



CCADET

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

NOTAS DE CURSO

CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y REDES PASIVAS LINEALES

José Luis Pérez Silva
Antonio Garcés Madrigal

Agosto de 2015

Financiamiento interno

Notas de Curso de Circuitos Eléctricos y Redes Pasivas Lineales

José Luis Pérez Silva, Antonio Garcés Madrigal.

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico. UNAM.

RESUMEN

En el ámbito de la ciencia y la técnica, los Circuitos Eléctricos y sus redes pasivas lineales ha jugado un papel importante, podríamos asegurar que la vida actual, como la entendemos, no podría existir sin la participación de la teoría de los Circuitos Eléctricos y su aplicación técnica en electricidad, electrónica y prácticamente en todo lo que implica instalaciones eléctricas, por lo que estudiarlos y entenderlos es fundamental para poder entender la Ciencia y la tecnología actual.

El énfasis de estas notas está colocado en lo fundamental, ya que consideramos que si se entienden los conceptos fundamentales, los estudiantes estarán preparados para resolver los problemas de circuitos que actualmente requieren la Ciencia y la Técnica.

Por este motivo el curso está dividido en: Introducción, Conceptos Básicos, Leyes de Kirchhoff, Variables de Estado, Transformada de Laplace, Análisis Senoide, Series y Transformada de Fourier y Redes pasivas lineales.

Índice

	INTRODUCCIÓN	4
1.	ELEMENTOS BÁSICOS DE CIRCUITO DE DOS TERMINALES	5
1.1	Resistor lineal invariante en el tiempo	5
1.2	Capacitor lineal invariante en el tiempo	6
1.3	Inductor lineal invariante en el tiempo	8
1.4	Concepto de energía en elementos de dos terminales	9
1.5	Energía disipada por un resistor	10
1.6	Energía almacenada en un capacitor	10
1.7	Energía almacenada en un inductor	10
1.8	Fuentes	11
1.9	Elementos lineales variantes en el tiempo	12
2.	LEYES DE KIRCHOFF	14
2.1	Ley de corriente de Kirchhoff	14
2.2	Métodos de Análisis	17
2.3	Método No 1	19
2.4	Método No 2	19
2.5	Análisis Nodal	20
2.6	Análisis de Gasas	22
2.7	Combinación en Serie	23
2.7.1	Resistores	23
2.7.2	Inductores	23
2.7.3	Capacitores	23
2.8	Combinación en Paralelo	24
2.8.1	Resistores	24
2.8.2	Inductores	24
2.8.3	Capacitores	25
3.	ANÁLISIS SENOIDE	26
3.1	Respuesta de frecuencia de redes	26
3.2	Fasores	26
3.3	Respuesta de redes a funciones senoides	29
3.4	Gráficas de bode de respuesta en amplitud	34
3.5	Gráficas de bode para respuesta de fase	36
4	VARIABLES DE ESTADO	38
4.1	Método directo para escribir ecuaciones de estado	38
4.2	Métodos para pasar de ecuaciones diferenciales a ecuaciones de estado	41
4.3	Cargas y flujos como variables de estado	44
4.4	Representación en ecuaciones de estado para circuitos no lineales variantes en el tiempo	46
4.5	Solución analítica de las ecuaciones de estado	48
5	SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER	51
5.1	Forma exponencial de la serie de Fourier	53
5.2	Líneas espectrales	55
5.3	Aproximación de funciones periódicas por series truncadas de Fourier	56
5.4	Función Delta	57
5.5	La función impulso y la transformada de Fourier	59
5.6	Respuesta a un impulso	59
5.7	Respuesta a un pulso y a un impulso	60
5.8	Convolución	62
6.	TRANSFORMADA DE LAPLACE	63
6.1	Aplicación de la transformada de Laplace a redes	64
6.2	Leyes de Kirchhoff	66
6.2.1	Resistores	66
6.2.2	Capacitores	66
6.2.3	Inductores	67
6.3	Impedancia y Admitancia	69
6.4	Funciones de transferencia de redes	72
6.5	Relación con variable de estado	72
7.	REDES PASIVAS LINEALES	75

7.1	Circuitos de una Gasa	75
7.1.1	Variación en L	75
7.1.2	Variación en R	76
7.1.3	Variación en C	76
7.1.4	Redes de Tres Puertos	76
7.2	Combinaciones de redes pasivas	77
7.2.1	La Combinación Híbrida G para Conexiones Serie Paralelo	78
7.2.2	La Combinación Híbrida H para Conexiones Serie Paralelo	78
7.3	Las matrices	80
7.3.1	La Matriz de Admitancia	80
7.3.2	La Matriz en Cascada	81
7.3.3	La Matriz Z o Matriz de Impedancia	83
7.4	Teoremas	84
7.4.1	Teorema de Dualidad	84
7.4.2	Teorema de Norton	86
7.4.3	Teorema de Thevenin	86
	Bibliografía	90

INTRODUCCIÓN

El análisis de circuitos está íntimamente relacionado con cuatro manifestaciones básicas de la electricidad que son:

1. Carga eléctrica $q(t)$
2. Flujo magnético $\phi(t)$
3. Potencial eléctrico $V(t)$
4. Corriente eléctrica $i(t)$

Por otro lado contamos con cuatro ecuaciones fundamentales para el análisis de circuitos:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

Esta ecuación nos dice, que la corriente eléctrica es la derivada con respecto al tiempo de la carga eléctrica, y su unidad es el Ampere, que se define como:

$$\text{Ampere} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{segundo}}$$

La segunda es:

$$V(t) = \frac{d}{dt} \phi(t)$$

Esta ecuación nos dice que la diferencia de potencial entre las dos terminales de un elemento de circuito, para el cual el flujo magnético es un factor dominante, es igual a la derivada del flujo respecto del tiempo. Su unidad es el Volt que se define como:

$$\text{Volt} = \frac{\text{Weber}}{\text{segundo}}$$

La potencia instantánea liberada por un elemento de circuito la definimos como:

$$p(t) = V(t) i(t)$$

donde $V(t)$ e $i(t)$ son el voltaje y la corriente del elemento de circuito respectivamente. Su unidad es el Watt.

Finalmente la energía liberada por un elemento de circuito en el intervalo de tiempo (t_0, t) , está dada por:

$$E(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(t) dt$$

o en forma equivalente:

$$E(t_0, t) = \int_{t_0}^t V(t) i(t) dt$$

donde E esta dado en watts por segundo, o sea en joules.

Las relaciones entre el voltaje y la corriente en un elemento de circuito, dependen de la naturaleza física del elemento. El estudio de estas relaciones y las interconexiones de estos elementos, es el objetivo de nuestro curso.

1. ELEMENTOS BÁSICOS DE CIRCUITO DE DOS TERMINALES

La representación simbólica de un elemento de dos terminales, es la que se muestra en la figura 1.



Figura 1. Representación simbólica de un elemento de dos terminales

Los puntos finales marcados A y B, representan las dos terminales del elemento que tiene la posibilidad de interconectarse con otros elementos del circuito.

Una propiedad básica de los elementos es que la corriente que entra en una terminal, es igual a la corriente que sale por la otra. Es decir:

$$i_1(t) = i_2(t) \quad \forall t$$

ya que fluye una corriente a través del elemento, se necesita que pueda medirse su caída de potencial a través del elemento, y para que sea posible establecer una relación voltaje corriente, es necesario el poder establecer una convención de signos, una polaridad.

La polaridad del voltaje en un elemento de circuito, se establece arbitrariamente considerando que una terminal está a un potencial mayor que otro. A la terminal que se considera a un mayor potencial, se le asigna el signo +, y a la terminal considerada a un potencial menor, se identifica con el signo -. La figura 2, nos muestra un elemento cuya terminal A está a mayor potencial que la B, y $V(t)$ nos indica la caída de potencial a través del elemento.

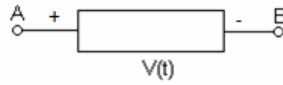


Figura 2. Elemento cuya terminal A está a mayor potencial que la B.

donde:

$$V_1 = V_a - V_b$$

y V_a y V_b denotan los potenciales en los puntos a y b respectivamente.

Ahora estamos en la posibilidad de establecer una convención para la dirección de la corriente eléctrica, de acuerdo a la adoptada de signos para el voltaje. A través del curso denotaremos la dirección de la corriente por flechas, y consideraremos que la corriente entra por la terminal (+) y sale por la terminal (-).

Ya que la relación entre voltaje y corriente, depende solo de la naturaleza física del elemento, dividiremos estos en cuatro categorías básicas:

1. Resistivos.
2. Capacitivos.
3. Inductivos.
4. Fuentes.

Estudiaremos algunas propiedades de una clase especial de elementos de circuito que denominaremos elementos lineales invariantes en el tiempo.

1.1. Resistor lineal invariante en el tiempo

El término resistencia, denota un elemento con la propiedad de convertir energía eléctrica en energía calorífica. Al elemento cuya característica predominante es la resistencia se le llama Resistor. Matemáticamente se modela un resistor, como una función que relaciona el voltaje de las terminales, y la corriente que circula por él. En forma más precisa, lo definiremos como:

Decimos que un elemento de circuito de dos terminales es un resistor lineal invariante en el tiempo, si su caída de potencial se puede expresar como una función lineal invariante en el tiempo de su corriente de entrada.

Matemáticamente expresamos lo anterior por medio de la relación:

$$V(t) = Ri(t)$$

donde R es el valor de la Resistencia del elemento, y se mide en Ohms (Ω). $i(t)$ es el valor de la corriente de entrada en amperes y $V(t)$, es el valor del voltaje en volts. Su símbolo esquemático se muestra en la figura 3.



Figura 3. Símbolo esquemático de un resistor.

Se puede resolver la ecuación para la corriente de la forma:

$$i(t) = \frac{1}{R} V(t)$$

o en forma equivalente:

$$i(t) = G[V(t)]$$

donde

$$G = \frac{1}{R}$$

y se denomina Conductancia, y sus unidades son $\text{Ohm}^{-1} = \text{mho}$.

La relación voltaje corriente de un resistor lineal invariante en el tiempo, se puede representar como una línea recta que pasa a través del origen en el plano V, i . Cuando $R = 0$, la línea es horizontal y $V = 0$ para todos los valores de i . A esto se le llama corto circuito. Cuando $R = \infty$, la línea vertical con $i = 0$ para todos los valores de V , define lo que se llama el circuito abierto.

Los diagramas esquemáticos del resistor, corto circuito, y circuito abierto, se muestran respectivamente en la figura 4.

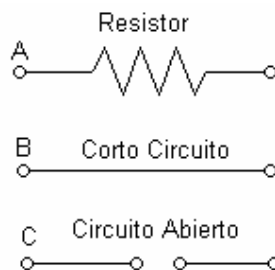


Figura 4. Esquemáticos del resistor, corto circuito, y circuito abierto

1.2. Capacitor lineal invariante en el tiempo

El término Capacitancia se emplea para denotar la propiedad de un elemento que guarda energía. En un elemento típico de capacitancia, la energía almacenada está acompañada de una acumulación de cargas entre dos superficies separadas por un material aislante. Este elemento se llama Capacitor y en la figura, se muestra esquemáticamente.

Su símbolo esquemático es el de la figura 5. (Es uno de los símbolos usados pero no es menos común como el que considera abiertos los extremos menos del rectángulo)

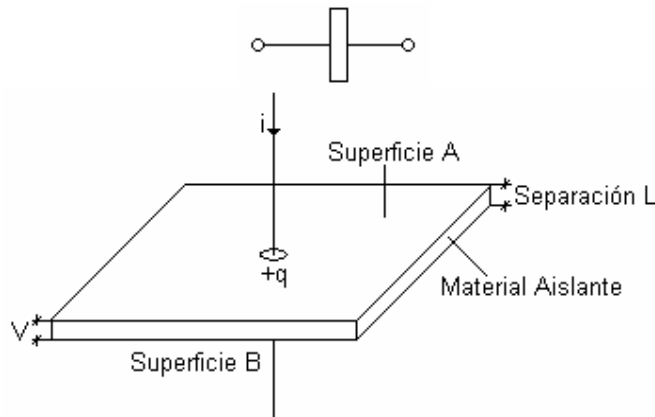


Figura 5. Símbolo esquemático del capacitor.

En un capacitor lineal invariante en el tiempo, para todo instante t , la carga almacenada está relacionada con el voltaje por:

$$q(t) = C V(t)$$

donde la cantidad C , es la capacitancia del elemento, y se mide en Farads, cuando q esta en Coulombs y V en Volts. La ecuación anterior representa la relación entre q y V , y se representa en el plano q, V como una recta que pasa por el origen, y cuya pendiente es la capacitancia del elemento.

La capacitancia de un capacitor linealmente invariante en el tiempo, que está construido entre dos placas paralelas, se puede encontrar como:

$$C = \epsilon \frac{A}{L}$$

donde:

ϵ = Permitividad del material aislante.

A = Área de la superficie.

L = Distancia entre las placas.

Así podemos definir:

Un elemento de circuito de dos terminales es un capacitor lineal invariante en el tiempo, si la carga eléctrica q está dada como una función lineal invariante en el tiempo del voltaje a través de él.

Si la corriente eléctrica que fluye a través de un punto en el circuito, es la derivada respecto al tiempo de la carga, la ecuación

$$q(t) = C V(t)$$

se puede escribir de la forma:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

Luego la corriente que pasa a través del capacitor, es proporcional a la derivada del voltaje, y la constante de proporcionalidad es la capacitancia.

También se puede escribir la ecuación

$$q(t) = C V(t)$$

como:

$$V(t) = \frac{1}{C} q(t) = s q(t)$$

donde

$$s = \frac{1}{C}$$

y se llama Elastancia.

A menudo es conveniente tener una relación para el voltaje del capacitor directamente en términos de la corriente, en lugar de la carga. Se puede obtener esta relación de la ecuación

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

dividiéndola por C, e integrándola:

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt + k = V(t)$$

donde k es la constante de integración. Si se está calculando el voltaje al tiempo t, el límite superior deberá de ser t, y como parte de un tiempo inicial, el límite inferior será t_0 . Luego:

$$\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt = V(t)$$

Esta ecuación debe de valer al principio del intervalo de tiempo de observación, o sea $t = t_0$, luego:

$$\frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0} i(t) dt + k = V(t_0)$$

La ecuación anterior indica que

$$k = V(t_0),$$

luego si la variable de integración es muda, se puede emplear s en vez de t, y se obtiene la relación:

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + V(t_0)$$

que es la relación deseada entre el voltaje y la corriente del capacitor.

1.3. Inductor lineal invariante en el tiempo

El término Inductancia se emplea para denotar la propiedad de un elemento de circuito de almacenar energía en un campo magnético. Este almacenamiento de energía está acompañado del hecho de establecer un flujo magnético dentro de un material ferromagnético. La figura 6 muestra un inductor simple que se construyó enredando un alambre de cobre alrededor de un aro de acero.

Para un inductor lineal invariante en el tiempo a cualquier t, el flujo magnético está dado aproximadamente por la relación:

$$\phi(t) \approx \left[\frac{\mu N^2 A}{L} \right] i(t)$$

donde:

$$\frac{\mu N^2 A}{L} = h$$

es la inductancia del elemento, y sus unidades son los Henries, y se denota por h.

μ = Permeabilidad.

L = Longitud

A = Área de la sección de la bobina.

N = Numero de vueltas del alambre.

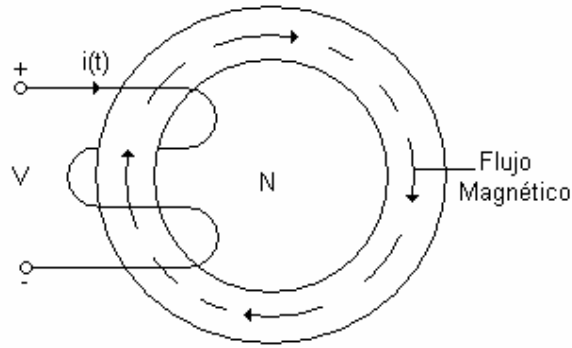


Figura 6. Inductor simple que se construyó enredando un alambre alrededor de un aro.

Con esto se puede dar la siguiente definición:

Se dice que un elemento de circuito de dos terminales es un inductor lineal invariante en el tiempo, si su flujo magnético se especifica como una función lineal invariante en el tiempo, de la corriente.

Por la ley de Faraday el voltaje en las terminales del inductor es:

$$V(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

Combinando las ecuaciones

$$V(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

y

$$\phi(t) = Li(t),$$

se tiene la relación V , i del inductor de la forma:

$$V(t) = L \frac{di}{dt}$$

Integrando:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V(t) dt$$

donde $i(t_0)$ es la corriente inicial del inductor.

1.4. Concepto de energía en elementos de dos terminales

Como se vio anteriormente, los elementos Resistivos, Inductivos, y Capacitivos, disipan energía eléctrica en forma de calor, almacenan energía eléctrica en campos magnéticos y en campos eléctricos respectivamente. La potencia instantánea que está definida como la derivada respecto al tiempo de la energía está dada como un producto de elementos de voltaje y corriente respectivamente.

$$p(t) = V(t)i(t)$$

Esta energía liberada por el elemento en un intervalo de tiempo (t_0, t) es:

$$E(t_0, t) = \int_{t_0}^t V(t)i(t) dt$$

Esta energía puede ser positiva o negativa, dependiendo de los valores relativos de los signos de $i(t)$ y $V(t)$. Con la convención de signos establecida para los elementos R, C y L, el valor positivo de la energía se asocia con el flujo neto de energía dentro de los elementos del circuito como lo indica la figura 7.

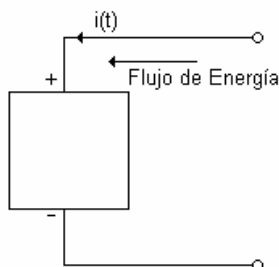


Figura 7. Convención de signos para los elementos R, C y L

1.5. Energía disipada por un resistor

Para un resistor lineal invariante tenemos la relación:

$$V(t) = Ri(t)$$

La cual nos da la energía fluyendo en un resistor:

$$E(t_0, t) = R \int_{t_0}^t i^2(t) dt = \frac{1}{R} \int_{t_0}^t V^2(t) dt$$

donde $i^2(t)$ y $V^2(t)$, son siempre mayor que cero. La ecuación anterior indica que la energía fluye siempre dentro de un elemento con resistencia positiva.

1.6. Energía almacenada en un capacitor

Para un capacitor lineal invariante tenemos la relación voltaje corriente:

$$i(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

que nos da la energía fluyendo en un capacitor:

$$E(t_0, t) = C \int_{t_0}^t \frac{dV(t)}{dt} V(t) dt$$

con un cambio simple de variable:

$$E(t_0, t) = C \int_{V(t_0)}^{V(t)} V(t) dV$$

o:

$$E(t_0, t) = \frac{C}{2} [V^2(t) - V^2(t_0)]$$

por lo que:

$$E(t_0, t) = [E(t) - E(t_0)]$$

1.7. Energía almacenada en un inductor

Para un inductor lineal e invariante en el tiempo, tenemos la relación:

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

que nos da la energía que fluye dentro del inductor como:

$$E(t_0, t) = L \int_{t_0}^t \frac{di(t)}{dt} i(t) dt$$

cambiando variable:

$$E(t_0, t) = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i(t) di$$

Integrando:

$$E(t_0, t) = \frac{L}{2} [i^2(t) - i^2(t_0)]$$

1.8. Fuentes

No todos los elementos físicos se pueden describir en términos de los tres elementos estudiados. Por ejemplo, no hemos visto ningún elemento que represente una fuente de energía eléctrica. Con base en esto, modelaremos elementos físicos que satisfagan esto, y son las fuentes ideales de voltaje y de corriente.

Una fuente ideal de voltaje, es un elemento de dos terminales que mantienen un voltaje en sus terminales, sin importar la corriente que pase por ellas.

Este elemento se representa esquemáticamente de acuerdo a la figura 8.

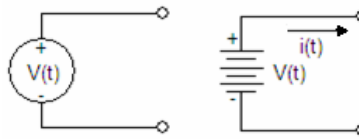


Figura 8. Representación esquemática de una fuente.

Nótese que es costumbre tomar la dirección de flujo de la corriente asociada saliendo por la terminal (+).

Una gráfica V-i del voltaje y la corriente en la terminal es la gráfica mostrada en la figura 9.

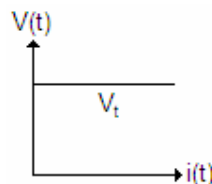


Figura 9. Gráfica V-i.

En cualquier instante el valor del voltaje en las terminales del elemento de circuito es constante con respecto al valor de la corriente $i(t)$. Cuando $V = 0$, las características V-i de la fuente son las de un corto circuito.

Una fuente ideal de corriente es un elemento de dos terminales que mantiene una corriente $i(t)$, fluyendo a través de sus terminales sin importar el valor del voltaje $v(t)$ entre ellos.

Una gráfica V-i de esta fuente es la de la siguiente figura 10.

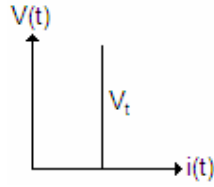


Figura 10. Gráfica V-i de esta fuente.

Su representación esquemática se muestra en la figura 11.

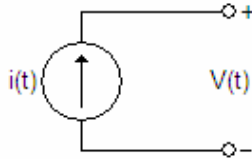


Figura 11. Representación esquemática de la fuente de corriente.

1.9. Elementos lineales variantes en el tiempo

Existen muchos circuitos prácticos en los cuales sus resistores, capacitores e inductores, varían con el tiempo. Realizaremos un sencillo estudio de ellos.

Se dice que un resistor lineal es variante en el tiempo si su resistencia R es función del tiempo.

$$V(t) = R(t)i(t)$$

Se dice que un capacitor lineal es variante en el tiempo si su capacitor C es función del tiempo.

$$q(t) = C(t)V(t)$$

Para encontrar la corriente a través de un capacitor lineal variante en el tiempo, se deriva la ecuación anterior con respecto a t .

