



CCADET

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Informe Técnico

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA MATEMÁTICA DE SISTEMAS

PARTE I: FUNDAMENTOS

TEORÍA DE CONJUNTOS

Autores

**Alberto A. Herrera Becerra
V. Gerardo Calva Olmos
Alejandro Padrón Godínez
Rafael Prieto Meléndez**

Fecha

2013

Proyecto Interno

Financiamiento Interno

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA MATEMÁTICA DE SISTEMAS

PARTE I: FUNDAMENTOS

TEORÍA DE CONJUNTOS

Alberto A. Herrera Becerra

V. Gerardo Calva Olmos

Alejandro Padrón Godínez

Rafael Prieto Meléndez

Grupo Académico de Modelado y Simulación de Procesos

RESUMEN

Estas notas fueron compiladas y editadas por el Grupo Académico de Modelado y Simulación de Procesos con el objetivo principal de contar con documentos propios en los que se integren los fundamentos de la teoría matemática de sistemas generales. Para esto, estamos tomando como guía dos textos clásicos en la teoría de sistemas: "System Theory" editado por L. A. Zadeh y E. Polak, y "An Approach To General Systems Theory" de George J. Klir, ambos de 1969. Ambos textos nos señalan claramente que los antecedentes fundamentales de la teoría matemática de sistemas comprenden a la teoría de conjuntos y temas afines. Por esto último se deben entender la teoría de relaciones y funciones, y la teoría de las estructuras algebraicas. Es decir, los fundamentos de la teoría matemática de sistemas se basan en las matemáticas discretas. No es de extrañar pues que las matemáticas discretas se hayan constituido en las últimas décadas del siglo XX y muy especialmente en la primera década del siglo XXI como una de las herramientas matemáticas más importantes para la descripción de muy diversos fenómenos físicos y químicos. Por ejemplo, basta revisar las aplicaciones de la teoría de gráficas (o teoría de redes) al estudio de la estructura molecular y de los circuitos y redes de reacciones químicas para observar el impacto de las matemáticas discretas en la química contemporánea.

Con base a lo anterior, se consideró escribir tres reportes sucesivos y relacionados: uno sobre la teoría intuitiva de conjuntos, o enfoque de Cantor, otro sobre relaciones y funciones, y un tercero sobre estructuras algebraicas. En este primer reporte presentamos los resultados de las tareas de revisión, compilación, actualización y sistematización de los supuestos y principales resultados de la teoría intuitiva de conjuntos. Esta es la teoría propuesta e iniciada por Georg Cantor (1845-1918), un matemático de origen alemán, a finales del siglo XIX, razón por la cual también se le conoce como teoría de conjuntos de Cantor.

Cabe señalar que si bien en la actualidad no existen cursos sobre matemáticas discretas, en lo general, y teoría de conjuntos, en lo particular, en los planes de estudio de las carreras de Química y relacionadas, el trabajo de compilación de estas notas nos convenció de la necesidad de incluir conceptos de la teoría de conjuntos y temas afines en el bagaje de conocimientos matemáticos de los químicos contemporáneos, particulares aquellos químicos interesados en problemas de química física como la estructura molecular y la cinética química. Así pues, señalamos que estas notas tienen un segundo objetivo. Pretendemos que nuestro documento se pueda considerar como material de consulta para los antecedentes matemáticos de un futuro curso, muy posiblemente a nivel de posgrado, sobre modelado matemático de sistemas químicos; tal curso puede ser impartido a estudiantes de Química, Ingeniería Química, o de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación interesados en problemas de modelado y simulación de procesos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1.1. LA IDEA DE CONJUNTO	3
Nociones iniciales	3
El enfoque de Cantor	4
1.2. LAS BASES DE LA TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS	5
El principio intuitivo de extensión	6
El principio intuitivo de abstracción	8
La paradoja de Russell	10
1.3. INCLUSIÓN	11
Subconjuntos y el conjunto vacío	13
El conjunto universal	13
El conjunto potencia	14
Conjunto indexado	15
1.4. OPERACIONES PARA CONJUNTOS	16
Unión	16
Intersección	17
Complementos	18
Diagramas de Venn	19
1.5. EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS	23
COMENTARIOS FINALES	28
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	30

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA MATEMÁTICA DE SISTEMAS

PARTE I: FUNDAMENTOS

TEORÍA DE CONJUNTOS

INTRODUCCIÓN

La Teoría de Conjuntos como una disciplina matemática fue propuesta e iniciada por Georg Cantor (1845-1918), un matemático de origen alemán. Una descripción completa de su génesis y primeros desarrollos está fuera de lugar en estos momentos ya que para su comprensión se requiere de un conocimiento considerable de las matemáticas. En lugar de esto, y a manera de introducción al tema que nos interesa, proporcionaremos un amplio bosquejo de las ideas y conceptos que están involucrados en la teoría.

