DFT directa? ¿Cómo se comparan la DFT y la FFT en 2D, con una imagen de $N \times N$ pixeles?

Bibliografía recomendada para este anexo: (Proakis y Manolakis 2006), (Smith 2010).

Fin§ ► [Indice](#)

♣♣ I. Notas Musicales.

Cuando la [frecuencia](#) es *acústica* (sonido), definimos la nota base o *tónica*: $do_1 \equiv C_1$ (una octava en un piano = 12 teclas) con una frecuencia estandarizada $f(C_1) = 32.7$ Hz; a partir de este sonido, las *notas musicales* son los armónicos de C_1 con las frecuencias en negrilla en la tabla siguiente (proporciones clásicas en la *escala temperada*; para los semitonos hay otras convenciones, se presentan las proporciones teóricas más usadas); aparecen junto con los principales semitonos, en orden de “consonancia” decreciente (noción relativa, subjetiva y aproximada).

Relación entre frecuencias f (nota) en Hz	Intervalos de consonante a disonante	# semitonos a la tónica C_1
$f(do_1) = f(C_1) = 1 f(C_1)$ (1:1)	<i>Unísono perfecto</i>	0
$f(do_1) = f(C_2) = 2 f(C_1)$ (2:1)	<i>Octava perfecta</i>	12
$f(sol_1) = f(G_1) = 3/2 f(C_1)$ (3:2)	<i>Quinta perfecta</i>	7
$f(fa_1) = f(F_1) = 4/3 f(C_1)$	<i>Cuarta perfecta</i>	5
$f(mi_1) = f(E_1) = 5/4 f(C_1)$	<i>Tercera mayor</i>	4
$f(mi_1 \text{ bemol}) = f(E_1 \flat) = 6/5 f(C_1)$	<i>Tercera menor</i>	3
$f(la_1) = f(A_1) = 5/3 f(C_1)$	<i>Sexta mayor</i>	9
$f(la_1 \text{ bemol}) = f(A_1 \flat) = 8/5 f(C_1)$	<i>Sexta menor</i>	8
$f(si_1 \text{ bemol}) = f(B_1 \flat) = 9/5 f(C_1)$	<i>Séptima menor</i>	10
$f(si_1) = f(B_1) = 15/8 f(C_1)$	<i>Séptima mayor</i>	11
$f(re_1) = f(D_1) = 9/8 f(C_1)$ (ó 10/9)	<i>Segunda mayor</i>	2
$f(re_1 \text{ bemol}) = f(D_1 \flat) = 16/15 f(C_1)$	<i>Segunda menor</i>	1
$f(fa_1 \text{ sostenido}) = f(F_1 \sharp) = 45/32 f(C_1)$	<i>Cuarta aumentada</i>	6
$f(sol_1 \text{ bemol}) = f(G_1 \flat) = 64/45 f(C_1)$	<i>Quinta disminuida</i>	≈6
...	...	[fracciones<12]

La 3ª columna es la *distancia tonal* respecto a la nota fundamental o tónica. Forman el conjunto de *intervalos musicales* más usados en música contemporánea. Notar que si X representa a cualquier nota

particular, la diferencia entre X_n y X_m son $m-n$ octavas y $f(X_m) = 2^{m-n} f(X_n)$. Una escala de frecuencias acústicas es necesariamente logarítmica.

Notas: el orden por tono es **do, re, mi, fa, sol, la, si** (o bien, C, D, E, F, G, A, B). Tenemos $f(G_2) = 3f(C_1)$, $f(E_3) = 5f(C_1)$, etc.; en términos de intensidades, al vibrar una cuerda a su frecuencia natural, suelen haber oscilaciones auditivamente perceptibles a 2, 3, 4 y 5 veces la frecuencia fundamental, y se denominan el 2º, 3º, etc. *armónicos*. El acorde con las notas C_n, G_k, E_l , donde n, k, l pueden ser octavas distintas (usualmente cercanas), es el *acorde de do*. El de *do menor* (C_m) tiene una nota de *sol bemol* (G_b) o *fa sostenido* ($F\sharp$) en vez de *sol*. Notar en la tabla que, en escala temperada, las dos últimas notas (en relación con la tónica) son la misma. En un piano ordinario $n, k, l \leq 7$ octavas (aunque hay 88 teclas).