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C(t) \frac{dV}{dt} + V(t) \frac{dC}{dt}$$

Un inductor lineal es variante en el tiempo, si su inductancia L es función del tiempo:

$$\phi(t) = L(t)i(t)$$

El voltaje entre sus dos terminales lo encontramos derivando la ecuación anterior en el tiempo:

$$V(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = L(t) \frac{di(t)}{dt} + i(t) \frac{dL(t)}{dt}$$

Hemos estudiado los elementos fundamentales de circuito y en cada caso hemos obtenido su relación voltaje corriente. Ahora estudiaremos cuales son las características de estos elementos cuando se conectan para formar una red o circuito. Cuando se conoce la configuración de la red, nos interesa saber que pasa en las terminales de cada elemento, o en una combinación de elementos cuando el circuito está conectado a una fuente, sea de voltaje o de corriente.

Si consideramos una interconexión simple de elementos RLC para formar una red de la forma de la figura 12, con dos resistores, un inductor y un capacitor, conectada a una fuente denotada por V .

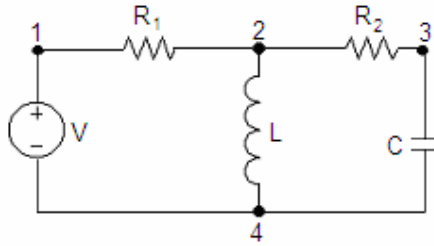


Figura 12. Interconexión simple de elementos RLC

Definiremos algunas cantidades o términos:

Brazo: El brazo de una red usualmente representa a un elemento de dos terminales de una red.

En la figura anterior los puntos marcados con los números 1 y 2, están interconectados por medio del resistor R_1 . Los puntos 3 y 4, están interconectados por el brazo capacitivo C .

Nodo: Está definido como el punto final de un brazo, o donde dos o más ramas terminan. En la figura, los puntos 1, 2, 3 y 4 son nodos.

Gasa: Es una interconexión de ramas, las cuales forman una trayectoria cerrada. En la figura, las ramas L , R_2 , y C , forman una gasa.

Rama: Representa un elemento de dos terminales de una red. Estos pueden ser resistores, inductores, capacitores y fuentes.

2. LEYES DE KIRCHHOFF

Introduciremos ahora dos leyes básicas relacionadas con las corrientes y los voltajes de los elementos básicos después que se interconectan para formar una red. Estas son llamadas leyes de Kirchhoff. Se aplican a cualquier configuración de red, sean lineales o no, variantes o invariantes en el tiempo.

2.1. Ley de corriente de Kirchhoff.

Antes de establecer la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), haremos una convención de signos. Para una red dada, asignamos una dirección arbitraria a las corrientes en cada rama, y la designamos por una flecha. Le ponemos signo positivo a las corrientes cuyas direcciones llegan a un nodo y signo negativo a las corrientes que salen de un nodo. La ley de corriente dice:

La suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo, es cero.

En forma equivalente: La suma de las corrientes que llegan a un nodo, es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo nodo. Por ejemplo la figura 13:

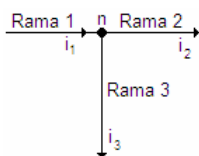


Figura 13. Ramas.

Analicemos la figura anterior: Sean las corrientes en las ramas 1, 2, y 3, i_1 , i_2 , y i_3 , respectivamente, y fluyan en la dirección mostrada. De acuerdo con LCK, la corriente que fluye entrando al nodo n, debe de ser igual a las que fluyen saliendo de él. Así que:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Podemos formular lo anterior diciendo que las corrientes que fluyen dentro del nodo por las ramas 1, 2, 3, son i_1 , $-i_2$, $-i_3$, respectivamente, y entonces:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

que es la misma ecuación, que la ecuación

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Ley de Voltaje de Kirchhoff (LVK). Consideremos la gasa simple de la figura. Denominaremos la gasa simple con: La fuente de voltaje con V , y las ramas que restan serán: a, b, c.

Escojamos una orientación arbitraria para esta gasa (sentido de las manecillas del reloj) y denotaremos las caídas de potencial en las ramas a, b, c por V_a , V_b , V_c respectivamente. Estas caídas se indican con flechas en la figura 14.

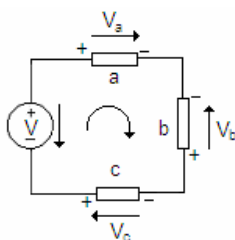


Figura 14. Caídas de potencial.

Como una regla general consideraremos que la caída de voltaje en cada rama es de la polaridad (+) a la (-). Si la caída de voltaje a través de una rama, es en la misma dirección que la dirección de la rama, le asignamos signo (+), y en el otro caso (-). Por ejemplo en la figura anterior las caídas a través de a y c, son positivas y a través de b es negativa.

Con la anterior convención podemos establecer la ley de Voltaje de Kirchhoff (LVK).

"La suma algebraica de todas las caídas de voltaje en cualquier rama es igual a cero."

Esta ley es general.

Aplicando LVK a la rama de la figura

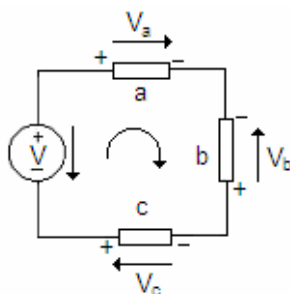


Figura 15. Ley de voltajes.

tenemos:

$$V_a - V_b + V_c - V = 0$$

Consideremos la red $\mathcal{N}$ que consiste de resistores, inductores, capacitores y fuentes. Sustituyamos cada brazo de esta red por un segmento de línea y cada nodo por un punto. La figura que resulte es la gráfica $\mathcal{G}$, y se denota por G . Como un ejemplo considere la red de la figura 16.

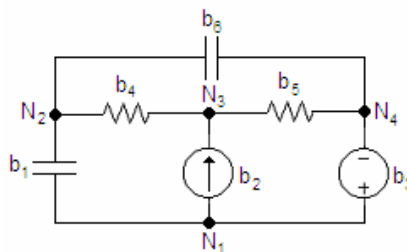


Figura 16. Red $\mathcal{N}$.

Su gráfica correspondiente será la de la figura 17.

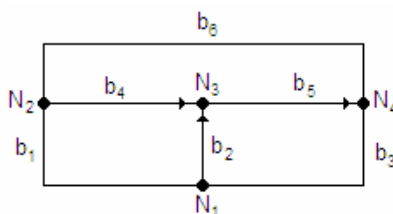


Figura 17. Gráfica correspondiente a la red $\mathcal{N}$.

En la red $\mathcal{N}$ existen 6 ramas y cuatro nodos. Las ramas las numeramos con letras b_1 a b_6 , y los nodos con N_1 a N_4 . Nótese que cada rama termina en un nodo.

En general se puede decir que una gráfica G , de una red $\mathcal{N}$, es una colección de segmentos de líneas y nodos indicando como se interconectan las ramas de la red correspondiente.

Una gráfica se llama planar, si esta se puede dibujar en un plano, de forma tal que ninguna rama intercepte a otra, excepto en un nodo. La gráfica de la figura 18 es planar y la gráfica de la figura 19 no lo es, ya que sus ramas se interceptan en puntos que no son nodos. En los apuntes solo estudiaremos gráficas planares.

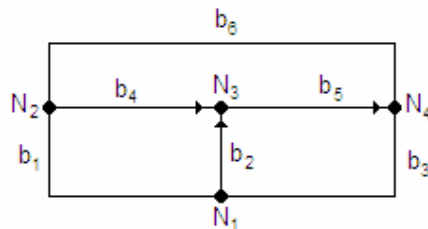


Figura 18. Gráfica Planar.

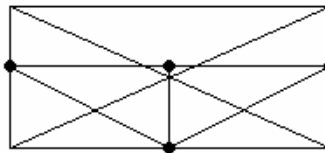


Figura 19. Gráfica no planar.

Todas las gasas en una gráfica planar que no contengan ramas en su interior, se llaman mallas.

Un conjunto corte de una gráfica, es un conjunto con un número mínimo de ramas, que si se quitan, separan la gráfica en dos partes. En la figura 20, las ramas: (b_1, b_3, b_5, b_7) , (b_1, b_2, b_9) , (b_7, b_6, b_9) son conjuntos cortes.

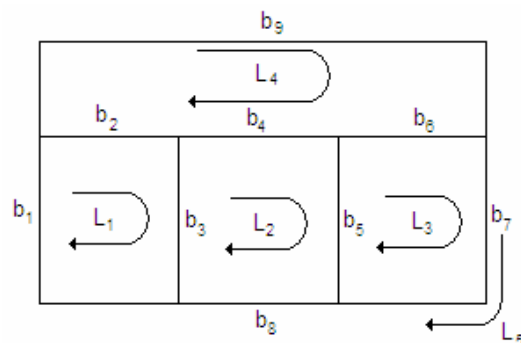


Figura 20. Conjuntos cortes

Para la figura 21 que tiene cuatro nodos podemos escribir solamente tres ecuaciones linealmente independientes. Se puede establecer la siguiente regla general:

"Para una red con N nodos se pueden escribir a lo mucho $N - 1$ ecuaciones de LCK linealmente independientes".

Para implantar esta regla, podemos aplicar la LCK a cualquiera N nodos de la red bajo consideración. El nodo que queda es llamado nodo de referencia. Luego en una red dada, primero se elige la

referencia y luego escribimos las ecuaciones LCK para el resto de los nodos. Las ecuaciones LCK son todas linealmente independientes.

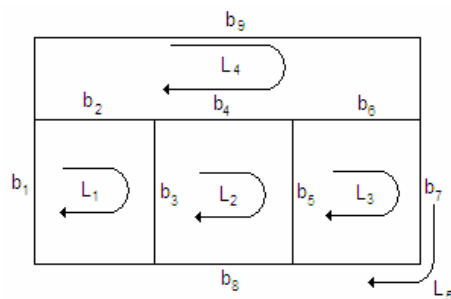


Figura 21. Red de cuatro nodos.

También se puede establecer el siguiente hecho:

"Para una red con N nodos y B ramas, hay exactamente $B - (N - 1)$ ecuaciones LVK linealmente independientes".

Por ejemplo en la red de la figura 22, tenemos seis nodos y nueve ramas, o sea $N = 6$ y $B = 9$, así que el número de ecuaciones de gasa LVK linealmente independientes es: $B - N = 9 - 5 = 4$.

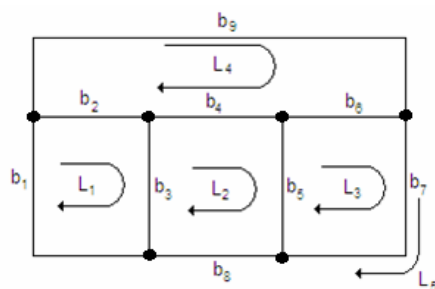


Figura 22. Red con seis nodos y nueve ramas.

Para escoger las ecuaciones de gasa se emplean varios métodos, ya que no es tan simple como en el caso anterior.

2.2. Métodos de análisis

Consideremos el circuito de la figura 23, en el existen seis ramas y cuatro nodos. Luego según lo ya visto, podemos escribir tres ecuaciones independientes de nodos y tres ecuaciones de gasa independientes. Si tomamos el nodo n_1 como referencia y escribimos las (LCK) y (LVK), tenemos: Para la (LCK):

$$\begin{aligned} n_2: i - i_{R1} - i_{R2} &= 0 \\ n_3: i_{R1} - i_C - i_L &= 0 \\ n_4: i_L + i_{R2} - i_{R3} &= 0 \end{aligned}$$

En el existen seis ramas y cuatro nodos. Luego según lo ya visto, podemos escribir tres ecuaciones independientes de nodos y tres ecuaciones de gasa independientes. Si tomamos el nodo n_1 como referencia y escribimos las (LCK) y (LVK), tenemos: Para la (LCK):

$$\begin{aligned} n_2: i - i_{R1} - i_{R2} &= 0 \\ n_3: i_{R1} - i_C - i_L &= 0 \\ n_4: i_L + i_{R2} - i_{R3} &= 0 \end{aligned}$$

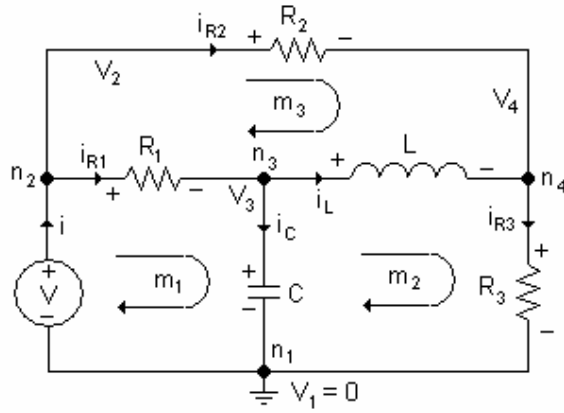


Figura 23. Red con seis ramas y cuatro nodos.

Las ecuaciones para (LVK) son:

$$\begin{aligned} m_1: V_{R1} + V_C - V &= 0 \\ m_2: V_L + V_{R3} - V_C &= 0 \\ m_3: V_{R2} - V_L - V_{R1} &= 0 \end{aligned}$$

También se pueden escribir las relaciones voltaje corriente para las ramas excepto para la fuente de voltaje. Estas son:

$$\begin{aligned} R_1 &\Rightarrow V_{R1} = R_1 i_{R1} \\ R_2 &\Rightarrow V_{R2} = R_2 i_{R2} \\ R_3 &\Rightarrow V_{R3} = R_3 i_{R3} \\ C &\Rightarrow i_C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{o} \quad V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' + V_C(0) \\ L &\Rightarrow V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{o} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t') dt' + i_L(0) \end{aligned}$$

El conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} i - i_{R1} - i_{R2} &= 0 \\ i_{R1} - i_C - i_L &= 0 \\ i_L + i_{R2} - i_{R3} &= 0 \\ V_{R1} + V_C - V &= 0 \\ V_L + V_{R3} - V_C &= 0 \\ V_{R2} - V_L - V_{R1} &= 0 \\ V_{R1} &= R_1 i_{R1} \\ V_{R2} &= R_2 i_{R2} \\ V_{R3} &= R_3 i_{R3} \\ V_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' + V_C(0) \\ i_L &= \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t') dt' + i_L(0) \end{aligned}$$

nos dan once ecuaciones linealmente independientes con once incógnitas que son: (V_{R1} , V_{R2} , V_{R3} , i_{R1} , i_{R2} , i_{R3} , V_C , i_L , V_L , i_C , i).

En algunas aplicaciones prácticas sólo se está interesado en algunas de todas las incógnitas; por ejemplo el voltaje a través del inductor o la corriente a través del resistor R_1 . En este caso, para evitar resolver once ecuaciones integrodiferenciales en once incógnitas, se acude a los siguientes métodos.

2.3. Método No 1

Para una red planar con $n + 1$ nodos y B ramas, se dibuja la gráfica de la red e indicamos en ella todas las mallas por inspección. Nos daremos cuenta que el total de mallas es $B - N$. Ahora, si escribimos las ecuaciones de LVK para estas mallas, las ecuaciones resultantes serán linealmente independientes. Consideremos como un ejemplo la red de la figura 24.

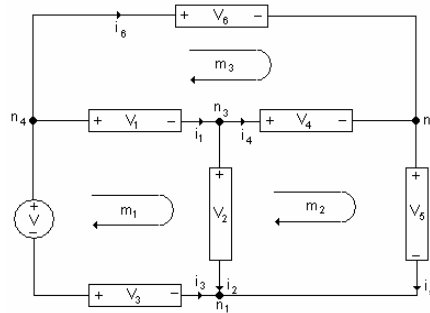


Figura 24. Primer método.

Esta red tiene cuatro nodos y seis ramas y por lo tanto $N = 3$ y $B = 6$. Tomamos n_1 como el nodo de referencia y podemos escribir las tres ecuaciones LCK linealmente independientes:

$$\begin{aligned} n_2 &= i_4 - i_5 + i_6 = 0 \\ n_3 &= i_1 - i_2 - i_4 = 0 \\ n_4 &= -i_3 - i_1 - i_6 = 0 \end{aligned}$$

Hay también $B - N = 6 - 3 = 3$ ecuaciones LVK linealmente independientes, por lo que tenemos 12 incógnitas en el circuito.

Las tres ecuaciones LVK son para las mallas m_1 , m_2 , m_3 y son:

$$\begin{aligned} m_1: & -V + V_1 + V_2 - V_3 = 0 \\ m_2: & V_4 + V_5 - V_2 = 0 \\ m_3: & V_6 - V_4 - V_1 = 0 \end{aligned}$$

con las ecuaciones anteriores, se tienen 6 ecuaciones. Para resolver el sistema nos hacen falta otras seis que obtendremos de las relaciones voltaje corriente de las ramas.

Por ejemplo, supongamos que la rama uno es resistiva, con resistencia R_1 , así que su relación es:

$$V_1 = R_1 i_1$$

Si la rama dos es capacitiva:

$$i_2 = C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

donde C_2 es la capacidad de la rama, y así todas.

2.4. Método No 2

En este método escogemos las gasas y llegamos a las ecuaciones LVK por inspección. Para escoger las gasas debemos ver que se cumplan dos condiciones:

1. Para una red con $N + 1$ nodos y B ramas, debemos escoger $N - B$ gasas.
2. Cada nueva gasa que seleccionemos debe de contener a lo menos una rama que no esté contenida en las gasas antes seleccionadas.

Hay que tener cuidado en no eliminar todas las ramas sin satisfacer la condición del número de gasas para la red en estudio.

Consideremos la red de la figura 25.

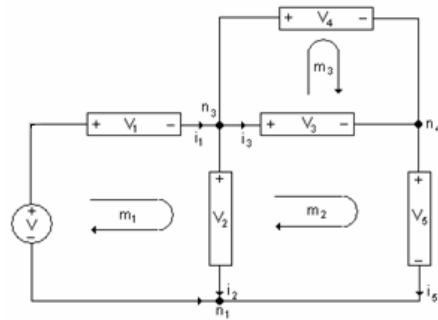


Figura 25. Selección de tres gasas.

Esta red tiene cuatro nodos y seis ramas por lo que $N = 3$ y $B = 6$. De esto podemos escribir 3 ecuaciones (LCK) independientes y tres ecuaciones (LVK) independientes. Tomando el nodo n_1 como referencia:

$$\begin{aligned} N_2: -i_6 - i_1 &= 0 \\ n_3: i_1 - i_2 - i_3 - i_4 &= 0 \\ n_4: i_4 + i_3 - i_5 &= 0 \end{aligned}$$

Para escribir las ecuaciones de gasa linealmente independiente (LVK) necesitamos escoger 3 gasas como m_1 , m_2 , y m_3 como lo muestra la figura 25. Vemos que en cada una de ellas hay al menos una rama no contenida en las demás, así que las ecuaciones para éstas son:

$$\begin{aligned} m_1: V_1 + V_2 - V &= 0 \\ m_2: V_1 + V_3 - V_5 - V &= 0 \\ m_3: V_4 + V_5 - V_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos seis ecuaciones para once incógnitas. Las que faltan se obtienen de las ecuaciones voltaje corriente de las ramas.

2.5. Análisis Nodal

Consideremos la red de la figura 26.

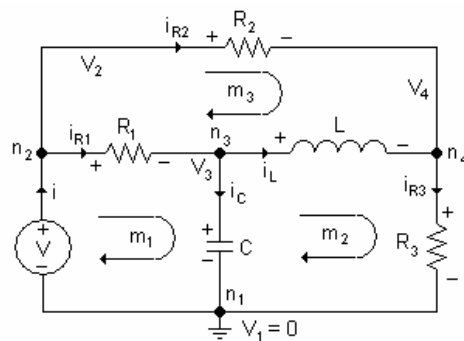


Figura 26. Red.

Si llamamos a los voltajes en los nodos n_1 , n_2 , n_3 y n_4 por V_1 , V_2 , V_3 , V_4 respectivamente. Consideremos que $V_1 = 0$, y escribimos las ecuaciones LCK para los nodos n_2 , n_3 y n_4 empleando las relaciones voltaje corriente dadas por la ecuación

$$\begin{aligned} R_1 &\Rightarrow V_{R1} = R_1 i_{R1} \\ R_2 &\Rightarrow V_{R2} = R_2 i_{R2} \end{aligned}$$

$$R_3 \Rightarrow VR_3 = R_3 i_{R3}$$

$$C \Rightarrow i_C C \frac{dV_C}{dt} \quad \text{o} \quad V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' + V_C(0)$$

$$L \Rightarrow V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{o} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_0^t V_L(t') dt' + i_L(0)$$

tenemos:

$$i_{R1} = \frac{V_2 - V_3}{R_1}, \quad i_{R2} = \frac{V_2 - V_4}{R_2}, \quad i_{R3} = \frac{V_4 - V_1}{R_3}$$

También sabemos que la corriente a través de un capacitor linealmente invariante en el tiempo, está dada por:

$$i_C = C \frac{d}{dt} (V_3 - V_1)$$

y la corriente a través de un inductor lineal e invariante en el tiempo, está dada por:

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t [V_3(t') - V_4(t')] dt' + i_L(0)$$

por simplicidad consideremos que i_L es muy pequeña, luego empleando estas relaciones voltaje corriente, podemos describir las ecuaciones

$$\begin{aligned} n_2: i - i_{R1} - i_{R2} &= 0 \\ n_3: i_{R1} - i_C - i_L &= 0 \\ n_4: i_L + i_{R2} - i_{R3} &= 0 \end{aligned}$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} n_2 &= i - \frac{V_2 - V_3}{R_1} - \frac{V_2 - V_4}{R_2} = 0 \\ n_3 &= \frac{V_2 - V_3}{R_1} - C \frac{d}{dt} (V_3 - V_1) - \frac{1}{L} \int_0^t [V_3(t') - V_4(t')] dt' = 0 \\ n_4 &= \frac{1}{L} \int_0^t [V_3(t') - V_4(t')] dt' + \frac{V_2 - V_4}{R_2} - \frac{V_4 - V_1}{R_3} = 0 \end{aligned}$$

También de la figura 27 se puede ver que:

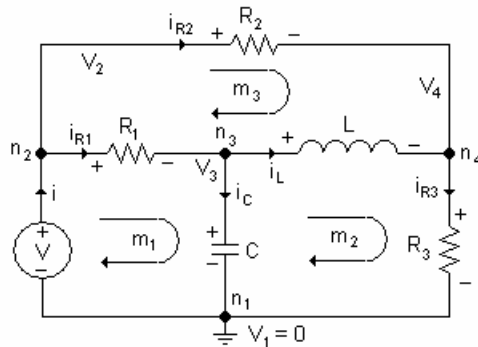


Figura 27. Red.

$$V_2 = V \quad \text{y} \quad V_1 = 0$$

Luego las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$i - \frac{1}{R_1}(V - V_3) - \frac{1}{R_2}(V - V_4) = 0$$

$$\frac{1}{R_1}(V - V_3) - C \frac{dV_3}{dt} - \frac{1}{L} \int_0^t [V_3(t') - V_4(t')] dt' = 0$$

$$\frac{1}{L} \int_0^t [V_3(t') - V_4(t')] dt' + \frac{1}{R_2}(V - V_4) - \frac{1}{R_3} V_4 = 0$$

Las últimas ecuaciones representan tres ecuaciones integrodiferenciales independientes que se pueden resolver para i , V_3 , V_4 . Luego tenemos que cada voltaje y corriente de rama en la red, puede encontrarse empleando los voltajes de nodos V_2 , V_3 y V_4 . Por ejemplo, la corriente a través del inductor i_L , está dada por:

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t [V_3(t') - V_4(t')] dt'$$

por lo que un conjunto de once ecuaciones con once incógnitas, se puede reducir a otro de tres ecuaciones con tres incógnitas, empleando los voltajes de nodos como variables auxiliares. Este análisis se emplea en circuitos que tienen muchas ramas y pocos nodos.