Las investigaciones que Cantor estaba realizando hacia finales del siglo XIX sobre series trigonométricas y de números reales lo llevaron a reconocer la necesidad de contar con medios para comparar el tamaño de conjuntos infinitos de números. Para hacer frente a este problema, Cantor introdujo la noción de potencia (o tamaño) de un conjunto definiendo que dos conjuntos tienen la *misma* potencia si los miembros de uno de los conjuntos se pueden aparear con aquellos del otro conjunto. Debido a que dos conjuntos finitos sólo pueden ser apareados si, y sólo si, tienen el mismo número de miembros, la potencia de un conjunto finito puede ser identificada con un número contante. De esta manera, la noción de potencia para conjuntos infinitos proporciona una generalización de los números contantes de todos los días. Cantor desarrolló la teoría, incluyendo una aritmética, de estos números generalizados (o transfinitos) y, al hacerlo, creó la teoría de los conjuntos. Sus logros en esta área son vistos como un ejemplo sobresaliente de creatividad matemática.

La insistencia de Cantor de tratar al infinito como un hecho —él veía que los conjuntos infinitos y los números transfinitos están a la par con los conjuntos finitos y los números contantes— fue una innovación en su época. Los prejuicios contra este punto de vista fueron los responsables del rechazo inicial al trabajo de Cantor por algunos matemáticos, aunque otros reaccionaron de manera favorable debido a que la teoría proporcionaba una prueba de la existencia de los números trascendentes. Casi simultáneamente se encontraron otras aplicaciones al análisis y a la geometría, con lo cual, la teoría de conjuntos de Cantor ganó aceptación, al grado que para 1890 ya era reconocida como una rama autónoma de las matemáticas. Sin embargo, al iniciar el nuevo siglo se produjo un cambio de actitud con el descubrimiento de que se podían derivar contradicciones dentro de la teoría. Curiosamente, estas contradicciones no fueron vistas como defectos serios, lo cual se sugiere por la manera en las que se les denominó: paradojas, queriendo decir con esto que se trataba de defectos que podrían ser resueltos una vez que se hubiese adquirido una comprensión más completa de la teoría. Los problemas planteados por la teoría de Cantor, junto con su innegable utilidad, gradualmente crearon un interés independiente en desarrollar una teoría general de conjuntos abstractos en la cual aparecieron las ideas de Cantor en una forma ampliamente extendida. Tal teoría general es la que será revisada en estas notas.

Uno podría cuestionarse la sensatez de elegir un punto de partida que se sabe que finalmente conducirá a un desastre. Sin embargo, nosotros confiamos que los temas importantes de estas notas son independientes de aquellas características del enfoque Cantoriano, o intuitivo, a la teoría de conjuntos. De hecho, cualquier teoría de conjuntos, si va a servir como una base para las matemáticas, incluirá los supuestos y resultados que aparecen en estas notas. Únicamente los métodos que empleamos para obtener esos resultados son intuitivos, y no se genera un daño irreparable en usarlos; en realidad son herramientas estándar de las matemáticas.

En estas notas se asume que hay familiaridad con los sistemas de números enteros, racionales, reales y complejos. Estos conocimientos elementales incrementarán las posibilidades de construir ejemplos que ilustren y permitan asimilar las definiciones, resultados y conceptos que se presentarán. Usare-

mos los símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ para denotar a los conjuntos de números enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente, y usaremos los símbolos $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{R}^+$ para denotar a los conjuntos de enteros, racionales y reales positivos, respectivamente.

