



CCADET

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

NOTAS DE CURSO

SISTEMAS DINÁMICOS

**José Luis Pérez Silva
Antonio Garcés Madrigal**

Mayo de 2016

Notas de Curso

Financiamiento Interno

Notas de Curso de Sistemas Dinámicos

José Luis Pérez Silva, Antonio Garcés Madrigal.

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico. UNAM.

RESUMEN

En estas notas revisaremos toda una gama de conceptos y métodos físicos que se requieren para comprender los fundamentos de la teoría de sistemas dinámicos que se estudian en el curso de sistemas Dinámicos del Posgrado en Ingeniería Eléctrica. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos encontrar el Concepto de Sistema, Comportamiento Estático, Leyes de Control, Sistemas Multivariables, Sistemas de Parámetros Distribuidos, Sistemas Estocásticos, Control Modal y otros.

Índice

	Introducción	3
1.	Elementos de un puerto	4
2.	Comportamiento estático	5
3.	Leyes de control	7
4.	Respuesta de sistemas de primer orden	10
5.	Sistema retroalimentado de control	13
6.	Respuesta de un sistema retroalimentado de control	17
7.	Sistemas lineales estocásticos	20
8.	Relaciones estadísticas en el dominio de la frecuencia	24
9.	Relaciones estadísticas en el espacio de estados	27
10.	Control modal	29
11.	Sistemas no lineales	32
12.	Métodos de análisis	34
12.1.	Análisis del plano fase	34
12.2.	Sistemas lineales de segundo orden	36
12.3.	Sistemas no lineales de segundo orden	41
12.4.	Análisis global del plano fase	42
13.	Estabilidad de sistemas lineales	44
13.1.	Estabilidad de sistemas no lineales	45
13.2.	Estabilidad local de sistemas no lineales	47
13.3.	Método directo de Liapunov	48
13.4.	Método de frecuencia de Popov	52
14.	Círculos límite y fronteras de amplitud	56
14.1.	Índice	57
14.2.	Existencia de ciclos límites	59
14.3.	Cotas de amplitud para sistemas de segundo orden	63
14.4.	Liapunov como método de acotamiento	66
15.	Métodos de aproximación	68
15.1.	Existencia de soluciones periódicas	68
15.2.	Sistemas cuasilineales. Métodos de aproximación	71
15.3.	Método de linealización equivalente	76
15.4.	Método de perturbación singular	77
16.	Identificación de sistemas	81
16.1.	Métodos clásicos de identificación de sistemas	82
16.2.	Identificación de procesos lineales variantes en el tiempo por medición de la respuesta senoide	87
16.3.	Modelos que aprenden	94
16.4.	Teoría de Weiner de sistemas no lineales	95
	Bibliografía	97

Introducción

Lo primero que tenemos que hacer para tener el modelo matemático de un sistema físico es aislar conceptualmente la parte del universo que nos interesa. A esta porción que aislamos del Universo le llamamos Sistema y la parte del Universo que de alguna manera interactúa con el sistema le llamaremos ambiente. El sistema y su ambiente están separados por una frontera imaginaria y para nuestros intereses definiremos el sistema de tal manera que los puntos de interacción se puedan localizar.

La definición de un sistema no depende solamente de la entidad involucrada sino también de los propósitos de la investigación. El modelo puede ser construido a diferentes niveles de abstracción, dependiendo de las necesidades del problema en particular. En un nivel abstracto se puede construir un modelo matemático como un conjunto de ecuaciones que describan el sistema.

Debemos definir la interacción dentro y a través de la interfaz y una vez que esto se ha realizado podemos obtener el modelo matemático encontrando las descripciones matemáticas para las cantidades que interactúan. La forma de estas relaciones depende de nuestro propósito de diseño, la naturaleza del sistema y las técnicas matemáticas que vamos a emplear. La validez del modelo depende de las consideraciones que se realizaron al construirlo.

Vamos a estudiar la estructura de los sistemas lineales de parámetros estacionarios, amortiguados y de orden finito. Debemos primero examinar las consideraciones que debemos hacer a un sistema en particular para poder aplicar esta técnica de análisis. Todos los sistemas experimentan cambios en sus parámetros con el tiempo, pero si estos son pequeños o lentos en el tiempo, un modelo estacionario es una buena aproximación al sistema real. Para modelos de orden finito, propiedades como capacitancias, inductancia y resistencia deben amortiguarse en puntos discretos en el espacio. A menudo estas propiedades están distribuidas en el espacio, esto es expresadas como capacitancias o inductancias por unidad de longitud. ¿Bajo qué circunstancias se pueden considerar amortiguadas sin reducir en forma importante la precisión del modelo?

Una regla genérica es determinar la causalidad del sistema, qué causa qué, para derivar un conjunto de ecuaciones que relacionen las cantidades de entrada con las de salida. Siempre tendremos ecuaciones vectoriales del tipo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

o la forma escalar de estas ecuaciones en el dominio de Laplace.

$$Y_j(s) = G_{ij}(s)U_i(s)$$

Donde $\mathbf{x}$ es el vector de estado, $\mathbf{u}$ el vector de entrada, $\mathbf{y}$ el vector de salida y $\mathbf{G}$ la función de transferencia, se usa para expresar la relación entrada-salida.

1. Elementos de un puerto

La definición de un sistema determina que hay que identificar las interacciones de energía entre los sistemas y su ambiente. Después de definir un sistema examinamos las relaciones matemáticas entre las variables internas y externas para obtener el modelo matemático que lo describe. Vamos ahora a deducir la estructura de un sistema en términos de un conjunto de elementos ideales. Como los elementos ideales tienen modelos matemáticos simples, si podemos encontrar una estructura compuesta de estos elementos ideales que representen al sistema original, podemos obtener el modelo matemático del sistema. Estos elementos simples son sistemas simples que interactúan con su ambiente a través de un número limitado de puertos de energía. Un puerto de energía es un punto en el cual se puede transmitir la potencia entre el sistema y su ambiente. Cada puerto de energía transmite un único tipo de potencia, y la transmisión es instantánea y se describe por un par de señales variables. Si varios tipos de potencia se transmiten al mismo punto, un puerto de energía separado se designa para cada una de los tipos de potencia. Nos centraremos con sistemas cuya estructura contiene elementos pasivos y fuentes ideales.

Los sistemas o elementos están acoplados por la interconexión de sus puertos. La interconexión se muestra por líneas sólidas llamadas ataduras. Una atadura realmente es un elemento ideal de transmisión de energía, ya que transmite energía de un punto al otro sin disipación ni retardos temporales. Un sistema o elemento se caracteriza por un número de puertos de energía como un puerto, dos puertos, cinco puertos etc. Si un puerto de energía es un punto en el cual otros elementos se pueden conectar al elemento, se llama puerto libre.

La portabilidad de un elemento determina la complejidad del sistema que se puede lograr interconectando elementos del mismo tipo. Dos elementos de un puerto sólo pueden ser conectados como se muestra en la figura 1.

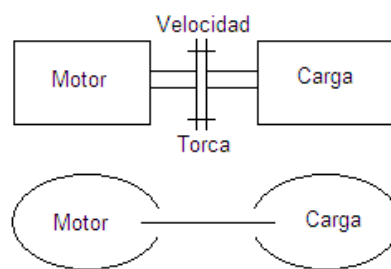


Figura 1. Conexión de elementos de dos puertos.

Dos puertos se pueden conectar en una estructura de anillo, como se muestra en la figura 2.

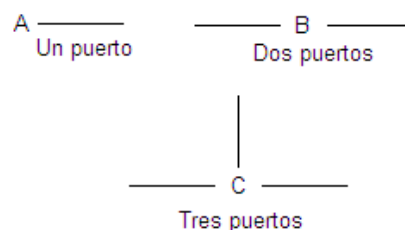


Figura 2. Estructura de anillos.

Los elementos de un solo puerto son: resistor, capacitor, inductor, fuente de poder, y fuente de corriente o flujo. Cada uno de estos elementos se caracteriza por una ecuación que relaciona las variables del puerto $p(t)$ y $f(t)$ con alguna otra. El producto de estas variables de puerto es la potencia transmitida al puerto. En el sentido matemático, estas ecuaciones simples se pueden escribir con cada variable indicada como la entrada y las otras como la salida. Para que los modelos tengan sentido físico, debemos determinar su causalidad natural.

2. Comportamiento estático

Para estudiar el análisis dinámico de los sistemas primero debemos estudiar los elementos estáticos y las relaciones estáticas entrada-salida. Para poder hacer esto vamos a pensar en un termómetro. En éste la lectura de la temperatura $x(t)$ es el estado del sistema y es la variable que nos interesa. Esta lectura de temperatura es el resultado de la temperatura ambiente $u(t)$, en el sistema, luego $u(t)$ es la entrada y $x(t)$ es la salida o respuesta del sistema formado por el termómetro. Podemos describir en forma gráfica la relación causal por cualquiera de estas representaciones que se muestran en la siguiente figura 3:

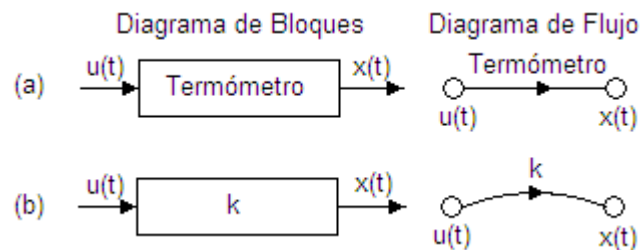


Figura 3. Relaciones causales.

En ella la dirección de la causalidad está indicada por las flechas. En la representación de diagrama de bloques, la señal aparece como líneas y la relación funcional como los bloques, mientras que en el diagrama de flujo la señal se representa como los círculos y la relación funcional con las líneas etiquetadas.

En la expresión $u(t)$ y $x(t)$ significan tanto la entrada u como la salida x son funciones del tiempo. La calibración del termómetro es la relación entre el valor estacionario de la temperatura u_s y la salida x_s , en lugar de la relación total dependiente del tiempo entre la entrada y la salida. En esta relación de estado estacionario

$$X_s = f_s(u_s)$$

Esta es una relación $f_s(u_s)$ es una función simplemente valorada. Esta ecuación se usa en los sistemas dinámicos en los que la relación estática es válida.

Si la temperatura $u(t)$ está variando en el tiempo, la respuesta del termómetro $x(t)$ también varía y la condición de estático no es aplicable al sistema. Luego si la entrada $u(t)$ está cambiando lentamente y su respuesta es rápida, una ecuación estática puede ser una buena aproximación entre la entrada $u(t)$ cambiante y la salida cambiante

$$X_s = f_s(u(t))$$

Dado el error debido a que esta aproximación estática depende de la escala de tiempo, ya que t debe medirse en horas o días para un termómetro de respuesta lenta. Un componente para el cual la ecuación anterior sea válida para todo tiempo se llama un componente estático sin memoria. El que no tenga memoria es debido a que no existen fenómenos de histéresis o retardos en el tiempo, así para cada $u(t)$ hay una única $x(t)$ que no depende de las entradas pasadas.

Si suponemos que la escala de tiempo en el estudio de un sistema dinámico es tal que la relación

$$X_s = f_s(u(t))$$

se puede usar con suficiente aproximación. Podemos simplificar la relación entrada-salida asumiendo una proporcionalidad entre las variables:

$$x(t) = ku(t)$$

donde k es la constante de proporcionalidad, también conocida como constante de ganancia. De hecho se puede elegir como ganancia la pendiente promedio de las características estáticas bajo un intervalo de interés de la entrada $u(t)$. Matemáticamente está dada por la pendiente de la tangente en el origen si la curva $f_s(u)$ es suave a través del origen, es decir:

$$k = \left. \frac{df_s(u)}{du} \right|_{u=0}$$

Si se reemplaza la ecuación

$$X_s = f_s(u(t))$$

por la ecuación

$$k = \left. \frac{df_s(u)}{du} \right|_{u=0}$$

es una forma de linealización. La relación linealizada por medio de la última ecuación es válida en toda vecindad del origen.

Podemos escribir la relación inversa de las ecuaciones

$$x(t) = ku(t)$$

y

$$x(t) = ku(t)$$

como:

$$u(t) = f_s^{-1}(x(t))$$

y

$$u(t) = k^{-1}x(t)$$

ya que el concepto de entrada-salida se basa en una causalidad físicamente realizable, su forma inversa no existe en un sistema físico hasta que la causalidad sea reversible.

Podemos generalizar el concepto para r entradas y n salidas. Para un sistema estático no lineal multivariable, la relación que corresponde a la ecuación

$$X_s = f_s(u(t))$$

es:

$$X_i(t) = f_{si}(u_1(t)), \dots, u_r(t) \text{ con } i = 1, 2, \dots, n$$

Esta ecuación describe n hipersuperficies en un espacio de $(r + 1)$ dimensiones. Si la superficie es suave, y se sustituye por un hiperplano tangente al origen, la relación linealizada es:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j(t) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n$$

donde

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial f_{si}(u_1, \dots, u_r)}{\partial u_j} \right|_{u_1=0, \dots, u_r=0}$$

3. Leyes de control

El elemento central de un sistema de control retroalimentado es el controlador. Este elemento tiene por entradas señales de bajo nivel de potencia, que es una medida de una variable del proceso y tiene por salida señales de alta potencia, que está relacionada con la señal de entrada por una relación ajustable de entrada-salida. El controlador es un elemento unilateral, las condiciones en la terminal de salida del controlador no tiene de manera alguna retorno a través del controlador en el proceso. La señal de salida se usa para manipular el proceso de alguna manera vía un actuador. Debido a que los dispositivos de gran ganancia de potencia pueden ser muy difíciles de controlar, una técnica común es usar elementos pasivos alrededor de dispositivos de gran ganancia. Esto reduce la ganancia total, pero el resultado final es un instrumento que tiene la suficiente ganancia y es capaz de dar una regulación precisa. Esto se muestra en la figura 4.

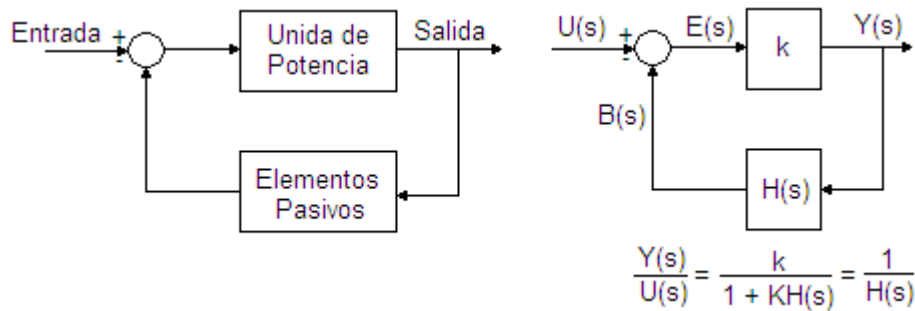


Figura 4. Elementos pasivos alrededor de dispositivos de gran ganancia.

Para explicarnos como funciona esto, vamos a considerar la relación de la figura, tenemos:

$$Y(s) = KE(s), E(s) = U(s) - B(s), B(s) = H(s)Y(s)$$

Y luego

$$Y(s) = \frac{k}{1 + kH(s)} U(s)$$

donde k es la gran ganancia del amplificador, por lo que una relación entrada-salida aproximada es:

$$Y(s) = \frac{k}{H(s)} u(s)$$

que es la propiedad antes establecida.

Vamos a considerar el caso donde H(s) es estática, así que la relación proporcional es:

$$Y(t) = k_c u(t)$$

La entrada a un controlador de retroalimentación es una señal de error e(t), que se genera al tomar la diferencia entre una entrada de referencia r(t) y un valor medido de la variable a ser controlada c(t):

$$E(t) = r(t) - c(t)$$

La salida del controlador m(t) es la entrada al actuador y puede darse la siguiente ley de control:

$$m(t) = k_c e(t)$$

Este control se llama control proporcional o control P, con una ganancia k_c . Esta es una acción estática cuando se ignoran todos los efectos dinámicos involucrados en el sistema, en otras palabras, la salida m(t) de la acción P depende solamente de la magnitud del error e(t) en el mismo instante.

Si hacemos una modificación en las componentes de la retroalimentación es posible generar una acción de control que no sólo responda a la magnitud presente del error sino que también lo haga con la razón de cambio (d/dt e(t)). Esto se puede escribir como:

$$M(t) = K_c(1 + T_d D)e(t)$$

Esta forma de control se llama proporcional derivativo o control PD. Si T_d es la constante de tiempo del retraso en la retroalimentación, por lo que tenemos:

$$T_d \frac{db}{dt} + b = \frac{y}{k_c}$$

Si el sistema opera en la banda proporcional, la relación lineal aproximada será:

$$y^* = -\varepsilon K = -(u-b)K$$

y

$$y = -y^* = (u-b)k$$

válida y la ecuación:

$$T_d \frac{db}{dt} + b = \frac{y}{k_c}$$

se transforma en:

$$\frac{db(t)}{dt} = -\left(1 + \frac{k}{k_0}\right)\left(\frac{1}{T_d}\right)b(t) + \left(\frac{k}{k_c}\right)\left(\frac{1}{T_d}\right)u(t)$$

y

$$y(t) = -kb(t) + ku(t)$$

Esta es la formulación de variables de estado para la acción PD. Si sustituimos $b(t)$ por $x(t)$, obtenemos.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t)$$

De las ecuaciones:

$$\frac{db(t)}{dt} = -\left(1 + \frac{k}{k_0}\right)\left(\frac{1}{T_d}\right)b(t) + \left(\frac{k}{k_c}\right)\left(\frac{1}{T_d}\right)u(t)$$

y

$$y(t) = -kb(t) + ku(t)$$

se deriva la función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k(T_d s + 1)}{T_d s + 1 + \frac{k}{k_c}}$$

Como k es muy grande aplicamos la ecuación:

$$Y(s) = \frac{k}{H(s)} u(s)$$

para obtener la forma aproximada:

$$G_c(s) = k_c(T_d s + 1)$$

que es la acción PD.

La ley PID, proporcional integral derivada, se define como:

$$m(t) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i D} \right) e(t)$$

también llamada proporcional derivada más acción de restauración, porque la acción de la integral restaura la posición de la banda proporcional. Ya que el operador $1/D$ de la ecuación anterior es la operación de integración, la variable $m(t)$ es igual a una proporción constante del error más el error pasado integrado.

4. Respuesta de un sistema de primer orden

El integrador es la base para el desarrollo del modelo matemático de un sistema físico. Su salida $x(t)$ es la integral de la entrada $u(t)$, por lo que la ecuación que las relaciona es:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bu(t)$$

donde B es una constante o un coeficiente dependiente del tiempo.

Para obtener la forma general de las ecuaciones diferenciales de primer orden, vamos a estudiar un tinaco con descarga libre, como se muestra en la figura 5.

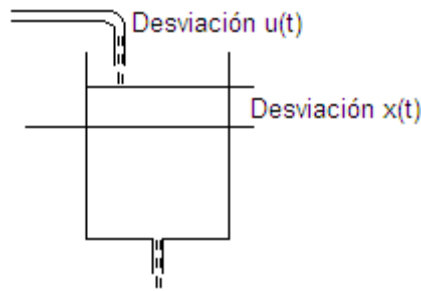


Figura 5. Tinaco con descarga libre.

la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bu(t)$$

se generaliza de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

lo que significa que la razón de cambio del nivel del tanque es una función de $u(t)$, $x(t)$, y el tiempo t . La relación se puede linealizar en la vecindad de un punto de equilibrio, es decir, donde:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0$$

Para desviaciones pequeñas de un estado de equilibrio de las señales $u(t)$ y $x(t)$, tenemos:

$$f(x(t), u(t), t) \approx A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

donde

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \right|_{u=0, x=0}$$

y

$$B(t) = \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \right|_{u=0, x=0}$$

Geoméricamente la superficie $f(x, u, t)$ se puede aproximar por un plano tangente en el origen, por lo que la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

con esta linealización llega a ser:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Si consideramos a A y a B como constantes, tenemos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

Aplicando lo anterior al tinaco de la figura 6

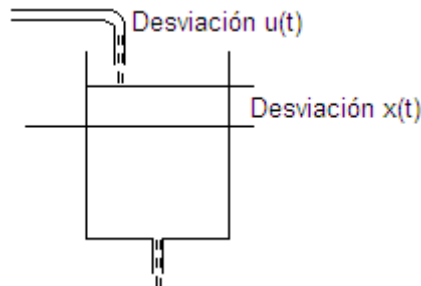


Figura 6. Tinaco con aplicación de la linealización.

tenemos que en la ecuación $Ax(t)$ representa la razón del flujo de descarga, por lo que debe ser negativa en este sistema.

La solución de la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

para una $u(t)$ genérica es:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

donde x_0 es el valor inicial de $x(t)$ y τ es una variable muda de integración. La ecuación anterior se puede derivar comenzando con la ecuación:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}\left(\frac{dx}{dt} - Ax\right)$$

Si sustituimos la ecuación

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

en el lado derecho de la ecuación

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}\left(\frac{dx}{dt} - Ax\right)$$

tenemos:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Bu(t)$$

Después de la integración, la última ecuación será:

$$e^{-At}x - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

El primer término $e^{At}x_0$ se llama la respuesta libre. Esta es la respuesta cuando no es forzado el sistema, o sea cuando $u(t) = 0$. El segundo término de la solución es la respuesta forzada con valor inicial cero

$$x_f(t) = \int_0^t e^{-A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, x_f(0) = 0$$

que recibe el nombre de integral de convolución.

La respuesta total está dada por la suma de las dos componentes. Esta suma sólo es válida en sistemas lineales y se llama superposición. También se puede emplear cuando la entrada $u(t)$ está dada como una suma de los componentes $u_1(t)$, ..., $u_k(t)$,

$$u(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t)$$

y la respuesta forzada será:

$$x_f(t) = \sum_{i=1}^k x_{fi}(t)$$

donde

$$x_{fi}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u_i(\tau) d\tau$$

el patrón de la respuesta libre es:

$$x_a(t) = e^{At} x_0$$

cuando A es negativa es un decaimiento exponencial.

Veamos las respuestas forzadas. Si $u(t)$ es un escalón de una magnitud h

$$u(t) = h \text{ para } t > 0 \text{ y } u(t) = 0 \text{ para } t < 0$$

y $u(t)$ es discontinuo e indefinida en $t = 0$. Para esta entrada tenemos la respuesta:

$$x_f(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B h d\tau = \frac{Bh}{-A} (1 - e^{At})$$

Cuando $A = 0$, la respuesta llega a ser una integración de la entrada escalón o una rampa de salida.

5. Sistema retroalimentado de control

La figura 7 muestra una estructura de control retroalimentado de variable y gasa únicas.

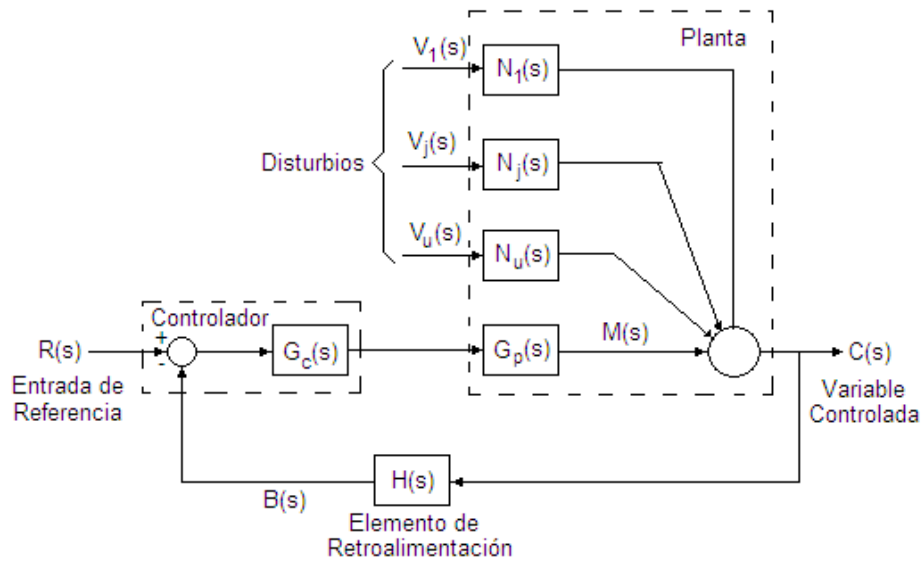


Figura 7. Estructura de control retroalimentado.

Esta configuración tiene por propósito mantener una variable de control de una planta $C(s)$ cerca de los valores deseados de referencia $R(s)$. La variable s indica que se está trabajando dentro del dominio de Laplace. La naturaleza escalar de las relaciones entre la entrada $R(s)$ y la salida $C(s)$ permite la aplicación eficiente de la teoría clásica de control.

En la figura el controlador de retroalimentación representado por la función de transferencia $G_c(s)$, con un error $E(s)$, produce una variable manipulable $M(s)$. El objeto de control, la planta, se representa por otra función de transferencia $G_p(s)$ y un conjunto de funciones de transferencia $N_j(s)$ de los disturbios de entrada $V_j(s)$, con $j = 1, \dots, u$. Las funciones de transferencia se obtuvieron de la manera clásica, es decir obteniendo la transformada de Laplace de la razón salida-entrada de los elementos correspondientes con condiciones iniciales cero. La trayectoria de retroalimentación puede o no tener elementos $H(s)$. La señal de retroalimentación es $B(s)$. La diferencia entre $B(s)$ y la entrada de referencia $R(s)$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

Se alimenta dentro al controlador para producir $M(s)$. Esta variable controla la planta de forma tal que los efectos perturbadores de $V_j(s)$ en $C(s)$ sean mínimos y $C(s)$ se aproxime lo máximo al valor deseado. Si el sistema tiene retroalimentación unitaria, $H(s) = 1$, luego $B(s) = C(s)$ y:

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

En este caso $E(s)$ es el error del sistema de control por retroalimentación. De otro lado debemos hacer una diferencia entre el error

$$E^*(s) = R(s) - C(s)$$

Y la señal de entrada de control

$$E(s) = R(s) - B(s).$$

Como las relaciones en el dominio s son algebraicas podemos fácilmente determinar varias respuestas en términos de las entradas $R(s)$ y $V_j(s)$:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G(s)}R(s) + \sum_{j=1}^u \frac{N_j(s)}{1+G(s)}V_j(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \sum_{j=1}^u \frac{H(s)N_j(s)}{1+G(s)}V_j(s)$$

En estas ecuaciones

$$G(s) = G_c(s)G_p(s)H(s)$$

se llama la función de transferencia de gasa abierta. De acuerdo con esta relación, una unidad unitaria retroalimentada de control tiene:

$$H(s) = 1, \quad C(s) = R(s), \quad E(s) = 0, \quad \text{para toda } R(s) \text{ y } V_j(s)$$

Se puede alcanzar si el sistema permanece estable cuando la ganancia del controlador se hace infinita.

$$|G_c(s)| = K_c \rightarrow \infty$$

En las ecuaciones:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G(s)}R(s) + \sum_{j=1}^u \frac{N_j(s)}{1+G(s)}V_j(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \sum_{j=1}^u \frac{H(s)N_j(s)}{1+G(s)}V_j(s)$$

el uno es despreciable en el denominador en este límite. También estas ecuaciones tienen un denominador común $1 + G(s)$. Las raíces de la ecuación del denominador

$$1 + G(s) = 0$$

son los valores propios del sistema y se llama los polos de gasa cerrada. Ya que la estabilidad depende de sus valores propios, la ecuación característica juega un papel crucial en los sistemas de control por retroalimentación.