2.6. Análisis de gasas

Este método de análisis se emplea para circuitos que tienen muchos nodos y pocas gasas. En este método definimos la corriente de la gasa para cada una de las mallas, y escribimos las ecuaciones independientes para la LVK en términos de las corrientes de las gasas.

Consideremos la red de la figura 28. Existen tres mallas en esta red:

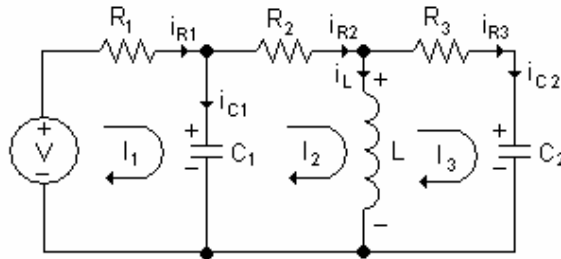


Figura 28. Red de tres mallas.

Denotamos las corrientes de las gasas por: I_1 , I_2 , I_3 . Estas son corrientes hipotéticas circulando por las gasas; las corrientes de las ramas están dadas por:

$$i_{R1} = I_1,$$

$$i_{C1} = I_1 - I_2,$$

$$i_{R2} = I_2,$$

$$i_L = I_2 - I_3,$$

$$i_{R3} = I_3$$

Las ecuaciones linealmente independientes para la LVK son:

$$-V + R_1 I_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t (I_1 - I_2) dt = 0$$

$$-\frac{1}{C_1} \int_0^t (I_1 - I_2) dt + R_2 I_2 + L \frac{d}{dt} (I_2 - I_3) = 0$$

$$-L \frac{d}{dt} (I_2 - I_3) + R_3 I_3 + \frac{1}{C_2} \int_0^t I_3 dt = 0$$

Estas son tres ecuaciones integrodiferenciales en tres incógnitas que pueden resolverse para las corrientes de las gasas I_1 , I_2 , I_3 .

Habiendo resuelto las ecuaciones anteriores para I_1 , I_2 , I_3 , es fácil encontrar las corrientes en cada rama y los voltajes a través de resistores, capacitores e inductores.

Notemos que las corrientes de gasa no son corrientes medibles en un laboratorio; son variables auxiliares que escogemos para reducir el número de ecuaciones integrodiferenciales que se deben resolver.

2.7. Combinación en serie

Después de haber estudiado los métodos de análisis, definiremos lo que vamos a entender por redes equivalentes. Decimos que dos redes son equivalentes con respecto a un par de terminales, si sus características voltaje corriente son las mismas.

Las redes equivalentes las podemos emplear para reducir la cantidad de hechos necesarios para establecer las características del circuito. Aquí estudiaremos algunos métodos para establecer equivalentes simples.

Decimos que dos o más elementos de circuito de dos terminales están conectados en serie, si la corriente a través de ellos es la misma.

Si tenemos dos o más elementos del mismo tipo conectados en serie, se pueden sustituir por un elemento equivalente para simplificar la red. Veremos esto para cada tipo de elemento en detalle.

2.7.1. Resistores

Sean R_1 y R_2 dos resistores lineales conectados en serie. Si aplicamos una fuente de voltaje V a sus terminales, la corriente I que fluirá por ellos será la misma. Aplicando la LVK tenemos:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \equiv IR$$

Como se ve la serie R_1 , R_2 , se puede sustituir por un simple resistor:

$$R = R_1 + R_2$$

Esto es válido para cualquier número de resistores. En general los resistores lineales conectados en serie, se pueden reemplazar por un simple resistor cuya resistencia es igual a la suma de las resistencias de los resistores en serie.

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_n \equiv R \equiv R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

2.7.2. Inductores

Sean L_1 y L_2 dos inductores lineales e invariantes en el tiempo conectados en serie. Si les aplicamos un voltaje V y consideramos una corriente i , tenemos por la LVK:

$$V \equiv L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} \equiv L \frac{di}{dt}$$

Como se ve, se puede sustituir la serie L_1 , L_2 por un inductor equivalente L , tal que:

$$L \equiv L_1 + L_2$$

2.7.3. Capacitores

Sean C_1 y C_2 dos capacitores lineales e invariantes en el tiempo, y que están conectados en serie. Si les aplicamos un voltaje V , se pueden aplicar la LVK para obtener:

$$V(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(t) dt \equiv \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_0^t i(t) dt \equiv \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

dónde:

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Si reemplazamos C_1 y C_2 por un simple capacitor, su capacidad deberá de ser:

$$C = \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)$$

2.8. Combinación en paralelo

Decimos que un conjunto de elementos de circuitos está conectado en paralelo, si estos están conectados al mismo par de nodos. Consideraremos cada caso en particular.

2.8.1. Resistores

Si consideramos dos resistores en paralelo y aplicamos un voltaje V a la combinación, podemos escribir:

$$V = i_1 R_1 = i_2 R_2$$

donde por la ley LCK:

$$i_1 + i_2 = i$$

Si combinamos estas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = i_1 + i_2 = i \quad \text{o} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = Ri$$

Esto implica que dos resistores en paralelo $R_1 \parallel R_2$ se pueden reemplazar por un simple resistor con una resistencia igual a:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2.8.2. Inductores

Si empleamos argumentos similares a los del caso del resistor en paralelo para desarrollar la relación entre dos inductores en paralelo tenemos:

$$V = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Pero por LCK:

$$i_1 + i_2 = i$$

de aquí:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt}$$

De esto:

$$V = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{di}{dt} \equiv L \frac{di}{dt}$$

lo implica que:

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

2.8.3. Capacitores

Consideremos dos capacitores de capacidades C_1 y C_2 en combinación en paralelo. El voltaje a través de cada capacitor será V y tenemos:

$$i_1 = C_1 \frac{dV}{dt} \quad y \quad i_2 = C_2 \frac{dV}{dt}$$

donde por LCK se tiene:

$$i_1 + i_2 = i$$

por lo que:

$$C = (C_1 + C_2) \frac{dV}{dt} \equiv C \frac{dV}{dt}$$

por lo que la combinación en paralelo de dos capacitores se puede sustituir por un simple capacitor con capacidad:

$$C = C_1 + C_2$$

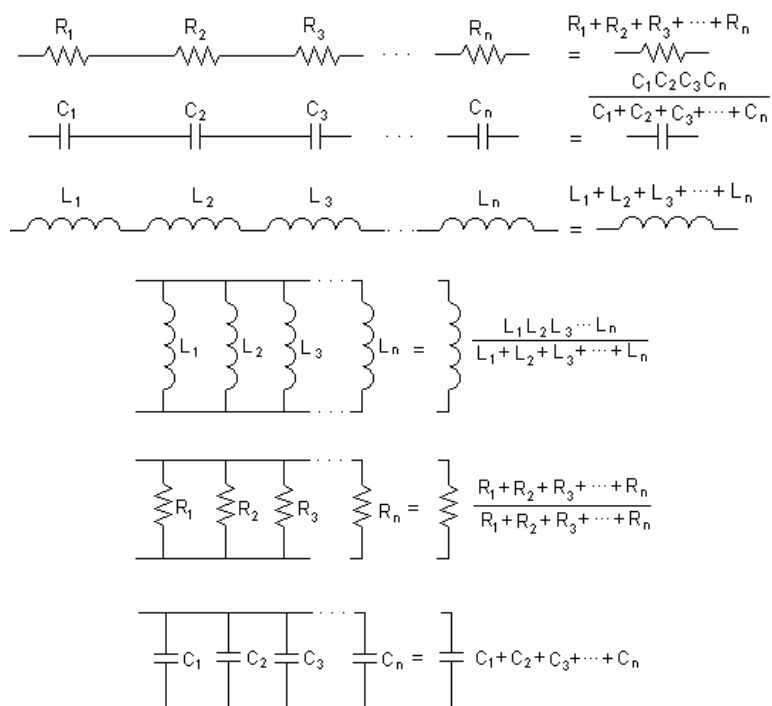


Figura 29. Combinaciones en serie y paralelo.

3. ANÁLISIS SENOIDE

Las funciones senoide se usan comúnmente en el análisis de redes dadas sus propiedades matemáticas. Por la superposición de las redes lineales podemos calcular la respuesta de las redes a una entrada arbitraria, calculando la respuesta de cada uno de sus componentes senoide.

3.1. Respuesta de frecuencia de redes

La relación entre la función de excitación y la respuesta en estado estacionario, está descrita por la función de transferencia de estado estacionario $H(j\omega)$. Esta función es una relación de dos polinomios en ω :

$$H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

como notamos anteriormente, $H(j\omega)$ es en general una función compleja que puede ser representada como una magnitud multiplicada por una exponencial compleja:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

donde:

$$|H(j\omega)| = [H(j\omega)H^*(j\omega)]^{1/2}$$

y:

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \right]$$

Si $H(j\omega)$ es conocida para todos los valores de ω , la respuesta a cualquier función senoidal de manejo se obtiene simplemente multiplicando $H(j\omega)$ por la función exponencial de manejo. Por ejemplo: si la función de manejo es: $\sin(\omega t + \phi)$, la respuesta se encuentra de:

$$Y(t) = \text{Im}[H(j\omega)e^{j(\omega t + \phi)}]$$

Luego es útil el considerar a $H(j\omega)$ como función de una variable ω bajo la función de excitación especificada en la frecuencia.

Para obtener una descripción de la respuesta de un sistema a senoides de varias frecuencias, podemos graficar $H(j\omega)$ como una función de la frecuencia ω .

Para especificar por completo $H(j\omega)$, se necesitan dos curvas. Normalmente éstas se toman como la magnitud de $|H(j\omega)|$ y la fase $\phi(\omega)$. $|H(j\omega)|$ es la respuesta en amplitud de la red, ya que ésta especifica el efecto de la red en una amplitud senoide como una función de la frecuencia.

Similarmente $\phi(\omega)$ es la respuesta en fase de la red, ya que ésta especifica el efecto de la red en una fase senoide como función de la frecuencia.

Es una convención graficar veinte veces el logaritmo de la magnitud de la función. Esto permite una gran variación en la función $|H(j\omega)|$ al ser graficada en una gráfica compacta. Estas gráficas son las gráficas de Bode.

Definiremos el decibel, que tiene por abreviatura db de la forma:

$$20 \log |H(j\omega)| = 10 \log |H(j\omega)|^2 = \text{db}$$

3.2. Fasores

La variación en el tiempo de los voltajes y corrientes de un circuito en el estado estacionario senoide, pueden representarse en forma exponencial compleja $e^{j\omega t}$. Como sabemos la variable de tiempo t , entrará dentro de nuestra solución de esta forma, pero a menudo es conveniente suprimir la variación del tiempo y simplemente desarrollar una solución invariante en el tiempo en términos de una función de manejo compleja y de una impedancia compleja.

Después de que se ha obtenido la solución invariante, la variación del tiempo puede incorporarse en la solución multiplicándola por $e^{j\omega t}$.

Por ejemplo en la figura 30.

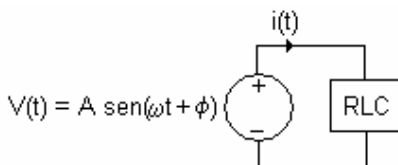


Figura 30. Ejemplo de red.

se desea calcular la corriente estacionaria $i(t)$, por medio de calcular la respuesta exponencial compleja $I(t)$ por una función de manejo:

$$Ae^{j(\omega t + \phi)}$$

Tomando la parte imaginaria, por ejemplo:

$$I(t) = \text{Im} | Ae^{j(\omega t + \phi)} Y(j\omega) |$$

donde $Y(j\omega)$ es la función de admitancia equivalente de la combinación RLC.

Se ve que la ecuación anterior se puede escribir como la parte imaginaria de la solución invariante:

$$I = Ae^{j\phi} Y(j\omega)$$

multiplicando por $e^{j\omega t}$:

$$i(t) = \text{Im} | Ie^{j\omega t} |$$

Para desarrollar la parte invariante de la solución, podemos emplear la red de la figura 31.

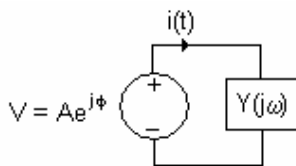


Figura 31. Parte invariante de la solución.

en la cual la variación del tiempo $e^{j\omega t}$ se ha eliminado. La función de manejo de voltaje es:

$$V = Ae^{j\phi}$$

y la respuesta de corriente:

$$I = VY(j\omega)$$

Para obtener la respuesta en el tiempo multiplicamos la ecuación

$$I = VY(j\omega)$$

por $e^{j\omega t}$ y tomamos la parte imaginaria de la ecuación

$$i(t) = \text{Im} | Ie^{j\omega t} |$$

Las cantidades I y V se denominan Fasores.

Para trabajar con fasores es necesario establecer una convención para relacionar los fasores con la solución en el tiempo. Si hemos definido la solución en el tiempo correspondiente al fasor, como la parte imaginaria del producto de éste y la función del tiempo $e^{j\omega t}$, nuestra convención será representar

todas las variaciones senoides en términos de la función seno. Esto requiere que toda función de manejo de la forma $\cos(\omega t + \phi)$, se escriba en su equivalente $\sin(\omega t + \phi + \pi/2)$, para desarrollar el modelo de fasores.

Por ejemplo empleando fasores desarrollaremos la solución estacionaria para $V_L(t)$ en el circuito de la figura 32.

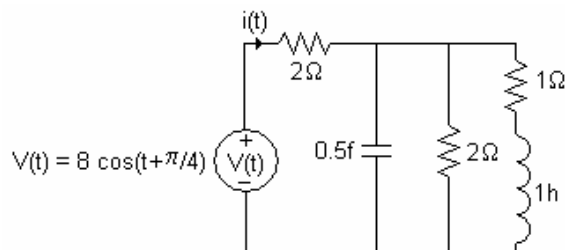


Figura 32. Ejemplo del uso de fasores.

La función de excitación en este caso es:

$$V(t) = 8 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Siguiendo nuestra convención de fasores, describimos $V(t)$ como:

$$V(t) = 8 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

y la función fasorial de excitación correspondiente a $V(t)$ es:

$$\mathbf{V} = 8e^{j(3\pi/4)}$$

Construimos en la figura 33 nuestro modelo fasorial. La respuesta fasorial V_L está dada por:

$$\mathbf{V}_L = j\mathbf{I}_3$$

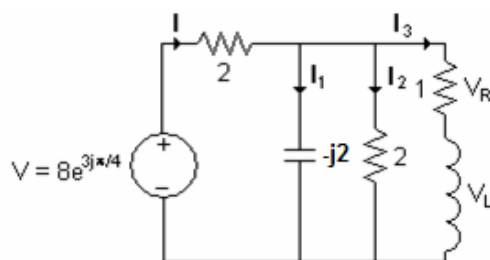


Figura 33. Modelo Fasorial.

Para calcular $\mathbf{I}_3$ convertimos la fuente de voltaje a una fuente de corriente (ver equivalentes de Norton y Thevenin), y el circuito fasorial equivalente se muestra en la figura 34.

Empleando la relación de división de corriente para obtener:

$$\mathbf{I}_3 = 4e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \left[\frac{\frac{1}{1+j}}{\frac{1}{2} + \frac{j}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+j}} \right] = \frac{4}{3(1+j)} e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

Luego:

$$\mathbf{V}_L = j\mathbf{I}_3 = e^{j\frac{\pi}{2}} \mathbf{I}_3 \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{j\pi}$$

Por lo que:

$$V_L(t) = \text{Im} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} e^{j\pi} e^{j\omega t} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{sen}(\omega t + \pi)$$

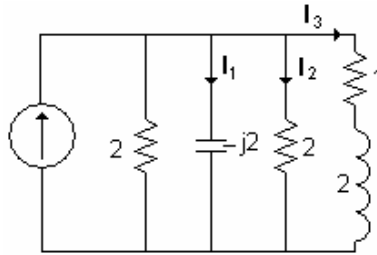


Figura 34. Circuito Fasorial equivalente.

3.3. Respuesta de redes a funciones senoides

Consideremos la red de la figura 35

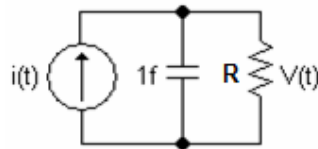


Figura 35. Red CR en paralelo.

Si calculamos la respuesta de voltaje $V(t)$, de esta red a una fuente de corriente senoide,

$$i(t) = \text{sen} \left(t + \frac{\pi}{8} \right) V_0(t) \quad t \geq 0$$

La ecuación de operación será:

$$\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = \text{sen} \left(t + \frac{\pi}{8} \right) \quad t \geq 0$$

Podemos calcular la respuesta $V(t)$ resolviendo la ecuación diferencial, para obtener:

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \left(t - \frac{\pi}{8} \right) + \left\{ \sin \frac{\pi}{8} + \sqrt{2} V_0 \right\} e^{-t} \right] \quad t \geq 0$$

Donde V_0 es el voltaje inicial del capacitor. Nótese que la componente de estado estacionario de la solución es una senoide con la misma frecuencia que la señal de manejo, pero con fase distinta y diferente amplitud. Se ve también que la componente de estado estacionario es justamente la solución particular de la ecuación diferencial. Luego si sólo estamos interesados en la componente de estado estacionario, necesitamos sólo calcular la solución particular.

Aparece otra simplificación debido a la propiedad de linealidad de la red. En lugar de considerar la función de manejo $\sin \omega t$ podemos trabajar con la función $\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}$. Dada la propiedad de superposición, sabemos que nuestra solución será una sumatoria de dos componentes, la componente real será la respuesta debida al $\cos \omega t$, y la componente imaginaria será la respuesta

debida al $\sin \omega t$. Luego para considerar problemas senoides de estado estacionario, podemos calcular la solución particular manejando la función $e^{j\omega t}$. La parte imaginaria de esta solución es la respuesta estacionaria al $\sin \omega t$ y la parte real es la respuesta estacionaria al $\cos \omega t$.

Para ver mejor todo lo anterior, calculemos la respuesta estacionaria de voltaje del circuito de la figura 36.

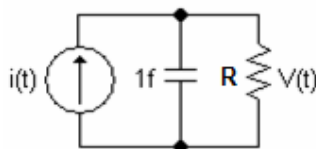


Figura 36. Circuito para calcular la respuesta estacionaria.

Consideremos la función de excitación $e^{j(t+\pi/8)}$. Nuestra solución particular es de la forma:

$$Ke^{j\left(t+\frac{\pi}{8}\right)}$$

Sustituyendo esto en la ecuación de operación de la figura 37:

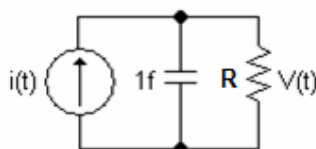


Figura 37. Circuito para calcular la respuesta estacionaria.

la ecuación

$$\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{8}\right) \quad t \geq 0$$

da:

$$jKe^{j(t+\pi/8)} + Ke^{j(t+\pi/8)} = e^{j(t+\pi/8)}$$

o:

$$K = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$$

Si la respuesta de estado estacionario está dada por una solución particular, la respuesta al $\sin(t+\pi/8)$ está dada por:

$$V(t) = \text{Im}\left[\frac{1-j}{2}e^{j(t+\pi/8)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t - \pi/8)$$

que es la misma que la ecuación

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(t - \frac{\pi}{8}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{8} + \sqrt{2}V_0\right)e^{-t}\right] \quad t \geq 0$$

Para generalizar este resultado necesitamos considerar la respuesta de una red arbitraria formada por elementos R, L, C. Ya se vio anteriormente que las respuestas a tales redes se pueden describir por una ecuación diferencial de la forma:

$$a_i \sum_{i=1}^n \frac{d^i}{dt^i} Y(t) = b_i \sum_{i=1}^m \frac{d^i}{dt^i} U(t)$$

donde la función $U(t)$, es la función de manejo de la red, y $y(t)$ es la respuesta de la red.

Como se ha visto para el caso especial de la figura 38:

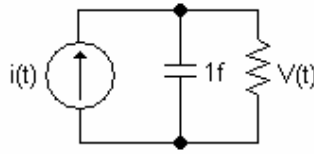


Figura 38. Caso especial.

podemos encontrar la respuesta en estado estacionario a la función de manejo $\sin(\omega t + \phi)$, calculando la solución particular a la ecuación diferencial con la función de manejo $e^{j(\omega t + \phi)}$. Luego de la ecuación

$$a_i \sum_{i=1}^n \frac{d^i}{dt^i} Y(t) = b_i \sum_{i=1}^m \frac{d^i}{dt^i} U(t)$$

reemplazamos la función de manejo $U(t)$ por la función exponencial compleja: $e^{j(\omega t + \phi)}$ y asumimos la solución exponencial compleja:

$$Y(t) = K e^{j(\omega t + \phi)}$$

esto nos da:

$$\left[k \sum_{i=1}^n a_i(j\omega)^i \right] e^{j(\omega t + \phi)} = \left[\sum_{i=1}^m b_i(j\omega)^i \right] e^{j(\omega t + \phi)}$$

Resolviendo para K , tenemos:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m b_i(j\omega)^i}{\sum_{i=1}^n a_i(j\omega)^i}$$

Nótese que K es una constante con respecto a la variable t , pero es variable con la frecuencia de la función de manejo, por lo que definimos a K como una función de ω :

$$K = H(j\omega)$$

que se llama la característica de transferencia de la red a estados estacionarios senoides. Nótese que la $H(j\omega)$ es idéntica en forma a la función de transferencia $H(s)$, si se cambia s por $j\omega$.