Las notas comienzan con una discusión sobre la noción intuitiva de conjunto, los peligros que genera el uso indiscriminado y poco cuidado de tal noción y la forma más usada en la actualidad para evitar los peligros señalados. Se continúa con una discusión de los supuestos básicos de la teoría intuitiva, esencialmente la idea de no definir lo que es un conjunto, sino establecer las características que todo objeto matemático que acordemos reconocer como un conjunto debe satisfacer. Esta forma de razonamiento puede parecer extraña, pero es muy común en las matemáticas contemporáneas. Continuamos con una descripción de los dos métodos fundamentales para obtener nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados. El primero se basa en el concepto de inclusión o de subconjunto. El segundo se basa en la idea de introducir operaciones para conjuntos que explícitamente nos señalen que elementos de los conjuntos dados serán considerados en los nuevos conjuntos. La introducción de operaciones para conjuntos nos lleva de manera natural a considerar el desarrollo de un álgebra de conjuntos, que es el tema con el que cerramos estas notas. Al final se presenta una breve reseña histórica del desarrollo de la teoría intuitiva de conjuntos.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1. LA IDEA DE CONJUNTO

Nociones iniciales

Debido a que vamos a tomar a un *conjunto* como un concepto primitivo no tenemos porque definirlo. Sin embargo, es instructivo ilustrar las dificultades que surgirían en un intento por hacerlo.

Comencemos diciendo que Cantor estableció que un conjunto debe ser entendido o razonado como una pluralidad o colección concebida como una unidad. En otras palabras, la idea de conjunto involucra colocar mentalmente un cierto número de cosas (u objetos como técnicamente los vamos a denotar) juntas y asignar a las cosas así puestas juntas una identidad como un todo, es decir, una identidad separada de las de cada una de esas cosas. Las cosas van a ser llamadas *elementos* o *miembros* del conjunto obtenido al concebirlas juntas. De esta manera, *un conjunto consiste de, o comprende a, sus miembros pero por sí mismo es una entidad diferente de cualquiera de sus miembros*.

Por ejemplo, un equipo (esto es, un conjunto) de jugadores de fútbol no es igual a ninguno de los jugadores (incluso del capitán). Esta distinción debe ser observada escrupulosamente incluso cuando un conjunto consiste de un solo elemento; así un equipo de un solo jugador debe ser distinguido del único jugador que lo forma. De hecho, un equipo es una entidad que no tiene existencia material. Por supuesto, podemos asignar a un conjunto ciertos atributos en términos de los atributos correspondientes de sus miembros, ya sea por medio de una convención, o por implicaciones de sentido común. Así, podemos entender que la oración “un equipo de jugadores que va de Guadalajara a Monterrey” significa que cada jugador del equipo va de Guadalajara a Monterrey. Por otro lado, un conjunto tiene ciertos atributos que no pueden ser descritos en términos de ninguno de los atributos de los miembros individuales. Así tenemos que “una gran bandada de aves” no es lo mismo que “una bandada de aves grandes”. Similarmente, la longitud de un segmento de línea es una propiedad del segmento como un todo y no de los puntos individuales que lo constituyen.

Es obvio que los conjuntos de objetos materiales son tan viejos como el pensamiento humano. Pero a menudo tenemos que considerar conjuntos de objetos abstractos, tales como los números enteros, los números reales, las líneas, etc. De hecho, con frecuencia nos vamos a topar con conjuntos cuyos objetos son ellos mismos conjuntos de algunos otros objetos, por ejemplo, el conjunto de todos los equipos que participan en un torneo. Sin embargo, se debe tener cuidado al manejar tales conjuntos. Por ejemplo, el conjunto de conjuntos de leones no es un conjunto de leones de la misma manera que un conjunto de leones no es un león.

Si podemos formar conjuntos cuyos elementos son ellos mismos conjuntos, surge de manera natural el cuestionamiento de si podemos formar el conjunto de todos los conjuntos; esto es, literalmente de todos los conjuntos. Nótese que este conjunto sería extraordinario en el sentido de que sería miembro de sí mismo, a diferencia de un conjunto de leones o de un conjunto de números reales. Acordemos entonces denominar a un conjunto como *ordinario* si no es un miembro de sí mismo, y *extraordinario* en caso contrario. La mayoría de los conjuntos con los que nos vamos a topar son ordinarios, pero algunos (como por ejemplo el conjunto de conjuntos que acabamos de considerar) son extraordinarios. Hagamos ahora que S represente al conjunto de (literalmente) todos los conjuntos ordinarios. Una pregunta engañosamente inocente es si el conjunto S es ordinario. Estamos condenados a obtener una contradicción ya sea que la respuesta sea afirmativa o negativa. Tal situación es conocida como una *paradoja*¹. Esta paradoja en particular es debida a Bertrand Russell y, junto con muchas otras, ha revolucionado el enfoque a la teoría de conjuntos ya que claramente muestra que un conjunto no puede recibir una definición tan sim-

¹ El término paradoja tiene numerosos significados, pero nosotros, siguiendo a Martin Gardner, lo tomamos en un sentido amplio, capaz de contener todo resultado que por contrario a la intuición y al sentido común alcanza a provocar de inmediato un sentimiento de sorpresa. [Gardner, Martin, *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*. RBA Coleccionables S. A., España, 2007.]

plista como “una colección de objetos”. (Más adelante profundizaremos un poco más en el problema de las paradojas.) Así las cosas, o debemos poner algunas restricciones sobre esos objetos (por ejemplo, requiriendo que todos sean objetos materiales) o tenemos que admitir que la mayoría, pero no todas las colecciones de objetos son conjuntos. Resulta ser que la segunda alternativa es la menos mala.