► La partitura de la [Figura I3](#) es una señal discreta (secuencia de notas) *multicanal* con la *nota acústica* (una forma de onda sonora que depende de cada instrumento) como primitiva de representación (canal auditivo, al momento de la ejecución), atributo vectorial (dos notas en este caso, puede haber tantas dimensiones o canales como instrumentos en una orquesta), localización en *pentagrama* (una retícula muy particular, para representar tantos canales como melodías individuales), y con primitivas de visualización que combinan signos y símbolos de un *alfabeto* musical (notas, corcheas, modificadores, silencios, clave, etc.). Estos símbolos y signos codifican principalmente: frecuencia (o *tono* en Música), duración del pulso, *ataque*, e intensidad sonora. Hay eventos (accidentes, ornamentos) más complejos como el vibrato o trémolo, el crescendo, el stacatto, el sostenuto, etc.

El dominio es temporal pero el co-dominio no es intensidad (especificada esta de forma aproximada mediante indicadores como *forte*, *piano*, *crescendo*, etc.), sino *tonalidad* (frecuencia discreta); de modo que una partitura es una representación **tiempo-frecuencia** muy especial, pues el atributo (posición vertical) denota frecuencias específicas, como las de la tabla anterior.

Ejercicio: Leyendo en un piano virtual o real la partitura de la [Figura I3](#), escuche cada intervalo musical de la tabla anterior (en orden ascendente). (O bien, escuche este audio/midi: [Intervals.mid](#) (en el mismo directorio que este archivo) o: [Intervals.mid](#) (web)).

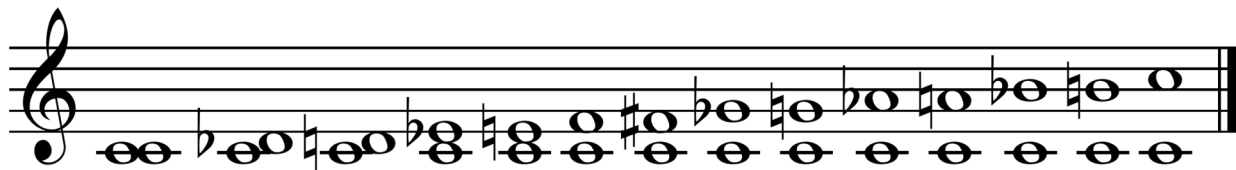


Figura I3. Intervalos musicales en orden ascendente desde la tónica do_4 de un piano de 88 teclas (*middle C*), con frecuencia $f(C_4) = 261.6$ Hz.

La voz humana normal emite una sola señal (canal), pero las diferentes cuerdas vocales le proporcionan el *timbre* (composición armónica de un sonido). Una flauta, una trompeta y varios instrumentos de viento también emiten un solo sonido (“voz”). Una guitarra puede emitir hasta seis señales o voces independientes (una por cada cuerda); un piano tocado a cuatro manos implica hasta 20 canales (aunque en términos de instrumentos diferentes a veces se habla de “una voz” por instrumento), y una orquesta filarmónica o ciertas bandas pueden tener doscientos integrantes, aunque muchas voces con frecuencia repiten las mismas notas (hacen *coro*).

Los canales en una pieza musical se denominan a voces, pero puede haber voces de un mismo instrumento repetido (diferentes ejecutantes), emitiendo la misma señal (y mismo “canal” en la partitura) entendida como melodía. En una partitura las voces se agrupan para corresponder también a intervalos de tonalidad (bandas de frecuencias llamadas *registro* o *tesitura*) pero, como en un coro, pueden haber muchas voces por cada canal.

El intervalo de frecuencias aproximado de la voz humana es [80Hz, 1100Hz], o sea [E₂, C₆]. Recordando que cada octava dobla la frecuencia, los registros principales de la voz humana (con $f(C_1)=32.7$ Hz) son aproximadamente: **bajo** [E₂, F₄], **barítono** [A₂, A₄], **tenor** [C₃, C₅], **contratenor** [G₂, E₄], **contralto** [F₃, F₅], **mezzosoprano** [A₃, A₅] y **soprano** [C₄, C₆]. Un coro convencional ocupa los cuatro registros en negrillas, pues los intermedios se traslapan y “operan” entre el inmediato inferior y el superior. La composición de armónicos y forma de onda característica de una voz o instrumento musical, se denomina *timbre*.

♣ ♣ **Ejercicio:** (A) Un *ritmo* implica también ciertas periodicidades o regularidades, pero también involucra intensidades, ¿cómo?, ¿periodicidades de qué?, ¿qué orden de frecuencias está involucrado? ¿algo que ver con las frecuencias de las notas? ¿hay “registros”? ¿Puede haber “acordes rítmicos”? (*Hint*: ¿ha puesto atención a la *música minimalista* de [Steve Reich](#) o [Philip Glass](#)?, escuche por ejemplo [Clapping Music](#)). (B) Compare el ritmo de *vals* (*waltz*) o de “3/4” con uno sincopado.