Empleando la notación de transferencia de estado estacionario, la solución particular a la ecuación diferencial es:

$$Y(t) = H(j\omega) e^{j(\omega t + \phi)}$$

La función $H(j\omega)$ es en general compleja y puede ser representada en forma exponencial compleja como:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

donde:

$$|H(j\omega)| = [H(j\omega)H^*(j\omega)]^{1/2}$$

y:

$$\theta(\omega) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \right)$$

y por lo tanto la ecuación

$$Y(t) = H(j\omega) e^{j(\omega t + \phi)}$$

se puede escribir como:

$$Y(t) = |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \phi + \theta(\omega)]}$$

Tomando la parte imaginaria de la ecuación

$$Y(t) = |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \phi + \theta(\omega)]}$$

se obtiene la respuesta de la función de manejo $\sin(\omega t + \phi)$.

$$Y(t) = \text{Im}[Y(t)] = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \theta(\omega))$$

Por lo que el efecto de estado estacionario de la red a una entrada senoide, está descrito por un cambio de amplitud y de fase a través del término $|H(j\omega)|$ y $\theta(\omega)$ respectivamente.

Comparando las ecuaciones

$$a_i \sum_{i=1}^n \frac{d^i}{dt^i} Y(t) = b_i \sum_{i=1}^m \frac{d^i}{dt^i} U(t)$$

y

$$\left[k \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i \right] e^{j(\omega t + \phi)} = \left[\sum_{i=1}^m b_i (j\omega)^i \right] e^{j(\omega t + \phi)}$$

podemos ver que el paso siguiente a estudiar en el estado estacionario senoide, por medio de la función exponencial compleja, es reemplazar el operador diferencial d^n/dt^n por $(j\omega)^n$ donde éste aparezca en la ecuación de operación. Una pregunta que se nos puede presentar aquí es si es o no indispensable desarrollar la ecuación diferencial cuando trabajamos con estado estacionario senoide. ¿Es posible desarrollar las características del estado estacionario directamente del circuito sin pasar por la ecuación diferencial? La respuesta la obtendremos considerando las relaciones voltaje corriente para elementos individuales bajo las condiciones del estado estacionario.

Consideremos la corriente de un inductor de la forma:

$$I_L(t) = e^{j(\omega t + \phi)}$$

El voltaje en el inductor será:

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} = (j\omega L) I_L(t)$$

Similarmente la corriente en un resistor de la misma forma nos puede dar un voltaje de resistencia:

$$V_R(t) = R I_R(t)$$

Un voltaje:

$$V_C(t) = e^{j(\omega t + \phi)}$$

aplicado a las terminales de un capacitor nos hace aparecer una corriente:

$$I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} = (j\omega C) V_C(t)$$

Empleando estas tres relaciones tenemos una descripción algebraica de las relaciones voltaje-corriente para L, R, y C, bajo las condiciones del estado estacionario senoide, como:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= (j\omega L) I_L(t) \\ V_R(t) &= (1/R) I_R(t) \\ I_C(t) &= (j\omega C) V_C(t) \end{aligned}$$

Nótese que este estudio del estado estacionario por medio de la función exponencial compleja, nos permite reducir las relaciones voltaje-corriente para los elementos L y C, a una analogía con la

relación para un resistor. Para poder explotar esta analogía definimos las reactancias inductiva y capacitiva respectivamente como:

$$X_L = j\omega L$$

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

En este estudio podemos reemplazar L y C por los valores de su reactancia, y emplear las relaciones voltaje-corriente de las ecuaciones

$$\begin{aligned} V_L(t) &= (j\omega L)I_L(t) \\ V_R(t) &= (1/R)V_R(t) \\ V_C(t) &= (1/j\omega C)I_C(t) \end{aligned}$$

o sus equivalentes en términos de voltaje:

$$\begin{aligned} I_L(t) &= (1/j\omega L)V_L(t) \\ I_R(t) &= (1/R)V_R(t) \\ I_C(t) &= (j\omega C)V_C(t) \end{aligned}$$

Nótese que estudiando el estado estacionario senoide por medio de funciones exponenciales complejas nos permite reducir las relaciones terminales voltaje-corriente para L y C a operaciones multiplicativas simples con una analogía cercana a las relaciones terminales resistivas voltaje-corriente.

Para explotar por completo estas analogías, definimos las reactancias inductivas y capacitivas por

$$X_L = j\omega L$$

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Resolveremos un caso como ejemplo: Evaluar la corriente para estado estacionario senoide del circuito de la figura 39, por el método de derivar la ecuación diferencial y reemplazar el circuito por su equivalente de estado estacionario.

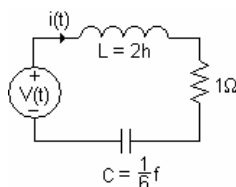


Figura 39. Circuito RLC en serie.

Donde $V(t) = \sin(2t + \pi/3)$.

La ecuación diferencial que describe la respuesta de corriente es:

$$2 \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 6i = \frac{dV}{dt}$$

Tomando la función de manejo como función exponencial compleja:

$$V(t) = e^{j(2t + \pi/3)}$$

La respuesta de corriente es:

$$I(t) = \frac{2j}{-2 + 2j} e^{j(2t + \pi/3)}$$

O:

$$I(t) = \frac{1}{1-j} e^{j(2t + \pi/3)} = \sqrt{2} e^{(j\pi/4)} e^{j(2t + \pi/3)} = \sqrt{2} e^{j(2t + \pi/12)}$$

Para obtener el circuito equivalente reemplazamos L por $j\omega L$ y C por $1/j\omega C$, y el circuito equivalente es el de la figura 40.

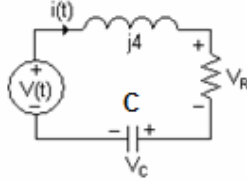


Figura 40. Circuito equivalente

Aplicando la LVK en la red tenemos:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = e^{j(2t + \pi/3)}$$

Aplicando las relaciones voltaje-corriente para cada elemento:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= 4jI(t) \\ V_R(t) &= I(t) \\ V_C(t) &= -3jI(t) \end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las ecuaciones obtenidas por la LVK tenemos:

$$I(t) = [4j + 1 - 3j] e^{j(2t + \pi/3)}$$

O:

$$I(t) = \frac{1}{1+j} e^{j(2t + \frac{\pi}{3})} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j(2t + \frac{\pi}{12})}$$

La corriente en estado estacionario es:

$$I(t) = \text{Im} [I(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen} \left(2t + \frac{\pi}{12} \right)$$

3.4. Gráficas de bode de respuesta en amplitud

Recordemos del capítulo de transformada de Laplace, que el tipo de términos que aparecen en la función de transferencia $H(s)$ eran de la forma:

$$\begin{aligned} P_1(s) &= s^n \\ P_2(s) &= (s+a)^n \\ P_3(s) &= s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \end{aligned}$$

esto implica que los polinomios $A(j\omega)$ y $B(j\omega)$ de la ecuación

$$H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}$$

se pueden escribir como productos de un escalar y un factor de la forma:

$$\begin{aligned}
 P_1(j\omega) &= (j\omega)^n \\
 P_2(j\omega) &= (j\omega + a)^n \\
 P_3(j\omega) &= (\omega_n^2 + \omega^2) + j2\xi\omega_n\omega
 \end{aligned}$$

luego:

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |B(j\omega)| - 20 \log |A(j\omega)|$$

Si la función de magnitud se escribe como:

$$|H(j\omega)| = \frac{|B(j\omega)|}{|A(j\omega)|}$$

En concreto, la magnitud de cada uno de los términos polinomiales es simplemente el producto de las magnitudes de cada uno de los factores.

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log |B_1(j\omega)| + \dots + 20 \log |B_m(j\omega)| - 20 \log |A_1(j\omega)| - \dots - 20 \log |A_n(j\omega)|$$

donde se ha considerado:

$$\begin{aligned}
 B(j\omega) &= B_1(j\omega) B_2(j\omega) \dots B_n(j\omega) \\
 A(j\omega) &= A_1(j\omega) A_2(j\omega) \dots A_n(j\omega)
 \end{aligned}$$

y cada $B(j\omega)$, $A_i(j\omega)$ está dado por uno de los polinomios de la ecuación

$$\begin{aligned}
 P_1(j\omega) &= (j\omega)^n \\
 P_2(j\omega) &= (j\omega + a)^n \\
 P_3(j\omega) &= (\omega_n^2 + \omega^2) + j2\xi\omega_n\omega
 \end{aligned}$$

Luego la gráfica de la función $20 \log |H(j\omega)|$ consiste en la suma y resta de gráficas que corresponden a la magnitud de los términos de la forma dada en la ecuación

$$\begin{aligned}
 P_1(j\omega) &= (j\omega)^n \\
 P_2(j\omega) &= (j\omega + a)^n \\
 P_3(j\omega) &= (\omega_n^2 + \omega^2) + j2\xi\omega_n\omega
 \end{aligned}$$

El Término

$$P_1(j\omega) = (j\omega)^n$$

La magnitud de este término es:

$$|P_1(j\omega)| = \omega^n$$

Luego el término a considerar es:

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \omega^n$$

para $\omega = 0.1$, este término es $-20n$ db, para $\omega = 1$, su valor es de 0 db y para $\omega = 10$ su valor es $20n$ db. Es de notar que la función se incrementa 20 db por década.

El Término

$$P_2(j\omega) = (j\omega + a)^n$$

La magnitud de este término es:

$$|P_2(j\omega)| = (\omega^2 + a^2)^{n/2}$$

que se puede expresar como:

$$20 \log |H(j\omega)| = 10n \log (\omega^2 + a^2)$$

es conveniente normalizar el argumento de esta función por el parámetro a^2 para llegar a una función de frecuencia normalizada variable U .

$$U = \frac{\omega}{a}$$

La función a graficar será:

$$20 \log |H(j\omega)| = 10n \log(1+u^2) - 10n \log a^2$$

Consideremos el término $10n \log(1+u^2)$. Para $U \ll 1$, este término es aproximadamente $10n \log(1)$ o cero db. Para $U \gg 1$ este término llega a ser aproximadamente $10n \log(U^2)$, que es el mismo del estudio anterior. El valor $u = 1$, se llama un punto de corte y en este valor de U , la magnitud es: $10n \log(2)$ o 3ndb.

El Término

$$P_2(j\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2) + j2\xi\omega_n \omega.$$

La magnitud de este término es:

$$|P_2(j\omega)| = [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2]^{1/2}$$

La función a considerar es:

$$20 \log |H(j\omega)| = 10 \log [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2]$$

De nuevo es conveniente normalizar el argumento dividiendo por el parámetro ω_n^4 , para obtener la función de frecuencia normalizada U .

$$U = \frac{\omega}{\omega_n}$$

La función se puede escribir como:

$$20 \log |H(j\omega)| = 10 \log [1+2(2\xi^2-1)U^2+U^4] - 10 \log \omega_n^4$$

Consideremos el término: $10 \log [1+2(2\xi^2-1)U^2+U^4] - 10 \log \omega_n^4$. Para $U^2 \ll 1$, este se aproxima a $10 \log(1) = 0$ db. Cuando $U^2 \gg 1$, esta función es aproximadamente $10 \log U^4$, que se grafica como una línea recta que se incrementa 40 db por década. Usando estas dos líneas como asíntotas de la curva de magnitud. Las asíntotas intersectan la frecuencia de corte $u = 1$. Las características exactas de la curva de magnitud para U en la región de la frecuencia de corte dependen del valor de ξ , que se denomina coeficiente de amortiguamiento.

3.5. Graficas de bode para respuesta de fase

Como se discutió anteriormente, la característica de fase:

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \right]$$

describe la fase de la respuesta de la red en estado estacionario senoide relativa a la fase de la función de manejo. Como se ha visto el numerador polinomial y el denominador de $H(j\omega)$, $B(j\omega)$ y $A(j\omega)$, son productos de factores del tipo de la ecuación

$$\begin{aligned} P_1(j\omega) &= (j\omega)^n \\ P_2(j\omega) &= (j\omega+a)^n \\ P_3(j\omega) &= (\omega_n^2 + \omega^2) + j2\xi\omega_n\omega \end{aligned}$$

Escribiendo $A(j\omega)$ y $B(j\omega)$ como productos de términos de este tipo:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= A_1(j\omega)A_2(j\omega)\dots A_n(j\omega) \\ B(j\omega) &= B_1(j\omega)B_2(j\omega)\dots B_n(j\omega) \end{aligned}$$

Se ve claro que:

$$|H(j\omega)|e^{j\phi\omega} = \frac{|B_1(j\omega)||B_2(j\omega)|\dots|B_n(j\omega)|}{|A_1(j\omega)||A_2(j\omega)|\dots|A_n(j\omega)|}$$

$$\exp[j\phi_1(\omega) + j\phi_2(\omega) + \dots + j\phi_m(\omega) - j\phi(\omega) - \dots - j\phi_n(\omega)]$$

donde:

$$\theta_i(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}[B_i(j\omega)]}{\operatorname{Re}[A_i(j\omega)]} \right] \quad i = 1, 2, \dots, m$$

y:

$$\phi_k(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}[A_k(j\omega)]}{\operatorname{Re}[B_k(j\omega)]} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4. VARIABLES DE ESTADO

En los puntos anteriores hemos visto que los circuitos que contienen elementos que almacenan energía (Capacitores e inductores), nos llevan a obtener ecuaciones integrodiferenciales. Si un circuito es de primer orden, la ecuación diferencial que lo describe es de primer orden, si el circuito es de segundo orden, la ecuación que lo describe será de segundo orden, y así sucesivamente. En muchas aplicaciones prácticas, los circuitos que contienen muchos elementos que almacenan energía, tienen ecuaciones de orden superior para describirlos.

Una ecuación diferencial de n-ésimo orden, no es en lo general de fácil solución, es preferible obtener un conjunto de n ecuaciones simultáneas de primer orden de la ecuación diferencial de n-ésimo orden, empleando un conjunto de variables auxiliares llamadas: Variables de Estado.

Primero veremos métodos sistemáticos para obtener las ecuaciones de estado, para las ecuaciones diferenciales de primer orden, después veremos métodos para describir las variables de estado para redes, y pasaremos a analizar por este método ecuaciones de estado para redes lineales e invariantes en el tiempo.

4.1. Método directo para escribir ecuaciones de estado

Veremos un método mediante el cual la ecuación de estado de la red, puede escribirse directamente de ella. En este método escogemos las variables de estado a partir de las variables físicas de la red, como corrientes a través de inductores o voltajes a través de capacitores. Es por esta razón que las variables de estado son variables físicas.

En general podemos considerar dos tipos de variables en una red dada, que sean calificables de variables de estado:

- 1.) Voltajes a través de capacitores y corrientes a través de inductores.
- 2.) Carga en capacitores y flujo en inductores.

Para poder formalizar el método lo haremos con un ejemplo.

Consideremos el circuito de 1^{er} orden de la figura 41.

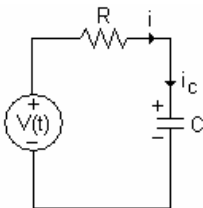


Figura 41. Circuito de primer orden.

Este tiene sólo un elemento que almacena energía, (capacitor) por lo que necesitamos definir sólo una variable de estado. Suponemos que ésta es el voltaje a través del capacitor, V_c , por lo que esperamos establecer una ecuación diferencial de primer orden. La LVK nos da:

$$V(t) = Ri(t) + V_c(t)$$

pero:

$$i(t) = i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt}$$

Por lo que tenemos:

$$V(t) = RC \frac{dV_c}{dt} + V_c(t)$$

o:

$$\frac{dV_c}{dt} = -\frac{1}{RC} V_c(t) + \frac{1}{RC} V(t)$$

denotando la variable de estado $V_C(t)$ por $X(t)$, tenemos:

$$\dot{X} = -\frac{1}{RC} X(t) + \frac{1}{RC} V(t)$$

donde la última ecuación es la ecuación de estado deseada.

Veremos ahora un circuito de 2^o orden:

Consideremos el circuito RLC en serie de la figura 42.

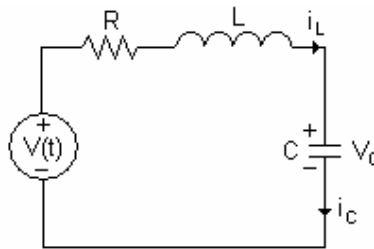


Figura 42. Circuito RLC.

El voltaje V_C y la corriente i_L son dos posibles variables de estado

La ecuación para este circuito es por LVK:

$$V(t) = Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + V_C$$

La relación voltaje corriente para el capacitor es:

$$i_L = C \frac{dV_C}{dt}$$

Reagrupando las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} V_C + \frac{1}{L} V(t)$$

y:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L$$

Estas ecuaciones las podemos poner en forma de una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dV_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

Si ahora:

$$X_1(t) = i_L(t)$$

$$U(t) = V(t)$$

y

$$X_2(t) = V_C(t)$$

la ecuación

$$i = V_1 + \frac{dV_1}{dt} + i_2$$

$$i_2 = \frac{dV_3}{dt} + V_3$$

$$V_1 = 2 \frac{di_2}{dt} + V_3$$

Reagrupando las ecuaciones se tiene:

$$\frac{dV_1}{dt} = -V_1 - i_2 + i$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{2} V_3$$

$$\frac{dV_3}{dt} = -V_3 + i_2$$

5.) Se escriben las ecuaciones de las relaciones del paso No 4, como una ecuación matricial para con ella obtener la ecuación de estado en forma normal:

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{dV_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

La última ecuación es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales de primer orden.

4.2 .Métodos para pasar de ecuaciones diferenciales a ecuaciones de estado

Empezaremos por considerar un circuito de segundo orden como el de la figura 44.

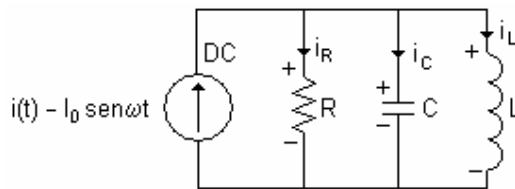


Figura 44. Circuito de segundo orden.

Este circuito contiene dos elementos que almacenan energía. Esperamos que la ecuación diferencial que lo describe sea de segundo orden.

La fuente de corriente $i(t)$ es la entrada y el voltaje a través de los tres elementos $V(t)$, es la respuesta. Aplicando la LCK al nodo n_1 , tenemos:

$$i = i_R + i_C + i_L$$

De las relaciones voltaje corriente para las ramas del circuito tenemos:

$$i_R = \frac{1}{R} V_i \quad C = C \frac{dV}{dt} \quad L = \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$$

Luego de la ecuación

$$i = i_R + i_C + i_L$$

tenemos:

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{R} V + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt = I_0 \sin \omega t$$

Diferenciando ambos lados de la ecuación, y dividiendo por C tenemos:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

Esta es la ecuación diferencial que describe al circuito de la figura 45

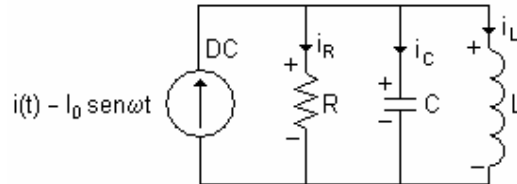


Figura 45.

Como un primer paso para escribir la ecuación

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

en forma de ecuación de variable de estado, introduciremos dos nuevas variables: $X_1(t)$, $X_2(t)$, tales que:

$$X_1(t) = V(t)$$

$$X_2(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

El siguiente paso será eliminar la cantidad V de las ecuaciones

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

$$X_1(t) = V(t)$$

y

$$X_2(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

así que se tiene:

$$\dot{X}_1(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

y:

$$\dot{X}_1 = X_2$$

Diferenciando

$$X_2(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

y empleando la ecuación

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC} V = \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

se tiene:

$$\dot{X}_2 = \ddot{V}(t) = -\frac{1}{RC} \dot{V} - \frac{1}{LC} V + \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

o:

$$\dot{X}_2 = -\frac{1}{LC} X_1 - \frac{1}{RC} X_2 + \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

Escribiendo en forma de matriz las ecuaciones

$$\dot{X}_1 = X_2$$

y

$$\dot{X}_2 = -\frac{1}{LC} X_1 - \frac{1}{RC} X_2 + \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t$$

se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega}{C} I_0 \cos \omega t \end{bmatrix}$$

La última ecuación, es la ecuación de estado deseada. Consiste de dos ecuaciones diferenciales de primer orden simultáneas. Queda claro que si podemos resolver estas ecuaciones de estado para $X_1(t)$ y $X_2(t)$, resolverlas para otras variables de la red es fácil. Por ejemplo, para encontrar $V(t)$ empleamos la ecuación

$$X_1(t) = V(t)$$

Daremos un método sistemático para resolver cualquier ecuación diferencial matricial de primer orden de la forma:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{U}$$

Consideremos un circuito de tercer orden cuya ecuación diferencial está dada por:

$$V^{(3)}(t) + a_3 V^{(2)}(t) + a_2 V(t) + a_1 = U(t)$$

donde $V^{(n)}(t)$ denota la n-ésima derivada de $V(t)$, a_1 , a_2 , a_3 , son constantes y $U(t)$ es la entrada. El objetivo ahora es transformar esta ecuación diferencial de tercer orden a un conjunto de tres ecuaciones diferenciales de primer orden simultáneas.

1^{er} paso

Definimos un conjunto de variables de estado $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, tales que:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= V(t) \\ X_2(t) &= V_{(1)}(t) \\ X_3(t) &= V_{(2)}(t) \end{aligned}$$

Tomamos las derivadas de las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= V_{(1)}(t) \\ \dot{X}_2(t) &= V_{(2)}(t) \\ \dot{X}_3(t) &= V_{(3)}(t) \end{aligned}$$

2^o paso

Las ecuaciones anteriores se puede expresar $V_{(1)}$, $V_{(2)}$, $V_{(3)}$, en términos de X_1 , X_2 , X_3 , empleando las ecuaciones

$$V^{(3)}(t) + a_3 V^{(2)}(t) + a_2 V(t) + a_1 = U(t)$$

Y

$$\begin{aligned}X_1(t) &= V(t) \\X_2(t) &= V_{(1)}(t) \\X_3(t) &= V_{(2)}(t)\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= X_2 \\ \dot{X}_2(t) &= X_3 \\ \dot{X}_3(t) &= U(t) - a_1X_1 - a_2X_2 - a_3X_3\end{aligned}$$

3^{er} paso

Ponemos las ecuaciones obtenidas en el 2º paso en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

4.3. Cargas y flujos como variables de estado

Consideremos la red de la figura 46.