El enfoque a la teoría de conjuntos en el que se hace un intento para definir un conjunto y postular un cierto número de axiomas acerca de los conjuntos con el objetivo de evitar paradojas es conocido como **teoría axiomática de conjuntos**. Aunque de considerable interés por derecho propio, en estas notas no vamos a seguir este enfoque porque nuestro interés en los conjuntos es como bloques de construcción a partir de los cuales vamos a construir todo lo que nos interesa. Resulta ser que la mayoría de los conceptos en matemáticas pueden ser expresados de manera sucinta y precisa en términos de conjuntos. Incluso los números enteros (y por ende los números reales e incluso los complejos), así como sus operaciones, adición, multiplicación, etc., pueden ser definidos en términos de conjuntos. Aunque en estas notas no iremos tan lejos, si presentaremos amplia evidencia que muestra la utilidad de los conjuntos en proporcionar expresiones precisas de lo que de otra manera sólo podríamos describir intuitivamente. No es una exageración decir que los conjuntos son los alfabetos de las matemáticas modernas.

Debido a que nuestro interés en los conjuntos es como un medio más que como un fin, vamos a seguir el así llamado *enfoque intuitivo* a la teoría de conjuntos. En este enfoque se evitan las paradojas confinándonos nosotros mismos a ciertos conjuntos. La elección más común es fijar algún conjunto, digamos U (el cual denominaremos más adelante como conjunto universal o simplemente el universo), y acordar que todos los conjuntos bajo consideración consistirán únicamente de elementos de U . La elección del universo no necesita ser especificada pero, por supuesto, debe ser suficientemente grande como para incluir todos los símbolos, expresiones y conceptos con los que vamos a tratar. La existencia de un conjunto universal con propiedades suficientemente agradables es un tema de la teoría axiomática de conjuntos.

El enfoque de Cantor

El enfoque de Cantor no considera una definición de conjunto, en su lugar describe lo qué uno puede hacer con las entidades de las que se habla. En este enfoque, llamémosle intuitivo o semiaxiomático, se asume que el interesado tiene una comprensión ordinaria, humana e intuitiva (aunque frecuentemente errónea desde un punto de vista matemático) de lo qué son los conjuntos; así, el propósito de la exposición es delinear algunas de las muchas cosas que uno puede hacer correctamente con los conjuntos. Dicho esto, comencemos pues la exposición.

Consideremos la concepción de Cantor de un conjunto, para posteriormente analizar brevemente sus partes constituyentes. Así, un **conjunto** S es *cualquier colección de objetos de nuestra intuición o de nuestro intelecto, definidos y distinguibles, para ser concebidos como un todo*. Tales objetos son denominados los **elementos** o **miembros** de S (usaremos ambos términos de manera indistinta).

Los siguientes ejemplos ilustran el concepto de un conjunto según Cantor.

Los números 1, 3, 7 y 10.
Todos los mexicanos vivos.
Un *par* de zapatos.
Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 2 = 0$.
Un *ramo* de flores.
Las vocales del alfabeto español: a, e, i, o y u.
Todas las ideas contenidas en un libro.
Un *rebaño* de ovejas.
Las ciudades capitales de los países europeos.
Los números 2, 4, 6, 8, ...
Los ríos de Norteamérica.
Una *colección* de rocas.
Los países de Oceanía.

El punto esencial del enfoque de Cantor es que una colección de objetos debe ser vista como una sola entidad (... *para ser concebida como un todo*). El transferir la atención de los objetos individua-

les a las colecciones de objetos individuales como entidades no es un proceso mental extraño para los humanos como lo pone en evidencia la presencia en nuestro lenguaje de palabras como bandada, manada, muchedumbre, nidada, ramo, ramillete, rebaño, etc.; de hecho algunas de ellas se usaron en los ejemplos previos. Cabe señalar que algunas de las palabras anteriores son usadas en un sentido más restringido que la palabra conjunto; otras son sinónimas. En estas notas usaremos las palabras “clase”, “agregado” y “colección” como sinónimos de la palabra “conjunto”, particularmente para evitar usar la misma palabrada repetidamente en una oración. Por ejemplo, un conjunto de conjuntos normalmente lo vamos a referir como una *colección* de conjuntos.