Si consideramos un sistema lineal de parámetros amortiguados descrito por una función de transferencia dada en forma general por:

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{b_0 + b_1(s) + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1(s) + \dots + a_n s^n}$$

cuando la retroalimentación es unitaria, $H(s) = 1$. Para una función de transferencia físicamente realizable el orden del denominador polinomial debe ser igual o mayor que el del numerador polinomial, es decir $m \leq n$. Si escribimos la ecuación

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{b_0 + b_1(s) + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1(s) + \dots + a_n s^n}$$

en forma factorial se obtiene la segunda forma canónica:

$$G(s) = k \frac{\prod (s - z_j)}{\prod (s - p_i)},$$

donde k es la ganancia de gasa abierta y z_j y p_i , $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, son los ceros y polos de gasa abierta. Si todos los coeficientes de la polinomial en la ecuación

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{b_0 + b_1(s) + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1(s) + \dots + a_n s^n}$$

son reales los polos y ceros que sean complejos deben aparecer en pares conjugados:

$$p_i \text{ o } z_j = -\alpha \pm j\beta$$

donde α y β son reales y $\beta > 0$.

Algunas veces es conveniente escribir la ecuación:

$$G(s) = k \frac{\prod (s - z_j)}{\prod (s - p_i)},$$

en la forma canónica donde todos los números son reales.

$$G(s) = k \frac{\prod (s - z_j) \prod (s + \alpha_j)^2 + \beta_j^2}{\prod (s - p_i) \prod (s + \alpha_i)^2 + \beta_i^2},$$

donde z_j y p_i son ceros y polos reales respectivamente.

Los polos de gasas cerradas

$$s = P_1, P_2, \dots, P_n$$

son las raíces de la ecuación

$$1 + G(s) = 0$$

Si aplicamos

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{b_0 + b_1(s) + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1(s) + \dots + a_n s^n}$$

encontramos que la ecuación característica del sistema de gasa cerrada es:

$$(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) + (b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) = \prod_{i=1}^n (s - P_i) = 0$$

Podemos escribir la respuesta de gasa cerrada $C(s)$ de la ecuación

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G(s)} R(s) + \sum_{j=1}^u \frac{N_j(s)}{1 + G(s)} V_j(s)$$

en la forma

$$C(s) = G_{LR}(s)R(s) + \sum_{j=1}^u G_{LV_j}(s) V_j(s)$$

donde la función de transferencia de gasa cerrada está definida por:

$$G_{LR}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

y

$$G_{LV_j}(s) = \frac{N_j(s)}{1 + G(s)}$$

De las ecuaciones

$$G(s) = k \frac{\prod (s - z_j)}{\prod (s - p_i)},$$

y

$$(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) + (b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) = \prod_{i=1}^n (s - P_i) = 0$$

la función de transferencia para la entrada de referencia $G_{LR}(s)$ se puede escribir en forma factorizada como:

$$G_{LR}(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + km \prod_{j=1}^m (s - z_j)} = \frac{k \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - P_i)}$$

donde n se considera mayor que m , que es una condición más fuerte que $m \leq n$, pero que es generalmente satisfecha en sistemas reales. Sea:

$$P_i = -\sigma_i \pm j\omega_i$$

para polos conjugados complejos de gasa cerrada, donde σ_i y ω_i son reales y $\omega_i > 0$, se tiene la forma alternativa:

$$G_{LR}(s) = \frac{B(s)}{\prod (s - P_i) \prod [(s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2]}$$

donde $B(s)$ es el numerador en s y P_i son los polos de gasa cerrada.

Un sistema lineal de parámetros amortiguados, estacionario retroalimentado es estable asintóticamente estable si y sólo si todos los polos reales y todas las partes reales de los polos complejos conjugados son negativos, esto es:

$$P_i = -\lambda_i, \quad \text{con } \sigma_i > 0,$$

Donde $\lambda_i > 0$. De acuerdo con las ecuaciones:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G(s)} R(s) + \sum_{j=1}^u \frac{N_j(s)}{1 + G(s)} V_j(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) - \sum_{j=1}^u \frac{H(s)N_j(s)}{1 + G(s)} V_j(s)$$

y

$$G_{LR}(s) = \frac{B(s)}{\prod (s - P_i) \prod [(s + \sigma_i)^2 + \omega_i^2]}$$

pueden aparecer los siguientes modos de movimiento en la respuesta de un sistema de control estable:

$$e^{-\lambda_i t},$$

$$e^{-\sigma_i t} \sin \omega_i t,$$

y

$$e^{-\sigma_i t} \cos \omega_i t,$$

donde todos los polos de gasa cerrada se consideran distintos.

6. Respuesta de un sistema retroalimentado de control

La figura 8 muestra la respuesta debida a una entrada escalón unitaria para un sistema de control que empieza con un estado inicial cero.

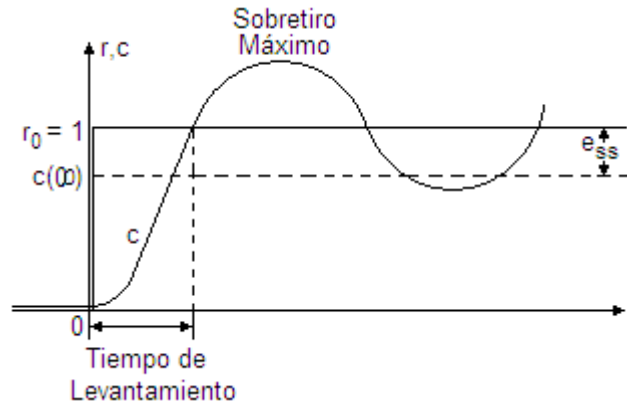


Figura 8. Respuesta debida a una entrada escalón unitaria.

Por la transformada inversa de Laplace tenemos:

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[R(s)G_{LR}(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}G_{LR}(s)\right].$$

Si expandimos $C(s)$ en fracciones parciales, tenemos.

$$C(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1 s + C_2}{(s + \sigma_1)^2 + \omega_1^2} + \text{m\u00e1s t\u00e9rminos del resto de los polos de gasa cerrada}$$

donde C_1 y C_2 son los coeficientes de expansi\u00f3n de los polos dominantes. La respuesta a una entrada escal\u00f3n est\u00e1 dominada por los componentes de estado estacionario $c(\infty)$, introducidos por la entrada escal\u00f3n y la oscilaci\u00f3n amortiguada del modo dominante. Todos los otros modos desaparecen despu\u00e9s de la aplicaci\u00f3n y vuelven a aparecer como distorsi\u00f3n de la curva $c(t)$ en la vecindad del origen. N\u00f3tese que la naturaleza de la respuesta $c(t)$ a una entrada particular $r(t)$ depende solamente de las ra\u00edces de la ecuaci\u00f3n caracter\u00edstica.

$$1 + G(s) = 0$$

Respuesta de la figura 8 se caracteriza en t\u00e9rminos de las anteriores cantidades por el tiempo de levantamiento, el porcentaje del sobretiro, el tiempo del restablecimiento, y el valor de error final. Daremos la definici\u00f3n de estos t\u00e9rminos.

La raz\u00f3n del levantamiento inicial de la respuesta a una entrada escal\u00f3n se representa por el tiempo de levantamiento. Este es el tiempo cuando $c(t)$ iguala la magnitud de la entrada $r_0 = 1$. El sobretiro porcentual SP se puede definir como:

$$SP = 100 \frac{[\text{Valorm\u00e1ximode } c(t)] - [\text{Valorfinal, } c(\infty)]}{c(\infty)}$$

El valor de restablecimiento es definido como el tiempo al cual la respuesta se mantiene dentro de $\pm \varepsilon$ de su valor final $c(\infty)$, donde 5% es el valor t\u00edpico para ε . Para evitar discontinuidades el tiempo de restablecimiento a veces se define como la envolvente m\u00e1s suave de la oscilaci\u00f3n decadente. El valor de error final se define como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = r_0 - c(\infty)$$

es una medida de la precisión estática.

Una discusión general del error de estado estacionario se puede dar si aplicamos el teorema del valor final que dice:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Para determinar el error de estado estacionario en forma más general se emplea la forma canónica:

$$G(s) = k \frac{\prod (1 + T_j s) \prod [1 + 2\zeta_j (T_j s) + (T_j s)^2]}{s^N \prod (1 + T_i s) \prod [1 + 2\zeta_i (T_i s) + (T_i s)^2]}$$

para una función de transferencia de un sistema con retroalimentación unitaria.

El denominador de la última ecuación es la frecuencia natural no amortiguada ω_{ni} de la respuesta oscilatoria. La respuesta amortiguada de la respuesta está dada por la parte imaginaria del polo complejo conjugado:

$$\beta_i = \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2}.$$

La parte real del polo complejo conjugado está dada por:

$$\alpha_i = -\zeta_i \omega_{ni}$$

Una señal escalón es una entrada del tipo 1. Las entradas del tipo 1 generalmente tienen un valor de estado estacionario cuando todas las T y ζ de la señal son positivas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r(\infty) = K,$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v(\infty) = K_v.$$

Una rampa de entrada $r(t)$ 0

$$v(t) = kt$$

con $R(s)$ o

$$V(s) = \frac{k}{s^2}$$

es una entrada del tipo 2 donde k es la pendiente de la rampa.

Un sistema de control retroalimentado con una función de transferencia del tipo 0 y gasa abierta produce errores de estado estacionario para una entrada de referencia del tipo 1.

Por las ecuaciones:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) - \sum_{j=1}^u \frac{H(s) N_j(s)}{1 + G(s)} V_j(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

y

$$G(s) = k \frac{\prod (1 + T_j s) \prod [1 + 2\zeta_j (T_j s) + (T_j s)^2]}{s^N \prod (1 + T_i s) \prod [1 + 2\zeta_i (T_i s) + (T_i s)^2]}$$

encontramos que el error es:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [(1 + G(s))^{-1} sR(s)] = \frac{r(\infty)}{1 + k}.$$

El error de estado estacionario de un sistema de control como el anterior se llama offset. Si $N(s)$ es también del tipo 0, el offset debido a los disturbios está dado por:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-N(s)(1+G(s))^{-1} sV(s) \right] = \frac{-k_n v(\infty)}{1+k}.$$

Consideremos la respuesta de un sistema de control a una entrada de referencia $R(s)$:

$$C(s) = \frac{G_f(s)}{1+G_f(s)H(s)} R(s),$$

donde

$$G_f(s) = G_c(s)G_p(s)$$

es la función de transferencia directa. Supongamos que la desviación ΔC aparece para un cambio ΔG_f así que:

$$C(s) + \Delta C = \frac{G_f(s) + \Delta G_f}{1+G_f(s)H(s) + \Delta G_f H(s)} R(s).$$

se sigue que:

$$\Delta C = \left(\frac{G_f + \Delta G_f}{1+G_f H + \Delta G_f H} - \frac{G_f}{1+G_f H} \right) R(s) = \left(\frac{\frac{(G_f + \Delta G_f)}{G_f}}{\frac{1+G_f H + \Delta G_f H}{1+G_f H}} - 1 \right) C(s)$$

o

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\frac{\Delta G_f}{G_f}}{1+G_f H + \Delta G_f H}$$

La retroalimentación no es efectiva para hacer $\Delta C/C$ insensible a cambios de la ganancia de retroalimentación $\Delta H/H$. La razón del error de salida es:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\frac{\Delta H}{H}}{1+(G_f H)^{-1} + \frac{\Delta H}{H}}$$

y por lo tanto:

$$\frac{\Delta C}{C} \approx -\frac{\Delta H}{H}$$

si $|G_f H| \gg 1$ y $|\Delta H| \ll |H|$.

7. Sistemas lineales estocásticos

Existen sistemas en los cuales las entradas, los estados y las variables de salida, cambian azarosamente. Si lo azaroso está caracterizado por alguna regla, como la distribución Gaussiana, a menudo es posible relacionar teóricamente estas variables.

Las variables de tiempo pueden ser determinísticas o azarosas. Cuando las variables de tiempo varían azarosamente, de forma que pueden ser caracterizadas por una función de probabilidad decimos que las variables son estocásticas.

En teoría de la probabilidad una variable estocástica es el resultado de un experimento en un espacio de muestreo que representa una colección de salidas posibles. Para describir las características de este espacio de muestreo, definiremos la función de distribución de probabilidad $F(x)$ de una variable estocástica x por la relación:

$$F(x_1) = P(x \leq x_1)$$

En esta ecuación $P(x \leq x_1)$ es la probabilidad de que la variable estocástica sea menor o igual al valor x_1 . Si $F(x)$ es diferenciable y existe $dF(x)/dx$, la primera función de densidad de probabilidad $p(x)$ se define como:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

de lo que se sigue que:

$$p(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$

Si el intervalo de valores posibles de x está acotado por a y b , tal que $a \leq x \leq b$, luego

$$p(x) \geq 0$$

sobre el intervalo y :

$$\int_a^b p(x) dx = 1$$

y es posible que $a = -\infty$ y $b = \infty$.

Podemos expresar la función

$$F(x_1) = P(x \leq x_1)$$

En términos de la primera función de densidad de probabilidad como:

$$P(x \leq x_1) = \int_a^{x_1} p(x) dx$$

Definiremos un valor esperado μ de la variable estocástica como $E\{x\}$, por la ecuación:

$$\int_a^b (x - \mu) p(x) dx = 0$$

o

$$E\{x\} = \mu = \int_a^{x_1} x p(x) dx.$$

El momento n -ésimo central es el valor esperado de $(x - \mu)^n$ está definido por:

$$E\{(x - \mu)^n\} = \int_a^b (x - \mu)^n p(x) dx = \mu^n$$

El valor esperado de un término producto xy de dos variables estocásticas x y y se expresa como:

$$E\{xy\} = \phi_{xy} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy)^n p(x, y) dx dy,$$

donde $p(x, y)$ se llama la función de densidad de probabilidad adjunta.

La primera función de densidad de probabilidad de la distribución normal o Gaussiana se expresa de la forma:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Como x está sólo en forma cuadrática la distribución es simétrica alrededor de $x = \mu$ y μ es el valor medio. El parámetro σ es la desviación típica y σ^2 es la varianza, que es una medida de la dispersión. Como σ decrece la curva es más puntiaguda y delgada. La varianza es el segundo momento central y está definida como.

$$E\{(x - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2$$

donde $p(x)$ es la distribución normal dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

La discusión anterior de la función de densidad de probabilidad se basa en un ensamble, que es una colección de posibles salidas. Ahora vamos a aplicar esta técnica a una variable azarosa simple $x(t)$ en lugar de a un ensamble. Esto es que vamos a reemplazar los procesos de promedio sobre el ensamble por promedios de tiempo. En la ecuación

$$\int_a^b (x - \mu) p(x) dx = 0$$

o

$$E\{x\} = \mu = \int_a^{x_1} xp(x) dx.$$

vamos a considerar que el promedio del ensamble es igual al promedio del tiempo, o sea:

$$E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt.$$

El conjunto de consideraciones que es necesario tomar con la variable azarosa $x(t)$ en el dominio del tiempo se llama la hipótesis ergódica, y la variable de tiempo se dice que viene de un proceso ergódico. Una condición necesaria para esta hipótesis, es que se requiere que la función de densidad de probabilidad de la variable azarosa $x(t)$, no debe cambiar por un corrimiento en el origen del tiempo y decimos que la variable es azarosa estacionaria y ergódica.

De la última ecuación el significado del valor medio esperado de una señal azarosa ergódica estacionaria, está dado por un proceso de promedio en el dominio del tiempo:

$$E\{x(t)\} = \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt,$$

donde la barra marca el promedio del tiempo. El valor esperado del producto $x(t) x(t + \tau)$, con un corrimiento τ en el tiempo involucra a la densidad adjunta de probabilidad dada por

$$E\{xy\} = \phi_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy)^n p(x, y) dx dy,$$

que en el dominio del tiempo vamos a definir como:

$$E\{x(t)x(t+\tau)\} = \phi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau) dt.$$

y se llama función de autocorrelación.

La varianza o el valor cuadrático medio $x(t)^2$ para $\tau = 0$, es:

$$E\{x(t)^2\} = \phi_{xx}(0) = \overline{x(t)^2}$$

y

$$\phi(\tau) = \phi(-\tau).$$

Una señal $x(t)$ cuya correlación está dada por:

$$E\{x(t)x(t+\tau)\} = \phi_{xx}(\tau) = N\delta(\tau)$$

se llama ruido blanco.

Si aplicamos las técnicas de correlación a una relación entrada-salida del sistema representado por su respuesta a un impulso $g(t)$, la función de correlación cruzada de entrada-salida es:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t)u(t+\tau) dt.$$

La salida $y(t)$ para una entrada determinista $u(t)$ está dada por la integral de Convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\eta)g(\eta) d\eta.$$

Si sustituimos la última ecuación en

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t)u(t+\tau) dt.$$

y reagrupamos tenemos:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(t-\eta)u(t-\tau) d\eta \right].$$

En esta ecuación la integral entre paréntesis cuadrados con el límite cuando el tiempo tiende a infinito es la función de autocorrelación $\phi_{uu}(\tau - \eta)$ y tenemos:

$$\phi_{uy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{uu}(t-\eta)g(\eta) d\eta.$$

Podemos decir que si la función de autocorrelación de entrada $\phi_{uu}(\tau - \eta)$ es una función de entrada dependiente del tiempo, la función de autocorrelación de entrada-salida $\phi_{uy}(\tau)$ será la respuesta. Si $\phi_{uy}(\tau)$ está dada por una función delta, $\phi_{uy}(\tau)$ será el patrón de la respuesta a un impulso del sistema.

8. Relaciones estadísticas en el dominio de la frecuencia

Vamos a describir las variables azarosas estacionarias en términos de su espectro de frecuencias. La transformación entre los dominios de tiempo y frecuencia están dadas por la transformación de Fourier:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

La función de autocorrelación $\phi_{xx}(\tau)$ de la variable azarosa $x(t)$ se transforma al dominio de las frecuencias por:

$$\phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

y la transformación inversa es:

$$\phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega$$

De la ecuación anterior si $\tau = 0$ tenemos la ecuación para el valor cuadrático:

$$\overline{x(t)^2} = \phi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(j\omega) d\omega$$

Como el valor cuadrático está asociado a la energía, el término $\phi_{xx}(j\omega)$ se llama el espectro de densidad de potencia que es una función real de ω , ya que no tiene corrimiento de fase. Si sustituimos:

$$e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$$

en la ecuación:

$$\phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

tenemos:

$$\phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)\cos\omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

Como $\phi_{xx}(\omega)$ es una función impar de τ , los términos producto $\phi_{xx}(\tau) \sin \omega\tau$ son pares en τ , y su integral sobre el intervalo infinito es cero. La ecuación

$$\phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

se reduce a:

$$\phi_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

Ya que el lado derecho de la última ecuación es una función impar de ω

$$\phi_{xx}(j\omega) = \phi_{xx}(-j\omega)$$

y

$$\phi_{xx}(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} \phi_{xx}(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

Cuando se tienen los datos de una señal azarosa primero calculamos la función de autocorrelación y luego sacamos la transformada de Laplace para obtener el espectro de potencia. Podemos usar el siguiente par de ecuaciones:

$$\phi_{xx}(\tau) = e^{-a|\tau|} \cos b\tau$$

$$\phi_{xx}(j\omega) = \frac{2a(a^2 + b^2 + \omega^2)}{[a^2 + (b + \omega)^2][a^2 + (b - \omega)^2]}$$

La ecuación:

$$\phi_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} \phi_{uu}(\tau - \eta) g(\eta) d\eta$$

es como la relación determinística de entrada-salida de un sistema lineal. Si tomamos el par de la transformada de Laplace de una relación entrada-salida, tenemos:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Y

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau - \eta) g(\eta) d\eta$$

donde $u(t)$ es la entrada, $y(t)$ es la salida y $g(t) = L^{-1}$. Vamos a escribir la relación de dominio del frecuencia de

$$\phi_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} \phi_{uu}(\tau - \eta) g(\eta) d\eta$$

como

$$\phi_{uy}(s) = G(s) \phi_{uu}(s)$$

donde

$$\phi_{uy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

y

$$\phi_{uu}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Necesitamos la transformada bilateral de Laplace porque las funciones del tiempo porque las funciones a ambos lados del origen del tiempo indefinidamente. Para la frecuencia real ω hacemos:

$$s = j\omega$$

y tenemos:

$$\phi_{uy}(j\omega) = G(j\omega) \phi_{uu}(j\omega)$$

donde $\phi_{uu}(j\omega)$ es el espectro de densidad de potencia de la función de correlación de entrada, y:

$$\phi_{uy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

es el espectro de densidad de potencia cruzado de las señales de entrada y de salida. De la ecuación:

$$\phi_{uy}(j\omega) = G(j\omega) \phi_{uu}(j\omega)$$

podemos afirmar que $\phi_{uu}(j\omega)$ y $\phi_{uy}(j\omega)$, se determinan por experimentación, luego la función de transferencia del sistema será:

$$G(j\omega) = \frac{\phi_{uy}(j\omega)}{\phi_{uu}(j\omega)}$$

Otra relación importante es la que existe entre el espectro de densidad de potencia y la entrada-salida. Para deducir esta relación vamos a tomar la integral de convolución para una salida $y(t)$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \eta) g(\eta) d\eta$$

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t + \tau - \xi) g(\xi) d\xi$$

Por la definición de autocorrelación tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) y(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \eta) g(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} u(t + \tau - \xi) g(\xi) d\eta d\xi dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t - \eta) u(t + \tau - \xi) dt \right\} g(\eta) g(\xi) d\eta d\xi, \end{aligned}$$

donde la integral entre corchetes es por definición la función de autocorrelación, por lo que tenemos:

$$\phi_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(t + \eta - \xi) g(\eta) g(\xi) d\eta d\xi,$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $e^{-s\tau}$ e integrando:

$$\phi_{yy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\eta} g(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\xi} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{uu}(t + \eta - \xi) e^{-s(t + \eta - \xi)} dt$$

El arreglo de exponenciales de la ecuación anterior se ajusta para que los factores sean reemplazados por funciones de autocorrelación de frecuencia de entrada y salida y la función de transferencia del sistema para obtener:

$$\phi_{yy}(s) = G(-s) G(s) \phi_{uu}(s)$$

En el dominio de la frecuencia, como $G(-j\omega)$ es el conjugado de $G(j\omega)$, tenemos:

$$G(j\omega) G(-j\omega) = |G(j\omega)|^2$$

Por lo que:

$$\phi_{yy}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 \phi_{uu}(j\omega)$$

y la función de transferencia:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\phi_{yy}(j\omega)}}{\sqrt{\phi_{uu}(j\omega)}}$$

9. Relaciones estadísticas en el espacio de estados

Vamos a considerar que todo vector azaroso es gaussiano, y con valor promedio cero. Un vector azaroso $\mathbf{x}$ es gaussiano cuando su distribución de probabilidades tiene la forma:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{X}} (\sqrt{2\pi})^n} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})' (\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}) \right]$$

y además $E\{\mathbf{x}\} = 0$ para un valor medio de $\mathbf{x} = 0$. Vamos a definir la matriz de covarianza como:

$$\mathbf{X} = E\{(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})' (\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})\}$$

Vamos a considerar el sistema discreto en el tiempo:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_k + \mathbf{Q}\mathbf{u}_k$$

Donde el vector de entrada $\mathbf{u}_k$ es valor medio cero, ergódico, ruido azaroso gaussiano sin correlación entre diferentes muestras, luego:

$$E\{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j'\} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } i \neq j \\ \mathbf{U} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Por lo que un vector de ruido blanco se define solamente para el caso continuo en el tiempo, un vector de ruido blanco discreto en el cual cada muestra es independiente le llamaremos también blanco.

Para calcular la covarianza de la matriz $\mathbf{X}$ del vector de estado $\mathbf{x}_k$ en la ecuación:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_k + \mathbf{Q}\mathbf{u}_k$$

La multiplicamos por la transpuesta

$$\mathbf{X}'_{k+1} = \mathbf{P}'\mathbf{x}'_k + \mathbf{Q}'\mathbf{u}'_k$$

Ambos lados y tomamos el valor esperado de cada producto vectorial. Ya que el estado $\mathbf{x}_k$ no es correlacionado con la entrada $\mathbf{u}_k$,

$$E\{\mathbf{u}_k \mathbf{x}'_k\} = 0$$

y obtenemos:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{P}' + \mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}'$$

La matriz de covarianza

$$\mathbf{X} = E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}'_k\}$$

se puede determinar por la ecuación:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{P}' + \mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}'$$

Si la respuesta escalar y_k del sistema está dada en términos del vector renglón $\mathbf{c}$ por la ecuación:

$$Y_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k$$

La varianza de la respuesta es:

$$E\{y_k^2\} = \mathbf{c}E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}'_k\}\mathbf{c}' = \mathbf{c}\mathbf{X}\mathbf{c}'$$

También podemos expresar la matriz $E\{\mathbf{x}_{k+m} \mathbf{x}'_k\}$ que corresponde a la función de autocorrelación en términos de variables escalares. Para este propósito multiplicamos por $\mathbf{x}'_k$ ambos lados de la ecuación:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_k + \mathbf{Q}\mathbf{u}_k$$

Y tomamos el valor esperado de cada producto vectorial. Si:

$$E\{\mathbf{u}_k \mathbf{x}'_k\} = 0$$

obtenemos:

$$E\{\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{x}'_k\} = \mathbf{P}\mathbf{X}$$

y

$$E\{\mathbf{x}_{k+m}\mathbf{x}'_k\} = \mathbf{P}^m \mathbf{X}$$

donde m es un entero positivo. Si m es negativo se debe transponer la ecuación:

$$E\{\mathbf{x}_{k+m}\mathbf{x}'_k\} = \mathbf{P}^m \mathbf{X}$$

de la forma:

$$E\{\mathbf{x}_k\mathbf{x}'_{k+m}\} = E\{\mathbf{x}_{k-m}\mathbf{x}'_k\} = \mathbf{X}(\mathbf{P}')^m$$

Las equivalencias de tiempo continuo de la ecuación

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{P}' + \mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}'$$

A través de

$$E\{\mathbf{x}_{k+m}\mathbf{x}'_k\} = \mathbf{P}^m \mathbf{X}$$

son:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

$$E\{\dot{\mathbf{y}}(t)^2\} = \mathbf{c}\mathbf{X}\mathbf{c}'$$

y

$$E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}'(t)\} = \mathbf{S}(\tau)\mathbf{X}, 0 \leq \tau$$

La ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{B}' = \mathbf{0}$$

A través de

$$E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}'(t)\} = \mathbf{S}(\tau)\mathbf{X}, 0 \leq \tau$$

Aplicado a un sistema descrito por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{u}(t)$ es un ruido blanco dado por:

$$E\{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}'(t + \tau)\} = \mathbf{U}\delta(\tau)$$

Para calcular la matriz de covarianza del vector de estado $\mathbf{x}(t)$,

$$\mathbf{X} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t)\}$$

Los elementos diagonales de:

$$E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}'(t)\} = \mathbf{S}(\tau)\mathbf{X}, 0 \leq \tau$$

Son funciones de autocorrelación de las variables de estado. $\mathbf{S}(\tau)$ es la matriz solución del sistema $e^{\mathbf{A}\tau}$.