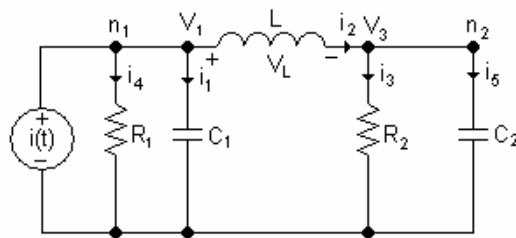


Figura 46.

Si se escribe la ecuación de estado de esta red, usando la carga en los capacitores y el flujo en los inductores como variables de estado, los pasos a dar en este caso son:

- 1.) Se escogen q_1 , q_3 , y ϕ_2 como variables de estado.
- 2.) Se escriben las ecuaciones de nodo y gasa.

$$\begin{aligned}i &= i_4 + i_1 + i_2 \\ i_2 &= i_3 + i_5 \\ V_1 &= V_L + V_3\end{aligned}$$

- 3.) Se emplean las relaciones voltaje corriente de las ramas, para expresar todas las variables en términos de las variables de estado q_1 , q_2 y ϕ_2 y sus derivadas.

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{q_1}{C_1} \\ i_1 &= \frac{dq_1}{dt} \\ i_2 &= \frac{q_3}{C_3} \\ i_4 &= \frac{V_1}{i} = q_1\end{aligned}$$

$$i_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

$$i_4 = \frac{d\phi_2}{dt}$$

$$i_5 = \frac{V_3}{i} = q_3$$

4.) Se emplean las ecuaciones

$$i = i_4 + i_1 + i_2$$

$$i_2 = i_3 + i_5$$

$$V_1 = V_L + V_3$$

Y

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1}$$

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

$$i_2 = \frac{q_3}{C_3}$$

$$i_4 = \frac{V_1}{i} = q_1$$

$$i_3 = \frac{dq_3}{dt}$$

$$i_4 = \frac{d\phi_2}{dt}$$

para eliminar las variables que no sean de estado.

$$\dot{q}_1 = -q_1 - \frac{1}{2}\phi_2 + i$$

$$\phi_2 = q_1 - q_3$$

$$q_3 = \frac{1}{2}\phi_2 - q_1$$

5.) Se ponen las últimas ecuaciones en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \phi_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

y la ecuación es otra representación de estado del circuito de la figura 47.

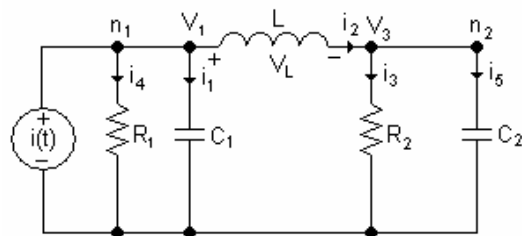


Figura 47.

4.4. Representación en ecuaciones de estado para circuitos no lineales variantes en el tiempo

Uno de los puntos importantes del método de variables de estado es el hecho de que los circuitos que contienen elementos no lineales o variantes en el tiempo, se pueden estudiar tan fácilmente como los circuitos lineales e invariantes. Para esta clase de circuitos, es generalmente mejor escoger como variable de estado la carga o el flujo.

Los pasos a seguir para escribir la ecuación de estado de un circuito no lineal son los mismos que en el caso de los circuitos lineales, a excepción del paso (3). En este caso la corriente a través de un capacitor variante en el tiempo, se puede sustituir por la derivada de ϕ .

Consideramos en forma típica que los capacitores son de carga controlada, y los inductores de flujo controlado, y es por esto que podemos considerar que los capacitores, como los inductores no lineales, están dados en la forma:

$$\begin{aligned}V_C &= f_1(q) \\ i_L &= f_2(\phi)\end{aligned}$$

donde f_1 y f_2 , son funciones no lineales.

También en este caso, la corriente a través de los capacitores se pueden reemplazar por la derivada de la carga, y los voltajes a través de los inductores, se pueden reemplazar por las derivadas de los flujos.

Consideremos el circuito de la figura 48.

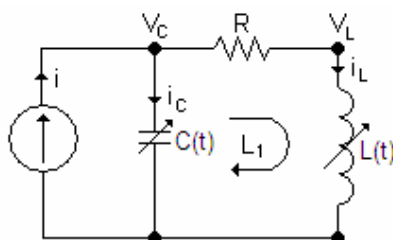


Figura 48.

Es un circuito de 2° orden variante en el tiempo.

Si consideramos R invariante, pero los elementos que almacenan energía son lineales pero variantes, los pasos a seguir para obtener la ecuación de estado son:

Paso No 1.- Se eligen ϕ y q como variables de estado.

Paso No 2.- Se escriben las ecuaciones de malla y nodo:

$$\begin{aligned}n_1 \Rightarrow i &= i_C + i_L \\ l_1 \Rightarrow V_C &= R i_L + V_L\end{aligned}$$

Paso No 3.- Se escriben las relaciones voltaje corriente de ramas para expresar las variables que aparecen en la ecuación anterior en términos de las variables de estado q y ϕ , y sus derivadas:

$$\begin{aligned}i_C &= \dot{q}(t) \\ V_C &= \frac{1}{C(t)} q(t) \\ i_L &= \frac{1}{L(t)} \phi(t)\end{aligned}$$

Paso No 4.- Se emplean las ecuaciones

$$n_1 \Rightarrow i = i_c + i_L$$

$$l_1 \Rightarrow V_c = Ri_L + V_L$$

y

$$i_c = q(t)$$

$$V_c = \frac{1}{C(t)} q(t)$$

$$i_L = \frac{1}{L(t)} \phi(t)$$

para eliminar las variables que no sean de estado.

$$q = -\frac{1}{L(t)} \phi + i$$

$$\phi = \frac{1}{C(t)} q - \frac{R}{L(t)} \phi$$

Paso No 5.- Se ponen las últimas ecuaciones en forma de matriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L(t)} \\ \frac{1}{C(t)} & -\frac{R}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

que es la ecuación de estado.

Ahora consideremos el circuito no lineal de la figura 49.

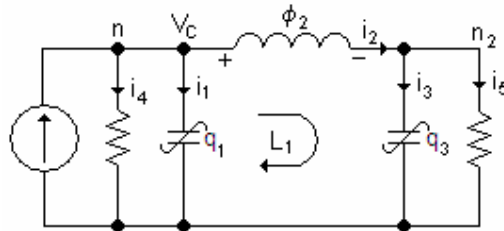


Figura 49. Circuito no lineal.

Consideremos los resistores como lineales e invariantes en el tiempo, el inductor es de flujo controlado, y el capacitor de carga controlada. Además consideremos que:

$$V_1 = f_1(q_1)$$

$$V_3 = f_3(q_3)$$

$$i_2 = f_2(\phi_2)$$

Los pasos para escribir la ecuación de estado son:

Paso No 1.- Se escogen q_1 , ϕ_2 , q_3 como variables de estado.

Paso No 2.- Se escriben las ecuaciones para nodos y gasas.

$$n_1: i = i_4 + i_1 + i_2$$

$$n_2: i_2 = i_3 + i_5$$

$$l_1: V_1 = V_2 + V_3$$

Paso No 3.- Empleamos las relaciones voltaje corriente de las ramas para expresar todas las variables de las últimas ecuaciones en términos de las variables de estado: q_1 , ϕ_2 , y q_3 y sus derivadas.

$$i_1 = q_1, \quad i_2 = f_2(\phi_2), \quad i_3 = q_3, \quad i_4 = f_1(q_1), \quad i_5 = f_3(q_3)$$

$$V_1 = f_1(q_1), \quad V_3 = f_3(q_3), \quad V_L = \dot{\phi}_2$$

Paso No 4.- Se emplean las ecuaciones:

$$n_1: i = i_4 + i_1 + i_2$$

$$n_2: i_2 = i_3 + i_5$$

$$l_1: V_1 = V_2 + V_3$$

y

$$i_1 = q_1,$$

$$i_2 = f_2(\phi_2),$$

$$i_3 = q_3,$$

$$i_4 = f_1(q_1),$$

$$i_5 = f_3(q_3)$$

$$V_1 = f_1(q_1),$$

$$V_3 = f_3(q_3),$$

$$V_L = \dot{\phi}_2$$

para eliminar las variables que no sean de estado.

$$\dot{q}_1 = -f_1(q_1) - f_2(\phi_2) + i$$

$$\dot{\phi}_2 = f_1(q_1) - f_3(q_3)$$

$$\dot{q}_3 = f_2(\phi_2) - f_3(q_3)$$

Paso No 5.- Se escriben las últimas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(q_1) \\ f_2(\phi_2) \\ f_3(q_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y es la ecuación de estado.

4.5. Solución analítica de las ecuaciones de estado

Desarrollaremos un método analítico para resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden: Consideremos la ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{X}(t) = \alpha X(t) + \beta U(t)$$

y

$$X(t_0) = X_0$$

donde α y β son constantes escalares, y $X(t)$ y $U(t)$ son funciones escalares de t . $\dot{X}(t)$ denota la derivada de $X(t)$ con respecto a t . La constante escalar X_0 es el valor de X en $t = t_0$.

Definición

Se dice que una única función escalar $\tilde{X}(t)$ definida para toda $t > t_0$ es solución de la ecuación

$$\dot{X}(t) = \alpha X(t) + \beta U(t) \dots X(t_0)$$

si:

1.) $\tilde{X}(t)$ satisface la condición inicial:

$$X(t_0) = X_0$$

2.) Satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \alpha X(t) + \beta U(t).$$

Supongamos una solución del tipo:

$$\tilde{X}(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \beta U(\tau) d\tau$$

Para demostrar que es solución, mostraremos que satisface las dos condiciones anteriores:

1.)

$$\tilde{X}(t_0) = e^{\alpha(t_0-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{\alpha(t_0-\tau)} \beta U(\tau) d\tau = X_0$$

si

$$e^0 = 1$$

y

$$\int_{t_0}^{t_0} f(t, \tau) d\tau = 0 \forall f$$

2.) Si la integración en la ecuación

$$\tilde{X}(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \beta U(\tau) d\tau$$

es con respecto a τ , se puede dejar fuera $e^{\alpha t}$ y escribirla en la forma:

$$\tilde{X}(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + e^{\alpha t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha \tau} \beta U(\tau) d\tau$$

derivando respecto de t :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}(t) &= e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \frac{d}{dt} \left[e^{\alpha t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha \tau} \beta U(\tau) d\tau \right] \\ &= e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \alpha e^{\alpha t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha \tau} \beta U(\tau) d\tau + e^{\alpha t} [e^{-\alpha t} \beta U(t)]_{\tau=t} \end{aligned}$$

Por ejemplo:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \alpha e^{\alpha t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha \tau} \beta U(\tau) d\tau + e^{\alpha t} [e^{-\alpha t} \beta U(t)]_{\tau=t}$$

Luego:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \alpha \left[e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \beta U(\tau) d\tau \right] + \beta U(t)$$

Empleando la ecuación

$$\tilde{X}(t) = e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \beta U(\tau) d\tau$$

y la

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \alpha \left[e^{\alpha(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \beta U(\tau) d\tau \right] + \beta U(t)$$

tenemos:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \alpha \tilde{X}(t) + \beta U(t)$$

luego es una solución y la escribiremos de la forma:

$$X(t) = e^{\alpha(t-t_0)}x_0 + e^{\alpha t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha\tau} \beta U(\tau) d\tau$$

Consideremos el circuito de primer orden de la figura 50.

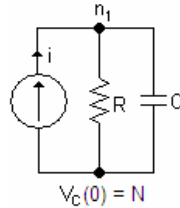


Figura 50. Circuito de primer orden.

El análisis por la LCK en el nodo n_1 nos da:

$$i = \frac{V_c}{R} + C \dot{V}_c$$

que es la ecuación diferencial:

$$\dot{V}_c = -\frac{1}{RC} V_c + \frac{1}{C} i$$

Se ve que la ecuación es del tipo:

$$\dot{X}(t) = \alpha X(t) + \beta U(t) \dots X(t_0) = X_0$$

dónde:

$$\alpha = -\frac{1}{RC}$$

$$\beta = \frac{1}{C}$$

Empleando la ecuación

$$X(t) = e^{\alpha(t-t_0)}x_0 + e^{\alpha t} \int_{t_0}^t e^{-\alpha\tau} \beta U(\tau) d\tau$$

tenemos:

$$V_c(t) = e^{\frac{1}{RC}(t-t_0)} V_c(0) + e^{\frac{1}{RC}t} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1}{RC}\tau} i(\tau) d\tau$$

Supongamos que $R = 2\Omega$, $C = 0.5f$ e $i(t)$ = escalón unitario, luego se tiene:

$$V_c(t) = e^{-t} + 2e^t \int_{t_0}^t e^{-\tau} d\tau$$

Esto es:

$$V_c(t) = e^{-t} [1 + 2(e^t - e^0)] = e^{-t} (2e^t - 1)$$

o:

$$V_c(t) = 2 - e^{-t}$$

para $t \geq 0$.

5. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Cualquier función que se repite a sí misma cada número T de segundos, se dice que es una función periódica con periodo T .

$$f(t + T) = f(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

es una función periódica y tiene una frecuencia dada por:

$$f = 1/T$$

Esta discusión la limitaremos a funciones que satisfagan la condición de Dirichlet. Este tipo de funciones deben de satisfacer lo siguiente:

- 1.) Es en todos lados finita la función.
- 2.) Tiene un numero finito de máximos y mínimos en un periodo.
- 3.) Tiene un numero finito de discontinuidades en un periodo.
- 4.) Es absolutamente integrable en un periodo, o sea:

$$\int_T |f(t)| dt < \infty$$

Una función que satisface la condición anterior, por el teorema de Fourier si la función es periódica, se puede expandir en una serie infinita de la forma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

donde

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Si analizamos la serie se notará que a_0 es una constante que representa el valor promedio de la función periódica, si todos los componentes senoides tienen valor promedio cero.

La frecuencia más baja de la serie está asociada con $K = 1$, así tendrá una frecuencia mínima ω_0 que se llama frecuencia fundamental. Todas las demás senoides de la serie tendrán frecuencias que son múltiplos enteros de ω_0 (la fundamental); estas reciben el nombre de frecuencias armónicas.

Para encontrar la expansión en serie de funciones periódicas, se deben de evaluar todos los coeficientes a y b . Esto se puede hacer mediante el empleo de la propiedad de ortogonalidad. Se dice que dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son ortogonales sobre un intervalo (t_1, t_2) si:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt = 0$$

Para funciones senoides tenemos las relaciones siguientes con

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \forall m \neq n$$

Luego para evaluar a_n para $n \neq 0$ se necesita multiplicar ambos lados de la ecuación

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

por $\cos(n\omega_0 t)$, e integrar sobre un periodo como se indica:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \right] dt$$

Si integramos el lado derecho de la ecuación anterior término a término, y se usa la relación de ortogonalidad de la ecuación

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

todos los términos son cero con excepción de los que contienen a_n y se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Similarmente:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

para $n = 0$ se tiene solamente el coeficiente a_0 y éste es simplemente el valor promedio de $f(t)$.

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

Veamos esto claro por medio de un ejemplo. Evaluaremos los coeficientes de la expansión en series de Fourier de la onda cuadrada de la figura 51.

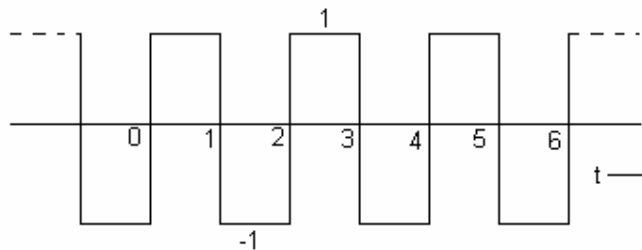


Figura 51. Onda cuadrada.

Para esta función $T = 2$, $\omega_0 = \pi$, y $a_0 = 0$. Si elegimos el intervalo de integración como $(0, 2)$, se tiene:

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 (1) \cos(n\pi t) dt + \int_1^2 (-1) \cos(n\pi t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \sin(n\pi t) dt = \int_0^1 (1) \sin(n\pi t) dt + \int_1^2 (-1) \sin(n\pi t) dt = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Así que la expansión en series de Fourier de la onda de la figura 52 es:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\pi t$$

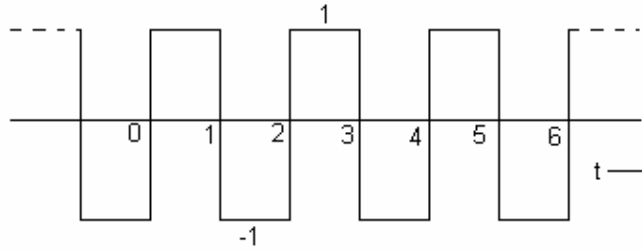


Figura 52. Expansión en series de Fourier de la onda.

5.1. Forma exponencial de la serie de Fourier

Si empleamos las relaciones de Euler se tiene:

$$\cos k\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t})$$

y:

$$\sin k\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})$$

Si las sustituimos en la ecuación

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t)$$

se tiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t}$$

Definiremos nuevos coeficientes complejos:

$$\alpha_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$$

y:

$$\alpha_{-k} = \alpha_k^* = \frac{a_k + jb_k}{2}$$

Esta ecuación nos da el término a_0 de la ecuación

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t}$$

y sólo da el exponente negativo si el intervalo de n abarca tanto los enteros positivos como los enteros negativos.

La expansión en serie de la ecuación

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k - jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t}$$

se puede escribir como:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$$

La última ecuación se conoce con el nombre de forma exponencial de la serie de Fourier.

Los coeficientes de la serie se pueden evaluar calculando a_k y b_k y empleando la ecuación

$$\alpha_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$$

o se pueden calcular directamente por integración. Rescribiendo las ecuaciones

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

y

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

en forma exponencial con el empleo de las relaciones de Euler y sustituyendo en las ecuaciones

$$\alpha_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$$

y:

$$\alpha_{-k} = \alpha_k^* = \frac{a_k + jb_k}{2}$$

se tiene:

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

y:

$$\beta_k = \frac{1}{jT} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jk\omega_0 t} dt$$

Una de las ventajas de esta forma de las series de Fourier es que con una sola ecuación se puede expresar todos los coeficientes incluyendo a_0 .

De la ecuación

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

se puede ver que a_k puede ser real para aquellas series que contengan sólo términos de coseno, e imaginaria para aquellas que contengan solo términos seno y compleja para series que contengan a ambos.

Si retomamos el ejemplo de la onda cuadrada, y la expresamos en forma compleja, como ya conocemos a_n y b_n , empleando la ecuación

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

se tiene:

$$\alpha_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \begin{cases} \frac{-2j}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Luego la expansión en serie se puede escribir como:

$$f(t) = -\frac{2j}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jk\omega_0 t} \quad n = \text{impar}$$

5.2. Líneas espectrales

Investiguemos la relación entre el coeficiente complejo a_n , la amplitud y el ángulo de fase de las componentes senoides correspondientes de la serie de Fourier. Cada coeficiente a_n se asocia con una componente senoide de la forma:

$$s(t) = \alpha_k e^{jk\omega_0 t} + \alpha_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

La ecuación se puede escribir de la forma:

$$s(t) = \frac{2k_n}{\cos(n\omega_0 t + \angle \alpha_n)}$$

Luego la amplitud de cada componente senoide es doble, la magnitud a_n y el ángulo de fase es el ángulo o argumento de a_n . Por esto a_n es un fasor cuya amplitud es la mitad de la amplitud de la componente senoidal. Si graficamos $2|a_n|$ y $\angle \alpha_n$ para cada $n > 0$ se tiene el llamado espectro de amplitud y fase respectivamente. De la misma forma si graficamos $|a_n|$ y $\angle \alpha_n$ para $n > 0$ y $n < 0$ se tiene el espectro de doble lado. En cada caso la interpretación de las líneas espectrales en términos de las amplitudes y ángulos de fase de las componentes senoides se obtiene de la ecuación:

$$s(t) = \frac{2k_n}{\cos(n\omega_0 t + \angle \alpha_n)}$$

En la figura 53 se muestra un espectro de doble lado de amplitud y fase.

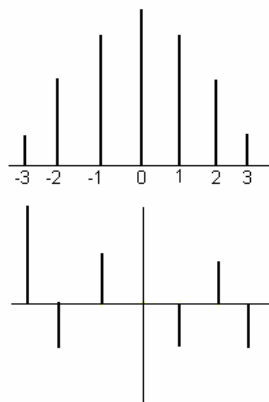


Figura 53. Espectro de doble lado y amplitud de fase..

La potencia promedio en el tiempo, asociada con una señal es proporcional con el valor cuadrático medio que esta dado por:

$$P_n = S_{\text{RMS}}^2 = \frac{S_{\text{max}}^2}{2} = \frac{4|\alpha_n|^2}{2} = 2|\alpha_n|^2$$

Si graficamos $|\alpha_n|^2$ para toda n se tiene un espectro de doble lado, pero ahora cada línea nos dirá la potencia promedio asociada con cada valor de n. La potencia promedio total se obtiene sumando las potencias de cada línea espectral:

$$P_{\text{tot}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

De la misma forma, dentro de un ancho de banda dado, $-N < n < N$, la contribución total de potencia es:

$$P_{\text{parcial}} = \sum_{n=-N}^N |\alpha_n|^2$$

La gráfica de $|\alpha_n|^2$ contra n se denomina un espectro de líneas de potencia.

5.3. Aproximación de funciones periódicas por series truncadas de Fourier

Las igualdades en las ecuaciones

$$\int_T |f(t)| dt < \infty$$

y

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

significan que la sumatoria es f(t) en el límite:

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k \beta_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde n y k son enteros. Si truncamos la serie después de un numero k de términos, la función resultante $f_1(t) \neq f(t)$, pero será una aproximación a f(t).