Ahora bien, con respecto a los objetos que pueden ser incluidos en un conjunto, la frase “*objetos de nuestra intuición o de nuestro intelecto*” proporciona una libertad considerable. En primer lugar, proporciona plena libertad en cuanto a la naturaleza de los objetos que conforman a un conjunto. Así, manzanas verdes, granos de arena o números primos son admisibles como constituyentes de conjuntos. En las aplicaciones netamente matemáticas, sin embargo, es razonable escoger como miembros entidades matemáticas como puntos, líneas, números y objetos así por el estilo. En segundo lugar, permite la consideración de conjuntos cuyos miembros no pueden, por una razón u otra, ser exhibidos explícitamente. Respecto a esto último, uno puede estar tentado a pensar inicialmente en los conjuntos infinitos, para los cuales no es posible, incluso teóricamente, coleccionar sus miembros en una totalidad ensamblada. Para ilustrar esta línea de razonamiento, consideremos al conjunto de todos los números primos o al conjunto de todos los puntos del plano euclidiano que tienen coordenadas racionales en un sistema de coordenadas dado. Sin embargo, también se puede pensar en conjuntos finitos que desplieguen el mismo grado de intangibilidad de cualquier conjunto infinito. Proporcionemos una ilustración de esta aseveración.

Comencemos con la premisa de que una máquina de escribir con 10 000 caracteres (entre los que se incluyen todas las letras mayúsculas y minúsculas de los alfabetos existentes, en varios tamaños y tipos, los números, los símbolos de puntuación y especiales y un carácter en blanco para el espaciado) sería adecuada para imprimir textos en cualquier lenguaje. (El tamaño *exacto* de la colección de caracteres no es el punto central; se puede sustituir el número 10 000 por cualquier entero mayor que 1.) Acordemos ahora que por un “libro” vamos a entender un ensamblado impreso consistente de no más de 1 000 000 de caracteres, incluyendo los espacios en blanco. Esto es, un libro puede contener desde 0 hasta 1 000 000 de caracteres impresos. Consideremos ahora el conjunto de todos los libros. Debido a que hay 10 000 posibles caracteres para usar en cada una de las 1 000 000 de posiciones en un libro, el número de libros es $10\,000^{1\,000\,000}$. Este número sin duda es muy grande, pero es finito. Muchos de estos libros constituyen textos sin sentido alguno, pero también se encuentran todos los libros técnicos y universitarios, todos los periódicos o revistas, todos los panfletos, todos los catálogos, etc. Tal magnitud elude la comprensión de una manera similar a como ocurre con un conjunto infinito.

Las palabras clave restantes en el concepto de conjunto de Cantor son objeto “*distinguible*” y “*definido*”. El significado intentado para la primera, tal como lo usó Cantor, es como sigue: Con respecto a cualquier par de objetos calificados para aparecer como elementos de un conjunto en particular, uno debe ser capaz de determinar si son diferentes o son lo mismo. El atributo “definido” es interpretado con el significado de que si dados un conjunto y un objeto, es posible determinar si tal objeto es, o no es, un miembro del conjunto. La implicación es que un conjunto está completamente determinado por sus miembros.

1.2. LAS BASES DE LA TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

Así pues, un conjunto está formado por objetos llamados miembros o elementos. La suposición de que al enfrentar un objeto específico y un conjunto específico podemos determinar si el objeto es, o no es, un miembro de ese conjunto significa lo siguiente.

Si el primer espacio en blanco en la oración “___ es un miembro de ___” se llena con el nombre de un objeto, y el segundo espacio en blanco con el nombre de un conjunto, la oración resultante puede ser calificada como verdadera o falsa. De esta manera, la noción de membresía es una relación entre objetos y conjuntos. Esta relación la vamos a representar empleando el símbolo $\in$ y escribiendo $x \in A$ si el objeto x es un miembro del conjunto A . Por el contrario, si el objeto x no es un miembro de A , entonces

escribimos $x \notin A$. Todavía más, escribiremos $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ como una abreviación de “ $x_1 \in A$ y $x_2 \in A$ y ... y $x_n \in A$ ”. Decimos que un conjunto está *bien definido* si es posible determinar, por medio de ciertas reglas o acuerdos, si cualquier objeto dado es un miembro del conjunto.