Si tomamos el proceso límite que se da cuando el intervalo de muestreo T es infinitesimal, dt

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{I} + \mathbf{A} dt, \quad \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{B} dt$$

La ecuación que define la función δ es:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+$$

10. Control modal

En muchos problemas prácticos de control se encuentran casos en los cuales es imposible la medición completa de un vector de estado y más de uno menos de n variables de control se pueden aplicar a los objetos a controlar. Luego el número de medidas m y/o el número de controles r son menores que el orden del objeto. La matriz del controlador $\mathbf{K}$ llega a ser rectangular con $r \times m$ elementos por lo que aparece una dificultad en la búsqueda de estos parámetros controlables en el espacio de estados original, debido a que con $r \times m$ elementos sólo se puede lograr una corrección parcial en los n^2 elementos de $\mathbf{A}$ y es difícil ver los efectos de este control en la formulación original de espacio de estados, dada por:

$$\frac{dx}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}$$

Se obtiene una gran disminución en el número de elementos de $\mathbf{A}$ cuando se reduce a una diagonal o una forma canónica de Jordan Λ por una transformación de coordenadas:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{T}\mathbf{x}^* + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$

Cuando todos los valores propios del objeto de control son distintos y reales, sólo estos valores propios aparecen como elementos diagonales de Λ y Λ es diagonal.

La condiciones que deben satisfacer varios grados de control modal son más restrictivas que las condiciones de controlabilidad y observabilidad. En esta parte nos vamos a limitar a condiciones de entrada cero. El estado correspondiente al punto fijo de operación estará considerado como el espacio de estados original. Como se muestra en la figura 9, el objeto controlado modalmente se puede ver como un subsistema de un sistema de control en cascada.

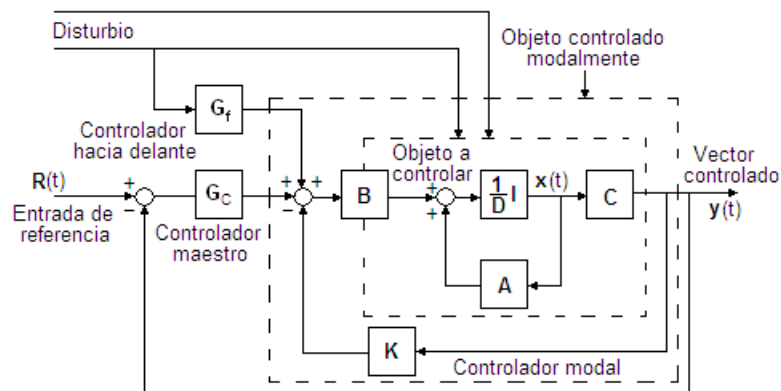


Figura 9. Objeto controlado modalmente como un subsistema de un sistema de control en cascada.

El sistema total también puede incluir, además del controlador modal $\mathbf{K}$, un compensador hacia delante para disturbios medibles. Ya que el control modal en este esquema totalizador actúa para recolocar los modos originales del objeto a controlar, deseamos mover el punto de operación cambiando el vector de referencia de entrada $\mathbf{r}$, la salida $\mathbf{y}$ tendrá mejoras dinámicas con estos cambios.

Como se ve de la figura anterior el controlador modal se puede ver como una retroalimentación interna sumada a la retroalimentación externa del controlador G_c que puede ser un PID o un PI. Desde este punto de vista se va a usar la gasa de control interno para modificar los valores propios de los sistemas (dinámica), mientras la gasa externa de control asegura cualquier estado deseado de equilibrio.

Para estudiar el principio básico del control modal, primero consideraremos un caso ideal donde todos los elementos del vector de estado $\mathbf{x}(s)$ son directamente medibles y el vector de control

$$\mathbf{U}_c(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

El objeto de control está descrito por:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + u_c, \quad u_c = Bu.$$

Para obtener la matriz $n \times n$ del controlador proporcional K debemos convertir la ecuación anterior a un dominio modal por:

$$X = Tx^*$$

Así que

$$\frac{dx^*}{dt} = \Lambda x^* + u_c^*$$

donde:

$$u^* = T^{-1}u_c$$

Si consideramos que todos los valores propios son reales y distintos, la matriz Λ de la ecuación

$$\frac{dx^*}{dt} = \Lambda x^* + u_c^*$$

es diagonal, por lo que supondremos que:

$$\Lambda_d = \begin{bmatrix} p_{1d} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & p_{nd} \end{bmatrix}$$

es la matriz del dominio modal deseado del objeto a controlar con control modal, donde $p_{1d}, \dots, p_{nd}$ son los valores propios de la gasa cerrada del sistema controlado. Por un vector de retroalimentación de dominio modal

$$u^* = -K^* x^*,$$

tenemos la ecuación del sistema de gasa cerrada

$$\frac{dx^*}{dt} = \Lambda x^* - K^* x^* = (\Lambda - K^*) x^* = \Lambda_d x^*$$

luego K^* , la matriz del dominio de retroalimentación modal se puede determinar por:

$$K^* = \Lambda - \Lambda_d$$

Nuestro siguiente problema es el control independiente de q modos de un objeto de n -ésimo orden, donde $q < n$ y q es el número de medidas si $m \leq y$ o q es el número de controles si $r \leq m$.

Un par de variables modales x_i^* y x_{i+1}^* que corresponden a un par complejo conjugado de valores propios que debe estar contenido en las q variables conjugadas como un par o borrados del conjunto como un par. Si un sistema tiene valores propios repetidos, está no es razón para un control modal para controlar solamente uno de ellos, en otras palabras, valores propios de alto orden

$$p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k}$$

deben ser todos incluidos o excluidos del control modal. Para propósito del control modales lógico considerar el control de los primeros modos q tales que: $\Re p_1 \geq \Re p_2 \geq \Re p_3 \geq \dots$

El vector del dominio modal x_q^* en este caso es de q dimensiones y deben producirse por la medición del vector y . El vector y y el vector x en el espacio modal están relacionados por:

$$Y = Fx^*, \\ F = CT$$

La matriz rectangular $\mathbf{F}$ de $m \times n$ consiste de una matriz cuadrada $\mathbf{F}_m$ y una matriz rectangular $\Delta\mathbf{F}$ de $m \times (n - m)$, tal que:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_m, \Delta\mathbf{F}_m]$$

Un modo orientado es práctico cuando existe $\mathbf{F}^{-1}$, esto es:

$$\det\mathbf{F}_m \neq 0$$

Consideraremos ideal a un sistema de medida cuando además de la ecuación anterior se cumple la siguiente condición:

$$\Delta\mathbf{F}_m = 0$$

La segunda condición implica que son observables $\mathbf{x}_{m+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$. En el diseño de sistemas de control modal es importante seleccionar puntos de medida y luego $\mathbf{C}$ de tal forma que la condición

$$\det\mathbf{F}_m \neq 0$$

se cumpla, y que los elementos de $\Delta\mathbf{F}_m$ sean tan pequeños como sea posible. Lo anterior significa que la medida debe ser sensible a los primeros m modos diferenciando entre ellos y al mismo tiempo insensible a los modos rechazados. Se hace inobservable un modo a un elemento sensitivo cuando el sensor está localizado en un nodo de ese modo. Si conocemos bien el vector propio $\mathbf{T}$ de un sistema, se puede escoger la matriz de medición $\mathbf{C}$ siempre que se satisfaga la condición

$$\Delta\mathbf{F}_m = 0$$

También podemos establecer condiciones en la manipulación. El vector de control $\mathbf{u}$ en el espacio de estados original, y el vector de control $\mathbf{u}^*$ en el dominio modal definido por:

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{u}_c^*$$

están relacionados por la ecuación:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{H}\mathbf{u}$$

y

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$$

Para tener un control modal efectivo se requiere que el vector de control en el dominio modal $\mathbf{u}^*$ se convierta en $\mathbf{u}$ en el espacio de estados óptimo y para que esto sea posible debe existir $\mathbf{H}^{-1}_r$, así que:

$$\text{Det } \mathbf{H}_r \neq 0$$

El control no provoca disturbios en $\mathbf{x}_{r+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$ si

$$\Delta\mathbf{H}_r = 0$$

esto si todos los otros modos diferentes de r se hacen incontrolables.

11. Sistemas no lineales

Cuando estudiamos un sistema físico, lo que buscamos es construir un modelo matemático, pero el modelo matemático que mejor describe al sistema depende de los factores físicos que incluyen intervalos de variables, consideraciones acerca de las componentes del sistema y sus acoplamientos. Como se ve, modelar es un problema que no es trivial, que requiere conocer al sistema antes de modelarlo. Estas notas para un curso son el estudio de los modelos matemáticos de los sistemas físicos que se describen por medio de ecuaciones diferenciales no lineales.

Veamos ejemplos. Como primer caso vamos a estudiar un péndulo simple, el cual se describe por medio de la ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin x = 0$$

donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración gravitacional.

Si hacemos la aproximación para ángulo pequeño de que:

$$\sin x \cong x$$

la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La solución a esta ecuación es:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

donde A y ϕ son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Esta ecuación diferencial describe un oscilador armónico simple y es un ejemplo de ecuación diferencial lineal.

Las ecuaciones diferenciales lineales tienen la propiedad de superposición, propiedad que podemos definir como:

Si $x_1(\cdot)$ y $x_2(\cdot)$ son soluciones de la ecuación diferencial, entonces $a x_1(\cdot) + b x_2(\cdot)$ también será una solución de la ecuación diferencial, donde a y b son constantes arbitrarias, el sistema es lineal.

Si ahora tomamos la ecuación:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

sin la aproximación para ángulo pequeño, tendremos que la solución no satisface el principio de superposición, ya que el periodo de oscilación en este caso depende de las condiciones iniciales.

Un ejemplo clásico de ecuación diferencial no lineal es la ecuación:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

que se conoce como ecuación de Van der Pol's. Esta ecuación se da en el circuito de la figura 10.

cuya ecuación es:

$$V = \frac{x^3}{3} - x$$

Esta ecuación presenta un ciclo límite, los cuales no se presentan en los sistemas lineales.

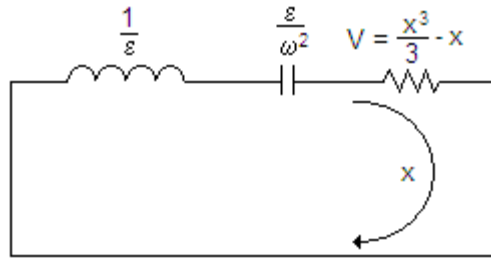


Figura 10. Circuito con ecuación de Van der Pol's.

Para definir un sistema no lineal vamos a emplear el concepto de linealidad, el cual nos dice que los sistemas que satisfacen el concepto del principio de superposición son lineales y los que no lo satisfacen son no lineales.

Consideremos un sistema caracterizado por la ecuación:

$$\dot{x} = X(x(t), u(t), t)$$

donde x es un vector, la función $X(\cdot, \cdot, \cdot)$ es continua en todos sus argumentos y sus derivadas parciales también, $u(t)$ es el vector de entrada y $x(t)$ es el estado del sistema. Vamos a considerar que $u(t)$ es una función continua conocida, la condición de continuidad es suficiente, aunque no necesaria, para la existencia de una solución única en el intervalo $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ para alguna ε , y con la condición inicial:

$$x(t_0) = x_0$$

Sea $x(t, x_0, t_0, u)$ la solución a la ecuación diferencial, con la condición inicial x_0 en $t = t_0$ y la entrada $u(t)$, $t \geq t_0$, entonces la ecuación:

$$\dot{x} = X(x(t), u(t), t)$$

es lineal porque satisface las siguientes propiedades básicas:

1. Linealidad de estado cero.

$$x(t, \theta x, t_0, a u_1, b u_2) = a x(t, \theta x, t_0, u_1) + b x(t, \theta x, t_0, u_2)$$

donde θx es el estado cero del sistema para toda entrada u_1, u_2 y constantes a y b .

2. Linealidad de entrada cero.

$$x(t, x_0^1, b x_0^2, t_0, \theta_u) = a x(t, x_0^1, t_0, \theta_u) + b x(t, x_0^2, t_0, \theta_u)$$

donde θ_u denota a la función de entrada cero, para los estados x_0^1 y x_0^2 y las constantes a y b .

3. Propiedad de descomposición.

$$x(t, x_0, t_0, u) = x(t, \theta x, t_0, u) + x(t, x_0, t_0, \theta_u)$$

para todo estado x_0 y entrada u .

12. Métodos de análisis

Los dos conceptos básicos en el análisis de sistemas no lineales son el de estabilidad y oscilación. La estabilidad la asociamos con los puntos de equilibrio del sistema o las trayectorias solución del sistema. Centramos nuestra atención alrededor de las perturbaciones que disturban al sistema de un punto de equilibrio, o alteren la trayectoria del sistema, y por lo mismo, su comportamiento.

La oscilación aparece en sistemas no lineales como periódica o no periódica, forzada o no forzada. En el análisis del sistema son de interés las condiciones para la existencia de oscilaciones, las fronteras de amplitud y el periodo de oscilación.

Para trabajar con problemas no lineales contamos con métodos de análisis que podemos clasificar en:

1. Métodos cualitativos
2. Métodos cuantitativos
3. Métodos computacionales.

Los métodos cualitativos consisten en encontrar propiedades de la solución, sin encontrar la solución. Los métodos cuantitativos consisten en encontrar la solución exacta o aproximada del sistema no lineal.

Los métodos computacionales consisten en desarrollar técnicas, tanto digitales como analógicas, para la solución en computadoras digitales, analógicas o híbridas, de las ecuaciones diferenciales no lineales.

12.1. Análisis del plano fase

Vamos a considerar un sistema descrito por un par de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

El método a estudiar es para sistemas de segundo orden.

La trayectoria de un sistema de segundo orden se puede graficar en un plano, por lo que es útil en el estudio de sistemas de segundo orden.

La solución al sistema de ecuaciones la vamos a estudiar en el plano (x_1, x_2) , plano que llamaremos plano fase.

Sean:

$$[x_1(t, x_{10}, x_{20}), x_2(t, x_{10}, x_{20})]$$

las soluciones al sistema de ecuaciones, donde (x_{10}, x_{20}) es la condición inicial en $t = 0$. La solución se describe al graficar en el plano fase una curva Γ contra t como parámetro, y la curva Γ se llama la trayectoria. Un punto (x_1, x_2) en el plano fase se llama punto singular del sistema de ecuaciones, si:

$$\begin{aligned}x_1(x_1, x_2) &= 0 \\ x_2(x_1, x_2) &= 0\end{aligned}$$

y se considera un punto aislado del sistema. Por el término aislado vamos a entender que existe una vecindad del punto (x_1, x_2) en el plano fase, tal que esta vecindad no contiene otro punto singular.

La consideración de continuidad de la función:

$$X_i(x_1, x_2), \frac{\partial X_i(x_1, x_2)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

nos permite expandir las funciones $X_1(x_1, x_2)$ y $X_2(x_1, x_2)$ en series de Taylor en la vecindad del punto singular, en la forma:

$$X_1(x_1, x_2) = X_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} (x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} (x_2 - \hat{x}_2) + X_1^*(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

$$X_2(x_1, x_2) = X_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} (x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} (x_2 - \hat{x}_2) + X_2^*(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

donde

$$X_1^*(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2) = X_2^*(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0\sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2}$$

donde 0 indica el comportamiento asintótico de la función. Este símbolo se emplea cuando la naturaleza exacta de la función no es material al argumento pero sólo se requiere su comportamiento asintótico.

Veamos, consideremos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en $\mathfrak{R}$. Sea x_0 el punto límite del conjunto en $\mathfrak{R}$. El elemento x_0 puede o no pertenecer al conjunto, luego definiremos:

1. $f(x) = 0(g(x))$

En x si existe una constante α tal que:

$$|f(x)| \leq \alpha |g(x)|$$

Para toda x en $\mathfrak{R}$ la constante α es independiente de x .

2. $f(x) = 0(g(x))$

Como $x \rightarrow x_0$ si existe una vecindad $N_{\alpha 0}$ de x_0 tal que

$$F(x) = 0(g(x))$$

3. $f(x) = 0(g(x))$

Como $x \rightarrow x_0$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe una vecindad N_{ε, x_0} , tal que

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

para $x \in \mathfrak{R} \cap N_{\varepsilon, x_0}$.

Vamos a emplear la siguiente notación:

$$y_1 = x_1 - \hat{x}_1, y_2 = x_2 - \hat{x}_2$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} = a_{11}, \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} = a_{12}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} = a_{21}, \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=\hat{x}_1 \\ x_2=\hat{x}_2}} = a_{22}$$

$$X_1^*(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2) = Y_1(y_1, y_2) = 0\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

$$X_2^*(x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2) = Y_2(y_1, y_2) = 0\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

el sistema se reduce a:

$$\dot{y}_1 = Y_1(y_1, y_2)$$

$$\dot{y}_2 = Y_2(y_1, y_2)$$

donde:

$$Y_1(y_1, y_2) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + 0\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

$$Y_2(y_1, y_2) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + 0\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

Con esto hemos linealizado la ecuación alrededor de un punto singular y transferimos el punto singular al origen para:

$$Y_1(0,0) = 0, Y_2(0,0) = 0$$

Podemos definir un punto singular en el origen para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= Y_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= Y_2(y_1, y_2)\end{aligned}$$

que es estable si para todo $\varepsilon > 0$, debe existir un $\delta(\varepsilon)$ tal que si:

$$\sqrt{Y_{10}^2 + Y_{20}^2} < \delta$$

la solución $Y_1(t, Y_{10}, Y_{20}), Y_2(t, Y_{10}, Y_{20})$, empezando desde (Y_{10}, Y_{20}) en $t = 0$ satisface:

$$\sqrt{Y_1^2(t, Y_{10}, Y_{20}) + Y_2^2(t, Y_{10}, Y_{20})} \leq \varepsilon$$

para toda $t \geq 0$.

El punto singular es inestable si no es estable.

Si despreciamos los términos de orden mayor a los lineales en la ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= Y_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= Y_2(y_1, y_2)\end{aligned}$$

podemos construir:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2\end{aligned}$$

que ahora describe un sistema lineal en lugar del no lineal. Se asume que.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Una singularidad que satisface esta ecuación se denomina una singularidad simple. Una singularidad simple es una singularidad aislada.

El comportamiento cualitativo consiste en dibujar trayectorias en el plano fase y la gráfica se llama gráfica del plano fase. En algunos casos es posible deducir el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal, del comportamiento de un sistema lineal y bajo este punto de vista discutiremos los sistemas lineales de segundo orden y derivaremos la condición bajo la cual un comportamiento se da bajo un sistema no lineal.

12.2. Sistemas lineales de segundo orden

El sistema lineal de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2\end{aligned}$$

se puede escribir como:

$$\dot{z} = Az$$

En notación matricial, donde A es una matriz 2×2 y su determinante es cero. La solución del sistema está dada por:

$$z(t) = e^{At}z_0$$

donde z_0 es la condición inicial en $t = 0$. De esta forma el comportamiento cualitativo del sistema:

$$\dot{z} = Az$$

puede deducirse de los valores propios de la matriz A.

Consideremos la transformación:

$$W = T z$$

Donde T es una matriz singular de 2×2 .

La ecuación diferencial para W está dada por:

$$\dot{W} = TAT^{-1}W$$

Las formas canónicas y las soluciones a la anterior ecuación son:

1. Forma diagonal.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

y su solución:

$$W_1(t) = W_{10}e^{\lambda_1(t)}$$

$$W_2(t) = W_{20}e^{\lambda_2(t)}$$

con valores propios λ_1 y λ_2 .

2. Forma de Jordan.

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

con solución:

$$W_1(t) = W_{20}te^{\mu t} + W_{10}e^{\mu t}$$

$$W_2(t) = W_{20}e^{\mu t}$$

3. Forma conjugada compleja.

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

con solución:

$$W_1(t) = e^{\alpha t}(W_{10} \cos \beta t - W_{20} \sin \beta t)$$

$$W_2(t) = e^{\alpha t}(W_{20} \cos \beta t + W_{10} \sin \beta t)$$

con valores propios:

$$\alpha + j\beta \text{ y } \alpha - j\beta$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \alpha$, y β son reales y W_{10}, W_{20} , son condiciones iniciales.

Dependiendo de la magnitud y signo de los valores propios aparecen varias configuraciones como:

Nodo.

Sean λ_1 y λ_2 negativas. El punto $(W_1(t), W_2(t))$ tiende al origen conforme $t \rightarrow \infty$, y la trayectoria que comienza en un punto cualquiera (W_{10}, W_{20}) se aproxima al origen, como se ve en la figura 11.

Esta configuración se llama nodo estable.

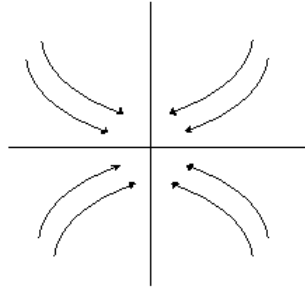


Figura 11. Trayectoria que comienza en un punto cualquiera y se aproxima al origen.

En el caso en el cual λ_1 y λ_2 son positivos, el punto $(W_1(t), W_2(t))$ tiende del origen hacia fuera conforme $t \rightarrow \infty$.

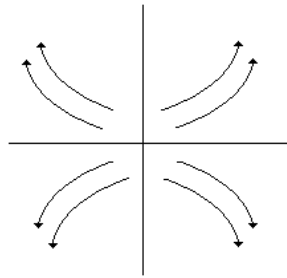


Figura. Nodo inestable.

Este tipo de caso se llama nodo inestable.

En la forma de Jordan tenemos que las μ negativas corresponden al nodo estable y las μ positivas, al nodo inestable.

Silla de montar.

Si λ_1 y λ_2 son de signos opuestos, como en el caso: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tenemos que $|W_1(t)| \rightarrow 0$, $|W_2(t)| \rightarrow \infty$. El movimiento del punto $(W_1(t), W_2(t))$ se dirige desde el origen a lo largo del eje x de W , y de nuevo del origen a lo largo del eje x de W_2 . La configuración se muestra en la figura 12:

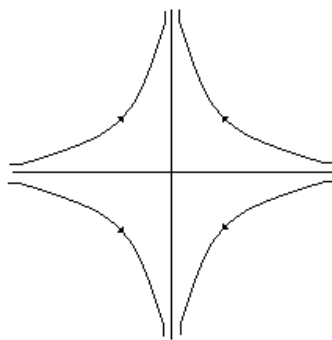


Figura 12. Configuración de silla de montar.

En el caso de $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ aparece una configuración similar.

Foco.

Si los valores propios de A son complejos conjugados con los valores $\alpha \pm \beta$, la TAT^{-1} tiene la forma de la figura anterior. Esta configuración se estudia mejor en coordenadas polares. Sea:

$$W_1 = R \cos \phi$$

$$W_2 = R \sin \phi$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \alpha R \\ \dot{\phi} &= \beta\end{aligned}$$

y las soluciones a estas ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned}R &= R_0 e^{\alpha t} \\ \phi &= \beta t + \phi_0\end{aligned}$$

donde R_0 y ϕ_0 son condiciones iniciales para R y ϕ respectivamente. Dependiendo de α tenemos:

Caso 1. $R(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. $\alpha < 0$. Espiral estable.

Caso 2. $|R(t)| \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$. $\alpha > 0$. Espiral inestable.

Caso 3. $R(t) = R_0$ para toda t . $\alpha = 0$. Centro.

El centro es un caso degenerado de espiral. Las configuraciones se muestran en la figuras 13 (a), (b), (c) respectivamente.

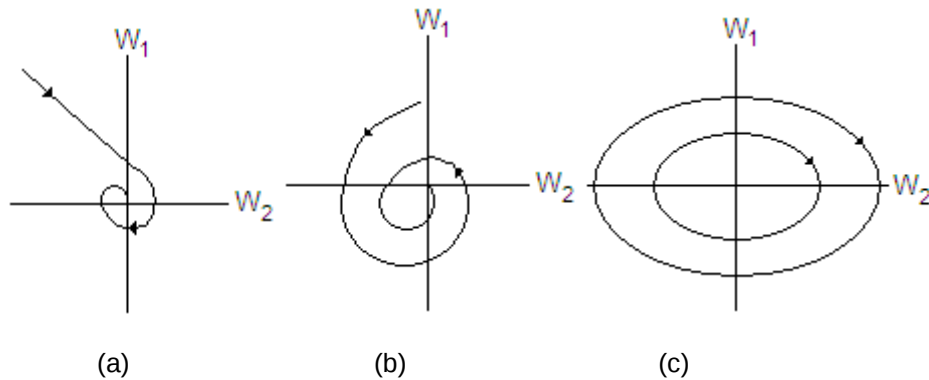


Figura 13. Configuraciones de foco.

En el plano fase existen líneas que tienen una importancia muy grande para ayudar a dibujar las gráficas en el plano fase. Las líneas a lo largo de:

$$\dot{z}_1 = 0$$

o

$$\dot{z}_2 = 0$$

a lo largo de la línea:

$$a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = 0$$

para

$$\dot{z}_2 = 0$$

la trayectoria se mueve paralela al eje z_1 .

Se puede ver que las ecuaciones:

$$\dot{z}_1 = 0$$

y

$$\dot{z}_2 = 0$$

no pueden tomar este valor al mismo tiempo excepto en el origen y esto porque el origen es un punto aislado, una singularidad aislada. Esta situación se muestra en la figura 14.

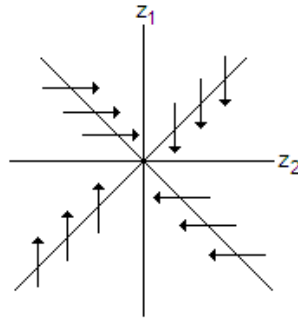


Figura 14. Singularidad aislada.

La dirección de las flechas se evalúa calculando la derivada diferente de cero.

Una línea a lo largo con:

$$\dot{r} = 0$$

Sea:

$$z_1 = r \cos \theta$$

$$z_2 = r \sin \theta$$

de

$$\dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2$$

$$\dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2$$

tenemos que:

$$\dot{r} = r[a_{11} \cos^2 \theta + (a_{12} + a_{21}) \sin \theta \cos \theta + a_{22} \sin^2 \theta]$$

Si $\theta = \theta_0$ es una solución, luego $\theta = \pi + \theta_0$ también será una solución, por lo que podemos rescribir la ecuación como:

$$\tan \theta = \frac{-(a_{12} + a_{21}) \pm \sqrt{(a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{22}}$$

donde:

$$(a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22} \geq 0$$

son las direcciones reales por las cuales r va de máximo a mínimo. La situación se muestra en la figura 15, en la cual la dirección de las flechas se determinan evaluando la derivada de θ .