Existen varias formas de definir el error $f_1(t)$ y f(t). Si tomamos la diferencia $f_1(t) - f(t)$, tenemos un error que es una función del tiempo. Para poder dar un número o razón constante daremos el error cuadrático medio. Consideremos la serie truncada:

$$f_1(t) = \sum_{n=-k}^k \beta_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde los coeficientes β_n se calcularán de forma tal que minimicen el error cuadrático medio.

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

Una condición necesaria para que el error sea mínimo es:

$$\frac{\partial e}{\partial \beta_m} = 0 \quad \forall m$$

Derivando la ecuación

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

se tiene:

$$\frac{\partial e}{\partial \beta_m} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2 \left[f(t) - \sum_{n=-k}^k \beta_n e^{jn\omega_0 t} \right] e^{jn\omega_0 t} dt = 0$$

o Si integramos el lado derecho de la ecuación término a término, se obtiene:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-k}^k \beta_n e^{jn\omega_0 t} dt$$

Si:

$$e^{j(n+m)\omega_0 t} = \cos(n+m)\omega_0 t + j \sin(n+m)\omega_0 t$$

y si la integral tanto de los senos como de los cosenos, es cero, se tiene solo una contribución en el lado derecho de la ecuación, y es para $n = -m$, así que:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt = T \beta_{(-m)}$$

Si se divide por T, el lado derecho de la ecuación es $\alpha_{(-m)}$ y:

$$\beta_m = \alpha_{(-n)}$$

Si sumamos los elementos de las series de Fourier, se tienen en una serie truncada una aproximación a $f(t)$, que es óptima en el sentido de un error cuadrático mínimo.

5.4. Función Delta

Consideremos un pulso rectangular de altura H y ancho W, como el de la figura 54.

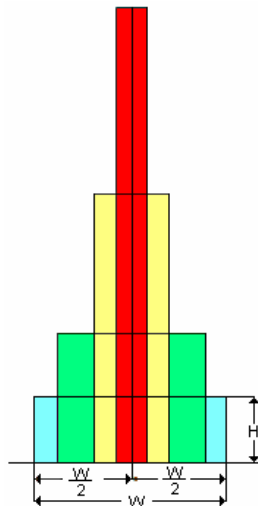


Figura 54. Pulso rectangular de altura H y ancho W.

El área del pulso será HW. Si doblamos la altura a 2H y reducimos el ancho a W/2 el área será:

$$2H(W/2) = HW.$$

Si repetimos el proceso tantas veces como se desee el área no cambiará. Si empleamos el proceso con el pulso de área unitaria, en el límite el ancho del pulso será infinitesimal, pero el área será unitaria.

Esta función límite es el impulso unitario o delta de Dirac.

Esta función límite está descrita por las características siguientes:

$$\begin{aligned}\delta(t-\tau) &= 0(t \neq \tau) \\ \delta(t-\tau) &\rightarrow \infty(t = \tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt &= 1\end{aligned}$$

Hay otra interpretación que se le puede dar al pulso unitario, esto es: de las propiedades indicadas en las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt = U(t-\tau)$$

Alternativamente se puede pensar en un impulso como la derivada de la función escalón unitario, la cual tiene pendiente cero en todos lados excepto en un punto, donde la pendiente es infinita. La aproximación de un pulso rectangular a un impulso corresponde a la aproximación de un escalón unitario como lo indica la figura 55.

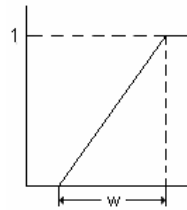


Figura 55. Escalón unitario.

En la práctica la función impulso está multiplicada por alguna otra función, y el producto se integra. Supongamos que multiplicamos un pulso rectangular por una función continua, e integramos el producto. Como se ha aproximado el pulso a un impulso llega a ser suficientemente angosto que durante su duración la función continua $f(t)$ es constante como se ve en la figura 56.

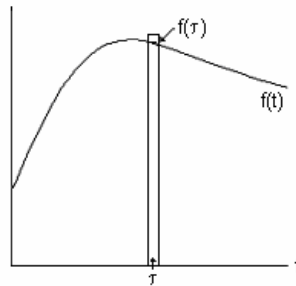


Figura 56. Aproximación del pulso a un impulso

Luego en el límite $f(t)$ se puede tomar fuera de la integral, y se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) dt = f(\tau)$$

Luego el valor de la integral es justamente el valor de $f(t)$ cuando el impulso se da. Como un caso especial se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

5.5. La función impulso y la transformada de fourier

La función impulso al no satisfacer las condiciones de Dirichlet no puede tener una transformada de Laplace. Por lo tanto hay de nuevo que volver a un proceso de límite y definirla como el límite de la transformada de un pulso finito en su aproximación a un impulso. La transformada de un pulso rectangular es:

$$F(j\omega) = H\omega \frac{\sin \frac{W\omega}{2}}{\frac{W\omega}{2}}$$

Si incrementamos H y decrementamos W de forma tal que $HW = 1$, luego $F(j\omega) = 1$ para toda ω . Usando la propiedad de la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = f(\tau)$$

tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

Si el impulso no está en el origen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t}$$

Se ve que la función impulso tiene una amplitud y energía espectral constantes.

5.6. Respuesta a un impulso

Si tenemos un circuito inicialmente relajado, y le damos una función forzante impulsiva, su salida será la respuesta del circuito a un impulso. Si denotamos el sistema a su entrada por $x(t)$, y la salida por $y(t)$, en el dominio de la transformada se tiene:

$$y(j\omega) = H(j\omega) \times (j\omega) = H(j\omega)$$

si $x(t) = \delta(t)$.

Si $y(t)$ en este caso es la respuesta al impulso que denotaremos por $h(t)$, se concluye que la respuesta al impulso y la función del circuito son el par transformado de Fourier:

$$H(j\omega) = F[h(t)]$$

Como ejemplo encontraremos la respuesta a un impulso del circuito de la figura 57.

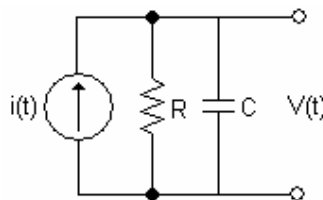


Figura 57. Respuesta a un impulso.

La entrada es un impulso y la salida es el voltaje terminal.

La función del circuito es:

$$H(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega RC + 1} = \frac{\frac{1}{C}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

Luego: $h(t)$ = Respuesta al impulso. Así que:

$$h(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

5.7. Respuesta a un pulso y a un impulso

Consideremos el circuito de la figura 58.

Calculemos su respuesta a un impulso donde la entrada es la corriente y la salida la corriente. La función del sistema es:

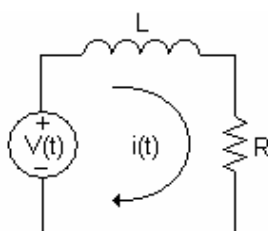


Figura 58. Circuito prueba.

$$H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)} = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{L} \frac{1}{j\omega + \frac{R}{L}}$$

Si $h(t)$ = Respuesta a un impulso de la corriente.

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} U(t)$$

Si ahora aplicamos un pulso rectangular de voltaje en lugar del impulso y el pulso tiene una altura H y dura el intervalo $(0, \omega)$ se puede expresar en términos de la función escalón como:

$$V(t) = H [u(t) - u(t-\omega)]$$

Si en la respuesta resulta un escalón unitario de voltaje:

$$i_s(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$

donde $\tau = L/R$. El pulso de voltaje de la ecuación

$$V(t) = H [u(t) - u(t-\omega)]$$

nos da por superposición la respuesta:

$$i(t) = \frac{H}{R} \left\{ \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t) - \left[1 - e^{-\frac{(t-w)}{\tau}} \right] u(t-w) \right\}$$

La gráfica de la respuesta se muestra en la figura 59.

Si aumentamos H y disminuimos w de tal forma que

$$WH = A = \text{cte}$$

sobre el intervalo (0,W) la corriente subirá rápidamente, pero por un intervalo menor de tiempo. Alcanzará su valor máximo en $t = W$, y ese valor es:

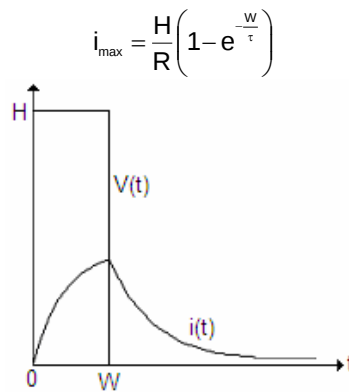


Figura 59. Gráfica de la respuesta.

Si

$$H = A/W$$

y

$$A = \text{cte}$$

se tiene:

$$i_{\max} = \frac{A}{RW} \left(1 - e^{-\frac{W}{\tau}} \right)$$

Si $W \rightarrow 0$, $i_{\max}$ de la ecuación

$$i_{\max} = \frac{A}{RW} \left(1 - e^{-\frac{W}{\tau}} \right)$$

está indeterminada. Aplicando la regla de l'Hôpital y derivando respecto a W se tiene:

$$i_{\max} = \lim_{W \rightarrow 0} \frac{A}{R\tau} e^{-\frac{W}{\tau}} = \frac{A}{L}$$

y si este valor ocurre en $t = W = 0$, la respuesta total es:

$$i(t) = \frac{A}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

y que es idéntica a la respuesta del circuito a un impulso.

$$V(t) = A\delta(t)$$

5.8. Convolución

Si consideramos un sistema caracterizado por una función de entrada $X(t)$ y una de salida $Y(t)$, con una función de sistema $H(j\omega)$, tendremos:

$$Y(j\omega) = F[Y(t)] = H(j\omega)X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

donde $h(t)$ es la respuesta a un impulso. Si cambiamos la variable de integración, se puede escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t)e^{-j\omega(t-\tau)} dt d\tau$$

Si cambiamos de nuevo variables haciendo que: $t + \tau = \lambda$, y $dt = d\lambda$ se tiene:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda - \tau)x(\tau)e^{-j\omega\lambda} d\lambda d\tau$$

La última ecuación se puede escribir como:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [h(\lambda - \tau)x(\tau)d\tau] e^{-j\omega\lambda} d\lambda = F \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda - \tau)x(\tau)d\tau \right]$$

De aquí:

$$Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda - \tau)x(\tau)d\tau$$

o:

$$Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

Para circuitos físicamente reales, la respuesta impulso no puede empezar antes de que el impulso se dé, así que:

$$h(t) = 0 \quad (t < 0) \quad \text{y} \quad h(t - \tau) = 0 \quad (\tau > t)$$

Así que para estos circuitos:

$$Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

A la integral de la ecuación anterior se le llama integral de Convolución. Esta es en el dominio del tiempo, la contraparte a la multiplicación en la transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia. La Convolución se denota por:

$$h(t) * X(t) = Y(t)$$

que corresponde a la operación:

$$H(j\omega)X(j\omega) = Y(j\omega)$$

en el dominio de la frecuencia.

6. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Fourier de una función $f(t)$, es una representación de la función como una suma continua de funciones exponenciales de la forma:

$$Y = e^{j\omega t}$$

donde ω es una función real. Esta interpretación de la transformada de Fourier nos da una idea física de la transformación matemática abstracta. La transformada de Laplace se puede visualizar como una extensión de la transformada de Fourier, en la cual se representa una función $f(t)$ por una suma continua de funciones exponenciales de la forma:

$$Y = e^{st}$$

dónde:

$$s = \sigma + j\omega$$

es una frecuencia compleja. Desde este punto de vista, la transformada de Fourier es un caso especial en el cual $s = j\omega$.

Recordando la transformada de Fourier para $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} dt$$

Definiremos una función $a(t)$ como $f(t)$ veces la función e^{-jt} donde j es real:

$$a(t) = f(t) e^{-jt}$$

La transformada de Fourier de $a(t)$ es:

$$\mathfrak{F}\{a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{(\sigma + j\omega)t} dt$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

y $f(t)$ se puede expresar como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

Ahora sea s una frecuencia compleja $\sigma + j\omega$; $\sigma + j\omega = s$, luego se tiene que:

$$d\omega = \frac{1}{j} ds$$

y las ecuaciones

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

son:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Los límites de la integral anterior resultan de la sustitución de

$$s = \sigma + j\omega.$$

Las ecuaciones

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} f(s)e^{st} ds$$

constituyen la transformada compleja de Fourier, o la transformada bilateral de Laplace.

La notación que se emplea es la siguiente:

$$F(s) = \mathbf{Lb}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathbf{Lb}^{-1}\{F(s)\}$$

Las dos formas de la transformada de Laplace de $f(t)$ se pueden obtener de la transformada de Fourier de $f(t)$ por la mera sustitución de s por $j\omega$, considerando a $f(t)$ absolutamente integrable.

Para funciones que poseen transformada de Fourier sólo en el límite, se pueden evaluar las transformadas de Laplace directamente empleando $f(t)$ por $e^{-\sigma t}$. Esto significa que la transformada de Laplace existe para muchas funciones que no tienen transformada de Fourier, esta es una de las ventajas principales de la transformada de Laplace, la habilidad de transformar funciones que no son absolutamente integrables

6.1. Aplicación de la transformada de Laplace a redes

Para poder aplicar esta transformada debemos primero determinar cómo se van a considerar los elementos fundamentales de circuito en la notación de transformada de Laplace.

Antes de aplicar esto, se debe de recordar que la transformada de Laplace sólo es válida para circuitos lineales e invariantes en el tiempo. Consideremos el circuito RLC en serie de la figura 60.

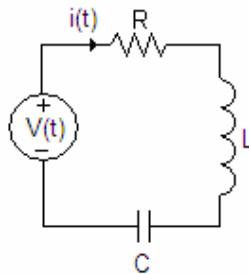


Figura 60. Circuito RLC en serie.

Aplicando la LVK se tiene:

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Aplicando la LCK tenemos:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = i_C(t) = C$$

Las relaciones de voltaje corriente para las ramas son:

$$V_R(t) = Ri(t) = RC \frac{dV_C}{dt}$$

y:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2V_C}{dt^2}$$

Sustituyendo $V_R(t)$ de la ecuación

$$V_R(t) = Ri(t) = RC \frac{dV_c}{dt}$$

y $V_L(t)$ de la ecuación

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2V_c}{dt^2}$$

en la ecuación

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

nos da:

$$LC \frac{d^2V_c}{dt^2} + RC \frac{dV_c}{dt} + V_c = V(t)$$

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{LC} V_c = \frac{1}{LC} V(t)$$

o se puede escribir de la forma:

$$V(t) = i(t)R + VC(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\sigma) d\sigma + L \frac{di}{dt} \dots t \geq 0$$

Podemos resolver cualquiera de las dos ecuaciones

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{LC} V_c = \frac{1}{LC} V(t)$$

o

$$V(t) = i(t)R + VC(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\sigma) d\sigma + L \frac{di}{dt} \quad t \geq 0$$

directamente o aplicarles la transformada de Laplace y resolver para $I(s)$ y luego tomar la transformada inversa para obtener $i(t)$. Transformaremos la ecuación

$$V(t) = i(t)R + VC(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\sigma) d\sigma + L \frac{di}{dt} \quad t \geq 0$$

empleando las características:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} (f(t)) \right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L} \left[\int_a^t f(\sigma) d\sigma \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$$

y tenemos:

$$V(s) = I(s)R + \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{I(s)}{sC} + sLI(s) - Li(0^-)$$

Luego de la ecuación anterior tenemos que $I(s)$ es:

$$I(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{sC} + sL} \left[V(s) - \frac{V_c(0^-)}{s} + Li(0^-) \right]$$

La ecuación

$$V(s) = I(s)R + \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{I(s)}{sC} + sLI(s) - Li(0^-)$$

representa una solución para la transformada de la función deseada. Conociendo $V(s)$, podemos resolver para $i(t)$, obteniendo directamente del circuito la ecuación

$$I(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{sC} + sL} \left[V(s) - \frac{V_L(0^-)}{s} + Li(0^-) \right]$$

sin tener que escribir la ecuación integrodiferencial primero. Para esto necesitamos examinar las LVK y la LCK y las relaciones voltaje corriente para R, L, C y determinar su representación bajo la transformada de Laplace.

6.2. Leyes de Kirchhoff

Estas leyes de voltaje y corriente representan relaciones lineales en variables de voltaje y de corriente de una red eléctrica. La transformada de Laplace preserva estas relaciones lineales. Por ejemplo en la red de la figura 61.

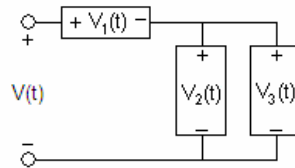


Figura 61. Red de ejemplo.

la aplicación de las leyes de Kirchhoff nos da las siguientes relaciones:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

$$0 = V_2(s) - V_3(s)$$

Tomando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación anterior tenemos:

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s)$$

$$0 = V_2(s) - V_3(s)$$

Ahora derivaremos de esto las relaciones voltaje corriente para las ramas que son: Resistores, Capacitores, e Inductores lineales e invariantes en el tiempo.

6.2.1. Resistores

Los elementos resistivos están especificados por su relación voltaje corriente:

$$V_R(t) = R i(t)$$

o de otra forma:

$$i(t) = G V(t)$$

que se transforma en la ecuación:

$$V(s) = R I(s)$$

o de la forma:

$$I(s) = G V(s)$$

Comparando las ecuaciones

$$V(s) = R I(s)$$

y

$$I(s) = G V(s)$$

vemos que la constante R describe completamente la relación entre las transformadas del voltaje y la corriente.

6.2.2. Capacitores

Los elementos capacitivos están descritos por la relación del tiempo:

$$V_c(t) = V_c(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\sigma) d\sigma$$

o de la forma:

$$i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt}$$

tomando la transformada de la ecuación anterior tenemos:

$$V_c(s) = \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I_c(s)$$

o tomando la transformada de la ecuación

$$i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt}$$

tenemos:

$$I_c(s) = sC V_c(s) - C V_c(0^-)$$

Como se ve, el elemento capacitivo que estaba descrito por una ecuación diferencial o integral en el tiempo dependiendo si es corriente o voltaje, al transformarla se convierte en una ecuación algebraica. El parámetro $1/sC$ y la condición inicial $V_c(0^-)$, describen por completo al elemento capacitivo después de la transformada. Como se puede ver si comparamos la ecuación

$$V_c(s) = \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I_c(s)$$

con la ecuación

$$I_R(s) = G V(s)$$

$1/sC$ es similar al parámetro R en describir la relación entre la transformada para el voltaje y la corriente. Por esta razón al parámetro $1/sC$ se le llama impedancia capacitiva compleja de los elementos capacitivos. Al inverso de este parámetro sC se le llama la admitancia capacitiva compleja. La relación expresada en la ecuación

$$V_c(s) = \frac{V_c(0^-)}{s} + \frac{1}{sC} I_c(s)$$

indica que la transformada de Laplace de un elemento capacitivo está representada por una reactancia compleja de valor $1/sC$ en serie con una fuente de voltaje de valor $V_c(0^-)/s$.

6.2.3. Inductores

Un elemento inductivo está descrito por la relación voltaje corriente:

$$V_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

o por la relación:

$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(\sigma) d\sigma$$

que si aplicamos la transformada de Laplace tenemos:

$$V_L(s) = sL I(s) - L i_L(0^-)$$

y por la otra relación:

$$I_L(s) = \frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{1}{sL} V_L(s)$$

Comparando las ecuaciones

$$V_L(s) = sLI(s) - Li_L(0^-)$$

y

$$I_L(s) = \frac{i_L(0^-)}{s} + \frac{1}{sL} V_L(s)$$

con las ecuaciones

$$V_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

y

$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t V_L(\sigma) d\sigma$$

se ve que el parámetro sL para el elemento inductivo es equivalente al parámetro $1/sC$ para el elemento capacitivo. Luego sL recibe el nombre de impedancia Inductiva compleja.

Para mostrar la aplicación de esto, transformaremos el circuito en serie RLC de la figura 62.

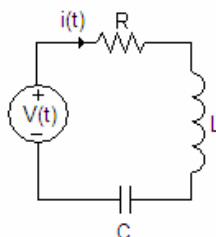


Figura 62. Circuito en serie RLC

y obtendremos una expresión para la transformada de Laplace de $i(t)$.

Reemplazando cada elemento en la red por su equivalente transformada, la representación nos da el circuito de la figura 63.

Nótese que las condiciones iniciales se han sustituido por fuentes de voltaje. Si aplicamos la LVK a la red transformada obtenemos:

$$V(s) = I(s)R + I(s)sL - Li_L(0^-) + I(s)\frac{1}{sC} + \frac{V_C(0^-)}{s}$$

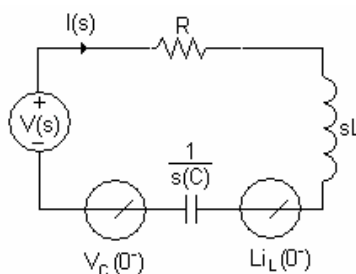


Figura 63. Circuito equivalente transformado.

Resolviendo para $I(s)$, tenemos:

$$I(s) = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \left[V(s) + Li_L(0^-) \right] - \frac{V_C(0^-)}{s}$$

que es el mismo resultado obtenido con anterioridad.

Resolveremos el circuito de la figura 64.

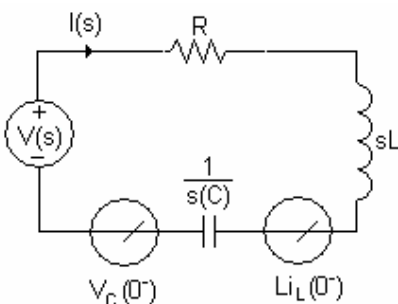


Figura 64. Circuito ejemplo.

pero para conocer su respuesta a un pulso escalón unitario, bajo condiciones iniciales cero.