Lo que acabamos de hacer es presentar el principal concepto de la teoría de conjuntos: la *pertenencia* o *membresía*. Cabe señalar aquí que en una teoría verdaderamente axiomática, tal concepto es el primitivo principal y, por tal razón, no se le define.

Vamos a dejar por el momento la presentación de la teoría de Cantor para hacer algunos comentarios acerca de los alfabetos que vamos a usar para discutir la teoría de los conjuntos. Nótese que hemos usado letras mayúsculas (en itálicas, con o sin subíndices) para designar a conjuntos, mientras que usamos letras minúsculas (también en itálicas, con o sin subíndices) para designar a sus elementos. Ésta será una práctica común. Así, usualmente emplearemos letras minúsculas del alfabeto español, en itálicas, para denotar elementos y, por el momento, emplearemos letras mayúsculas, también en itálicas, para denotar a los conjuntos que los contienen. Más adelante emplearemos letras minúsculas del alfabeto griego para referirnos a un cierto tipo de conjunto. Si los miembros de un conjunto son conjuntos ellos mismos y si este hecho es de relevancia para la discusión, se usarán letras mayúsculas manuscritas para señalar al conjunto contenedor, el cual será denominado una *colección* o incluso una *familia* de conjuntos. Por ejemplo, podríamos tener la ocasión de discutir acerca de la colección $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos finitos A de enteros x . Como regla de dedo, el nivel de un conjunto dentro de una jerarquía de conjuntos bajo consideración está sugerido por el tamaño y estilo de la letra empleada para denotarlo.

Con base en lo anterior, aquel conjunto (unívocamente determinado) cuyos miembros son los objetos $x_1, x_2, \dots, x_n$ se escribirá $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Esto es, los nombres o símbolos de sus elementos se encierran entre llaves y separan por medio de comas; esto es, se proporciona una lista de los elementos. En particular, el conjunto $\{x\}$, denominado *conjunto unitario*, es el conjunto cuyo único miembro es x . Adicionalmente, si al primer conjunto mencionado lo quisiéramos llamar S entonces escribiríamos

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

En esta expresión el signo de igualdad significa que S es el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, con lo cual $x_1 \in S, x_2 \in S, \dots, x_n \in S$.

El principio intuitivo de extensión

Consideremos ahora lo siguiente. Hablando en términos generales, concebimos a un conjunto como una colección de objetos que comparten una propiedad común. Sin embargo está restricción no es necesaria, por lo que la colección formada por un caballo, la letra A, una chamarra y el señor Pérez es un ejemplo aceptable de conjunto; el que una colección como la anterior sea, o no sea, interesante o importante no es de relevancia para que sea considerada como conjunto. Todavía más, ya hemos mencionado que ciertos elementos de un conjunto pueden ser a su vez conjuntos. Por decir, consideremos el conjunto siguiente:

$$S = \{a, \{1, 2\}, p, \{q\}\}.$$

En este caso es importante distinguir entre el conjunto $\{q\}$, que es un elemento de S , y el objeto q , que es un elemento de $\{q\}$, pero no es elemento de S .

En términos de la relación de membresía, la suposición de Cantor de que un conjunto está determinado por sus miembros puede ser postulada de la manera siguiente.

El principio intuitivo de extensión. *Dos conjuntos son iguales si, y sólo si, tienen los mismos miembros.*

Este principio nos señala que la propiedad más básica de la pertenencia es su relación con la igualdad: un conjunto está determinado por su extensión.

Es valioso comprender que el principio de extensión es algo más que una propiedad necesariamente lógica de la igualdad, es una proposición no trivial acerca de la pertenencia. Para comprender este punto podemos considerar una situación parcialmente análoga en la que el análogo del principio de extensión no se satisface. Así, supongamos que consideramos a los seres humanos en lugar de los conjuntos, y que si x y A son seres humanos, escribimos $x \in A$ cada vez que x sea un ancestro de A . (Los an-

cestros de un ser humano son sus padres, los padres de sus padres, los padres de estos últimos, y así por el estilo.) El análogo del principio de extensión diría que si dos seres humanos son iguales, entonces ellos tienen los mismos ancestros (está es la parte “sólo si” y es verdadera), y también que si dos seres humanos tienen los mismos ancestros, entonces son iguales (esta es la parte “si” y resulta ser falsa).