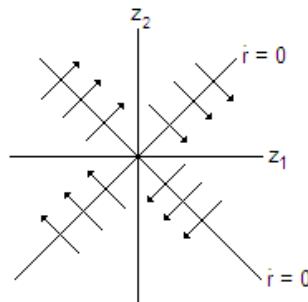


Figura 15. Direcciones reales por las cuales r va de máximo a mínimo.

la línea a lo largo de:

$$\dot{\theta} = 0$$

De nuevo empleando

$$\dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2$$

$$\dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2$$

se convierte en:

$$\dot{\theta} = a_{21} \cos^2 \theta + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta - a_{12} \sin^2 \theta$$

Los ceros de la derivada de θ son:

$$a_{21} \cos^2 \theta + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta - a_{12} \sin^2 \theta = 0$$

Si $\theta = \theta_0$ es una solución, luego $\theta = \pi + \theta_0$ también será una solución, por lo que podemos describir la ecuación como:

$$\tan \theta = \frac{(a_{22} + a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} + a_{11})^2 - 4a_{21}a_{12}}}{2a_{12}}$$

si

$$(a_{22} + a_{11})^2 - 4a_{21}a_{12} = 0$$

se tienen direcciones reales a lo largo de las cuales podemos obtener:

$$\dot{\theta} = 0$$

Esto se muestra en la figura 16.

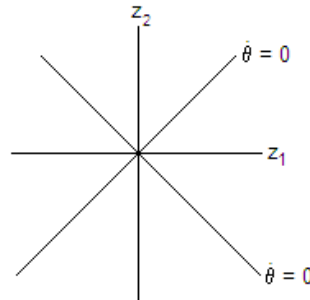


Figura 16. Direcciones reales a lo largo de las cuales $\dot{\theta} = 0$.

12.3. Sistemas no lineales de segundo orden

El comportamiento del sistema lineal de segundo orden dado por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2\end{aligned}$$

está relacionado con el no lineal dado por:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1 &= Y_1(y_1, y_2) \\ \dot{Y}_2 &= Y_2(y_1, y_2)\end{aligned}$$

por una variedad de resultados a los cuales llegamos dependiendo del tamaño de las no linealidades.

Teorema.

La estructura de las trayectorias en la vecindad de un punto singular en el origen para la ecuación diferencial lineal:

$$\dot{z} = Az$$

y la ecuación diferencial no lineal:

$$\dot{Y} = Ay + Y^*(y)$$

son similares en el caso del nodo, la silla de montar, y la espiral.

Prueba.

Sea:

$$Y^*(y) = \begin{bmatrix} Y_1^*(y_1, y_2) \\ Y_2^*(y_1, y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o(y_1^2 + y_2^2) \\ o(y_1^2 + y_2^2) \end{bmatrix}$$

y en el origen para que el sistema lineal sea una espiral estable como $\alpha < 0$, $\beta > 0$. en este caso el sistema lineal se puede transformar a coordenadas polares, dando:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \alpha R \\ \dot{\theta} &= \beta \end{aligned}$$

El comportamiento de la solución está descrito por $R(t) \rightarrow 0$ y $\theta(t) \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$. En la aplicación de la misma transformación al sistema lineal, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{R}' &= \alpha R' + \eta_1(R', \theta') \\ \dot{\theta}' &= \beta + \eta_2(R', \theta') \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_1(R', \theta') &= 0 \\ \eta_2(R', \theta') &= 0 \end{aligned}$$

Podemos elegir R^* tal que:

$$\begin{aligned} |\eta_1(R', \theta')| &\leq \alpha R' \\ |\eta_2(R', \theta')| &\leq \beta^* < \beta \end{aligned}$$

para $R' < R^*$.

Si las condiciones iniciales están dentro del círculo de radio R^* , se ve que $R' \rightarrow 0$ y $\theta(t) \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$.

12.4. Análisis global del plano fase

Para los sistemas lineales y no lineales, es similar la estructura de las trayectorias bajo condiciones posibles de no linealidad. Esto posibilita graficar las trayectorias del plano fase en la vecindad de un punto singular. Si el sistema no lineal tiene varios puntos singulares, podemos graficar las trayectorias en la vecindad de cada uno de estos puntos singulares, ya que la solución es única. Bajo ciertas condiciones es posible construir las trayectorias para todo el plano fase, a partir de conocer las trayectorias en la vecindad de todos los puntos singulares.

Vamos analizar la ecuación de movimiento del péndulo descrito por:

$$\ddot{\theta} + k \sin \theta = 0$$

donde k es una constante mayor que cero. Sabemos que:

$$\dot{\theta} = v$$

por lo que tenemos que las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ v &= -k \sin \theta \end{aligned}$$

El punto singular del sistema está en $(n\pi, 0)$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Por la transformación:

$$\begin{aligned} \phi &= \theta - n\pi \\ \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= (-1)^{n+1} k \sin \phi \end{aligned}$$

En la vecindad del punto singular las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= (-1)^{n+1} k\phi\end{aligned}$$

lo que da un punto de silla de montar si n es par o un centro si es impar.

1. Podemos ver que las trayectorias no se interceptan, a excepción del punto singular, porque la solución es única.
2. Las trayectorias del sistema lineal se aproximan al no lineal, en su comportamiento en la vecindad del punto singular.
3. Las trayectorias son curvas continuas.
4. Los centros no degeneran en espirales, se tiene el retrato de fase completo como se ve en la figura 17.

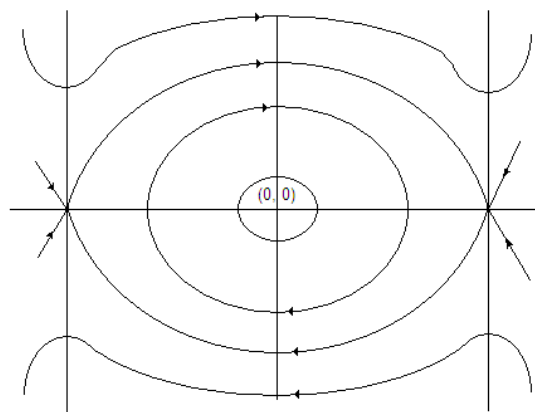


Figura 17. Retrato de fase completo.

El procedimiento que seguimos fue:

1. Dividir el plano fase en regiones dentro de las cuales, las trayectorias son las del sistema lineal.
2. Asignamos puntos singulares a cada región
3. Se determinó la naturaleza del punto singular
4. Se conectaron las trayectorias que pertenecen a varias regiones para obtener el retrato de fase.

El procedimiento que seguimos fue:

5. Dividir el plano fase en regiones dentro de las cuales, las trayectorias son las del sistema lineal.
6. Asignamos puntos singulares a cada región
7. Se determinó la naturaleza del punto singular
8. Se conectaron las trayectorias que pertenecen a varias regiones para obtener el retrato de fase.

13. Estabilidad de sistemas lineales

Sea el sistema caracterizado por:

$$\dot{z} = Az$$

donde z es un vector n y A es una matriz constante $n \times n$.

El punto de equilibrio del sistema está dado por la solución de la ecuación: $Az = 0$, incluyendo la solución trivial $z = 0$.

Si estamos interesados en la estabilidad del punto de equilibrio además de del origen, una transformación simple reduce el problema a estudiar. La solución de:

$$\dot{z} = Az$$

está dada por:

$$z(t) = e^{A(t-t_0)} z_0$$

donde z_0 es la condición inicial en $t = t_0$.

Vamos a investigar la relación entre la localización de los valores propios de la matriz A y la estabilidad del sistema

$$\dot{z} = Az$$

Para lograr esto consideremos la transformación T ,

$$w = Tz$$

Donde T es una matriz $n \times n$ no singular. La ecuación diferencial para W está dada por:

$$\dot{w} = TAT^{-1}w$$

TAT^{-1} se puede reducir a:

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & & 0 \\ & J_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_m \end{bmatrix}$$

donde:

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda_{m_0+i} & 1 & & 0 \\ & J_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_{m_0+m} \end{bmatrix}$$

Los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_0}$ son de multiplicidad uno y los valores propios λ_{m_0+i} es de multiplicidad $m_i > 1$, $i = 1, \dots, m$. Es fácil ver que:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_0 t} & & 0 \\ & e^{J_1 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{J_m t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_0 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_{m_0} t} \end{bmatrix}$$

y

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_{m0} + jt}$$

Si la parte real de cada uno de los valores propios es menor que cero, todos los valores propios caen en la derecha del plano, luego cada término de la matriz e^{Jt} tiende a cero como $t \rightarrow \infty$. Esto más el hecho que:

$$z = T^{-1} e^{J(t-t_0)} T z_0$$

nos permite obtener el siguiente teorema:

Teorema.

Si los valores propios de la matriz A están en lado derecho del plano, luego los puntos de equilibrio en el origen para el sistema

$$\dot{z} = Az$$

es asintóticamente estable.

13.1. Estabilidad de sistemas no lineales

El concepto de estabilidad de un sistema es complicado, ya que la idea de estabilidad tiene muchos significados coloquiales, así que vamos a precisar el concepto con la ayuda de las siguientes definiciones:

El término estabilidad está definido en el contexto del sistema:

$$\dot{Y} = Y(y, t)$$

en el cual no se pierde generalidad si consideramos al origen como el punto singular del sistema.

El problema de estabilidad de una trayectoria puede ser reducido al problema de estabilidad de un punto de equilibrio. Sea el sistema descrito por:

$$\dot{X} = X(x, t)$$

y sea $x'(t)$ una solución particular del sistema. La estabilidad de la solución la vamos a estudiar si consideramos la desviación de la solución $x'(t)$. Sea:

$$x(t) = x'(t) + y(t)$$

luego:

$$\dot{x}(t) = X(x'(t), t) + Y(y(t), t)$$

donde $Y(y, t)$ es el remanente después del primer término. Si empleamos el hecho de que:

$$\dot{x}' = X(x'(t), t)$$

tenemos:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

y

$$y(0, t) = 0$$

luego el estudio de la estabilidad de $x'(t)$ de:

$$\dot{x} = X(x, t)$$

es equivalente a estudiar la estabilidad de la solución trivial de:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

En otras palabras la estabilidad de una trayectoria se ha reducido a la estabilidad de un punto de equilibrio.

La solución de un sistema dado por:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

con condiciones iniciales y_0 en $t = t_0$ se denota por $y(t, y_0, t_0)$. La norma del vector Y se denota por $\|y\|$. Sin pérdida de generalidad asumiremos la norma como:

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$$

La norma de la matriz $A = (a_{ij})$ está dada por:

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

La definición de estabilidad de un punto singular de un sistema de segundo orden será:

Un punto singular es estable si para cualquier círculo en el plano fase que encierre al punto singular, llamado el círculo ε , existe otro círculo que encierra al punto singular, que llamaremos círculo δ , tal que cualquier trayectoria que comience dentro del círculo δ , estará confinada dentro del círculo ε para todo $t \geq t_0$. Podemos decir también que si pequeñas perturbaciones al sistema en el punto singular, se mantienen pequeñas, el sistema es estable.

Luego podemos definir:

1-. Estable: el punto de equilibrio en el origen para el sistema:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

decimos que es estable, si para toda $\varepsilon > 0$ en cualquier t_0 , existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que:

$$\|y_0\| < \delta$$

implica que

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$$

para todo $t \geq t_0$.

2. Uniformemente estable: El punto de equilibrio del sistema:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

en el origen se dice que es uniformemente estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que:

$$\|y_0\| < \delta$$

y todo t_0 :

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$$

para todo $t \geq t_0$.

3-. Asintóticamente estable: el punto de equilibrio en el origen del sistema:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

se dice que es asintóticamente estable si:

- El origen es estable
- Existe una función real $\delta'(t_0)$ tal que para todo

$$\|y_0\| < \delta', y(t, y_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty.$$

Uniforme asintóticamente estable: el punto de equilibrio en el origen es uniforme asintóticamente estable si el punto de equilibrio está:

- Uniformemente estable
- Existe una constante δ' tal que para toda:

$$\|y_0\| < \delta', y(t, y_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty.$$

La noción de estabilidad y asintóticamente estable son nociones locales porque estamos interesados en el comportamiento del sistema en una pequeña vecindad del punto de equilibrio. Debemos enfatizar que un sistema puede ser inestable aunque tenga que $y(t, y_0, t_0) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, para todo y_0 .

4. Podemos definir el concepto de estabilidad global como:

El punto de equilibrio en el origen para el sistema:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

se dice que es globalmente estable si:

- El origen es uniforme asintóticamente estable.
- Para toda $\eta > 0$ existe $\psi(\eta)$ tal que:

$$\|y_0\| \leq \eta$$

implica

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \psi(\eta)$$

para todo $t \geq t_0$.

- Para todo y_0 , $y(t, y_0) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Esta es la noción más fuerte en estabilidad.

Esta definición implica que el punto de equilibrio es uniformemente estable, todas las soluciones son uniformemente acotadas y todas las soluciones comienzan con una condición inicial arbitrariamente grande que se aproxima al punto de equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$.

13.2. Estabilidad local de sistemas no lineales

En el caso de sistemas de segundo orden se ha encontrado que las estructuras de las trayectorias en la vecindad del punto de equilibrio para los sistemas lineales y no lineales, están relacionados. Para sistemas de n-ésimo orden es válido un resultado similar.

Teorema.

Si el sistema:

$$\dot{z} = Az$$

es asintóticamente estable global, el sistema

$$\dot{y} = Ay + f(y)$$

es asintóticamente estable si:

- A es una matriz constante
- $f(\cdot)$ es continua en la misma vecindad del origen.
-

$$\frac{\|f(y)\|}{\|y\|} \rightarrow 0 \text{ como } \|y\| \rightarrow 0$$

Prueba: Elegimos la transformación T dada por:

$$z = T^{-1}w$$

el sistema

$$\dot{z} = Az$$

se reduce a:

$$\dot{w} = TAT^{-1}w$$

donde

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & & b_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde las λ 's son los valores propios del sistema y $|b_{ij}| \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es un número dado. Si aplicamos la transformación al sistema no lineal

$$\dot{y} = Ay + f(y)$$

obtenemos:

$$\dot{y}'_k = \lambda_k y'_k + \sum_{j>k}^n b_{kj} y'_j + f'_k(y') \quad k = 1, 2, \dots, n$$

donde $f'(\cdot)$ satisface las mismas condiciones que $f(\cdot)$.

Sea:

$$R^2 = \sum_{k=1}^n |y'_k|^2 = \sum_{k=1}^n y'_k \cdot y'_k$$

$$\alpha = \max_i (\text{parte real de } \lambda_i)$$

Si derivamos y simplificamos tenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (R^2) \leq \alpha R^2 + \varepsilon \|y'\|^2 + \|y'\| + \|f'(y')\|$$

Se ve que $\alpha < 0$, f' es continua y

$$\frac{\|f(y)\|}{\|y\|} \rightarrow 0 \text{ como } \|y\| \rightarrow 0$$

se tiene que:

$$\frac{dR^2}{dt} < 0$$

y el sistema es asintóticamente estable.

13.3. Método directo de Liapunov

La idea principal de Liapunov se deriva de las siguientes intuiciones. Consideremos un sistema aislado y sea $y(t, y_0, t_0)$ una solución del sistema. Sea $v(y(t, y_0, t_0))$ la energía asociada al sistema aislado. Si la derivada de $v(y)$ respecto a t es negativa para todo $y(t, y_0, t_0)$ excepto en el punto de equilibrio, se sigue que decrece la energía del sistema, conforme t se incrementa. Finalmente el sistema debe alcanzar el punto de equilibrio.

Podemos ver con el ejemplo del circuito eléctrico de la figura 18:

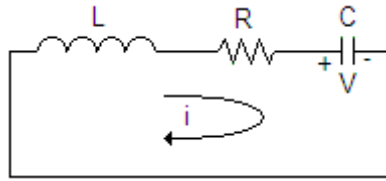


Figura 18. Circuito LRC.

Las ecuaciones del circuito son:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{iR}{L} - \frac{V}{L}$$

Denotaremos la solución por

$$(i(t), v(t)) = (i(t, i_0, V_0, t_0))$$

donde i_0 y V_0 son la corriente y el voltaje iniciales. La energía del sistema es:

$$V(i(t), v(t)) = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

y la razón de cambio de la energía es

$$\frac{dV(i(t), v(t))}{dt} = Li(t)\dot{i}(t) + Cv(t)\dot{v}(t)$$

Si sustituimos para las derivadas de i y V , en las ecuaciones del circuito, tenemos:

$$\frac{dV(i(t), v(t))}{dt} = -i^2(t)R$$

que se debe a la energía disipada en el resistor R . Por este hecho de la disipación de la energía podemos concluir que el sistema eventualmente alcanza el punto de equilibrio, en el cual $i = 0$ y $V = 0$, podemos analizar la superficie de la ecuación:

$$V = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cv^2$$

la cual se muestra en la figura 19.

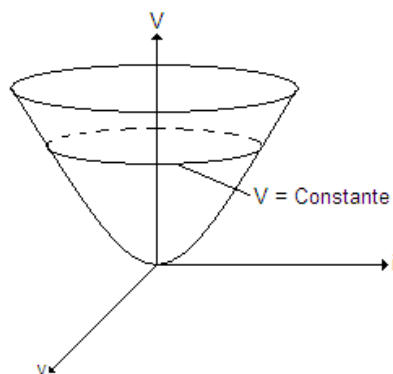


Figura 19. Superficie de la ecuación.

El lugar para $V = \text{cte}$ son elipses en la superficie de la copa. Si el circuito empieza con las condiciones iniciales (i_0, v_0) y graficamos la trayectoria de forma que el punto $(i(t), v(t))$ cruza el punto $V(i, v) = \text{cte}$ y se mueve hacia el punto más alto de la copa, que es el punto de equilibrio.

Es fácil asociar la función de energía $V(i(t), v(t))$ con el circuito y con sus ecuaciones. Dado un conjunto de ecuaciones que describen un sistema, no es obvio como asociar una función de energía con las ecuaciones. En efecto, el concepto de energía no es natural a ciertos sistemas, como los sistemas de control. Liapunov formalizó la idea de usar funciones escalares en lugar de funciones de energía asociadas con el sistema para investigar su estabilidad. Esta función se conoce como la función de Liapunov y el método de investigar la estabilidad usando la función de Liapunov, se conoce como el método directo de Liapunov. La función de Liapunov se emplea función de prueba y se obtienen resultados tanto locales como globales.

Decimos que una función escalar $V(y)$ es definida positiva en la vecindad del origen η si $V(0) = 0$, $V(y) > 0$ cuando $y \neq 0$ y y está en la vecindad η . Si $-V(y)$ es positiva definida, se dice que la función es negativa definida.

Una función escalar $V(y)$ es positiva semidefinida en una vecindad η del origen si $V(0) = 0$ y $V(y) \geq 0$ con y en la vecindad η . Si $-V(y)$ es positiva semidefinida, decimos que la función es negativa semidefinida.

Los resultados de Liapunov están dados por los siguientes teoremas:

Teorema de Estabilidad.

El punto de equilibrio en el origen para el sistema:

$$\dot{y} = Y(y)$$

es estable si existe una función escalar positiva definida $V(y)$ con derivadas parciales continuas tal que las derivadas de $V(y)$ a lo largo de la solución del sistema, dada por:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} \dot{y}_i$$

es negativa semidefinida en alguna vecindad η del origen.

La derivada de la función escalar $V(y)$ a lo largo de la solución del sistema diferencial

$$\dot{z} = Az$$

o

$$\dot{y} = Y(y)$$

se denotará por $\dot{V}(y)$.

Teorema de estabilidad asintótica.

El punto de equilibrio en el origen del sistema

$$\dot{y} = Y(y)$$

es estable si existe una función escalar positiva definida $V(y)$ con derivadas parciales continuas tal que la derivada de $V(y)$ a lo largo de la solución del sistema $\dot{V}(y)$ es negativa definida en alguna vecindad η del origen.

Teorema de estabilidad asintótica uniforme global.

Si existe una función escalar $V(y)$ con derivadas parciales continuas y funciones escalares continuas $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$, tales que

1. $A(0) = b(0) = c(0) = 0$

2. $A(r)$, $b(r)$ son no decrecientes y $0 < a(\|y\|) \leq V(y) \leq b(\|y\|)$, $y \neq 0$
3. $C(r)$ es no decreciente y la derivada de $V(y)$ a lo largo de la solución satisface

$$\dot{V}(y) \leq -c(\|y\|) < 0, \quad y \neq 0$$

4. $a(r) \rightarrow \infty$ como $r \rightarrow \infty$.

Luego el punto de equilibrio en el origen para el sistema es asintóticamente uniforme estable en global.

Prueba: La condición:

$$\dot{V}(y) \leq -c(\|y\|) < 0$$

implica que $V(y)$ decrece monótonamente a lo largo de la solución del sistema. Ahora para cualquier $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta(\varepsilon) < b^{-1}(a(\varepsilon))$, donde $b^{-1}(a(\varepsilon))$ es la menor γ tal que $b(\gamma) = a(\varepsilon)$. Luego para $\|y_0\| < \delta(\varepsilon)$, valen las siguientes desigualdades.

$$a(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq V(y(t, y_0, t_0)) \leq V(y(t_0, y_0, t_0))$$

$$a(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq V(y_0)$$

$$a(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq b(\|y_0\|)$$

$$a(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq a(\varepsilon)$$

luego

$$a(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq a(\varepsilon)$$

que implica

$$\|y(t, y_0, t_0)\| \leq a(\varepsilon)$$

ya que $a(\cdot)$ es una función no decreciente, por lo que el sistema es uniformemente estable.

Para mostrar que el sistema uniforme asintóticamente estable necesitamos encontrar δ_0 tal que $\|y_0\| < \delta_0$ y para todo $\varepsilon > 0$ debe existir $T(\varepsilon)$, tal que:

$$t \geq T(\varepsilon) \Rightarrow \|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon.$$

Sea $r > 0$ y elijamos:

$$\delta_0 = \delta(r),$$

$$T(\varepsilon) = \frac{b(\delta_0)}{c(\delta(\varepsilon))},$$

$$\|y_0\| \leq \delta_0.$$

Supóngase para:

$$t \in [t_0, t_0 + T^*]$$

$$\|y(t, y_0, t_0)\| > \varepsilon.$$

Usando la condición $C(r)$ es no decreciente y la derivada de $V(y)$ a lo largo de la solución satisface

$$\dot{V}(y) \leq -c(\|y\|) < 0$$

se obtiene:

$$c(\|y(t, y_0, t_0)\|) \geq c(\delta(\varepsilon))$$

$$\dot{V}(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq -c(\delta(\varepsilon))$$

Integrando esta desigualdad de t_0 a t se tiene:

$$V(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq V(y_0) - c(\delta(\varepsilon))(t - t_0)$$

$$V(\|y(t, y_0, t_0)\|) \leq b(\delta_0) - c(\delta(\varepsilon))(t - t_0)$$

0

$$V(\|y(t_0 + T^*, y_0, t_0)\|) \leq b(\delta_0) - c(\delta(\varepsilon))T^* = 0$$

que es una contradicción, por lo que debe existir $t^* \in (t_0, t_0 + T^*)$, tal que: $\|y(t, y(t^*, y_0, t_0), t^*)\| < \delta(\varepsilon)$. Si elegimos $T(\varepsilon) = T^*$, tenemos que:

$$\|y(t, y(t^*, y_0, t_0), t^*)\| < \varepsilon$$

para $t \geq t^*$, por lo que el sistema es uniforme asintóticamente estable. Si r se puede elegir arbitrariamente grande y $a(r) \rightarrow \infty$ como $r \rightarrow \infty$, tenemos estabilidad uniforme asintóticamente global.

Teorema de LaSalle

Sea $V(y)$ una función escalar con derivadas parciales continuas que satisface:

1. $V(y) > 0$ si $y \neq 0$, y $V(0) = 0$
2. $\dot{V}(y) \leq 0$ si $y \neq 0$, y $\dot{V}(0) = 0$
3. $V(y) \rightarrow \infty$ como $\|y\| \rightarrow \infty$.
4. $\dot{V}(y(t, y_0, t_0))$ no es cero bajo ninguna solución $y(t, y_0, t_0)$ que no sea la solución trivial $y = 0$.

Luego el punto de equilibrio en el origen para el sistema

$$\dot{y} = Y(y)$$

es asintóticamente estable global.

La determinación de la estabilidad por el método directo de Liapunov, se centra en la elección de una función positiva definida, por lo que cuando esta elección es posible, tenemos la posibilidad de deducir la estabilidad del sistema. Pero la verdad es que no existe un método general para elegir la función de Liapunov. En efecto, este es el mayor inconveniente del método. Se han encontrado varias técnicas, pero resulta que cada una corresponde a una clase particular de sistemas.

Algunas veces es posible mostrar que un sistema es inestable por el método de Liapunov. Un resultado obvio es: si $V(\cdot)$ y $\dot{V}(\cdot)$ son positivas definidas, el origen es inestable. Esto se puede relacionar con:

$$\dot{V}(y) = \lambda v(y) + w(y) \text{ para toda } y$$

donde $\lambda > 0$ y $w(\cdot) \geq 0$ en la vecindad η del origen.

Teorema de inestabilidad de Cetaev

El origen está en un punto de equilibrio inestable si existe una función $V(y)$ con derivadas parciales continuas en la vecindad η del origen y $\eta^* \subset \eta$ tal que:

1. El origen es un punto frontera de η^* y $V(y) = 0$ cuando y es un punto frontera de η^* .
2. $V(y)$ y $\dot{V}(y) \geq 0$ si $y \in \eta^*$.

13.4. Método de frecuencia de Popov

El sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\phi(\sigma) \\ \sigma &= cx \end{aligned}$$

donde A es una matriz constante, b y c son vectores constantes y $\phi(\sigma)$ es una función continua de σ .

Las siguientes consideraciones serán válidas en nuestra discusión:

1. Los valores propios de la matriz constante A están en el lado izquierdo del plano
2. $\phi(0) = 0$

3. $0 < \phi(\sigma)/\sigma \leq k < \infty, \sigma \neq 0$.

Las condiciones 1 y 3 en la no linealidad se expresan diciendo que $\phi(\cdot)$ está en el sector $(0, k]$. este caso se conoce como el caso directo de control. El sistema se puede reducir a un sistema de gasa cerrada como el de la figura 20.