Empleando el desarrollo para $I(s)$ en el caso anterior, hacemos que $i_L(0^-) = V_C(0^-)$ y $V(s) = 1/s$, que es la transformada del escalón unitario y se obtiene:

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{L}}{(s + s_1)(s + s_2)}$$

donde s_1 y s_2 están dados por:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

para el caso en que $s_1 \neq s_2$, se emplea la expansión en fracciones parciales para obtener:

$$I(s) = \frac{1}{L(s_2 - s_1)} \frac{1}{s + s_1} + \frac{1}{L(s_2 - s_1)} \frac{1}{s + s_2}$$

Cuando $s_1 = s_2$, tenemos:

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{(s + s_1)^2}$$

Para cualquiera de estos casos, la respuesta escalón está dada como la transformada inversa de Laplace:

$$i(t) = \frac{1}{L(s_2 - s_1)} e^{-s_1 t} u_0(t) + \frac{1}{L(s_1 - s_2)} e^{-s_2 t} u_0(t)$$

o:

$$i(t) = \frac{1}{L} t e^{-s_1 t} u_0(t)$$

6.3. Impedancia y Admitancia

La aplicación de la transformada de Laplace permite una generalización de los conceptos de circuitos resistivos a circuitos RLC, ya que la transformación establece relaciones matemáticas algebraicas entre las transformadas de voltaje y corriente.

En un circuito RLC en serie, encontramos que la transformada de la respuesta de la corriente era de la forma:

$$V(s) + Li_L(0^-) - \frac{V_C(0^-)}{s} = I(s) \left[R + sL + \frac{1}{sC} \right]$$

En condiciones iniciales cero y definiendo:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R + sL + \frac{1}{sC}$$

Se puede describir la ecuación

$$V(s) + Li_L(0^-) - \frac{V_C(0^-)}{s} = I(s) \left[R + sL + \frac{1}{sC} \right]$$

como:

$$V(s) = I(s)Z(s)$$

en la que la analogía con la ecuación $V = RI$ es aparente. La función $Z(s)$ se llama la impedancia de entrada del circuito RLC en serie. La impedancia es una función racional de s , que es la razón de la transformada de la función voltaje de excitación, a la transformada de la respuesta de corriente bajo condiciones iniciales cero. Las impedancias siguen para su combinación las mismas reglas que los resistores. Las impedancias en serie entre dos terminales se suman y en paralelo se suman sus inversos.

Ejemplo:

Encontrar la impedancia equivalente del circuito de la figura 65.

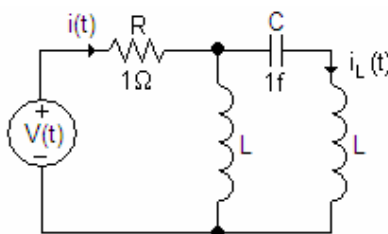


Figura 65. Circuito para encontrar la impedancia equivalente.

La red transformada para el cálculo de la impedancia equivalente se ve en la figura 66.

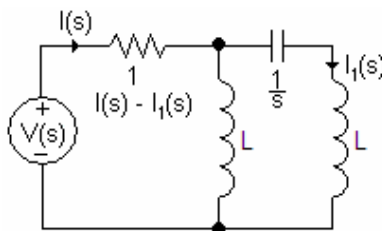


Figura 66. Circuito transformado.

Todas las condiciones iniciales son cero. Aplicando la LVK se tiene:

$$\begin{aligned} V(s) &= I(s) + sI(s) - sI_1(s) \\ 0 &= -sI(s) + 2sI_1(s) + \frac{1}{s} I_1(s) \end{aligned}$$

Combinando estas dos ecuaciones por eliminación de $I_1(s)$:

$$V(s) = I(s) + sI(s) \frac{s^3}{2s^2 + 1} I(s)$$

o:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 1}{2s^2 + 1}$$

Podemos también calcular $Z(s)$ por combinación sucesiva de impedancias en serie y en paralelo.

La impedancia equivalente de un capacitor y un inductor en serie es:

$$Z_{e_1}(s) = \frac{1}{s} + s$$

La impedancia equivalente del inductor restante en paralelo con $Z_{e_1}(s)$ es:

$$Z_{e_2}(s) = \frac{1}{\frac{1}{Z_{e_1}(s)} + \frac{1}{s}} = \frac{s^3 + s}{2s^2 + 1}$$

Por último la combinación en serie del resistor con $Z_{e_2}(s)$ nos da:

$$Z(s) = 1 + Z_{e_2}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + s + 1}{2s^2 + 1}$$

Se puede también definir la función admitancia $Y(s)$ como la razón de la transformada de la respuesta en corriente, a la transformada de la fuente de voltaje bajo condiciones iniciales cero. Por ejemplo: considérese la transformada del circuito RLC en paralelo con condiciones iniciales cero de la figura 67:

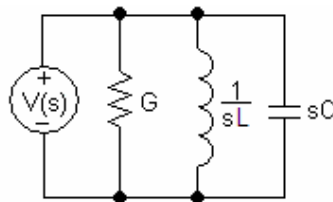


Figura 67. Circuito transformado RLC.

Aplicando la LCK tenemos:

$$I(s) = V(s)G + V(s)\frac{1}{sL} + V(s)sC$$

La definición de admitancia equivalente de la red es la razón de la transformada de la corriente a la transformada del voltaje. De la ecuación anterior se tiene:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = G + \frac{1}{sL} + sC$$

Nótese que en este caso las admitancias en paralelo se suman para encontrar la admitancia equivalente.

6.4. Funciones de transferencia de redes

En suma a los conceptos de impedancia y admitancia se tiene otra función de gran interés en el análisis de redes. Esta función es la función de transferencia para el voltaje denotada por $H_V(s)$ y definida como la razón de la transformada del voltaje de salida, a la transformada del voltaje de entrada bajo condiciones iniciales cero. De la misma forma, la razón de la transformada de Laplace de la corriente de salida se llama función de transferencia de corriente y se denota por $H_I(s)$.

Como un ejemplo calcularemos la función de transferencia para voltaje del circuito de la figura 68.

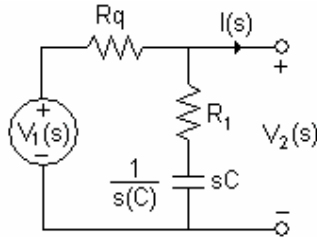


Figura 68. Circuito ejemplo.

La corriente $I(s)$ está dada por:

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{R_1 + Rq + \frac{1}{sC}}$$

y el voltaje $V_2(s)$ es:

$$V_2(s) = \left(R_1 + \frac{1}{sC} \right) I(s) = \frac{R_1 + \frac{1}{sC}}{R_1 + Rq + \frac{1}{sC}} V_1(s)$$

y la función de transferencia de voltaje para la red es:

$$H_V(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_1 + \frac{1}{sC}}{R_1 + Rq + \frac{1}{sC}}$$

6.5. Relación con variable de estado

Ya vimos que la transformada de Laplace es una fuerte herramienta para la formulación y solución de redes lineales e invariantes en el tiempo. La transformada de Laplace es también una gran herramienta para establecer la ecuación de operación a partir del diagrama esquemático.

Discutiremos su relación con las variables de estado. Como se vio con anterioridad la descripción por variables de estado de una red lineal e invariante en el tiempo es:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$

donde $\mathbf{X}(t)$ es un n -vector y $\mathbf{U}(t)$ es un m -vector. $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ y $\mathbf{B}$ es otra matriz de $n \times m$.

Si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$

tenemos:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

donde la transformada de Laplace de un vector es simplemente la transformada de cada uno de sus componentes. Resolviendo para $\mathbf{X}(s)$:

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{X}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

como se vio, la solución a la ecuación

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$$

es:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau$$

tanto la ecuación

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{X}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

como la ecuación

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau$$

deben de valer para todos los valores de $\mathbf{U}(t)$ en particular para $\mathbf{U}(t) = 0$. Luego bajo condiciones de entrada cero, tenemos de la ecuación

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{X}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Lo siguiente

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{X}(0)$$

De la ecuación

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau) d\tau$$

tenemos:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0)$$

De la ecuación

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{X}(0)$$

tenemos después de la transformada inversa lo siguiente:

$$\mathbf{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\} \mathbf{X}(0)$$

Si las ecuaciones

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0)$$

Y

$$\mathbf{X}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\} \mathbf{X}(0)$$

valen para todos los valores de las condiciones iniciales $\mathbf{X}(0)$, debemos de tener:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\}$$

Luego la transformada de Laplace nos da un método para calcular la matriz $e^{\mathbf{A}t}$.

Consideremos el circuito de la figura 69.

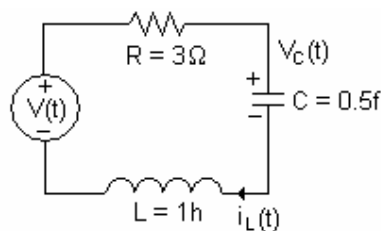


Figura 69. Circuito RCL.

Aplicando los métodos de variables de estado escogemos $i_L(t)$ y $V_C(t)$ como variables de estado.

Aplicando las LVK y LCK tenemos:

$$V(t) = i_L(t)R + V_C(t) + L \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L(t) = C \frac{dV_C}{dt}$$

que en forma de matriz es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/C & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

La matriz $\mathbf{A}$ es luego:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/C & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Usaremos la transformada de Laplace para encontrar $e^{\mathbf{A}t}$. Primero calcularemos:

$$[s\mathbf{I} + \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

Calculando la inversa:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Luego calculando la transformada inversa:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Luego podemos emplear la ecuación

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau$$

para obtener la solución para i_L y V_C .

7. REDES PASIVAS LINEALES

Muchos de los detalles de los problemas de circuitos de gasa simple están contenidos en el desarrollo de la función básica de respuesta. Los circuitos RC, LR, y la serie LRC tienen en la práctica respuestas del tipo I y II. Los resultados se deben sumar para cada caso en particular para obtener una tabla de respuestas características de las más elementales combinaciones de componentes pasivos.

7.1. Circuitos de una Gasa

Un aspecto de las formas cuadráticas LRC es la variación de los polos conforme L, R, y C cambian de valor. La forma cuadrática básica es:

$$s^2 + 2as + \omega_0^2$$

dónde:

$$a = \frac{R}{2L}$$

y

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Sus raíces son:

$$s^2 + 2as + \omega_0^2 = (s + a + \sqrt{a^2 + \omega_0^2})(s + a - \sqrt{a^2 + \omega_0^2})$$

Cuando:

$$a \geq \omega_0^2,$$

las raíces están en el eje real y a decrece conforme ω_0 , por lo que las raíces se mueven en un círculo de radio ω_0 .

7.1.1. Variación en L

L entra tanto en la expresión para a como en la expresión para ω_0 . Como:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

ω varía como $1/\sqrt{L}$, o sea que un incremento en L reduce a, lo que implica una reducción en ω_0 .

Consideremos un circuito RLC. Inicialmente los polos están en el eje real. Si incrementamos a L y dejamos a R y C fijos, los polos se mueven uno hacia el otro en una circunferencia de radio $1/RC$ centrada en $(-1/RC)$ del plano complejo. El lugar de todos los puntos en el plano s para los valores fijos de R y C está dado por:

$$\omega^2 + \left(\sigma + \frac{1}{RC}\right)^2 = \frac{1}{(RC)^3}$$

como se ve en la figura 70.

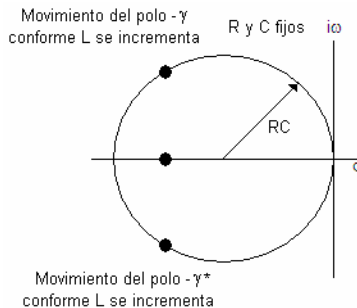


Figura 70. Lugar de todos los puntos en el plano s.

7.1.2. Variación en R

Si L y C permanecen constantes y variamos R, los polos se mueven a lo largo del eje real negativo y en un círculo de radio ω_0 centrado en el origen, ya que sólo a se afecta y un incremento en R es un incremento en el amortiguamiento, como se ve en la figura 71.

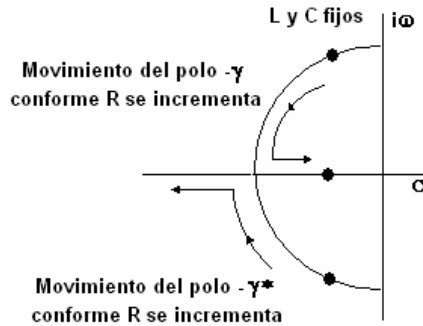


Figura 71. L y C permanecen constantes y se varía R.

7.1.3. Variación en C

El valor de la capacitancia C sólo afecta a la frecuencia ω_0 . El lugar de los puntos para R y L fijos es una línea vertical de $a = \text{cte}$ o un movimiento a lo largo del eje real, como se ve en la figura 71.

7.1.4. Redes de Tres Puertos

Uno de los problemas que se encuentran en circuitos lineales es la relación algebraica entre la corriente y el voltaje en relación a la tierra de tres puertos, como se ve en la siguiente figura 72.

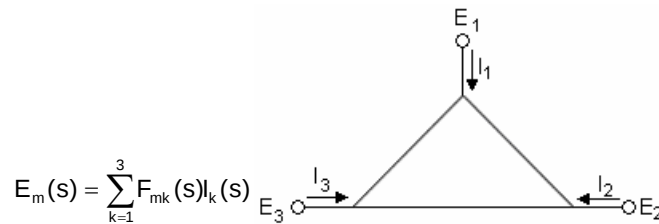


Figura 72. Red de tres puertos.

En el problema de la figura anterior los voltajes E_i se dan relativos a la tierra. Si el elemento en la caja es lineal, podemos escribir las relaciones entre $E_i(s)$ y las $I_m(s)$ como:

El hecho de que la suma de los voltajes en las terminales es cero y el hecho de que la carga total se conserva nos da una restricción muy útil que nos sirve para reducir el número de dimensiones a dos. En otras palabras:

$$(E_1 - E_2) + (E_2 - E_3) + (E_3 - E_1) = 0$$

y

$$I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = 0$$

Trabajaremos en términos de la caída de voltaje $(E_1 - E_3)$ y $(E_2 - E_3)$ para lograr la reducción. Sea:

$$E_1(s) = (E_1 - E_3)$$

y

$$E_2(s) = (E_2 - E_3)$$

La corriente $I_3(s)$ ahora es:

$$I_3(s) = -(I_1(s) + I_2(s))$$

como se ve en la figura 73, Las relaciones entre $E_m(s)$ e $I_j(s)$ son:

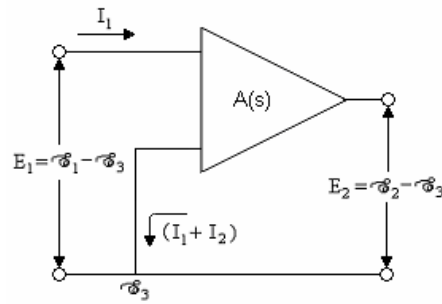


Figura 73. Circuito Reducido.

$$E_1(s) = Z_{11}(s)I_1(s) + Z_{12}(s)I_2(s)$$

y

$$E_2(s) = Z_{21}(s)I_1(s) + Z_{22}(s)I_2(s)$$

que escritas en forma de matriz es:

$$\mathbf{E}(s) = \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{I}(s) = \begin{pmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Z}$ tiene una inversa que podemos escribir como:

$$\mathbf{Z}^{-1}(s) = \mathbf{Y}(s)$$

con

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{E}(s)$$

Si la matriz $\mathbf{Z}$ no existe, como en el caso de una serie de impedancias, se puede iniciar el análisis con $\mathbf{Y}(s)$. Si $\mathbf{Z}(s)$ no existe, la magnitud de $\mathbf{Y}(s)$ es cero y $\mathbf{Y}(s)$ es una matriz útil. También el inverso es cierto.

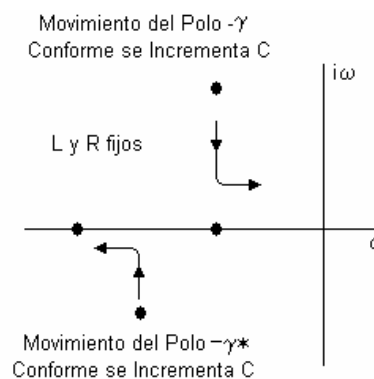


Figura 74. Lugar de los puntos para R y L fijos.

7.2. Combinaciones de redes pasivas

Vamos a estudiar las Redes Pasivas, y para esto veremos las siguientes combinaciones:

La Combinación Híbrida G para Conexiones Serie Paralelo

7.2.1. La Combinación Híbrida G para Conexiones Serie Paralelo

Si ahora vemos el problema como que σ es el vector invariante. Ver la figura 75.

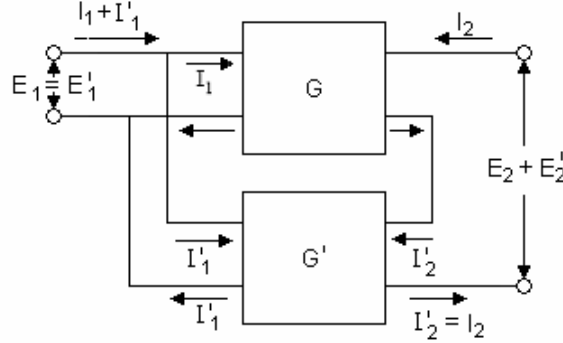


Figura 75. Conexión híbrida G.

Los elementos de **G** son los elementos inversos de **H**:

$$\rho = H^{-1} \cdot \sigma = G \cdot \sigma$$

por lo que:

$$G = H^{-1}$$

La combinación de las dos redes es:

$$\rho_{total} = \rho + \rho' = (G + G') \cdot \sigma$$

con:

$$G_{total} = G + G'$$

Los elementos de matriz para una red de cuatro terminales específica se deben obtener experimentalmente. Como ejemplo vamos a tomar los elementos de la matriz **H**, y para obtener el mínimo número de elementos debemos realizar cuatro mediciones, que son:

$$H_{11}(s) = \left[\frac{E_1}{I_1} \right]_{E_2=0} = \text{La impedancia de entrada con la salida en corto circuito.}$$

$$H_{12}(s) = \left[\frac{E_1}{E_2} \right]_{I_1=0} = \text{El inverso de la transferencia directa de voltaje con la entrada abierta.}$$

$$H_{21}(s) = \left[\frac{I_2}{I_1} \right]_{E_2=0} = \text{La transferencia directa de corriente con la salida en corto.}$$

$$H_{22}(s) = \left[\frac{I_2}{E_2} \right]_{I_1=0} = \text{La impedancia de entrada con la salida en corto circuito.}$$

Estos parámetros son de gran utilidad en transistores cuando la transferencia directa de corriente es un factor importante.

7.2.2. La Combinación Híbrida H para Conexiones Serie Paralelo

La siguiente forma de conexión que nos es útil es la de la salida serie-paralelo, como lo muestra la figura 76.

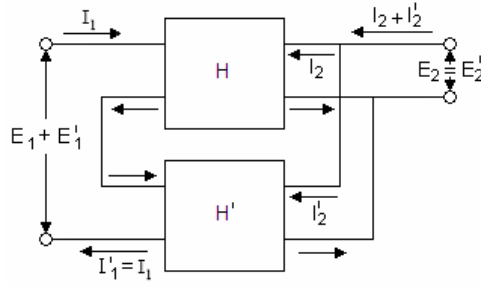


Figura 76. Conexión híbrida G Serie paralelo.

Las variables comunes son $E_2 = E_2'$ e $I_1 = I_1'$. Para poder usarlas combinadas generamos los vectores σ y ρ donde:

$$\sigma = \begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\rho = \begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz híbrida $H(s)$ se define como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \cdot \rho = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}.$$

Para relacionar las H_{lm} con las anteriores matrices, notaremos que:

$$\sigma = P_1 \cdot E + P_4 \cdot I \quad E = P_1 \cdot \sigma + P_4 \cdot \rho$$

y

$$\sigma = P_1 \cdot I + P_4 \cdot E \quad I = P_1 \cdot \rho + P_4 \cdot \sigma.$$

Si empezamos porque:

$$E = Z \cdot I$$

tenemos:

$$(P_1 - Z \cdot P_4) \cdot \sigma = (Z \cdot P_1 - P_4) \cdot \rho$$

dando:

$$\sigma = H \cdot \rho = \begin{pmatrix} \frac{|Z|}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{pmatrix} \cdot \rho$$

Se pueden obtener por la misma técnica la relación entre H_{lm} y los elementos de otras matrices. El problema de la figura 76 representa la combinación de:

$$\sigma = H \cdot \rho$$

y

$$\sigma' = H' \cdot \rho'$$

con

$$\rho' = \rho$$

Luego:

$$\sigma_{total} = \sigma + \sigma' = (H + H') \cdot \rho$$

o

$$\sigma_T = H_T \cdot \rho$$

Esto define la matriz **H** para la combinación como:

$$H_{\text{total}} = H + H' = \begin{pmatrix} H_{11} + H'_{11} & H_{12} + H'_{12} \\ H_{21} + H'_{21} & H_{22} + H'_{22} \end{pmatrix}.$$

7.3. Las matrices

Vamos a estudiar las Matrices, y para esto veremos los siguientes puntos:

Matriz de admitancia

Matriz en cascada

Matriz de impedancia

7.3.1. La Matriz de Admitancia

La matriz de admitancia o la inversa de la matriz **Z**, se obtiene de las relaciones:

$$I(s) = Y(s) \cdot E = \begin{pmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix}.$$

Se puede calcular directamente la matriz **Y(s)**, o se puede obtener de la relación:

$$Y(s) = Z^{-1}(z)$$

donde:

$$Y_{lm} = \frac{(-1)^{l+m} \text{menor } Z_{ml}}{|Z|}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{|Z|} & Y_{12} &= \frac{Z_{12}}{|Z|} \\ Y_{21} &= \frac{-Z_{21}}{|Z|} & Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{|Z|} \end{aligned}$$

La forma de admitancia es útil para combinaciones de dos redes de cuatro terminales cuando el vector de voltaje es el mismo para ambas. Esta se llama la combinación paralelo-paralelo en la cual el vector total de corriente de la red equivalente es la suma de los dos vectores de corriente, como se muestra en la figura 77.

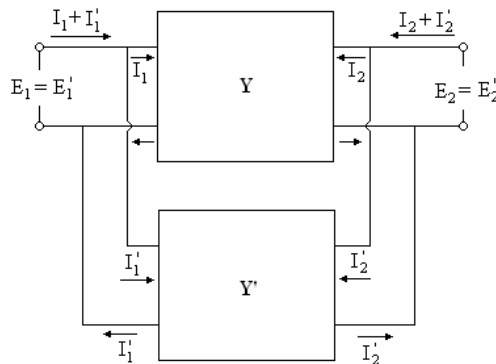


Figura 77. Combinación paralelo-paralelo.