La igualdad de los conjuntos A y B se denotará por $A = B$, mientras que la desigualdad de tales conjuntos se denotará por $A \neq B$. En estas expresiones se debe notar que el signo de igualdad tiene un significado diferente al empleado para nombrar a un conjunto. Típicamente, el sentido del signo de igualdad quedará claro por el contexto de la discusión en que se presente.

Entre las propiedades básicas de la relación de igualdad se encuentran:

$$A = A.$$

$$A = B \text{ implica que } B = A.$$

$$A = B, B = C \text{ implican que } A = C.$$

Estas propiedades se cumplen para todos los conjuntos A, B, C . Todas estas proposiciones se pueden demostrar directamente a partir del principio de extensión.

En general, una prueba de la igualdad de dos conjuntos específicos A y B se lleva a cabo en dos partes: en una parte se demuestra que si $x \in A$, entonces $x \in B$; en la otra parte se demuestra que si $x \in B$, entonces $x \in A$. Algunos ejemplos de esta prueba se proporcionan a continuación.

1. El conjunto que comprende a los tres primeros enteros positivos pares es $\{2, 4, 6\}$. Ahora bien, debido a que $\{2, 4, 6\}$ y $\{2, 6, 4\}$ tienen los mismos miembros, resultan ser conjuntos iguales. Todavía más, $\{2, 4, 6\} = \{2, 4, 4, 6\}$ por la misma razón.
2. Como ya hemos mencionado, los miembros de un conjunto pueden ser ellos mismos conjuntos. Por decir, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$ es un conjunto con tres miembros, a saber $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ y $\{5, 6\}$. Los conjuntos $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ y $\{1, 2, 3\}$ no son iguales debido a que el primero tiene como miembros a $\{1, 2\}$ y $\{2, 3\}$, mientras que el segundo tiene a 1, 2 y 3 como miembros.
3. Los conjuntos $\{\{1, 2\}\}$ y $\{1, 2\}$ no son iguales debido a que el primero, un conjunto unitario, tiene a $\{1, 2\}$ como su único miembro, mientras que el segundo tiene a 1 y 2 como miembros.

Este último ejemplo constituye una ilustración más de la afirmación general que señala que un objeto y el conjunto cuyo único miembro es ese objeto son distintos el uno del otro.

4. Vamos a probar que el conjunto A de todos los enteros positivos pares es igual al conjunto B de enteros positivos que pueden ser expresados como la suma de dos enteros positivos impares. Primero asumamos que $x \in A$ y deduzcamos que $x \in B$. Si $x \in A$, entonces $x = 2m$; en consecuencia, $x = (2m - 1) + 1$, lo cual significa que $x \in B$. A continuación, asumamos que $x \in B$ y deduzcamos que $x \in A$. Si $x \in B$, entonces $x = (2p - 1) + (2q - 1)$ y, en consecuencia, $x = 2(p + q - 1)$, lo cual implica que $x \in A$. Así, hemos probado que A y B tienen los mismos miembros.

Continuemos ahora con nuestra presentación de la teoría de Cantor. Si bien la notación de llaves es práctica para definir explícitamente conjuntos formados por unos cuantos elementos, resulta ser muy incómoda para definir conjuntos que tienen un número grande, finito, de elementos, y resulta inútil para conjuntos infinitos (esto es, conjuntos que tienen una cantidad ilimitada de elementos). ¿Cómo podemos describir a los conjuntos con una cantidad grande de elementos? Al intentar responder a este interrogante uno tendería intuitivamente a diferenciar los conjuntos finitos de los infinitos sobre la base de que un conjunto finito puede ser concebido como una totalidad ensamblada, mientras que uno infinito no puede ser concebido así. Sin embargo, un conjunto finito grande (por decir, el conjunto de libros que se describió en la Sección 1) puede ser tan difícil de comprender como uno infinito. Con base en esta clase de ejemplos podemos concluir que el problema de descripción eficiente de un conjunto finito grande y el problema equivalente para un conjunto infinito son, para todo propósito práctico, uno y el mismo problema.

Una solución para definir explícitamente conjuntos muy grandes o infinitos es ampliar la notación de llaves como sigue:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{2, 4, 6, \dots, 18\}. \\ S_2 &= \{1, 3, 5, \dots\}. \\ S_3 &= \{a, a^2, a^3, \dots\}. \end{aligned}$$

Esto es, no se listan todos los elementos del conjunto en cuestión, sólo se listan unos cuantos de ellos de manera que los elementos faltantes puedan ser determinados a partir de los elementos presentes y del contexto.