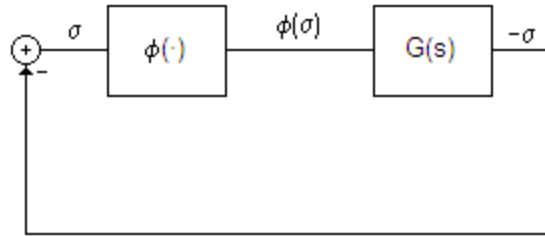


Figura 20. Sistema de gasa cerrada.

$$G(s) = c(sI - A)^{-1} b$$

Donde I es la matriz idéntica. Una característica esencial del problema es que la no linealidad está especificada por un sector en vez de una función no lineal particular. Lo anterior es motivado por las aplicaciones en ingeniería donde las características no lineales no se pueden especificar con precisión porque cambian con el tiempo debido al agotamiento de sus componentes y otros tipos de efectos. El concepto de estabilidad para toda característica en un sector dado se llama estabilidad absoluta. Daremos su definición formal:

Si el punto de equilibrio en el origen para el sistema dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - b\phi(\sigma) \\ \sigma &= cx\end{aligned}$$

es asintóticamente estable en lo global para toda $\phi(\cdot)$ tal que:

$$0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leq k$$

se dice que el origen es absolutamente estable en el sector $(0, k]$.

Dados los parámetros A, b, c , ¿el sistema es absolutamente estable? Y podemos también preguntarnos si dados los mismos parámetros, ¿cuál es el máximo k tal que el sistema sea absolutamente estable.

Responderemos las preguntas mediante el uso de las funciones de Liapunov.

$$V(x) = x'Px + \beta \int_0^\sigma \phi(u) du$$

donde

$$P = \int_0^\infty e^{A'\tau} Q e^{A\tau} d\tau$$

es una matriz positiva definida y β es una constante positiva. P satisface la ecuación matricial:

$$PA + A'P = -Q$$

V es positiva definida. Luego, $V(0) = 0, V(x) > 0, x \neq 0$ y $V(x) \rightarrow \infty$ como $\|x\| \rightarrow \infty$. Ahora

$$\dot{V}(x) = -x'Qx - x'(2Pb - \beta A'c)\phi(\sigma) - \beta c'b\phi^2(\sigma)$$

que podemos describir como:

$$\dot{V}(x) = -\left(\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k}\right)\phi(\sigma) - [x', \phi] \tilde{Q} \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}$$

donde

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\alpha = Pb - \frac{\beta A'c + c}{2}$$

y

$$\gamma = \beta c'b + \frac{1}{k}.$$

Si $\tilde{Q}$ es positiva definida, luego $\dot{V}$ es negativa definida, y la condición para positiva definida de $\tilde{Q}$ se reduce a la desigualdad:

$$\gamma - \alpha' Q^{-1} \alpha > 0$$

o

$$\frac{1}{k} > \alpha' Q^{-1} \alpha - \beta c'b$$

Teorema de Popov.

El sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\phi(\sigma) \\ \sigma &= cx \end{aligned}$$

es absolutamente estable en el sector $(0, k]$ si existe un número real q tal que la desigualdad:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega)] + \frac{1}{k} \geq \eta > 0$$

vale para todo real $\omega \geq 0$ donde η es un número pequeño arbitrario, y $0 < k < \infty$. La ecuación anterior involucra verificar lo positivo de la función en el eje $j\omega$, conocido como el eje de la frecuencia. Esto nos lleva a llamarle el dominio de la frecuencia.

Vamos a considerar el caso lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\phi(\sigma) \\ \sigma &= cx \end{aligned}$$

y vamos a aplicar el criterio de Nyquist. Sea:

$$\begin{aligned} X_N &= \operatorname{Re}[G(j\omega)] \\ Y_N &= \operatorname{Im}[G(j\omega)] \\ W_N &= X_N + jY_N \end{aligned}$$

Luego el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - b\phi(\sigma) \\ \sigma &= cx \end{aligned}$$

es estable si la gráfica de W_N en el plano (X_N, Y_N) no encierra al punto $(-1/h, 0)$ como lo muestra la figura 21.

La desigualdad de Popov tiene una interpretación geométrica elegante, hagamos:

$$\begin{aligned} X_P &= \operatorname{Re}[G(j\omega)] \\ Y_P &= \operatorname{Im}[G(j\omega)] \end{aligned}$$

$$W_P = X_P + jY_P$$

entonces:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega)] + \frac{1}{k} \geq \eta > 0$$

llega a ser:

$$X_P - qY_P + \frac{1}{K} \geq \eta > 0$$

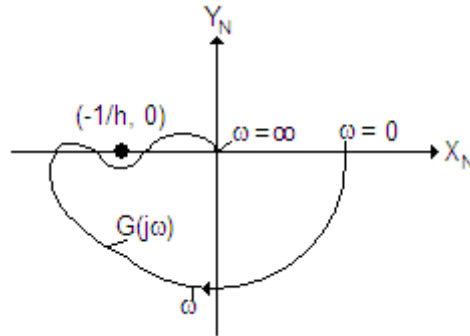


Figura 21. El plano (X_N, Y_N) no encierra al punto $(-1/h, 0)$.

$$X_P - qY_P + \frac{1}{K} \geq \eta > 0$$

Si se satisface la ecuación:

$$X_P - qY_P + \frac{1}{K} = 0$$

en el plano (X_P, Y_P) se debe encontrar una línea recta, llamada línea de Popov, con pendiente $1/q$ que intercepte el eje X_P en $-1/k$. Para la estabilidad la gráfica de W_P , con ω como parámetro cae estrictamente a la derecha de la línea de Popov, en otras palabras, el plano cerrado a la izquierda de la línea de Popov es una región prohibida, como lo muestra la figura 22.

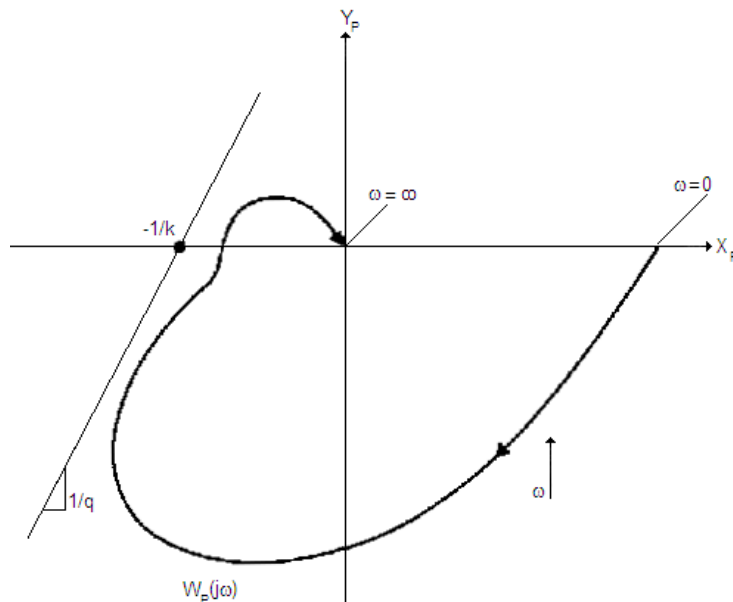


Figura 22. El plano cerrado a la izquierda de la línea de Popov es una región prohibida.

14. Círculos límite y fronteras de amplitud

La ecuación diferencial:

$$\ddot{x} + x = 0$$

nos describe la forma más simple de movimiento periódico. La solución a la ecuación diferencial es:

$$x = A \sin(t + \phi)$$

donde A y ϕ están determinadas por las condiciones iniciales. La ecuación de movimiento para este movimiento armónico simple es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

y las trayectorias en el plano fase consisten de círculos cerrados como se muestra en la figura 23.

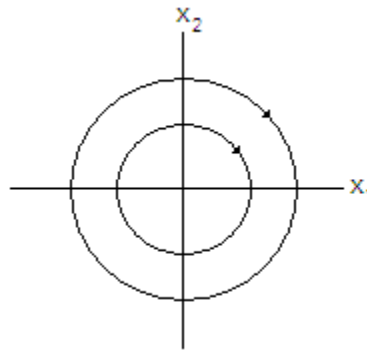


Figura 23. Trayectorias en el plano fase.

Cada círculo en el plano fase corresponde a una solución periódica y son las condiciones iniciales las que determinan el círculo. Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Cada condición inicial nos lleva a una solución periódica
2. Existe un continuo de soluciones periódicas.

Ahora vamos a considerar el sistema definido por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

Podemos también expresar el sistema en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 1 - r^2 \\ \dot{\theta} &= -1\end{aligned}$$

la solución está dada por:

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{Ae^{2t} - 1}{Ae^{2t} + 1} \\ \theta(t) &= \theta_0 - t\end{aligned}$$

donde:

$$A = \frac{1+r_0}{1-r_0}, \quad r_0 \neq 1$$

Cuando $r_0 = 1$, $r(t) = 1$ y $\theta(t) = \theta_0 - t$. Hay una sola solución periódica que es la que corresponde a $r_0 = 1$, y todas las demás soluciones, con excepción de la trivial, se aproximan a una solución periódica cuando $t \rightarrow \infty$. La configuración de las soluciones se muestra en la figura 24.

La solución periódica que se muestra en esta solución es llamada un ciclo límite. La propiedad básica que distingue esta solución de la del oscilador armónico simple, es la naturaleza aislada de la trayectoria cerrada, lo que significa que no debe existir otra trayectoria en una vecindad suficientemente pequeña del ciclo límite. Es simple pero importante hacer notar que en un sistema lineal no existen ciclos límite.

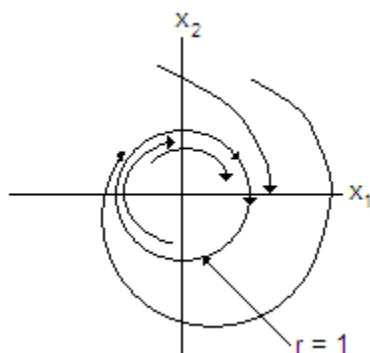


Figura 24. Configuración de las soluciones.

Vamos a dar una definición de ciclo límite. Un ciclo límite es una trayectoria cerrada que no corresponde a una familia de trayectorias cerradas.

14.1. Índice

Un concepto útil en la consideración de sistemas de segundo orden es el de campo vectorial en un plano. Un campo vectorial F en el plano (x_1, x_2) está dado por la asociación con cada punto (x_1, x_2) en el plano (x_1, x_2) una pareja ordenada (F_1, F_2) . F_1 y F_2 dependen del punto (x_1, x_2) y definen respectivamente los componentes x_1 y x_2 del vector en el punto (x_1, x_2) .

De nuevo vamos a considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

y definiremos el campo vectorial F en el plano (x_1, x_2) asociado con el sistema y sus ecuaciones diferenciales. Sea la componente x_1 de este campo vectorial $X_1(x_1, x_2)$ y la componente x_2 del campo vectorial $X_2(x_1, x_2)$. Luego el campo vectorial está definido para cualquier punto en el plano.

Sea una curva cerrada rectificable orientada positivamente C en el plano (x_1, x_2) . El nombre que se les da a estas curvas es el de scroc, y el término positivamente orientado se usa para significar que la curva está orientada en la dirección de las manecillas del reloj.

Esta curva c y un campo vectorial:

$$F = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2))$$

en el plano (x_1, x_2) se relacionan por la asignación de un número llamado índice de la curva C relativo al campo vectorial. El índice es una medida del cambio de la dirección del campo vectorial alrededor de la curva cerrada, pero este cambio sólo es significativo si no hay un punto singular del sistema en la curva scroc.

Podemos luego definir el índice de un scroc con respecto a un campo vectorial $F(X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2))$, como:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \left(\tan^{-1} \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(\tan^{-1} \frac{X_1 dx_2 - X_2 dx_1}{X_1^2 + X_2^2} \right)$$

procurando que no existan puntos singulares del sistema en el scroc C. El índice de un punto singular aislado P en el plano fase es el mismo que el índice del scroc C tal que:

1. P es un punto interior de la scroc C.
2. La scroc C no contiene otro punto singular en su interior.

Debemos enfatizar que la integral de contorno se toma en la dirección de las manecillas del reloj y no existe algún punto singular en la scroc.

Para el sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2\end{aligned}$$

podemos evaluar el índice de la singularidad aislada en el origen considerando la scroc C como un círculo de radio r_0 . Parametrizamos y tenemos:

$$\begin{aligned}z_1 &= r_0 \cos \theta \\ z_2 &= r_0 \sin \theta\end{aligned}$$

En este caso la expresión para el índice se reduce a.

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos^2 \theta (a_{11}^2 + a_{21}^2) + \sin^2 \theta (a_{12}^2 + a_{22}^2) + 2\sin \theta \cos \theta (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{22})] d\theta = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|}$$

Los valores propios están dados por la ecuación característica:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) = 0$$

El índice para una silla de montar es -1 y para un nodo o un centro, el índice es 1. Es claro que el índice para una scroc que no contiene puntos singulares es cero.

Teorema:

El índice de singularidad en el origen para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + y_1^*(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + y_2^*(y_1, y_2)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Y_1^* &= O(y_1^2 + y_2^2) \\ Y_2^* &= O(y_1^2 + y_2^2)\end{aligned}$$

y el índice para la singularidad en el origen para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2\end{aligned}$$

es el mismo que el provisto por:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Prueba: Sean los sistemas lineales y no lineales definidos por los campos vectoriales F_L y F_N respectivamente, y considérese que el índice de un círculo de radio r_0 relativo a estos campos vectoriales. Si el campo vectorial nunca está opuesto en C, la scroc C tiene el mismo índice relativo a estos dos campos. La componente de los dos campos vectoriales en el punto (z_1, z_2) del plano fase es:

$$F_N : (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + Y_1^*(z_1, z_2), a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + Y_2^*(z_1, z_2))$$

$$F_L = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2, a_{21}z_1 + a_{22}z_2)$$

y están en oposición con:

$$(1+n^2)(a_{11}z_1 + a_{12}z_2)^2 + (a_{21}z_1 + a_{22}z_2)^2 = \eta^2(Y_1^{*2}(z_1, z_2) + Y_2^{*2}(z_1, z_2))$$

para alguna $\eta > 0$. Al convertir a coordenadas polares, esta relación en el scroc C se reduce a:

$$(1+n^2)((a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)^2 + (a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)^2) = \eta^2(O(r_0^2))$$

El lado derecho de esta ecuación tiende a cero conforme $r_0 \rightarrow 0$, independiente de ϕ , mientras el lado derecho sea una función continua de θ , logra su mínimo diferente de cero para $r_0 \neq 0$, en algún $\theta = \theta'$, tal que $0 \leq \theta' \leq 2\pi$. Por lo tanto

$$(1+n^2)((a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)^2 + (a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)^2) = \eta^2(O(r_0^2))$$

no es válida para r_0 suficientemente pequeños, así que el campo vectorial nunca están en oposición, lo que demuestra el teorema.

El índice de una trayectoria cerrada relativa a su propio campo vectorial es unitario, independientemente del número de puntos singulares encerrados por la trayectoria. Como el campo vectorial es tangencial a la scroc, esta observación es clara.

14.2. Existencia de ciclos límite

Existen dos resultados importantes en los ciclos límite para sistemas no lineales de segundo orden. El primero es:

Teorema de Bendixson:

Una región simple conectada R en el plano fase, donde la ecuación:

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} \neq 0$$

no cambia de signo, no contiene trayectorias cerradas.

Prueba:

Sea el campo vectorial denotado por:

$$X''(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} X_1(x_1, x_2) \\ X_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Consideremos un scroc C; por el teorema de la divergencia en dos dimensiones:

$$\iint_S \text{div } X'' dS = \iint_S \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_C X'' \cdot n'' dr''$$

donde n'' es el vector unitario normal al elemento dr de la scroc C y dS es el elemento de área.

La figura 25 muestra varias de estas cantidades.

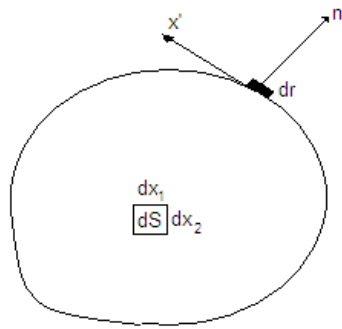


Figura 25. Scroc C.

Supongamos que el scroc C es una trayectoria cerrada correspondiente a una solución periódica. El campo vectorial, por lo tanto, es tangente a la curva C y $x' \cdot n' = 0$ a lo largo de la curva C, por lo que la integral:

$$\iint_S \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0$$

y esto sólo es posible si:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}$$

cambia de signo en el interior de la curva C. Luego una condición necesaria pero no suficiente para la existencia de una trayectoria cerrada en una región simplemente conectada R es que:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}$$

cambie de signo en R.

El Conjunto Límite de una Trayectoria donde $P(t)$ denota el punto solución de

$$(x_1(t, x_{10}, x_{20}, t_0), x_2(t, x_{10}, x_{20}, t_0))$$

en el tiempo t a lo largo de la trayectoria que pasa por (x_{10}, x_{20}) en el tiempo t_0 . L^* denota la porción de la trayectoria para $t \leq t \leq \infty$, llamada la media trayectoria. Un punto Q es llamado un punto límite de la media trayectoria L^* , si existe una secuencia $\{t_n\}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \rightarrow \infty$$

y

$$P(t_n) \rightarrow Q \text{ como } n \rightarrow \infty$$

El conjunto de puntos límite de L^* se denota por L_e^* .

Teorema de Poincaré-Bendixson.

Si L^+ está contenido en una región cerrada acotada R y R no contiene puntos singulares, luego o L^+ es una solución periódica o L_e^+ lo es.

Los requerimientos del teorema se muestran en la figura 26.

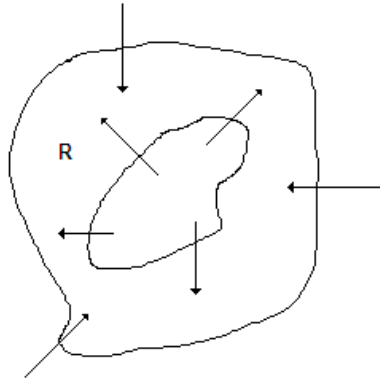


Figura 26. Requerimientos del teorema.

R es una región anular, cerrada y acotada que no contiene puntos singulares. Si asumimos que las trayectorias cruzan hacia la región anular en cualquier punto de la frontera, luego una trayectoria que cruce hacia la región anular nunca debe dejar la región R. Las condiciones del teorema de Poincaré-Bendixson son válidas y la región R tiene una solución periódica.

Existe una dificultad en este teorema. Veamos el caso de la ecuación de van der Pol's,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon x_2 (x_1^2 - 1) - x_1, \quad \varepsilon \ll 1\end{aligned}$$

Sabemos que existe una solución periódica que no difiere mucho de un círculo de radio $r = 2$. Si intentamos construir una región R con círculos de radio $r = 2 + n_1$ y $2 - n_2$, $n_1, n_2 > 0$ y $n_2 < 2$, podemos fácilmente encontrar que la región R no contiene las trayectorias de la forma requerida por el teorema. La forma de la región es muy importante, y en muchos casos de interés práctico, encontrar la región R es una tarea difícil.

Son muy estudiadas las ecuaciones de van der Pol's forzadas y no forzadas.

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \dot{x}_1 (x_1^2 - 1) + x_1 = p(t)$$

Este sistema es rico en fenómenos periódicos, en particular subarmónicos, ya que si el periodo de la función forzante $p(t)$ es τ , luego una solución con periodo $n\tau$, donde n es un entero positivo, es un subarmónico de orden n . Los armónicos son soluciones periódicas con periodo τ/n , donde n es un entero positivo mayor o igual a dos.

Consideremos el sistema:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

Si hay un t_0 y un y_0 ,

$$y(t_0, y_0, t_0) = y_0$$

y un tiempo finito T , tal que $T \geq T_0$, de forma tal que

$$\|y(t_0, y_0, t_0)\| \rightarrow \infty$$

decimos que la solución tiene un tiempo de escape finito.

El estado $y(t, y_0, t_0)$ del sistema

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

se dice que está acotado para la condición inicial (y_0, t_0) , si existe una constante b tal que

$$\|y(t_0, y_0, t_0)\| \leq b \quad \text{para toda } t \geq t_0$$

si la solución $y(t, y_0, t_0)$ del sistema:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

está acotada para todo (y_0, t_0) , luego el sistema es Lagrange estable. Si b es independiente de t_0 , luego se dice que el sistema es uniformemente Lagrange estable.

Vamos a decir que el sistema

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

últimamente acotado si existe una constante $b > 0$, tal que correspondiendo a cada condición inicial y_0 en $t = t_0$, debe existir al tiempo $t_{0b} \geq t_0$, tal que:

$$\|y(t_0, y_0, t_0)\| \leq b \quad \text{para toda } t \geq t_{0b}$$

Sea β la pelota de la norma b en un espacio de n dimensiones, en el cual las trayectorias están finalmente acotadas, entonces β es la región de última frontera.

La última frontera de las trayectorias en β no excluye la existencia de una condición inicial tal que la trayectoria correspondiente a esta condición inicial deje la región β y finalmente entre a β y nunca la deje. Para excluir la posibilidad de una trayectoria saliendo y entrando de nuevo, debemos considerar la región cerrada y acotada Γ , llamada la región de confinamiento final. Esta región tiene las siguientes propiedades:

1. Para toda condición inicial y_0 en $t = t_0$, debe existir un $t_{0\Gamma} \geq t_0$, tal que $y(t, y_0, t_0)$ esta en Γ , para toda $t > t_{0\Gamma}$.
2. Ninguna trayectoria deja Γ .

El comportamiento de las trayectorias respecto de las dos regiones se muestra en la figura 27.

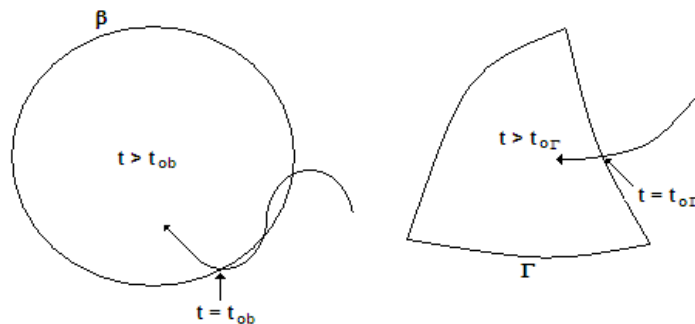


Figura 27. Comportamiento de las trayectorias respecto de las dos regiones.

Para ciertos sistemas es posible encontrar una bola c en el espacio de estados de n dimensiones tal que, todas las trayectorias, excluyendo la solución trivial, están acotadas a esta región. Así debe existir una constante c , tal que correspondiendo a toda condición inicial y_0 en $t = t_0$, excluyendo la solución trivial, debe existir $t_{0c} \geq t_0$, tal que:

$$\|y(t, y_0, t_0)\| > c \quad \text{para toda } t > t_{0c}$$

La bola C de norma c se llama la región de partida final. Similarmente podemos definir una región Σ tal que, para toda y_0 :

1. Existe un tiempo finito $t_{0\Sigma}$ tal que para $t > t_{0\Sigma}$, la trayectoria $y(t, y_0, t_0)$ cae fuera de la región Σ
2. No entran trayectorias a Σ

Ahora vamos a considerar el sistema:

$$\dot{y} = Y(y, u, t)$$

donde y es la salida y u es la entrada.

Se dice que el sistema es estable acotado de entrada y salida, si para cualquier entrada acotada, existe una salida acotada.

14.3. Cotas de amplitud para sistemas de segundo orden

En los sistemas de segundo orden las trayectorias se mueven en el espacio tridimensional (y_1, y_2, t) . Bajo ciertas condiciones las trayectorias, eventualmente, pueden estar confinadas en un cilindro de longitud infinita. La región Γ tiene la propiedad de confinar las trayectorias del punto $(y_1(t, y_{10}, y_{20}, t_0), y_2(t, y_{10}, y_{20}, t_0))$ que es la proyección del punto en el plano fase. Para la región Σ se tiene una interpretación similar.

Determinar las regiones Γ y Σ nos permite concentrarnos en un subconjunto del plano fase. También, trayectorias periódicas, si existen, caen dentro de Γ y fuera de Σ . Este hecho nos da el método para encontrar las cotas de amplitud de soluciones periódicas. En el caso de funciones periódicas forzadas, de la existencia de Γ se puede deducir la existencia de una solución con el mismo periodo que el de la función forzante.

Vamos a ver la ecuación de van der Pol's generalizada.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) + p^*(t) \\ \dot{x}_2 &= -G(x_1)\end{aligned}$$

donde $G(x_1) > 0$, $x_1 \neq 0$, $x_1 F(x_1) > 0$, $|x_1| >$ que algún x_1' .

Podemos reducir la ecuación forzada de van der Pol's

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \dot{x}_1(x_1^2 - 1) + x_1 = p(t)$$

se puede reducir a la generalizada por medio de las siguientes sustituciones:

$$x_2 = \dot{x}_1 + F(x_1) - p(t)$$

donde

$$F(x_1) = \int_0^{x_1} \varepsilon(u^2 - 1) du$$

y

$$p^*(t) = \int_0^t p(u) du$$

Bajo ciertas condiciones existen las regiones Γ y Σ para la ecuación general de van der Pol's.

Ahora vamos a ver un método geométrico para determinar las cotas de amplitud. Sea el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) + p(t) \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

donde $\mu > 0$, $p(\cdot)$ es continua y $|p(t)| \leq P$ para toda t , y

$$F(x_1) = \frac{x_1^3}{3} - x_1$$

Se requieren dos etapas para construir una región de último confinamiento. La primera etapa del proceso consiste en simplificar el sistema de tal manera que las direcciones de las trayectorias para

un sistema dado estén acotadas por las direcciones de las trayectorias para el sistema simplificado. La segunda etapa consiste en que para el sistema simplificado se deben encontrar los contornos que confinan las trayectorias del sistema original. Así la dirección de las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) + p(t) \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

en cada punto están acotadas por las direcciones de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) + p \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

para $x_1 > 0$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) - p \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

para $x_1 < 0$, y para $x_1 = 0$, la dirección de la trayectoria es horizontal. Sea:

$$\begin{aligned}-f_+ &= \min F(x_1), \quad x_1 \geq 0 \\ -f_- &= \max F(x_1), \quad x_1 \leq 0.\end{aligned}$$

Las direcciones de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) + p \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

para $x_1 > 0$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) - p \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

para $x_1 < 0$.

Están acotadas por las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + p_1 \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

para $x_1 > 0$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + p_2 \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

para $x_1 < 0$, donde

$$P_1 = p + f_+$$

y

$$P_2 = p + f_-$$

que es el sistema simplificado. Consideremos el contorno:

$$\frac{x_2^2}{2} + p_1 x_2 + \frac{\mu x_1^2}{2} = \text{cte} = V$$

y la curva

$$-F(x_1) + x_2 + p = 0$$

El contorno se obtuvo de integrar:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2 + p_1}{-\mu x_1}$$

que se obtuvo del sistema simplificado para $x_1 > 0$. Para η suficientemente grandes, el contorno pasa a través de $(0, \eta)$ y $(0, -\eta)$ y es monótonico fuera de la región $|x_2| \leq \text{algún } \eta_0$. En la figura 28 se muestra un conjunto de estos contornos.