Para este caso:

$$I_{\text{total}} = I + I' = Y \cdot E + Y' \cdot E' = (Y + Y') \cdot E$$

o

$$I_{\text{total}} = Y_T \cdot E,$$

dónde:

$$Y_T = Y + Y'.$$

7.3.2. La Matriz en Cascada

Para conectar dos redes de cuatro terminales en cascada, es necesario construir vectores híbridos, ya que los elementos de la matriz en cascada tendrán diferentes unidades. En la figura 78 se muestran dos redes de cuatro terminales en cascada.

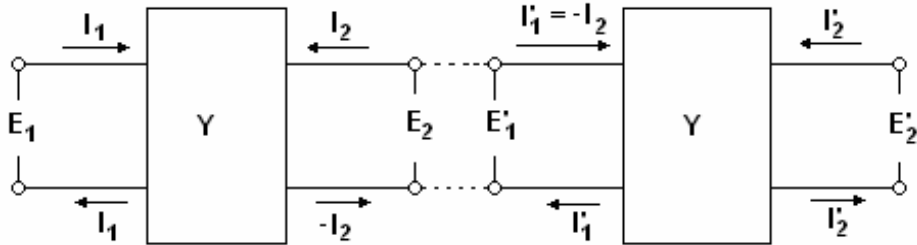


Figura 78. Conexión en cascada.

Los elementos en común de las dos redes en cascada son los voltajes intermedios.

$$E_2 = E_1'$$

y las corrientes intermedias

$$I_2 = -I_1'.$$

El vector final para la red equivalente tendrá E_1 e I_1 como variables de entrada y E_2' e I_2' como variables de salida. Definiremos el vector de cascada como:

$$\xi_1(s) = \begin{bmatrix} E_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix}$$

y

$$\xi_2(s) = \begin{bmatrix} E_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}.$$

Las variables están conectadas por las ecuaciones lineales:

$$E_1 = A_{11}E_2 - A_{12}I_2$$

y

$$I_1 = A_{12}E_2 - A_{22}I_2.$$

En forma de matriz:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \cdot \xi_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}.$$

Las A_{jk} se pueden relacionar directamente a la suma de Z_{mn} o la de Y_{mn} . Para analizar esto usaremos el método de los operadores de proyección. Para esto vamos a definir cuatro operadores P_k :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores $\xi_i(s)$ se pueden generar de los vectores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{I}$, por ejemplo:

$$\xi_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{I}$$

y

$$\xi_2 = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{I}$$

Las relaciones inversas son:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{P}_1 \cdot \xi_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \xi_2$$

y

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_3 \cdot \xi_1 + \mathbf{P}_4 \cdot \xi_2$$

El último par de ecuaciones se obtuvo de relaciones del tipo:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_3) \cdot \mathbf{E}$$

y

$$\mathbf{I} = (\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{P}_4) \cdot \mathbf{I}$$

o

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_4 \cdot \mathbf{P}_4 = \mathbf{I}$$

También

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2$$

y

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_3$$

Para convertir $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{A}$ sustituimos $\mathbf{E}(\xi_1, \xi_2)$ y $\mathbf{I}(\xi_1, \xi_2)$ en

$$\mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

lo que nos da:

$$(\mathbf{P}_1 - \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{P}_3 \cdot \xi_1 = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{P}_4 \cdot \xi_2$$

y se encuentra:

$$\begin{pmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -Z_{11} \\ 1 & -Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

Si invertimos la matriz del lado izquierdo y multiplicamos por la izquierda por esta inversa, tenemos:

$$\xi_1 = \mathbf{A} \cdot \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{|\mathbf{Z}|}{Z_{21}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{pmatrix} \cdot \xi_2$$

Esta ecuación define los elementos A_{lm} en términos de los elementos de $\mathbf{Z}$. Una relación similar de:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}$$

nos da la relación entre Y_{km} y las A_{jk} .

Cuando dos redes de cuatro terminales se conectan en cascada, se usan las siguientes ecuaciones para obtener la matriz del par:

$$\xi_1' = \mathbf{A}' \cdot \xi_2'$$

y

$$\xi_1 = \mathbf{A} \cdot \xi_2$$

En cascada $\xi_2 = \xi_1'$; luego:

$$\xi_1 = \mathbf{A} \cdot \xi_1' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' \cdot \xi_2' = \mathbf{A}_T \cdot \xi_2'$$

La matriz equivalente de la cascada es el producto interno de las matrices individuales:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$$

o

$$A_{jk}^{(T)} = \sum_{m=1}^2 A_{jm} A'_{mk}.$$

7.3.3. La Matriz Z o Matriz de Impedancia

El formalismo convencional de cuatro terminales es en realidad una teoría de dos puertos y esta particular representación es útil en muchas aplicaciones. El problema reducido de tres puertos se puede representar como un problema de dos puertos, problema que se conoce como las redes de cuatro terminales, como lo muestra la figura 79.

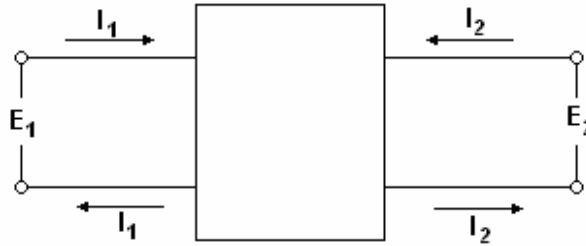


Figura 79. Red de cuatro terminales.

La corriente del tercer puerto se ha dividido proporcionalmente en esta aplicación. Para lo que viene debemos mantener la corriente de las gasas invariantes en cada puerto. En cualquier conexión si I_1 fluye hacia dentro del puerto, I_1 debe fluir hacia fuera en las terminales menores de ese puerto.

Las relaciones lineales básicas son de la forma:

$$E_j(s) = \sum_{k=1}^2 Z_{jk}(s) I_k(s)$$

o

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{Z}(s) \cdot \mathbf{I}(s)$$

Esta representación es útil cuando se combinan dos redes de cuatro terminales con una entrada y una salida en serie. Esta conexión se llama como conexión serie-serie, como lo muestra la figura 80.

La combinación se logra simplemente sumando las matrices $\mathbf{Z}$. El vector total de voltaje $\mathbf{E}_T$ es la suma de los vectores de voltaje $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$:

$$\mathbf{E}_T = \begin{bmatrix} E_1 & E_1' \\ E_2 & E_2' \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Z}' \cdot \mathbf{I}'$$

Como los vectores $\mathbf{I}$ e $\mathbf{I}'$ son iguales:

$$\mathbf{E}_T = (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}') \cdot \mathbf{I} = \mathbf{Z}_T \cdot \mathbf{I}$$

y la matriz equivalente $\mathbf{Z}$ para la combinación es la suma:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}'$$

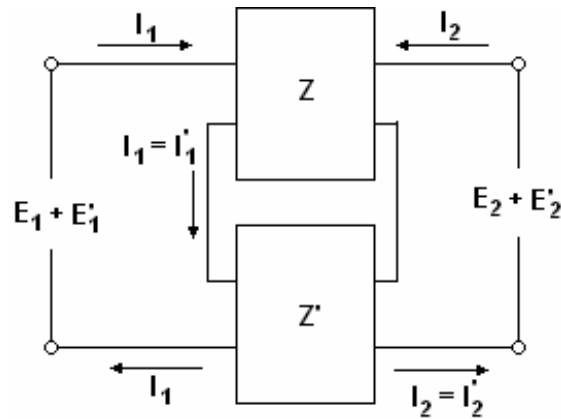


Figura 80. Conexión serie-serie.

o

$$Z_T = \begin{pmatrix} [Z_{11} + Z'_{11}] & [Z_{12} + Z'_{12}] \\ [Z_{21} + Z'_{21}] & [Z_{22} + Z'_{22}] \end{pmatrix}$$

como se ve en la figura 81.

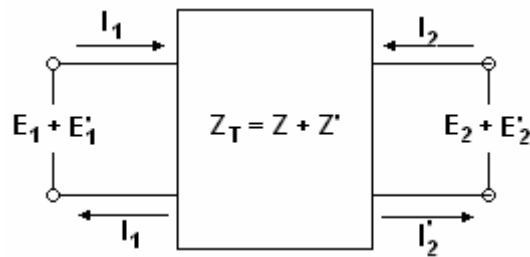


Figura 81. Matriz equivalente.

Esta es la matriz total de impedancia.

7.4. TEOREMAS DE REDES

Vamos a estudiar los siguientes teoremas:

Teorema de dualidad,

Teorema de Norton,

Teorema de Thevenin

7.4.1. Teorema de Dualidad

La forma algebraica de la relación entre corriente y voltaje en los tres elementos pasivos es simétrica bajo el intercambio de elementos, corrientes y voltajes. Es decir que la operación de integración, escalamiento, y derivación están presentes en forma simétrica en la operación de los tres elementos pasivos agrupados. Un capacitor integra la corriente y deriva el voltaje que aparece a través de sus terminales, la inductancia deriva la corriente e integra el voltaje. La tabla 1 nos muestra estas relaciones:

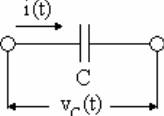
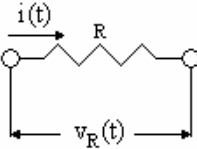
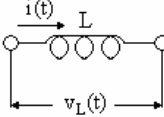
Elemento	Voltaje	Corriente
	$i(t) = C \frac{dv_C}{dt}$ $I(s) = L[i(t)] = CsV_C(s) - CV_C(0+)$	$V_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t') dt'$ $V_C(s) = \frac{I(s)}{Cs} + \frac{v_C(0+)}{s}$
	$i(t) = Gv_R(t) = \frac{v_R}{R}$ $I(s) = GV_R(s) = \frac{V_R(s)}{R}$	$v_R(t) = Ri(t) = \frac{i(t)}{G}$ $V_R(s) = RI(s) = \frac{I(s)}{G}$
	$i(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t') dt'$ $I(s) = \frac{V_L(s)}{Ls} + \frac{i(0+)}{s}$	$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $V_L(s) = LsI(s) - Li(0+)$

Tabla 1. Relación entre corriente y voltaje en los tres elementos pasivos.

Lo que nos dice que para cada circuito excitado por voltaje existe un dual que está excitado por corriente. Algebraicamente el dual se logra al convertir la ecuación inicial del circuito. Consideremos un circuito LRC excitado por voltaje, la ecuación del circuito es:

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = e(t).$$

Este circuito lo mostramos en la figura 82.

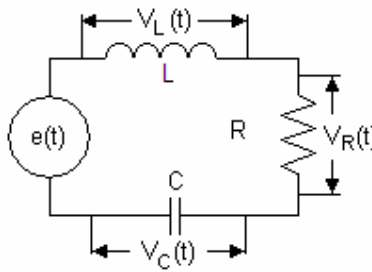


Figura 82. Circuito LRC.

El circuito dual se puede construir si $e(t)$ se convierte en una fuente de corriente $i(t)$ y cada voltaje se cambia por una corriente a través del elemento recíproco. Luego:

$$i_C(t) + i_G(t) + i_L(t) = i(t).$$

El circuito dual se muestra en la figura 83.

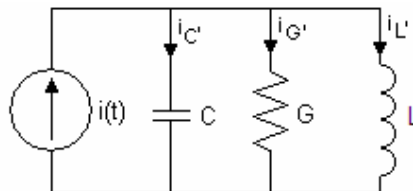


Figura 83. Circuito dual.

Esta es la ecuación de conservación de la corriente para un circuito de tres ramas C' , G' y L' alimentado por un generador de corriente.

Para construir el circuito dual debemos seguir estas reglas:

1. Una resistencia en serie en el circuito original, es una conductancia en paralelo en el circuito dual.
2. Un capacitor en serie en el circuito original, es una inductancia en paralelo en el circuito dual.
3. Una inductancia en serie en el circuito original, es un capacitor en paralelo en el circuito dual.
4. Un generador de voltaje en el circuito original, es un generador de corriente en el circuito dual.
5. Los interruptores en serie abiertos en el circuito original son interruptores en paralelo y cerrados en el circuito dual.

El generador de voltaje ideal presenta una impedancia interna cero y el generador ideal de corriente presenta una impedancia interna infinita, lo que es una clara dualidad.

7.4.2. Teorema de Norton

El teorema de Norton es el teorema dual del teorema de Thévenin y establece que una red lineal vista desde dos puntos a y b se puede simular por un generador de corriente constante en paralelo con una admitancia interna $Y_{int}(s)$. Si el generador es periódico, podemos emplear la representación de Fourier y separar equivalentes para cada frecuencia. También podemos trabajar en el dominio complejo de la frecuencia con una red equivalente. Podemos usar la siguiente red que se muestra en la figura 84.

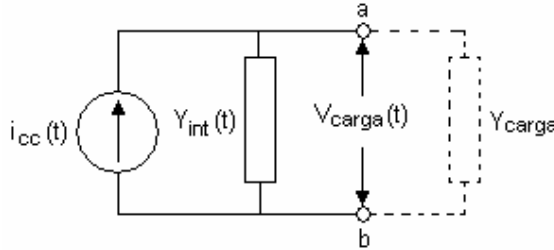


Figura 84. Red para el dominio de la frecuencia.

Estamos interesados en la caída de potencial entre los puntos a y b. En la representación de la transformada de Laplace, la solución que se busca es:

$$[Y_{int}(s) + Y_L(s)]V_{carga}(s) = I_{cc}(s)$$

Para relacionar la ecuación anterior con lo que se obtuvo en el teorema de Thévenin, la escribiremos para la corriente $I_N(s) = I_L(s)$ en la gasa de salida:

$$\left[\frac{1}{Y_{NN}} + Z_L(s) \right] I_N(s) = \frac{\sum_{k=1}^N Y_{Nk} E_k}{Y_{NN}}.$$

El voltaje en la carga es:

$$V_L(s) = Z_L(s)I_N(s),$$

7.4.3. Teorema de Thevenin

En un circuito que consista sólo de elementos pasivos y generadores lineales, sin importar la complejidad que éste tenga, las características entre dos puntos cualesquiera en la red se pueden reemplazar por un generador de voltaje en serie con una impedancia $Z_{int}(s)$.

La salida del generador es igual al voltaje de circuito abierto $E_{ca}(s)$ entre los dos puntos. Si calculamos las corrientes $I_{cc}(s)$ que fluyen en el circuito abierto cuando los dos puntos se conectan, se puede calcular la impedancia interna de la forma:

$$Z_{int}(s) = \frac{E_{ca}(s)}{I_{cc}(s)}.$$

Si aplicamos este teorema al eje imaginario del plano s , tenemos un circuito de Thévenin equivalente, que se tiene que construir para cada componente de frecuencia individual.

Si tenemos cualquier circuito el teorema establece que una rama lineal $Z_L(s)$ conectada entre los puntos, digamos a y b , responderá como si los puntos a y b estuvieran en serie con el generador $E_{ca}(s)$ y una impedancia $Z_{int}(s)$, como lo muestra la figura 85.

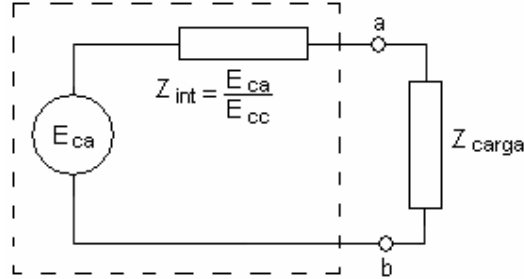


Figura 85. Circuito equivalente.

Las terminales de carga liberan una corriente $I_L(s)$ que está dada por:

$$[Z_{int}(s) + Z_L(s)]I_L(s) = E_{ca}(s)$$

Bajo la condición inicial en cada rama existen conexiones que deben ser consideradas en estado estacionario para $E_{ca}(s)$ e $I_{cc}(s)$, ya que de otra forma las variaciones en los transitorios hacen el problema muy difícil, por lo que consideramos a los elementos del circuito inicialmente relajados.

Aunque el teorema es válido para sistemas que no son planos nosotros vamos a considerar un sistema plano porque la matriz es simple. Vamos a ver una red plana con N circuitos con terminales a y b y con impedancia de carga $Z_L(s)$ en la gasa n -ésima. La rama de impedancias Z_{lm} la podemos combinar apropiadamente para formar la matriz $Z_{kj}(s)$.

$$Z_{ii}(s) = \sum_{jk} Z_{ik}(s);$$

$$Z_{lm}(s) = Z_{lm}(s) \quad (l \neq m)$$

La matriz para las corrientes de las gasas en términos de la gasa fem es:

$$\begin{pmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & \cdots & Z_{1N}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & \cdots & Z_{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(s) & Z_{N2}(s) & \cdots & [Z_{NN}(s) + Z_L(s)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \vdots \\ I_N(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_N(s) \end{pmatrix}.$$

Separamos $Z_{NN}(s)$ y $Z_L(s)$ para indicar que $Z_L(s)$ es variable y exterior a las terminales a y b . Empleamos un operador de proyección $\mathbf{N}$ para separar $Z_L(s)$ de la matriz interior $\mathbf{Z}_0(s)$, donde:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}(s) = [\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_L(s)\mathbf{N}] \cdot \mathbf{I}(s) = \mathbf{E}(s)$$

con:

$$\mathbf{Z}_0(s) = \begin{pmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & \cdots & Z_{1N}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & \cdots & Z_{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(s) & Z_{N2}(s) & \cdots & Z_{NN}(s) \end{pmatrix}.$$

Vamos a encontrar una expresión para $I_N(s)$ en términos de la gsa de fem $E_{jk}(s)$. Para esto calculamos el operador inverso $\mathbf{Z}$. Podemos calcular el operador en dos partes. Primero multiplicamos por la derecha por:

$$\mathbf{Y}_0(s) = \mathbf{Z}_0^{-1}(s)$$

y

$$[\mathbf{I} + \mathbf{Z}_L(s) \mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{N}] \cdot \mathbf{I}(s) = \mathbf{E}(s)$$

la matriz en la izquierda es simple:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{N}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & Z_L Y_{N1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & Z_L Y_{N2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & Z_L Y_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + Z_L Y_{NN} \end{pmatrix}$$

La inversa es:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{N})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{1 + Z_L Y_{NN}} \end{pmatrix}$$

Si resolvemos para el vector total podemos escribir:

$$\mathbf{I}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_L \mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{N})^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{E}(s)$$

Si expandimos para obtener la corriente de carga:

$$I_N(s) = \frac{\sum_{k=1}^N Y_{Nk} E_k(s)}{1 + Z_L Y_{NN}}.$$

El voltaje de circuito abierto es:

$$E_{ca}(s) = \lim_{Z_L \rightarrow 0} Z_L I_N = \frac{\sum_{k=1}^N Y_{Nk} E_k}{Y_{NN}}.$$

La corriente en corto circuito es:

$$I_{cc}(s) = \lim_{Z_L \rightarrow 0} I_N(s) = \sum_{k=1}^N Y_{Nk} E_k(s)$$

La expresión general para $I_N(s)$ se puede escribir como:

$$\left[\frac{1}{Y_{NN}} + Z_L(s) \right] I_N(s) = \frac{\sum_{k=1}^N Y_{Nk} E_k}{Y_{NN}},$$

o

$$[Z_{int}(s) + Z_L(s)] I_N(s) = E_{ca}(s)$$

por lo que:

$$Z_{int}(s) = \frac{E_{ca}}{I_{cc}} = \frac{1}{Y_{NN}(s)}$$

Lo que demuestra nuestro teorema.

Como ejemplo consideremos el circuito de la figura 86. El generador en este caso es un pulso cuadrado.

$$g_r(t) = E_0[U(t) - U(t - T)]$$

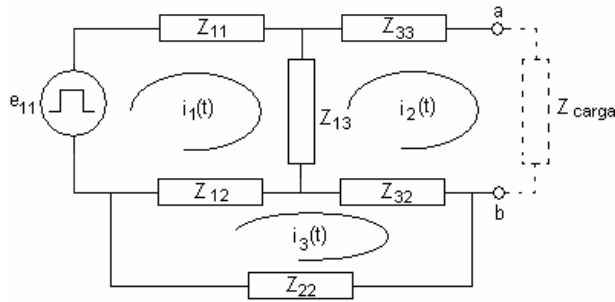


Figura 86. Circuito ejemplo.

En notación de transformada de Laplace tenemos:

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{pmatrix} Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} & -Z_{12} & -Z_{13} \\ -Z_{21} & Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} & -Z_{23} \\ -Z_{33} & -Z_{32} & Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} \end{pmatrix},$$

y

$$(\mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z}_L \mathbf{N}) \cdot \mathbf{I}(s) = \mathbf{E}(s)$$

o

$$I_N(s) = Y_L(s) V_L(s)$$

El voltaje de circuito abierto y la corriente de corto circuito son:

$$Y_{int}(s) = Y_{NN}(s) = \frac{I_{cc}(s)}{E_{ca}(s)}$$

y

$$I_{cc}(s) = \sum_{k=1}^N Y_{Nk} E_k(s)$$

La ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$I_N(s) + Y_{NN} Z_L I_N = I_{cc}$$

o

$$[Y_{int}(s) + Y_L(s)] V_N(s) = I_{cc}(s)$$

Lo anterior prueba el teorema y muestra que la amplitud de la corriente dada por un generador está dada por la corriente en corto circuito.

BIBLIOGRAFÍA

A. Bruce Carlson, (2002). *Teoría de Circuitos*, Ed. Thomson.

Alexander, Charles K, (2002) *Fundamentos de circuitos eléctricos*. Tercera Edición. México: McGraw-Hill.

B. Grob, (1986). *Direct and Alternating Current Circuits*. Ed. McGraw-Hill.

Boylestad, R. (2004). *Introducción al análisis de circuitos*. Décima Edición. México. Pearson Educación.

D.E. Johnson, (1996). *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*, Ed. Prentice Hall Hispanoamericana.

D.E. Scott, (1988). *Introducción al Análisis de Circuitos*, Ed. McGraw-Hill.

J.W. Nilsson, (1995). *Circuitos Eléctricos*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana.

R. Sanjurjo, E. Lázaro, P. de Miguel, (1997). *Teoría de Circuitos Eléctricos*, Ed. McGraw-Hill.

R.E. Thomas, (1991). *Circuitos y Señales*, Ed. Reverté.

R. Yorke, (1986). *Electric Circuit Theory*, Ed. Pergamon Press.

W.H. Hayt, (1993). *Análisis de Circuitos en Ingeniería*, Ed. McGraw-Hill.