♣ **Ejercicio:** tome una guitarra (lo mejor afinada posible) y desafine muy ligeramente la cuerda de Si (2ª) y tóquela apoyando el índice en el 5º traste (en Mi) junto con la 1ª. cuerda (es decir, toque dos notas Mi casi idénticas). ¿Qué fenómeno, visto en estas notas, ilustra lo que escucha? ¿Cómo se relaciona con el ejercicio anterior? Haga un diagrama de las señales que refleje la sensación auditiva y que coincida con la descripción teórica (cierta sección de estas notas).

♣ **Ejercicio:** ¿Por qué siete notas? y ¿por qué 12 semitonos? ¿Por qué “no existen” *per se* las notas E $\sharp$ B $\sharp$, F $\flat$ ni C $\flat$? (calcular el número de semitonos entre E y F y entre B y C, aplicando la tabla anterior a E y B como tónicas, en vez de C).

♣ **Ejercicio:** ¿Por qué no observamos en la luz (fenómeno ondulatorio, con frecuencias, “octavas” y proporciones entre frecuencias), el equivalente a notas y acordes?; o sea, ¿por qué no hay un equivalente de “música visual”? ¿Y en las demás formas de energía y sentidos humanos? ¿Por qué se enumeran *siete* colores del arcoíris, ¿por qué los extremos del espectro visible se encuentran, cerrando un *círculo de matiz*? ¿Dónde intervienen las relaciones de frecuencia en estas preguntas sobre el color? Si no puede razonar una respuesta y si tampoco encuentra una, formule al menos una o más hipótesis y sugiera cómo podrían comprobarse.

Bibliografía recomendada para este anexo: (Rutherford-Johnson et al. 2013), (Peters 2014).

Fin§ [►Indice](#)

Bibliografía Recomendada

(Fuentes, consulta y para profundizar)

Baird D. (1995) ***Experimentation: An introduction to measurement theory and experiment design***. 3th Ed. *Prentice-Hall*.

Blackburn James A. (2000) ***Modern Instrumentation for Scientists and Engineers***. Springer Verlag.

Brown B., Smallwood R., Barber D. y Lawford P. (1999) ***Medical Physics and Biomedical Engineering***. *Institute of Physics Publishing*.

Collazo Javier L. (1980) ***Diccionario Enciclopédico de Términos Técnicos. Inglés-Español, Español-Inglés***, Tres volúmenes. *McGraw-Hill*.

Dudgeon Dan E. y Russell Mersereau M, (2013) ***Multidimensional Digital Signal Processing*** (*Prentice-Hall Signal Processing Series*), *Prentice-Hall*.

Gonzalez Rafael C. Woods Richard E. (2017) ***Digital Image Processing***. 4th edition, *Pearson*.

Hahn Brian, y Valentine Daniel T. (2016) ***Essential MATLAB for Engineers and Scientists***, Sixth Edition. *Academic Press*.

Hayes Monson. (2011) ***Schaums Outline of Digital Signal Processing***, 2nd Edition (*Schaum's Outlines Series*) *McGraw-Hill Professional*.

Hsu Hwei P. (2014) ***Schaum's Outline of Signals and Systems***, 3rd Edition (*Schaum's Outline Series*) *McGraw-Hill Professional*.

Jähne Bernd. (2017) ***Digital Image Processing and Image Formation***. 7th edition. *Springer Verlag*.

Jain Anil. (1996) ***Fundamentals of Digital Image Processing***. *Prentice Hall*.

Kiyosi Itó (Editor). (1996) ***Encyclopedic Dictionary of Mathematics***. The Mathematical Society of Japan (2 Vol. Set). The MIT Press.

Kreyszig Erwin. (2011) ***Advanced Engineering Mathematics***, 10th Edition, *Wiley*.

Kutz Myer. (2013) ***Handbook of Measurement Science and Engineering***. *John Wiley and Sons*.

Márquez Jorge (1999) ***Analysis and Visualization of Three Dimensional Complex Structures: A Boundary Based Approach***. PhD Thesis. *TSI Department, ENST, Paris, France*.

Peters Jonathan E. (2014) ***Music Theory: An in-depth and straight forward approach to understanding music***. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Proakis John G. y Manolakis Dimitris K. (2006) ***Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications***. 4th Edition. Pearson.

Rutherford-Johnson Tim, Kennedy Michael, Kennedy Joyce (2013), ***The Oxford Dictionary of Music***, 6th edition, Oxford University Press.

Smith Steven W. (2010) ***The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing***. 3th Edition. California Technical Pub.

Walpole Ronald E, Myers Raymond H, Myers Sharon I, Ye Keying. (2011) ***Probability & Statistics for Engineers & Scientists***. 9th Edition., Prentice Hall.

Fin§ [►Indice](#)