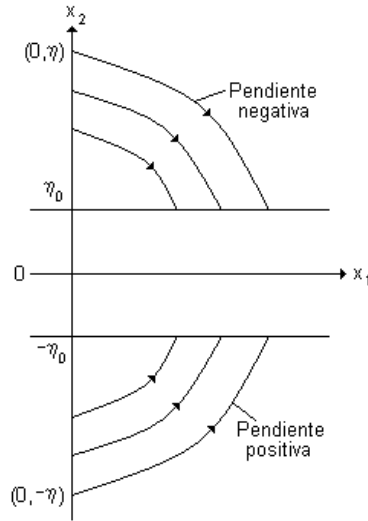


Figura 28. Conjunto de contornos.

La curva

$$-F(x_1) + x_2 + p = 0$$

se muestra en la figura 29.

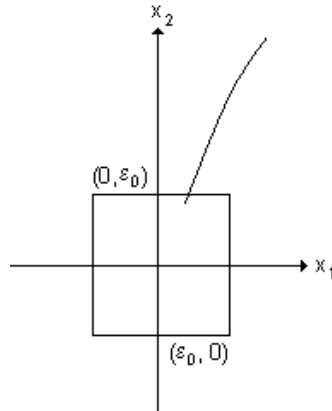


Figura 29. Curva $-F(x_1) + x_2 + p = 0$

donde ϵ_0 es algún número positivo. El cuadrado ϵ_0 contiene el máximo y el mínimo de la curva y la función

$$x_2 = F(x_1) - P$$

es monótonica en x_1 fuera del cuadrado ϵ_0 . La curva intercepta el contorno a través de $(0, \eta)$ en (ϵ_1, η_1) , y el contorno intercepta a través de $(0, -\eta)$ la línea $x_1 = \epsilon_1$ como se ve en la figura 30.

Las coordenadas de los puntos p_1 y p_2 están dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= F(\epsilon_1) - p_1 \\ \frac{\eta_1^2}{2} + p_1 \eta_1 + \frac{\mu \epsilon_1^2}{2} &= \frac{\eta^2}{2} + p_1 \eta \\ \frac{\eta_2^2}{2} + p_1 \eta_2 + \frac{\mu \epsilon_1^2}{2} &= \frac{\eta^2}{2} - p_1 \eta \end{aligned}$$

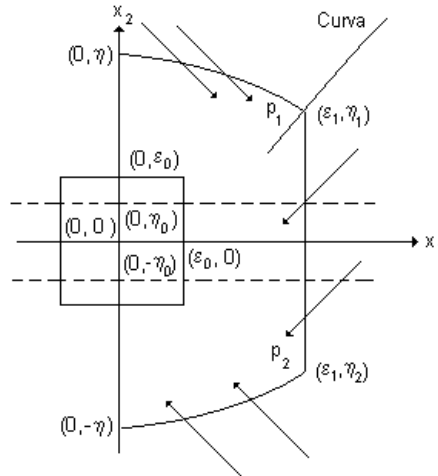


Figura 30. Curva que intercepta un contorno.

ya que F es un polinomio de grado 3.

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\approx \eta_1^{\frac{1}{3}} \\ \eta_1 &\approx \eta \\ \eta_2 &\approx -\eta\end{aligned}$$

Luego debe existir η^* tal que para todo $\eta > \eta^*$

$$-\eta_2 < \min(-\eta_0, -\epsilon_0)$$

y

$$-\eta_1 < \max(\epsilon_0, \eta_0)$$

Por simple geometría se puede mostrar que las trayectorias del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1) + p(t) \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_1\end{aligned}$$

cruzan dentro de todos los contornos construidos como antes con $\eta > \eta^*$. Se puede encontrar un contorno similar para $x_1 < 0$ y las trayectorias se mueven horizontalmente en $x_1 = 0$; por lo que debe existir una región Γ tal que las trayectorias son finalmente acotadas en Γ .

14.4. Liapunov como método de acotamiento

La capacidad de acotar un sistema, en general, se puede estudiar por métodos de Liapunov, así que veremos estos métodos, así como aplicar estas ideas a la estabilidad y confinamiento último.

Teorema de estabilidad de Lagrange.

Sea Ω una región acotada que contiene al origen y sea Ω^c la región dentro de Ω . Si existe una función escalar $V(y)$ con derivadas parciales continuas, y funciones continuas $a(r)$, $b(r)$, y $c(r)$, tal que:

1. $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, no son decrecientes y $0 < a(\|y\|) \leq V(y) \leq b(\|y\|)$ en Ω^c .
2. $c(\cdot)$ no es decreciente y a lo largo de la solución:

$$\dot{V}(y) \leq -c(\|y\|) \leq 0 \quad \text{en } \Omega^c$$

luego el sistema

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

es Lagrange estable. Para el sistema tenemos que

$$V(y) \rightarrow \infty \text{ conforme } \|y\| \rightarrow \infty$$

y V tiene derivadas parciales continuas tales que:

$$\dot{V} \leq 0 \text{ para } y \text{ en } \Omega^c$$

Teorema de Lur'e.

Consideremos el sistema de Lur'e con entrada como se muestra en la figura 31.

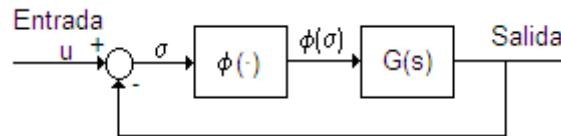


Figura 31. Sistema de Lur'e.

El sistema está descrito por la ecuación:

$$\dot{x} = Ax - b\phi(\sigma)$$

$$\sigma = c'x + u$$

donde $(\cdot)b$ cae en el sector $(0, k]$ y los valores propios de la matriz A caen en el lado izquierdo del plano. Supongamos que existe una función de Liapunov de la forma:

$$V(x) = x'Px + \beta \int_0^\sigma \phi(u) du$$

para el sistema no forzado.

Teorema del confinamiento último.

Sea Ω una región acotada que contiene al origen y sea Ω^c la región fuera de Ω . Debe existir una función escalar $V(y)$ con derivadas parciales continuas y funciones continuas $a(r)$, $b(r)$, y $c(r)$, tal que:

1. $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, no son decrecientes y $0 < a(\|y\|) \leq V(y) \leq b(\|y\|)$ en Ω^c .
2. $c(\cdot)$ no es decreciente y a lo largo de la solución:

$$\dot{V}(y) \leq -c(\|y\|) \leq 0 \quad \text{en } \Omega^c$$

3. $a(r) \rightarrow \infty$ como $r \rightarrow \infty$.

luego el sistema

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

tiene una región de confinamiento último.

No es trivial la aplicación de este teorema a sistemas de orden mayor por la imposibilidad de encontrar una $V(y)$.

15. Métodos de aproximación

Vamos a estudiar los métodos cualitativos y cuantitativos que dependen de la presencia de pequeños parámetros en las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Los métodos cuantitativos requieren la solución del sistema como una expresión explícita aproximada. La presencia de los pequeños parámetros nos permite determinar el comportamiento de los sistemas no lineales en términos de sistemas más simples. Vamos a discutir dos clases de métodos de aproximación:

1. Métodos de pequeños parámetros
2. Métodos de perturbaciones singulares.

Los métodos de parámetros pequeños se aplican a sistemas de la forma:

$$\dot{x} = X(x, t, \varepsilon)$$

donde x es un vector de n dimensiones y ε es un parámetro pequeño y el lado derecho de la ecuación es continuamente diferenciable en todos sus argumentos. El objetivo del método de parámetros pequeños es determinar el comportamiento del sistema a partir del comportamiento del sistema:

$$\dot{x} = X(x, t, 0)$$

Una subclase importante de estos sistemas son los sistemas cuasilineales de la forma:

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \varepsilon f_i(x_i, \dot{x}_i, t, \varepsilon)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, o:

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$$

donde ε es un parámetro pequeño, A es una matriz constante, $\omega_i > 0$, con $i = 1, 2, \dots, n$ y x es un vector n . El término cuasilineal se debe a:

1. El sistema es lineal cuando $\varepsilon = 0$.
2. El comportamiento de los sistemas no lineales para ε suficientemente pequeños, es similar al de los sistemas lineales cuando $\varepsilon = 0$.

El método de perturbaciones singulares se aplica a sistemas de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(t, x, y, \varepsilon)\end{aligned}$$

donde x e y son vectores, ε es un parámetro pequeño y f y g son continuamente diferenciables en todos sus argumentos.

El interés cae en determinar el comportamiento del sistema del comportamiento del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y, \varepsilon) \\ 0 &= g(t, x, y, 0)\end{aligned}$$

15.1. Existencia de soluciones periódicas

Sea $x'(t)$ una solución de

$$\dot{x} = X(x, t, \varepsilon)$$

La estabilidad de la trayectoria $x'(t)$ se analiza si definimos una nueva variable $y(t)$,

$$x(t) = y(t) + x'(t)$$

y consideramos la estabilidad de la solución trivial de:

$$\dot{y} = Y(y, t)$$

donde $Y(y, t)$ se determina expandiendo $X(y(t) + x'(t), t, 0)$ alrededor de $X(x'(t), t, 0)$. Si despreciamos los términos de orden mayor en y , podemos expresar la ecuación como:

$$\dot{y} = X_x(x'(t), t, 0)y$$

donde

$$X_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

y la ecuación se llama la ecuación de la primera variación de

$$\dot{x} = X(x, t, 0)$$

Las condiciones para la existencia de una solución periódica para el sistema

$$\dot{x} = X(x, t, \varepsilon)$$

y la naturaleza de estas soluciones periódicas dado que ε es pequeño y es una solución periódica de

$$\dot{x} = X(x, t, 0)$$

La naturaleza de estos resultados depende de las siguientes propiedades.

1. Dependencia explícita de t de la función $X(x, t, 0)$
2. Estabilidad de la solución trivial del sistema
3. Existencia de una solución periódica para el sistema.

Se han obtenido varios resultados dependiendo de la naturaleza de las consideraciones de las tres propiedades anteriores, y de esto resulta el siguiente

Teorema.

El sistema cuasilineal

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$$

donde A es una matriz constante $n \times n$, con valores propios en el lado izquierdo del plano y $f(x, t, \varepsilon)$ es continuamente diferenciable en cada uno de sus argumentos y periódica en t .

Prueba.

La solución $x(t, x_0, \varepsilon)$ al sistema con condición inicial x_0 en $t = 0$ es periódica con periodo T probando que:

$$x(T, x_0, \varepsilon) = x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$$

o

$$x(T, x_0, \varepsilon) - x_0 = 0$$

La última ecuación tiene solución trivial $x_0 = 0$ para el caso de $\varepsilon = 0$. esto corresponde a la solución trivial de

$$\dot{x} = Ax$$

que es periódica con periodo T . El objetivo del teorema es probar que

$$x(T, x_0, \varepsilon) - x_0 = 0$$

tiene una solución denotada por $x_0(\varepsilon)$ para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, donde ε_0 es un número positivo suficientemente pequeño.

Vamos a asumir que el Jacobiano con respecto a x_0 , del lado izquierdo de la ecuación es no singular en $\varepsilon = 0$. Si aplicamos el teorema de la función implícita nos muestra que debe existir una única función continuamente diferenciable $x_0(\varepsilon)$, definida para $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ donde ε_0 es un número positivo suficientemente pequeño, tal que,

$$x_0 = x_0(\varepsilon)$$

es la solución de

$$x(T, x_0, \varepsilon) - x_0 = 0$$

Luego la existencia de una solución periódica para

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$$

depende de la no singularidad del jacobiano

$$\left. \frac{\partial(x(T, x_0, \varepsilon) - x_0)}{\partial x_0} \right|_{\varepsilon=0}$$

Para determinar la no singularidad del jacobiano consideremos la matriz:

$$X'(t, x_0, \varepsilon) = \frac{\partial x(t, x_0, \varepsilon)}{\partial x_0}.$$

El jacobiano es no singular ya que

$$\det(X'(t, 0, 0) - I) \neq 0$$

Si derivamos

$$X'(t, x_0, \varepsilon) = \frac{\partial x(t, x_0, \varepsilon)}{\partial x_0}$$

y evaluamos para $x_0 = 0$ y $\varepsilon = 0$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} X'(t, 0, 0) = AX'(t, 0, 0)$$

La condición inicial para $X'(t, 0, 0)$ se obtiene al ver que $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$, de lo cual tenemos que $X'(0, 0, 0) = I$. La solución para la derivada es:

$$X'(t, 0, 0) = e^{At}$$

por lo que la condición para la no singularidad de jacobiano se reduce a:

$$\det(e^{At} - I) \neq 0$$

que se satisface si los valores propios de A están en el lado izquierdo del plano. Por lo tanto las condiciones

1. Dependencia explícita de t de la función $X(x, t, 0)$
2. Estabilidad de la solución trivial del sistema

son suficientes para la existencia de una solución periódica de periodo T, para ε suficientemente pequeño.

15.2. Sistemas cuasilineales. Métodos de aproximación

Veremos tres métodos de aproximación. El énfasis está puesto en discutir la técnica en lugar que en las pruebas de convergencia de series aproximadas o en la justificación matemática del método. Vamos a poner atención a los sistemas de segundo orden dados por:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

Métodos de perturbación.

Una forma natural de solución de series para el sistema anterior es en series de potencias de ε . El procedimiento para encontrar tal solución consiste de los siguientes pasos:

1. Se asume que la serie solución es de la forma: $x(t) = x_0(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$, donde $x_0(t)$ es la solución del sistema cuando $\varepsilon = 0$.
2. Se sustituye esta $x(t)$ en la ecuación del sistema y se determinan las ecuaciones diferenciales para $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., igualando coeficientes de la misma potencia de ε .
3. Se resuelven las ecuaciones diferenciales para $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ para determinar la solución de la potencia deseada de ε .

El paso 2 del procedimiento nos da:

$$\ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \dots + x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon f(x_0 + \varepsilon x_1, \dots, \dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \dots)$$

Expandiendo el lado derecho de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + \dots + x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \\ &= \varepsilon f(x_0, \dot{x}_0) + \varepsilon(\varepsilon x_1(t) + \dots) \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} + \varepsilon(\varepsilon \dot{x}_1(t) + \dots) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} + \dots \end{aligned}$$

Si se igualan los coeficientes con igual potencia de ε a ambos lados de la ecuación anterior obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= f(x_0, \dot{x}_0) \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} + \dot{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0}} \end{aligned}$$

Tomemos ahora la ecuación de Rayleigh:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3} \right)$$

donde $\varepsilon > 0$ es lo que usaremos.

Si sustituimos la solución de la ecuación

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots,$$

en

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3} \right)$$

y expandimos el lado derecho por series de Taylor e igualamos los coeficientes de la misma potencia de ε , obtenemos:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \dot{x}_0 - \frac{\dot{x}_0^3}{3}$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \dot{x}_1(1 - \dot{x}_0^2)$$

Estas son ecuaciones diferenciales lineales y se pueden resolver sucesivamente para obtener $x_0, x_1, \dots$

Sea la condición inicial para

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{\dot{x}^3}{3} \right)$$

la siguiente

$$x(0) = A \quad \dot{x}_0 = 0$$

luego un conjunto de condiciones iniciales para $x_0, x_1, x_2, \dots$ son:

$$x(0) = A \quad \dot{x}_0 = 0$$

$$x_i(0) = A \quad \dot{x}_i(0) = 0$$

Si resolvemos las ecuaciones tenemos:

$$x_0(t) = A \cos t$$

$$x_1(t) = \frac{A \frac{A^2 - 1}{4}}{2} (\sin t - t \cos t) - \frac{A^3}{32} \sin t + \frac{A^3}{96} \sin 3t$$

La expresión para $x_1(t)$ contiene un término de la forma $t \cos t$, que se llama término secular y que incrementa su amplitud conforme se incrementa t . La presencia de términos seculares no se debe interpretar como que la solución diverja, sino que indica una elección inadecuada de la forma de la solución. La aparición de los términos seculares es la principal desventaja de este método que se llama método de Poisson. En general la presencia de términos seculares impide determinar las soluciones periódicas, así como el comportamiento periódico del sistema.

Una variación del método de Poisson consiste en remover los términos seculares cuando aparecen de la siguiente forma:

1. Se transforma la variable independiente t de tal forma que la solución, como una función de la nueva variable τ , sea periódica con periodo 2π .
2. Se asume que la solución y la transformación de frecuencia es de la forma:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \dots$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots$$

3. Se igualan los coeficientes de potencias iguales de ε y se obtienen ecuaciones lineales.

Si aplicamos este procedimiento a

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

obtenemos:

$$(\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots)^2 (\ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) =$$

$$= \varepsilon f(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots)(\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \dots))$$

el lado derecho lo podemos expandir de la forma:

$$\varepsilon f(x_0, \Omega_0, \dot{x}_0) + \varepsilon^2 x_1 \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\Omega_0 \dot{x}_0}} + \varepsilon^2 (\Omega_1 \dot{x}_0 + \Omega_0 \dot{x}_1) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\Omega_0 \dot{x}_0}} + \dots$$

Si igualamos los coeficientes de la misma potencia de ε , tenemos:

$$\begin{aligned}\Omega_0^2 \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 \\ \Omega_0^2 \ddot{x}_1 + 2\Omega_1 \Omega_0 \ddot{x}_0 + x_1 &= 0 \\ \Omega_0^2 \ddot{x}_2 + \Omega_1^2 \ddot{x}_0 + 2\Omega_2 \Omega_0 \ddot{x}_0 + x_2 &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\Omega_0 \dot{x}_0}} + (\Omega_1 \dot{x}_0 + \Omega_0 \dot{x}_1) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ \dot{x}=\Omega_0 \dot{x}_0}}\end{aligned}$$

Tomemos de nuevo la ecuación de Rayleigh y apliquemos el método anterior. Si seguimos los pasos tenemos:

$$\begin{aligned}\Omega_0^2 \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 \\ \Omega_0^2 \ddot{x}_1 + x_1 &= \Omega_0 \dot{x}_0 - \frac{1}{3} \Omega_0^3 x_0^3 - 2\Omega_0 \Omega_1 \ddot{x}_0 \\ \Omega_0^2 \ddot{x}_2 + x_2 &= -2\Omega_0 \Omega_1 \ddot{x}_1 - (2\Omega_0 \Omega_2 + \Omega_1^2) \ddot{x}_0 - \Omega_0 \dot{x}_0 - \Omega_0^2 \Omega_1 \dot{x}_0^3 - \Omega_0^3 \dot{x}_0^2 \dot{x}_1 + \Omega_1 \dot{x}_0 + \Omega_0 \dot{x}_1\end{aligned}$$

Si resolvemos las ecuaciones diferenciales para x_0 con:

$$x_0(0) = 0$$

y

$$\dot{x}_0(0) = 0$$

obtenemos:

$$x_0(\tau) = A_0 \cos \frac{\tau}{\Omega_0}$$

y la condición de periodicidad

$$x_0(\tau) = A_0(\tau + 2\pi)$$

implica que $\Omega_0 = 1$.

La sustitución para x_0 en

$$\begin{aligned}\Omega_0^2 \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 \\ \Omega_0^2 \ddot{x}_1 + x_1 &= \Omega_0 \dot{x}_0 - \frac{1}{3} \Omega_0^3 x_0^3 - 2\Omega_0 \Omega_1 \ddot{x}_0 \\ \Omega_0^2 \ddot{x}_2 + x_2 &= -2\Omega_0 \Omega_1 \ddot{x}_1 - (2\Omega_0 \Omega_2 + \Omega_1^2) \ddot{x}_0 - \Omega_0 \dot{x}_0 - \Omega_0^2 \Omega_1 \dot{x}_0^3 - \Omega_0^3 \dot{x}_0^2 \dot{x}_1 + \Omega_1 \dot{x}_0 + \Omega_0 \dot{x}_1\end{aligned}$$

nos da:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 2\Omega_1 A_0 \cos \tau - A_0 \sin \tau + \frac{A_0^3}{4} \sin \tau - \frac{A_0^3}{12} \sin 3\tau = 2\Omega_1 A_0 \cos \tau - A_0 \left(\frac{A_0^3}{4} - 1 \right) \sin \tau - \frac{A_0^3}{12} \sin 3\tau$$

Para eliminar la presencia de términos seculares en x_1 , debemos tener:

$$\Omega_1 = 0 \quad y \quad A_0^2 = 4$$

lo que nos da:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{2}{3} \sin 3\tau$$

cuya solución es:

$$x_1(\tau) = A_1 \cos \tau + B_1 \sin \tau + \frac{1}{12} \sin 3\tau$$

La constante B_1 se puede evaluar si asumimos que

$$\dot{x}_1(0) = 0$$

y en este caso

$$B_1 = -\frac{1}{4}$$

En el siguiente paso vamos a determinar A_1 donde los coeficientes de $\sin \tau$ o $\cos \tau$ en la ecuación diferencial de x_2 son llevados a cero para excluir los términos seculares. Este proceso puede continuar y se pueden determinar los términos en las series para Ω y x . La condición inicial para la solución es:

$$\begin{aligned}x(0) &= A_0 + \varepsilon A_1 + \dots \\ \dot{x}(0) &= 0\end{aligned}$$

La aproximación de primer orden es:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= 1 \\ A_0 &= 2 \\ x_0(\tau) &= 2 \cos \tau\end{aligned}$$

Métodos de promedio.

Tomemos el sistema diferencial cuasilineal

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

La solución al sistema lineal correspondiente $\varepsilon = 0$, está dada por:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$$

donde la amplitud a y el ángulo de fase ϕ son constantes que dependen de las condiciones iniciales. El método de promedio se basa en la consideración de que para pequeños ε la forma de la solución no cambia, porque a y ϕ son parámetros de variación lenta. El procedimiento consiste en asumir que:

$$\begin{aligned}x(t) &= a(t) \cos(\omega t + \phi(t)) \\ \dot{x}(t) &= -a(t) \omega \sin(\omega t + \phi(t))\end{aligned}$$

y

$$\dot{a}(t) \cos(\omega t + \phi(t)) - a(t) \dot{\phi}(t) \sin(\omega t + \phi(t)) = 0$$

Si evaluamos la segunda derivada para:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

y

$$\dot{x}(t) = -a(t) \omega \sin(\omega t + \phi(t))$$

e igualamos, tenemos:

$$-\omega \dot{a}(t) \sin(\omega t + \phi(t)) - \omega a(t) \dot{\phi}(t) \cos(\omega t + \phi(t)) = \varepsilon f(a(t) \cos(\omega t + \phi(t)), -a(t) \omega \sin(\omega t + \phi(t)))$$

Si resolvemos para la derivada de A y de ϕ de

$$\dot{a}(t) \cos(\omega t + \phi(t)) - a(t) \dot{\phi}(t) \sin(\omega t + \phi(t)) = 0$$

y

$$-\omega \dot{a}(t) \sin(\omega t + \phi(t)) - \omega a(t) \dot{\phi}(t) \cos(\omega t + \phi(t)) = \varepsilon f(a(t) \cos(\omega t + \phi(t)), -a(t) \omega \sin(\omega t + \phi(t)))$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi \\ \dot{\phi} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi\end{aligned}$$

donde

$$\psi = \omega t + \phi(t)$$

Bajo las condiciones convenientes la función en el lado derecho de

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi$$

se puede expandir en series de Fourier de la forma:

$$f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_n (\alpha_n \cos n\psi + \beta_n \sin n\psi)$$

$$f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi = \frac{1}{2} \alpha_0' + \sum_n (\alpha_n' \cos n\psi + \beta_n' \sin n\psi)$$

donde

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \cos n\psi \, d\psi$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \sin n\psi \, d\psi$$

$$\alpha_n' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \cos n\psi \, d\psi$$

$$\beta_n' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \sin n\psi \, d\psi$$

Los términos constantes en la expansión de Fourier se pueden usar para obtener la primer aproximación, luego las expresiones para las derivadas de $a(t)$ y $\phi(t)$ son:

$$\dot{a}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi$$

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi$$

Un método muy similar a este es el método de aproximación de van der Pol. En este método se asume que la solución es de la forma:

$$x(t) = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t) = -a(t) \omega \sin \omega t + b(t) \omega \cos \omega t$$

y

$$\dot{a}(t) \cos \omega t + \dot{b}(t) \sin \omega t = 0$$

si procedemos de una forma similar obtenemos:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \omega t + b \sin \omega t, -a\omega \sin \omega t + \omega b \cos \omega t) \sin \omega t$$

$$\dot{b} = \frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \omega t + b \sin \omega t, -a\omega \sin \omega t + \omega b \cos \omega t) \cos \omega t$$

en este paso, se expande el lado derecho en series de Fourier y se procede como en el caso anterior.

15.3. Método de linealización equivalente

Vamos de nuevo a usar la ecuación de Rayleigh, pero ahora en forma de un sistema de gasa cerrada como el de la figura 32.

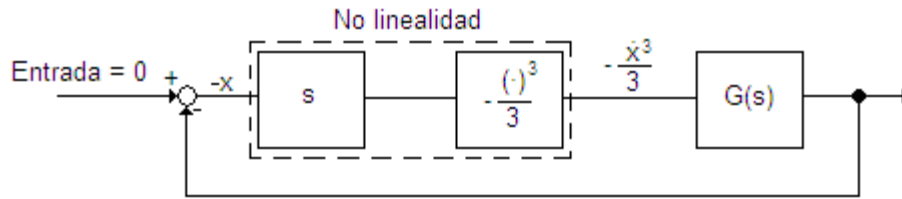


Figura 32. Sistema de gasa cerrada.

donde

$$G(s) = \frac{\varepsilon}{(s^2 - \varepsilon s + 1)}$$

Se puede ver que $G(s)$, que es la parte lineal del sistema es inestable. Si consideramos el comportamiento de la no linealidad a una entrada senoidal, como se ve en la figura 33.

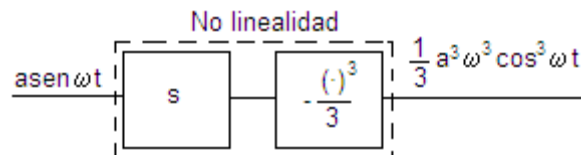


Figura 33. Comportamiento de la no linealidad a una entrada senoide.

la entrada será $a \sin \omega t$ y la salida será:

$$\frac{1}{3} a^3 \omega^3 \cos^3 \omega t = \frac{1}{3} a^3 \omega^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega \right)$$

que contiene un tercer armónico en el término $3\omega t$. Para eliminar el tercer armónico usamos un filtro como el que se muestra en la figura 34.

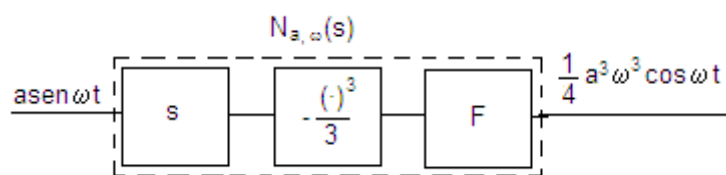


Figura 34. Uso de un filtro.

La salida de la no linealidad junto con la del filtro es:

$$\frac{1}{4} a^3 \omega^3 \cos \omega t$$

por lo que la función descriptiva

$$N_{a,\omega}(s) = \frac{1}{4} a^2 \omega^2 s$$

Vamos a ver el sistema de la figura 35.

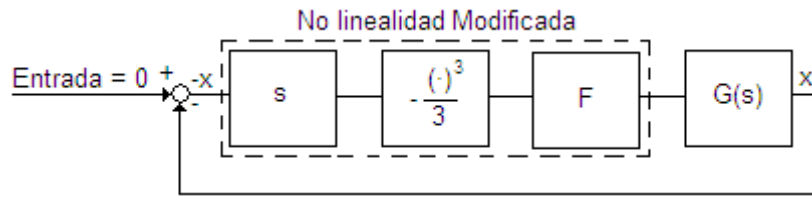


Figura 35. Sistema con la no linealidad modificada.

donde la no linealidad es remplazada por la no linealidad modificada. Los valores propios del sistema modificado están dados por las raíces de la ecuación

$$1 + N_{a,\omega}(s)G(s) = 0$$

El sistema modificado sostendrá la oscilación a la frecuencia ω y amplitud a si:

$$1 + N_{a,\omega}(j\omega)G(j\omega) = 0$$

Bajo las condiciones convenientes el comportamiento oscilatorio del sistema modificado con la no linealidad modificada predice el comportamiento oscilatorio del sistema original. En el caso del oscilador de Rayleigh, el sistema predice correctamente el comportamiento oscilatorio. El procedimiento se puede generalizar y se llama el método de linealización equivalente.

15.4. Método de perturbación singular

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon)\end{aligned}$$

donde x , y son vectores n y m , f y g son funciones continuamente diferenciables en cada uno de sus argumentos y $\varepsilon \ll 1$. Para $\varepsilon = 0$, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, 0) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, 0)\end{aligned}$$

El método que nos da el comportamiento del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon)\end{aligned}$$

del comportamiento del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, 0) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, 0)\end{aligned}$$

se llama el método de perturbación singular.

Vamos a analizar los circuitos de la figura 36 donde (a) tiene el capacitor parásito ε y (b) no lo tiene. En la figura 37 se muestran las características i - v del diodo.

Las ecuaciones diferenciales para la red que tiene la capacitancia parásita son:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -i - v + E \\ \varepsilon \frac{dv}{dt} &= i - g(v)\end{aligned}$$

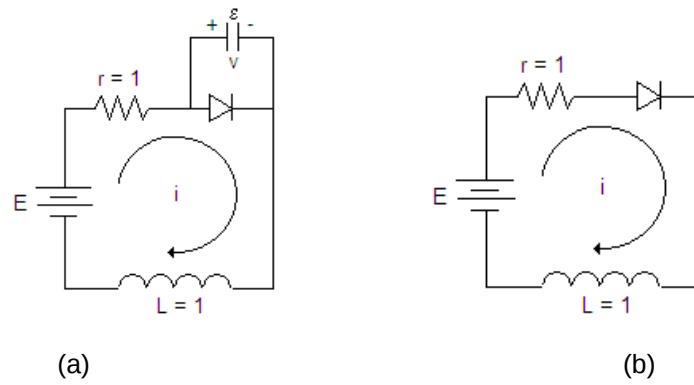


Figura 36. Circuitos.

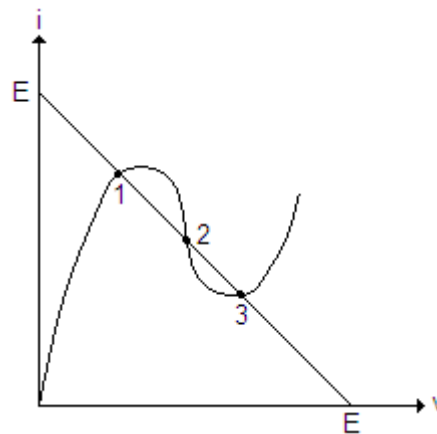


Figura 37. Características i-v del diodo.

Si dibujamos la recta de carga como se ve en la figura, se ve que tenemos tres posibles puntos de operación. Para nuestro caso vamos a emplear el punto de operación 2. Al linealizar las características del diodo en la vecindad del punto de operación 2, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -i - v + E \\ \varepsilon \frac{dv}{dt} &= i + g_0 v - I_0\end{aligned}$$

donde g_0 e I_0 son constantes. Si consideramos que $g_0 > 1$, el polinomio característico par el sistema es:

$$\lambda^2 + \lambda \left(1 - \frac{g_0}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{g_0}{\varepsilon}$$

y para ε suficientemente pequeño el punto de operación es inestable.

Las ecuaciones para el circuito sin la capacitancia parásita son:

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= -i - v + E \\ i - g(v) &= 0\end{aligned}$$

De nuevo si linealizamos alrededor del punto de operación 2, tenemos:

$$\frac{di}{dt} = i \left(-1 + \frac{1}{g_0} \right) - \frac{I_0}{g_0} + E$$

lo que nos muestra que el punto de operación es estable si $g_0 > 1$.

En general el modelo sin los elementos parásitos, no nos lleva a resultados correctos. Vamos a investigar las condiciones bajo las cuales los sistemas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x, y, t, \varepsilon)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, t, 0) \\ 0 &= g(x, y, t, 0)\end{aligned}$$

son similares. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ \varepsilon \dot{y} &= Cx + Dy\end{aligned}$$

y el sistema para $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ 0 &= Cx + Dy\end{aligned}$$

donde A y D son matrices cuadradas y B y C son matrices compatibles. El comportamiento del punto singular en el origen del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ \varepsilon \dot{y} &= Cx + Dy\end{aligned}$$

se puede deducir del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ 0 &= Cx + Dy\end{aligned}$$

por el siguiente teorema:

Teorema.

Los valores propios de D se encuentran en la mitad izquierda del plano. Si los valores propios de

$$R = A - BD^{-1}C$$

están en el lado izquierdo del plano, debe existir una $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, el punto de equilibrio en el origen para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ \varepsilon \dot{y} &= Cx + Dy\end{aligned}$$

es asintóticamente estable.

Prueba.

Podemos ver que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ 0 &= Cx + Dy\end{aligned}$$

se reduce a:

$$\dot{x} = (A - BD^{-1}C)x = Rx$$

ya que

$$y = -D^{-1}Cx$$

Consideremos la matriz

$$F_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & B \\ \frac{C}{\varepsilon} & \frac{D}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Si los valores propios de F_ε están en el lado izquierdo del plano, el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + By \\ \varepsilon \dot{y} &= Cx + Dy\end{aligned}$$

es asintóticamente estable. Sea $\varepsilon > 0$, λ_ε es un valor propio de F_ε y

$$\begin{bmatrix} x_\varepsilon \\ y_\varepsilon \end{bmatrix}$$

es el vector propio correspondiente a λ_ε . Luego,

$$\begin{aligned}Ax_\varepsilon + By_\varepsilon &= \lambda_\varepsilon x_\varepsilon \\ Cx_\varepsilon + Dy_\varepsilon &= \varepsilon \lambda_\varepsilon y_\varepsilon\end{aligned}$$

Si existe $(D - \varepsilon \lambda_\varepsilon I)^{-1}$, luego:

$$y_\varepsilon = -(D - \varepsilon \lambda_\varepsilon I)^{-1} Cx_\varepsilon$$

de lo cual se puede definir

$$G_\varepsilon x_\varepsilon = [A - B(D - \varepsilon \lambda_\varepsilon I)^{-1} C]x_\varepsilon = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon$$

y λ_ε es un valor propio de

$$G_\varepsilon = A - B(D - \varepsilon \lambda_\varepsilon I)^{-1} C$$

Si λ_ε una función acotada de ε , luego $|\varepsilon \lambda_\varepsilon|$ es una función acotada de ε como veremos. Para $|\varepsilon \lambda_\varepsilon|$ suficientemente grande, existe la inversa de la matriz $A - \lambda_\varepsilon I$ así:

$$x_\varepsilon = -(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1} B y_\varepsilon$$

También

$$\varepsilon \lambda_\varepsilon y_\varepsilon = Cx_\varepsilon + Dy_\varepsilon$$

o

$$|\varepsilon \lambda_\varepsilon| \|y_\varepsilon\| \leq \|C\| \|x_\varepsilon\| + \|D\| \|y_\varepsilon\| \leq \|C\| \|(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \|B\| + \|D\| \|y_\varepsilon\| \leq \|C\| \|B + \|D\|\| \|y_\varepsilon\|$$

para λ_ε suficientemente grande. Luego $|\varepsilon \lambda_\varepsilon|$ está acotada como $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora λ_ε es un valor propio de G_ε , por lo que $\|G_\varepsilon\|$ está acotada, que es lo mismo que decir que ciertos términos de G_ε están acotados. Esto es posible sólo si

$$\det(D - \varepsilon \lambda_\varepsilon I) \rightarrow 0$$

como $\varepsilon \rightarrow 0$. por lo tanto λ_ε está en el lado izquierdo del plano para ε suficientemente pequeños.

Si $(D - \varepsilon \lambda_\varepsilon I)$ es singular, luego $\varepsilon \lambda_\varepsilon$ es un valor propio de D . De nuevo λ_ε está en el lado izquierdo del plano para ε suficientemente pequeño.

Solamente hay un número finito de valores propios de F_ε podemos elegir un ε_0 tal que todos los valores propios de F_ε estén en el lado izquierdo del plano para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

16. Identificación de sistemas

Muchos problemas en Ingeniería de sistemas, particularmente aquellos relacionados con sistemas de control, se pueden subdividir en cuatro partes interrelacionadas.

1. Identificación de la meta.
2. Determinación de la posición con respecto a la meta.
3. Determinación de los factores externos que afectan el pasado, el presente, el futuro y el subsiguiente establecimiento del sistema.
4. Determinación de una política de acuerdo con la definición de la meta (1), conocimiento del estado actual (2) y modelo del sistema y sus alrededores.

A menudo la política en el paso (4) está determinada por una acción óptima, en cuyo caso aparece el sujeto del control óptimo de un sistema.

En general nuestro problema es como sigue: Observamos la versión modificada de un vector de estado $X(t)$ de un sistema modificado por el ruido, una señal de entrada $U(t)$ y un disturbio de entrada $W(t)$.

$$Z(t) = h[x(t), U(t), W(t), p(t), V(t), t]$$

En este modelo observado $p(t)$ representa parámetros desconocidos del sistema y $V(t)$ representa el ruido observado. El vector de estado $X(t)$ asume la forma de una ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), U(t), W(t), p(t), t]$$

En general se desconoce el orden de la ecuación diferencial, pero para la mayoría de los esquemas de identificación que presentaremos tomamos modelos de orden conocido. El problema general de identificación lo presentamos en la figura 38 esquemáticamente.

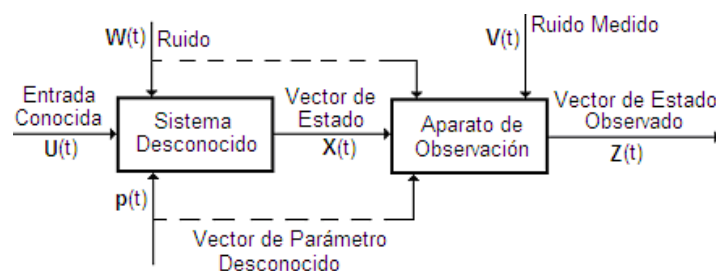


Figura 38. Problema general de identificación.

La solución del problema de identificación de sistemas consistirá en determinar la estimación del vector del parámetro desconocido $p(t)$ y del orden de f si se desconoce.

El vector parámetro $p(t)$ puede consistir de los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema así como los coeficientes de variación del ruido del sistema $W(t)$ y el ruido de observación $V(t)$.

Se pueden notar varias subclases del problema general de identificación de sistemas y son:

Identificación libre de ruido en la cual no están $W(t)$ y $V(t)$.

El sistema y el modelo de observación son lineales.

La observación del ruido de entrada $W(t)$ no es posible.

En general no es posible determinar todas las características de un proceso para el cual se desea un sistema modelo. Las características que debemos conocer son determinadas por las metas que hemos elegido del sistema, el posible grado de complejidad del sistema completo y sus requerimientos computacionales asociados.

En muchos sistemas de identificación en línea o recursiva, es decir hacer una adaptación óptima a la meta posible del sistema en cara de la incertidumbre de los alrededores y cambio de las condiciones

de estos, por lo que hay que desarrollar métodos de identificación de sistemas para ambos dentro y fuera de línea. Podemos dividirlo en tres métodos:

El método clásico de identificación de sistemas
 Funciones de costo para identificación de sistemas
 Técnicas computacionales para identificación de sistemas.

16.1. Métodos clásicos de identificación de sistemas

1.1) Métodos de Deconvolución para la identificación de la respuesta impulso.

Por simplicidad nos restringiremos a un sistema de entrada y salida simple como el que se representa en la figura 39.

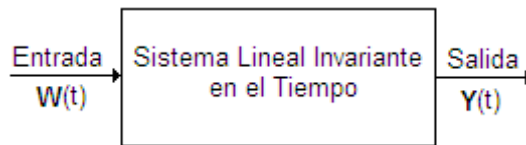


Figura 39. Sistema de entrada y salida simple.

Por la observación de las entradas y salidas de un sistema lineal invariante en el tiempo para un proceso finito $0 \leq t \leq T$ deseamos obtener la respuesta impulso del sistema $h(t)$.

El problema que se plantea es ambicioso y se ve que es necesario simplificar el problema para hacerlo matemáticamente tratable. Se puede observar sólo la entrada y la salida de nuestro período de N veces, digámosle Δ segundos aparte en el intervalo $[0, T]$ donde $N\Delta = T$. Con base en estos datos podemos más o menos determinar la respuesta impulso en el intervalo $[0, T]$.

La salida del sistema debida a una entrada $W(t)$ y condiciones iniciales cero está dada por la integral de convolución:

$$Y(t) = \int_0^t h(t - \tau)W(\tau)d\tau$$

Aquí se considera que la entrada $W(\tau)$ es cero para $\tau < 0$ o sea que $W(0) \neq 0$ si esto no se satisface podemos hacer una traslación finita en el dominio del tiempo para que $W(0) \neq 0$.

Ahora consideraremos que la función $W(t)$ por una aproximación que es constante e igual al valor del menor punto de muestreo entre cada dos puntos adyacentes o sea:

$$W(t) = W(n\Delta) \text{ para } n\Delta < t < (n+1)\Delta$$

si también de la misma forma asumimos que t es constante entre los elementos de muestreo pero con valor igual al valor en el punto medio del intervalo, de tal forma que:

$$h(t) = h\left(\frac{2n+1}{2}\Delta\right) \text{ para } n\Delta \leq t < (n+1)\Delta$$

también podemos hacer

$$W(t) = 0.5 [W(n\Delta) + W(n+1)\Delta]$$

para

$$n\Delta \leq t < (n+1)\Delta.$$

En estos términos de aproximación para $W(t)$ y $h(t)$ la integral de la ecuación

$$Y(t) = \int_0^t h(t-\tau)W(\tau)d\tau$$

si evaluamos para $t = n\Delta$ será:

$$y(n\Delta) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{(2n-1)\Delta}{2} - i\Delta W(i\Delta)$$

Si definimos el vector de observación de salida como:

$$\mathbf{y}^T(T) = [y(\Delta)y(2\Delta)\dots y(n\Delta)]$$

si definimos el vector de respuesta impulso como:

$$\mathbf{h}^T(T) = \left[h\left(\frac{\Delta}{2}\right) h\left(\frac{3\Delta}{2}\right) \dots h\left(\frac{(2n-1)\Delta}{2}\right) \right],$$

entonces la ecuación

$$y(n\Delta) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{(2n-1)\Delta}{2} - i\Delta W(i\Delta)$$

se puede escribir como:

$$y(T) = \Delta W h(T)$$

donde la matriz W se define como:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W(\Delta) & W(0) & 0 & 0 & 0 \\ W(2\Delta) & W(\Delta) & W(0) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W(n-1)\Delta & W(n-2)\Delta & \dots & W(\Delta) & W(0) \end{bmatrix}$$

Nuestro problema es resolver la ecuación

$$y(n\Delta) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} h \frac{(2n-1)\Delta}{2} - i\Delta W(i\Delta)$$

para h . Ya que se necesita que $W(0) \neq 0$ es fácil ver que $W = [W(0)]^N \neq 0$ y W es no singular. Podemos inscribir formalmente la solución de la ecuación

$$y(T) = \Delta W h(T)$$

como:

$$h = W^{-1} y$$

Dada la forma triangular de W la solución para h se puede fácilmente escribir en forma recurrente:

$$h_n = \frac{1}{W(0)} \left[\frac{y(n\Delta)}{\Delta} - \sum_{i=1}^n h_{n-i} W(i\Delta) \right]$$

donde:

$$h_n = h \left(\frac{2n-1}{2} \Delta \right) y h_1 = \frac{y(\Delta)}{\Delta W(0)}$$

2.- Identificación de sistemas usando técnicas de correlación

El problema básico de identificación que debemos considerar se presenta en la figura 40.

Con base en reconocer los componentes de alta frecuencia de $h(t)$ es necesario que $W(t)$ sea una señal de gran ancho de banda y para identificar $h(t)$ sin error, es necesario que $W(t)$ tenga un ancho

de banda infinito. En la práctica es posible tener una señal prueba con un ancho de banda mucho mayor que el ancho de banda del sistema.

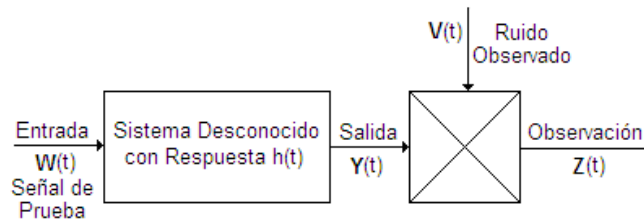


Figura 40. Problema básico de identificación.

Este método consiste en emplear una señal de prueba (ruido blanco) y técnicas de correlación y se deben de considerar los errores debidos a la entrada de ruido blanco. En lugar de observar la señal de salida $y(t)$ se observa la versión de $y(t)$ modificada por el ruido que se denotó por $z(t)$. En la figura 41 se muestra un diagrama de bloques de la estructura de identificación por correlación cruzada.

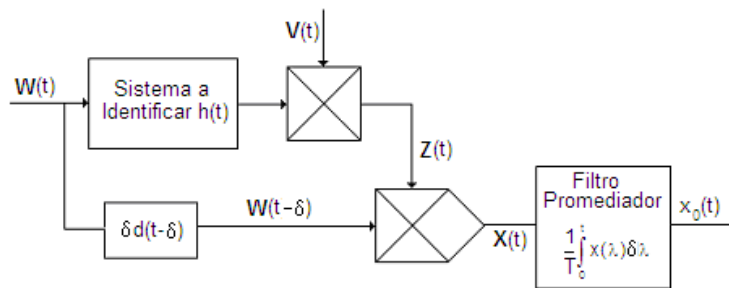


Figura 41. Diagrama de bloques de la estructura de identificación por correlación cruzada.

Si consideramos que el sistema ha estado en operación por un periodo suficientemente grande de tiempo como para que las condiciones de estado estacionario se hallan logrado, entonces los términos de ruido $W(t)$ se pueden considerar Ergódicos y Gaussianos con media cero. Como se llega a ver, el medio en cero es una consideración muy crítica y se debe de tener un gran cuidado para asegurar que el promedio del ruido es cero. La salida del promedio del correlador es:

$$x_a(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(\lambda) d\lambda$$

donde la relaciones:

$$x(t) = z(t)w(t - \tau)$$

$$z(t) = y(t) + v(t)$$

$$y(t) = \int_0^\infty h(\eta)w(t - \eta)d\eta$$

directamente de

$$x_a(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(\lambda) d\lambda$$

y

$$x(t) = z(t)w(t - \tau)$$

El valor esperado de la salida del correlador con la consideración ergódica y la definición:

$$R_{wz}(\tau) = \xi[w(t)z(t - \tau)]$$

es:

$$\xi[x_a(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t \xi[x(\lambda)] d\lambda = \xi(x) = R_{wz}(\tau)$$

de donde vemos de las ecuaciones

$$x_a(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(\lambda) d\lambda$$

$$z(t) = y(t) + v(t)$$

$$y(t) = \int_0^\infty h(\eta) w(t - \eta) d\eta$$

y

$$\xi[x_a(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t \xi[x(\lambda)] d\lambda = \xi(x) = \mathbf{R}wz(\tau)$$

y la consideración del cero medio en $v(t)$ que con:

$$\mathbf{R}w(\tau) = \xi[w(t)w(t-\tau)]$$

da

$$\xi[x_a(t)] = \mathbf{R}wz(\tau) = \int_0^\infty h(\eta) \mathbf{R}w(\tau - \eta) d\eta$$

Si tomamos la transformada de Fourier tenemos las relaciones de densidad espectral:

$$\mathbf{R}wz(s) = h(s) \mathbf{R}w(s)$$

Si el ancho de banda de $\mathbf{R}w(s)$ es mucho mayor que el de $h(s)$ entonces:

$$\mathbf{R}wz(s) = kh(s) \quad \mathbf{R}wz(\tau) = kh(\tau)$$

Esta relación es exacta si $w(t)$ es blanco tal que δD es la Delta de Dirac:

$$\mathbf{R}w(\tau) = \mathbf{R}w\delta D(\tau) \quad \mathbf{R}w(s) = \mathbf{R}w$$

y para $\mathbf{R}w = 1$:

$$\mathbf{R}wz(t) = \xi[x_a(t)] = h(\tau)$$

La identificación completa se obtiene empleando N correladores en paralelo, tales que midamos:

$$\mathbf{R}wz(\tau_i) = h(\tau_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Se notará que no hemos hecho uso de consideraciones Gaussianas, para que todo esto se pueda emplear con otras fuentes que no sean gaussianas. Para determinar los errores estadísticos asociados con la identificación es conveniente determinar la función de correlación asociada con $x(t)$, la salida multiplicativa. Tenemos:

$$\begin{aligned} R_x(\gamma) &= \xi[x(t), x(t+\gamma)] = \xi[z(t), z(t+\gamma), w(t-\tau), W(t-\tau+\gamma)] = \xi[v(t), v(t+\gamma)] \\ &= \xi[w(t-\tau), W(t-\tau+\gamma)] + \xi \left[\int_0^\infty \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_2) \right] \xi[w(t-\tau), W(t-\tau+\gamma)] \\ &\quad \times w(t-\lambda_1) w(t+\gamma-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

Ahora emplearemos el cuarto producto de momentos para una gaussiana estocásticamente variable. Esto establece que si a_1, a_2, a_3 , y a_4 son gaussianas:

$$\xi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \xi(a_1, a_2) \xi(a_3, a_4) + \xi(a_1, a_3) \xi(a_2, a_4) + \xi(a_1, a_4) \xi(a_2, a_3)$$

Usaremos esta relación en la ecuación

$$R_x(\gamma) = \xi[x(t), x(t+\gamma)] = \xi[z(t), z(t+\gamma), w(t-\tau), W(t-\tau+\gamma)] = \xi[v(t), v(t+\gamma)] \\ \xi[w(t-\tau), W(t-\tau+\gamma)] + \xi \left[\int_0^\infty \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_2) \right] \xi[w(t-\tau), W(t-\tau+\gamma)] \\ \times w(t-\lambda_1) w(t+\gamma-\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

y se obtiene:

$$R_x(\gamma) = R_v(\gamma) R_w(\gamma) + \int_0^\infty \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_2) [R_w(\gamma) R_w(\gamma + \lambda_1 - \lambda_2) + \\ + R_w(\tau - \lambda_1) R_w(\tau - \lambda_2) + R_w(\tau + \gamma - \lambda_2) R_w(\tau - \gamma - \lambda_1)] d\lambda_1 d\lambda_2$$

parte de la anterior expresión se puede reconocer como la señal:

$$\xi[x_a(t)] = R_w z(\tau) = \int_0^\infty h(\eta) R_w(\tau - \eta) d\eta$$

y los otros términos representan un error en la medida.

Emplearemos la consideración de ruido blanco

$$R_w(\gamma) = R_w^2 \delta D(\gamma)$$

para obtener de la ecuación

$$R_x(\gamma) = R_v(\gamma) R_w(\gamma) + \int_0^\infty \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_2) [R_w(\gamma) R_w(\gamma + \lambda_1 - \lambda_2) + \\ + R_w(\tau - \lambda_1) R_w(\tau - \lambda_2) + R_w(\tau + \gamma - \lambda_2) R_w(\tau - \gamma - \lambda_1)] d\lambda_1 d\lambda_2$$

lo siguiente:

$$R_x(\gamma) = R_v(\gamma) R_w \delta D(\gamma) + h^2(\tau) R_w^2 + R_w^2 h(\tau + \gamma) h(\tau - \gamma) + R_w^2 \delta D(\gamma) \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_1 + \gamma) d\lambda_1$$

Si definimos:

$$R_x(\gamma) = R_w^2 + R_e(\gamma) = h^2(\tau) R_w^2 + R_e(\gamma)$$

tenemos:

$$R_e(\gamma) = R_v(\gamma) R_w \delta D(\gamma) + R_w^2 h(\tau + \gamma) h(\tau - \gamma) + R_w^2 \delta D(\gamma) \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_1 + \gamma) d\lambda_1$$

Esta es la función de correlación del término de ruido en $x(t)$. El primer término resulta del ruido externo $v(t)$ y los otros dos términos son solamente resultado del sistema a ser identificado y la señal de prueba.

Se puede mostrar que si se elige la función pseudo azarosa apropiadamente en la señal de prueba es posible de la ecuación

$$R_e(\gamma) = R_v(\gamma) R_w \delta D(\gamma) + R_w^2 h(\tau + \gamma) h(\tau - \gamma) + R_w^2 \delta D(\gamma) \int_0^\infty h(\lambda_1) h(\lambda_1 + \gamma) d\lambda_1$$

eliminar los efectos de los dos últimos términos. Este es el caso en muchas identificaciones prácticas de problemas en los cuales el ruido observado tiene variaciones considerablemente grandes en comparación con la señal de prueba. Bajo estas condiciones la correlación de término de ruido es:

$$R_e(\gamma) = V_x(\gamma) = R_v(\gamma) R_w \delta D(\gamma)$$

que es la varianza de $x(t)$ bajo la consideración de que los últimos dos términos de la ecuación

$$R_e(\gamma) = R_v(\gamma)R_w\delta D(\gamma) + R_w^2 h(\tau + \gamma)h(\tau - \gamma) + R_w^2 \delta D(\gamma) \int_0^\infty h(\lambda_1)h(\lambda_1 + \gamma)d\lambda_1$$

son despreciables. El problema al que nos enfrentamos con esto es justamente la estimación de una señal constante:

$$R_{wz}(\tau) = R_w h(\tau)$$

embebida en una gaussiana de ruido blanco con media cero y varianza:

$$V_x(\gamma) = R_v(\gamma)R_w\delta D(\gamma)$$

El estimador óptimo bajo estas condiciones es justamente:

$$x_o(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(t)dt$$

El valor esperado para el filtro de salida es: $R_w h(\tau)$. Si el filtro promediador de salida se divide por R_w , el filtro promediador de salida es $h(\tau)$, la respuesta impulso que deseábamos identificar. La varianza del error es:

$$\text{var}[\tilde{h}(t)] = \left(\frac{1}{R_w^2} \right) \text{var}[X_a(t)] = \frac{R_v(0)}{tR_w}$$

para un valor especificado de varianza, el mínimo tiempo de identificación es:

$$t_{\min} \geq \left(\frac{R_v(0)}{R_w} \right) \text{var}[\tilde{h}(\tau)]$$

16.2. Identificación de procesos lineales variantes en el tiempo por medición de la respuesta senoide

Si se excita por una entrada de la forma $A \sin(\omega t)$ un sistema lineal invariante en el tiempo con función de transferencia $H(s)$, la salida estacionaria será:

$$AR(\omega) \sin[\omega t + \phi(\omega)]$$

Aquí $R(\omega)$ es la razón de la magnitud del componente senoidal de la salida a la entrada y $\phi(\omega)$ será la diferencia de fase entre la entrada y la salida. Es fácil mostrar que $R(\omega)$ y $\phi(\omega)$ se relacionan con $H(s)$ por medio de:

$$R(\omega) = |H(s)|_s = j\omega$$

$$\phi(\omega) = \arg H(s)|_s = j\omega$$

Luego por medición de la respuesta senoidal entenderemos: $R(\omega)$ y $\phi(\omega)$ por un número de valores de ω , tal que nos permita crear una gráfica de amplitud contra fase (Bode).

El método de respuesta senoidal se puede extender a sistemas lineales variantes en el tiempo. Para desarrollar un algoritmo discutiremos un método de transformación. La transformada de Laplace para un sistema lineal de coeficientes constantes es:

$$\bar{\Phi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} dt = (s\bar{I} - \bar{A})^{-1}$$

Una característica fundamental de los sistemas lineales constantes es que su matriz de respuesta impulso se sólo dependiente de la “edad variable” ($t-\tau$). Esta propiedad no la tienen los sistemas no estacionarios y la matriz de impulso respuesta puede permanecer en la forma general $\Phi(t-\tau)$. Se puede por analogía definir una transformación de la expresión anterior como:

$$\overline{\Phi}(t, j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau$$

El límite superior s puede remplazar por t si:

$$\Phi(t-\tau) = 0 \text{ para } \tau > t$$

Es conveniente definir el vector

$$r(t) = B(t) U(t)$$

para el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)$$

Es posible mostrar que la expresión válida para el vector de estado de salida está dada por:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t-j\omega) \mathbf{R}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

que es sólo una generalización de la matriz de transformación ara sistemas estacionarios.

Una propiedad importante de $\phi(t, j\omega)$ es que satisface las ecuaciones diferenciales lineales que son más simples de resolver que la ecuación de transformación para la función de transferencia. Es posible mostrar que la función de transferencia fundamental debe satisfacer para su matriz la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, j\omega) + [j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}(t)] \Phi(t, j\omega) = \mathbf{I}$$

donde $j\omega$ es un parámetro fijo. Esta última ecuación es una interpretación en variable de estado de la ecuación de Zadeh para transformaciones de tiempo variable. Si el sistema es estacionario:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, j\omega) = 0$$

y

$$\Phi(t, j\omega) = [j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$$

como se estableció.

para formular el problema en términos matemáticos, el sistema lineal de entrada simple está descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U} \end{aligned}$$

En esta ecuación $\mathbf{x}$ es el vector de estado de n dimensiones y $\mathbf{Z}$ es el vector salida definido en términos de las matrices conocidas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

Consideremos que al final el primer componente x_1 de $\mathbf{x}$ se puede obtener instantáneamente de $\mathbf{Z}$. $\mathbf{U}$ es el vector de entrada de m dimensiones que relaciona un simple escalón de entrada U de acuerdo a la ecuación:

$$\mathbf{U}^T = [u, pu, \dots, p^{m-1}u]$$

donde p indica d/dt .

Las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ no son completamente conocidas pero se consideran de la siguiente forma:

$$A(t) = [a_{ik}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n-3}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = [b_{ik}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & b_{n-3}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

o se considera que se pueden convertir a estas formas por una transformación lineal no singular de variables. Luego puesto en términos de la ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

el problema de identificación es el de determinar las funciones del tiempo:

$$a_{ni}(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$b_{nk}(t) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

de las matrices $A(t)$ y $B(t)$. En el caso general algunas de las $n + m$ funciones se pueden conocer a priori.

La transformación de tiempo variable a frecuencia $h(j\omega, t)$ está definida como:

$$h(j\omega, t) = T(j\omega) X(j\omega, t)$$

$$T(j\omega) = [t_{ik}(j\omega)]$$

donde:

$$t_{ik}(j\omega) = \frac{i!(-j\omega)^{i-k}}{k!(i-k)!} = \left[\frac{i}{k} \right] (-j\omega)^k \quad i \geq k$$

$$t_{ik}(j\omega) = 0 \quad y < k$$

$$|T(j\omega)| = 1$$

$$\mathbf{x}(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t, \xi) e^{-j\omega(t-\xi)} d\xi$$

$\omega(t, \xi)$ es la respuesta de las variables de estado cuando la entrada es un impulso unitario que ocurre al tiempo $t = \xi$. Podemos verificar que la definición de la ecuación

$$h(j\omega, t) = T(j\omega) X(j\omega, t)$$

nos da las siguientes propiedades para los elementos de $h(j\omega, t)$

$$h_i(j\omega, t) = p h_{i-1}(j\omega, t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

donde $h(j\omega, t)$ está definida en términos de la respuesta impulso a una excitación senoidal. En efecto una definición alterna de $h(j\omega, t)$ es:

$$\mathbf{h}(j\omega, t) = e^{j\omega t} \mathbf{T}(j\omega) \xi(j\omega, t)$$

donde $\xi(j\omega, t)$ es la respuesta del sistema $\mathbf{U} = e^{j\omega t}$. El esquema de identificación que desarrollamos emplea la ecuación

$$\mathbf{h}(j\omega, t) = e^{j\omega t} \mathbf{T}(j\omega) \boldsymbol{\xi}(j\omega, t)$$

como un medio para determinar $\mathbf{h}(j\omega, t)$.

Los elementos de $\mathbf{h}(j\omega, t)$ son complejos y considerando ω como un parámetro fijo se puede mostrar que:

$$\mathbf{p} \begin{bmatrix} h_k \\ h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_R(j\omega, t) - E_I(j\omega, t) \\ E_I(j\omega, t) - E_R(j\omega, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_R(j\omega, t) \\ k_I(j\omega, t) \end{bmatrix}$$

donde la matriz $n \times n$ $E(j\omega, t)$ es la forma general de $A(t)$ con elementos $\{C_{nr}(j\omega, t)\}$ relacionado a los elementos $\{a_{ni}(t)\}$ de $A(t)$ por la ecuación:

$$C_{nr}(j\omega, t) = \sum_{k=r}^{n-1} \frac{(k-1)! (j\omega)^{k-r}}{(r-1)! (k-r)!} a_{nk}(t)$$

los elementos adicionales $a_{n, n-1}(t)$ son -1. El n -vector $\mathbf{k}(j\omega, t)$ se relaciona con la matriz $B(t)$ por:

$$\mathbf{k}(j\omega, t) = \mathbf{B}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ j\omega \\ (j\omega)^{m-1} \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{h}$ y $\mathbf{p}\mathbf{h}$ se pueden sustituir en la ecuación

$$\mathbf{p} \begin{bmatrix} h_k \\ h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_R(j\omega, t) - E_I(j\omega, t) \\ E_I(j\omega, t) - E_R(j\omega, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_R(j\omega, t) \\ k_I(j\omega, t) \end{bmatrix}$$

nos da con la ayuda de las ecuaciones

$$C_{nr}(j\omega, t) = \sum_{k=r}^{n-1} \frac{(k-1)! (j\omega)^{k-r}}{(r-1)! (k-r)!} a_{nk}(t)$$

y

$$\mathbf{k}(j\omega, t) = \mathbf{B}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ j\omega \\ (j\omega)^{m-1} \end{bmatrix}$$

dos ecuaciones algebraicas en las funciones $a_{ni}(t)$ y $b_{ni}(t)$. Mediciones de $\mathbf{h}$ en frecuencias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ nos dan $2q$ ecuaciones de tales soluciones. Considerando que s de la $n + m$ funciones $a_{ni}(t)$ y $b_{ni}(t)$ se conocen apriori, se sigue que las matrices $A(t)$ y $B(t)$ se pueden identificar si:

$$q = \frac{n+m-s}{2} \text{ o } q = \frac{n+m+1-s}{2}$$

dependiendo de que expresiones resultan en un entero.

Luego si definimos:

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t) = [a_{n1}(t), a_{n2}(t), \dots, a_{nm}(t), b_{n1}(t), \dots, b_{nm}(t)]$$

el problema de identificación se puede establecer conscientemente como el determinar $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Para desarrollar una expresión para $\boldsymbol{\lambda}$ es conveniente definir:

$$\mathbf{f}(j\omega, t) = (\mathbf{p} + j\omega) \mathbf{h}(j\omega, t)$$

mostraremos que esta cantidad se puede medir directamente bajo ciertas condiciones. Sustituyendo la ecuación

$$f(j\omega, t) = (p + j\omega) h(j\omega, t)$$

en la ecuación

$$p \begin{bmatrix} h_k \\ h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_R(j\omega, t) - E_l(j\omega, t) \\ E_l(j\omega, t) - E_R(j\omega, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_R(j\omega, t) \\ k_l(j\omega, t) \end{bmatrix}$$

obtenemos una ecuación vectorial cuyas n^s columnas se pueden escribir:

$$f_n(j\omega, t) = a_n^T(t) h(j\omega, t) + b_n^T(t) \omega$$

donde f_n es el n^s elemento de f y a_n^T y b_n^T son los n^s renglones de $A(t)$ y $B(t)$ respectivamente. La ecuación anterior es equivalente a:

$$f_n(j\omega, t) = [h^T(j\omega, t) \omega^T] \lambda(t)$$

porque f_n y los elementos de h y ω son complejos y las mediciones involucran números reales, es bueno separar esta relación en su parte real e imaginaria.

Rescribiremos la última ecuación de la forma:

$$\begin{bmatrix} f_{nR} \\ f_{nI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_r^T & \omega_r^T \\ h_l^T & \omega_l^T \end{bmatrix} \lambda$$

Si llamamos a un índice colocado al lado derecho de la cantidad, designación del parámetro de frecuencia por ejemplo: $^1f_n = f_n$ la ecuación anterior se puede extender:

$$\begin{bmatrix} ^1f_{nR} \\ ^1f_{nI} \\ ^2f_{nR} \\ ^2f_{nI} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^1h_r^T & ^1\omega_r^T \\ ^1h_l^T & ^1\omega_l^T \\ ^2h_r^T & ^2\omega_r^T \\ ^2h_l^T & ^2\omega_l^T \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \lambda$$

Llamando al vector del lado izquierdo por γ y a la matriz del lado derecho por G , es evidente que G será cuadrada si γ está dando la dimensión de λ . Esto se satisface si el último elemento de λ es:

$$^q f_l \text{ (} q = n + m/2 \text{) para } (n + m) \text{ par o } ^q f_R \text{ (} q = n + m/2 \text{) impar.}$$

En general G será no singular y la solución de la ecuación

$$\begin{bmatrix} ^1f_{nR} \\ ^1f_{nI} \\ ^2f_{nR} \\ ^2f_{nI} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^1h_r^T & ^1\omega_r^T \\ ^1h_l^T & ^1\omega_l^T \\ ^2h_r^T & ^2\omega_r^T \\ ^2h_l^T & ^2\omega_l^T \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \lambda$$

se puede escribir como:

$$\lambda(t) = G^{-1}(j\omega_i t) r(j\omega_i t)$$

Si la última ecuación se emplea para identificar el sistema, se puede emplear para determinar $h(j\omega_i t)$ y $f_n(j\omega_i t)$ con $i = 1, 2, 3, \dots, q$. En esencia el método empleado es perturbar el sistema con una señal de prueba y extraer la información necesaria de la respuesta del sistema. Para elegir que tipo de señal de prueba emplear se sugiere por la ecuación

$$h_i(j\omega, t) = p h_{i-1}(j\omega, t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

que presenta una simple relación entre $h(j\omega_i t)$ y la respuesta del sistema a

$$U_1 = e^{j\omega t}.$$

Si lo anterior no es realizable físicamente se selecciona la entrada $U_1 = \cos \omega t$. Si llamamos $\psi(j\omega, t)$ a la respuesta a esta entrada y notamos que el sistema real sólo tiene coeficientes de valor real, se tiene:

$$\psi(j\omega, t) = \mathbf{R}_e \{ \xi(j\omega, t) \} = \mathbf{h}_k(j\omega, t) \cos \omega t - \mathbf{h}_l(j\omega, t) \sin \omega t$$

empleando este resultado y la definición

$$\mathbf{f}(j\omega, t) = (\mathbf{p} + j\omega) \mathbf{h}(j\omega, t)$$

se ve que:

$$\mathbf{p}\psi(j\omega, t) = \mathbf{f}_R(j\omega, t) \cos \omega t - \mathbf{f}_I(j\omega, t) \sin \omega t$$

estas dos relaciones nos muestran que el problema de medida es demodular ψ y $\mathbf{p}\psi$. Afortunadamente no es necesario considerar estas dos ecuaciones por separado, se pueden combinar en una sola. Para hacer esto definimos la transformación vectorial de $(n + 1)$ dimensiones $\gamma(j\omega, t)$ se define como:

$$\gamma^T(j\omega, t) = [\mathbf{h}^T(j\omega, t) - \mathbf{f}_n(j\omega, t)]$$

Notamos que γ consiste de cantidades medibles. Si hacemos $\psi'(j\omega, t)$ la respuesta del vector de estado $U_1 = \cos \omega t$ tenemos:

$$\psi'(j\omega, t) = \gamma_R(j\omega, t) \cos \omega t - \gamma_I(j\omega, t) \sin \omega t$$

El problema es sólo demodular la función simple: $\psi'(j\omega, t)$.

El primer paso es determinar γ_R y para esto se multiplica por $\gamma \cos \omega t$. Este hecho y el vector producto de correlación de $(n + 1)$ dimensiones lo llamaremos $\rho(j\omega, t)$. De la ecuación anterior se tiene:

$$\rho = \psi' \cos \omega t = \frac{1}{2} (\gamma_R + \gamma_R \cos 2\omega t - \gamma_I \sin 2\omega t)$$

Si se desea un análisis de $\rho(j\omega, t)$ en el dominio de la frecuencia, es conveniente asignar el símbolo $\rho(j\omega, j\mu)$ para designar su transformada de Fourier, donde μ es el parámetro de frecuencia de la transformada.

La función elegida debe tener la propiedad de ser proporcional a la magnitud o longitud de ρ , lo que nos sugiere una norma de ρ definida.

$$\|\rho\| = (\rho^+ \rho)^{1/2}$$

donde el símbolo $(^+)$ denota una transpuesta hermitiana.

Para el caso de multifrecuencia, la señal de prueba se elige como la suma de senoidales.

$$U_i(t) = \sum_{i=1}^q a_i \cos \omega_i t$$

Llamamos la respuesta del vector de estado aumentando esta entrada y $\psi'(j\omega, t)$. De la ecuación

$$\psi'(j\omega, t) = \gamma_R(j\omega, t) \cos \omega t - \gamma_I(j\omega, t) \sin \omega t$$

y la superposición:

$$\psi'(j\omega, t) = \sum_{i=1}^q a_i [\gamma_R(j\omega, t) \cos \omega_i t - \gamma_I(j\omega, t) \sin \omega_i t]$$

pensando que el espectro de la $i\gamma$ tiene un ancho de banda limitado y los ω_i son espaciados suficientemente, el espectro de ψ' consiste en un subespectro no sobrepuesto. Con el subespectro bien separado este se puede recuperar individualmente empleando filtros pasa banda. Las salidas de este filtro se pueden demodular con los métodos anteriormente discutidos para obtener $i\gamma_R$ y la $i\gamma_I$.

Es posible derivar un criterio que especifique las circunstancias bajo las cuales la medición del vector transformado se realiza considerando filtros ideales y de ruido despreciable. Escribiremos la ecuación

$$\psi'(j\omega, t) = \sum_{i=1}^q a_i [i\gamma_R(j\omega_i, t) \cos \omega_i t - i\gamma_I(j\omega_i, t) \sin \omega_i t]$$

en notación compleja:

$$\psi'(j\omega_i, t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2} [i\gamma e^{j\omega_i t} + (i\gamma e^{j\omega_i t})^*]$$

Tomando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación:

$$\psi'(j\omega, t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2} \{ \Gamma[j\omega_i, j(\mu - \omega_i)] + \Gamma[-j\omega_i, j(\mu + \omega_i)] \}$$

donde Γ representa la transformada de Fourier de γ . Si el subespectro no se traslapa, el término dentro de la sumatoria no es par lo que implica que el producto interno:

$$\Gamma^+ [j\omega_i, j(\mu, \omega_i)] \Gamma [j\omega_R, j(\mu \mp \omega_R)] = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, q$. Se puede verificar que cuando esta situación se satisface no sólo se puede separar una frecuencia de las otras por un filtro pasa banda, sino que cada salida de los pasabanda se puede demodular para darnos $i\gamma_R$ y la $i\gamma_I$.

El problema del ruido en este esquema de identificación lo discutiremos brevemente. Hay dos efectos principales que son deseables: minimización de los efectos del ruido originados a la entrada y los efectos de estimación de γ en presencia de ruido cuando no se pueden medir directamente cada elemento de x .

El ruido a la entrada normalmente se conoce y se puede aumentar la amplitud de la señal de prueba hasta elegir la mayor frecuencia de ésta que soporte el rechazo del sistema.

Un método más elaborado de minimizar los efectos del ruido introducido a la entrada está basado en el modelo de la figura 42.

En este esquema de cancelación de ruido el modelo de rastreo se ajusta para identificar al sistema. En esta condición la respuesta del sistema debida a la señal de prueba solamente es una entrada a la computadora de identificación.

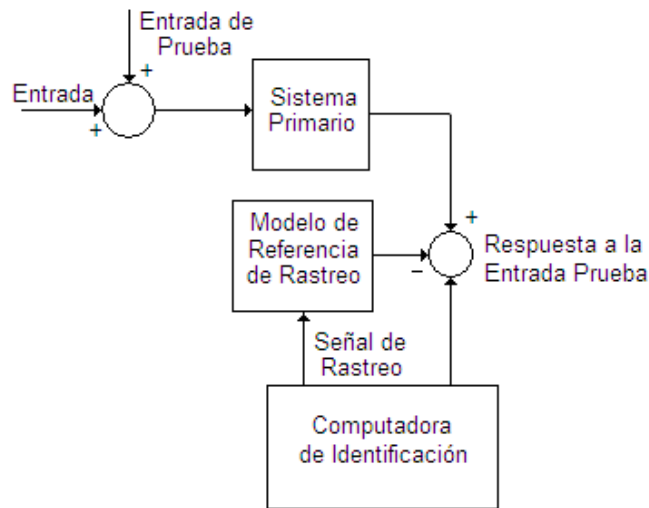


Figura 42. Esquema de cancelación de ruido.

16.3. Modelos que aprenden

Uno de los más simples y a la vez más flexibles sistemas de identificación, es el de los sistemas que aprenden o modelos de referencia. La idea básica de esto se representa en la figura 43.

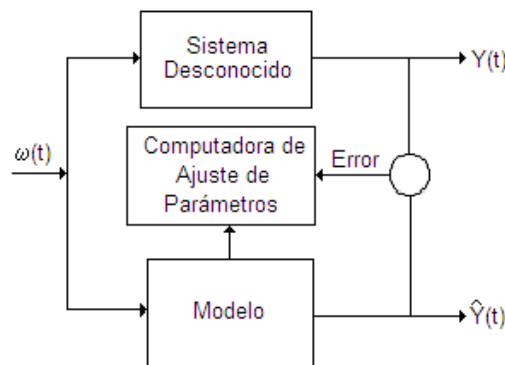


Figura 43. Sistemas que aprenden o modelos de referencia.

Se aplica una entrada conocida a un sistema desconocido y a un modelo que nos sirve para simular el sistema. Se toma la diferencia entre las dos salidas y con ella se ajusta el modelo y se repite este procedimiento. La forma del modelo normalmente se fija y sólo se ajustan un número finito de parámetros.

Este procedimiento puede ser empleado en línea dividiendo la señal de entrada en eventos finitos en el tiempo y después se realiza la identificación de cada uno de los eventos. Al aplicar este procedimiento se deben de considerar varios problemas prácticos:

1. Cómo elegir la estructura del modelo
2. Posibilidades de escalar en el tiempo
3. Criterios de error
4. Condiciones iniciales
5. Estrategia de ajuste.

Discutiremos cada uno de estos con más detalle:

El problema de la selección del modelo es una parte integral de la mayoría de los métodos de identificación. En muchos problemas conocemos los procesos físicos que son representados en el sistema desconocido y sólo tenemos que especificar los valores de los parámetros. Si no conocemos

la estructura del sistema escogemos varias estructuras de modelos y observar cual de ellos se aproxima más al sistema desconocido.

Existen situaciones donde se introduce a propósito introduce un modelo que se sabe es diferente que la descripción actual del sistema. Este será el caso si estamos buscando el mejor modelo lineal para algunos sistemas que sabemos que tienen características no lineales.

En algunos usos memorizar los resultados entrada salida sirve para incrementar la escala de tiempo del modelo de tal forma que la selección del modelo en sus parámetros sea rápida.

El modelo de referencia para el procedimiento de identificación se sitúa en una computadora híbrida de tal forma que la escala de tiempo sea de fácil realización. Por supuesto en simulación digital escalar en tiempo es difícil dado que normalmente no hay relojes de tiempo real asociados con esta aproximación.

Si el modelo óptimo de aprendizaje siempre se hace por un proceso de desarrollo opuesto a la técnica analítica, existen una gran variedad de criterios de error que se pueden emplear sin un cambio significativo en complejidad. Las posibilidades incluyen integral de error cuadrático, integral de error absoluto. Se puede emplear el criterio de error max-min, donde es deseable seleccionar parámetros que minimicen el máximo error.

La técnica de ajuste de parámetros es probablemente la más difícil de la técnica del modelo de referencia. Las posibles fuentes de dificultades son:

- La existencia de múltiples mínimos locales
- La enorme sensibilidad de algunos parámetros y la insensibilidad de otros
- Pobre convergencia de algunos modelos
- Falta de ortogonalidad. El valor óptimo de algunos parámetros, depende de los valores óptimos de otros parámetros.

Las técnicas más populares son:

- Búsqueda Random
- Técnicas de Gradiente.

La primera técnica es muy efectiva para encontrar y descartar mínimos locales y para obtener soluciones en base al error de superficie. Las técnicas de gradiente son relativamente fáciles de programar y son algunas veces efectivas para localizar sólo mínimos locales.

16.4. Teoría de Weiner de sistemas no lineales

Es una técnica experimental en la cual los parámetros del sistema desconocido se determinan como coeficientes de un operador expandido en funciones de un espacio de Hilbert. La entrada al sistema se expande en series de Laquerre. Estas funciones se derivan de los polinomios de Laquerre por la inclusión de la raíz cuadrada de las funciones de Laquerre como tal. Para los polinomios de Laquerre:

$$\mathfrak{T}_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} e^t \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{n-1} e^{-t}) \text{ con } n = 1, 2, \dots$$

La enésima función de Laquerre está dada por:

$$g_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}} L_n(t) \\ 0 \end{cases}$$

Las funciones $g_n(t)$ son ortonormales para toda $t \in [0, \infty]$. Podemos expandir el pasado de la entrada como:

$$u(-t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n q_n(t) t \geq 0$$

$$v_n = \int_0^{\infty} u(-\tau) h_n(\tau) d\tau$$

Luego es posible obtener el coeficiente deseado de Laquerre empleando $x(t)$ como la entrada a una cadena de filtros lineales. Considérese la generación de los coeficientes de Laquerre para el sistema lineal que resulta de la transformada de Laplace de la ecuación

$$\mathfrak{T}_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} e^t \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{n-1} e^{-t}) \text{ con } n = 1, 2, \dots$$

tenemos

$$G_n(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \left[\frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} \right]^{n-1}$$

este resultado se muestra en la figura 44

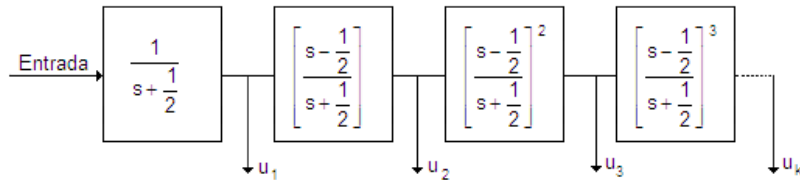


Figura 44. Coeficientes de Laquerre.

En virtud a explotar totalmente los beneficios de la expansión de las funciones de Laquerre de una señal de entrada, la teoría de Weiner insiste que la entrada usada para excitar el sistema en su respuesta debe de ser un ruido blanco Gaussiano. Con esta elección se puede ver que las funciones de Laquerre no están correlacionadas y son procesos estocásticos gaussianos.

Si los polinomios de Hermite son ortonormales $\forall t \in [-\infty, \infty]$ es razonable expandir el operador del sistema en funciones de Hermite. Si $\eta_n(u)$ es el n -ésimo polinomio de Hermite, Weiner define el $(n+1)$ -ésimo polinomio de Hermite como:

$$H_n(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} \eta_n(u)$$

Weiner ha mostrado que la transformación de los coeficientes de Laquerre dentro del espacio a la salida se puede escribir en términos de la función como expansión:

$$x(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \sum_{n=1}^{\infty} a_{ij\dots n} H_i(u_1) H_j(u_2) \dots H_n(u_p)$$

Los coeficientes de esta expansión $a_{ij\dots n}$ se pueden determinar multiplicando ambos lados de la ecuación por el producto apropiado $H_n(u)$ y promediando sobre $t \in [-\infty, \infty]$. Porque al elegir una señal de entrada y una expansión, el promedio requerido se puede encontrar por una simple correlación cruzada de la salida del sistema con los polinomios de Hermite, por ejemplo:

$$a_{ij\dots n} = (2\pi)^{\frac{p}{2}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \eta_i(u_1) \eta_j(u_2) \dots \eta_n(u_p) dt = (2\pi)^{\frac{p}{2}} \bar{u}(t) \bar{v}(t)^t$$

Bibliografía

- Franks, L. (1975) **Teoría de la señal**. 2a ed. España, Reverté.
- Katsuhiko, O. (1980) **Ingeniería de Control Moderna**. 3a ed. México, Prentice-Hall.
- Kesler, S. (1986) **Modern Spectrum Analysis II**. 1a ed. Estados Unidos, IEEE Press.
- Meerschaert, M. (1999). **Mathematical modeling**. 1a. Estados Unidos, Academic Press.
- Milone, A. (2006) **Introducción a las señales y los sistemas discretos**, 1a ed. España, Eduner.
- Oppenheim, A. (1987) **Signals and systems**. 2a ed. Estados Unidos, Prentice-Hall.