El principio intuitivo de abstracción

Otra solución comúnmente aceptada para especificar conjuntos, concebida por el propio Cantor, está basada en el concepto de una “fórmula en x ”. Consideremos la siguiente descripción intuitiva de la propuesta de Cantor. Acordemos que una *proposición* es una oración declarativa para la que tenemos la capacidad de clasificarla como verdadera o como falsa. Así, entendemos que una fórmula en x es una sucesión (o secuencia) finita de palabras y el símbolo x tal que cuando cada aparición de x es reemplazada por el mismo nombre de un objeto de la naturaleza apropiada se obtiene una proposición. Por decir, cada una de las secuencias siguientes es una fórmula en x :

$$\begin{aligned} 5 \text{ divide a } x; & & x^2 + x + 1 > x; \\ x \text{ ama a Juan;} & & x^2 = 2; \\ x < x. & & \end{aligned}$$

Por el contrario, ninguna de las secuencias siguientes es una fórmula en x :

$$\begin{aligned} \text{Para todo } x, x^2 - 4 &= (x - 2)(x + 4). \\ \text{Existe una } x \text{ tal que } x^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Estas secuencias de palabras y símbolos son simplemente oraciones.

De manera alternativa, podemos entender una fórmula en x desde el punto de vista del análisis gramatical. Así, una fórmula en x se puede entender como una oración que valora algo acerca de x . En este sentido, claramente cada oración de la primera lista tiene la cualidad mencionada, mientras que ninguna de las dos oraciones de la segunda lista la tiene. Otro enfoque más al concepto de fórmula en x es recurriendo a la noción de función tal como se usa en las matemáticas elementales. Así, una fórmula en x puede ser descrita como una función de una variable tal que, en un dominio apropiado, los valores de la función son proposiciones.

Con fines de notación, usaremos letras mayúsculas del alfabeto español seguidas del símbolo (x) para denotar fórmulas en x . De esta forma, si en un contexto dado, $P(x)$ denota a una fórmula particular, entonces $P(a)$ corresponde a la misma fórmula con a sustituyendo a x .

El objetivo de describir conjuntos por medio de fórmulas se alcanza aceptando el principio siguiente.

El principio intuitivo de abstracción. *Una fórmula $P(x)$ define a un conjunto A con base en la convención de que los miembros de A son exactamente aquellos objetos a tales que $P(a)$ es una proposición verdadera.*

Debido a que los conjuntos que contienen a los mismos miembros son iguales, una fórmula dada determina exactamente un conjunto, el cual, en matemáticas, usualmente es denotado por $\{x \mid P(x)\}$, lo cual se lee “el conjunto de todos los (objetos) x tales que $P(x)$ ”. Así, $a \in \{x \mid P(x)\}$ si, y sólo si, $P(a)$ es una proposición verdadera.

Con base en lo recién expuesto, podemos señalar que la decisión de si un objeto dado a es, o no es, un miembro de $\{x \mid P(x)\}$ es equivalente a la de determinar si a posee, o no, una cierta propiedad o cualidad. Debido a esto, cuando una fórmula en x , digamos $P(x)$, es aplicada a la construcción de un conjunto, por lo común se le denomina una *propiedad* de x y, de hecho, es la *propiedad definitoria* de

$\{x \mid P(x)\}$. Como una consecuencia de esto, nuestro principio intuitivo de abstracción se puede describir por la afirmación “toda propiedad determina un conjunto”.

Muchas veces admitiremos la posibilidad de que aparezcan símbolos diferentes de x en una fórmula en x . En efecto, si $P(x)$ es una fórmula en x tal que el símbolo y no aparece en ella, entonces $P(x)$ y $P(y)$, como propiedades, son indistinguibles y, en consecuencia, se tiene que $\{x \mid P(x)\} = \{y \mid P(y)\}$. Esto no necesariamente ocurre si sucede que y en efecto aparece en $P(x)$. Por ejemplo,

$$\{x \mid x \text{ es divisible por } a\} = \{y \mid y \text{ es divisible por } a\}.$$

Pero

$$\{x \mid x \text{ es divisible por } y\} \neq \{y \mid y \text{ es divisible por } y\}.$$

De nueva cuenta, si $F(x)$ y $G(x)$ son dos propiedades tales que $F(x)$ se satisface para x cuando, y sólo cuando, $G(x)$ se satisface para x , entonces $\{x \mid F(x)\} = \{x \mid G(x)\}$, aplicando el principio de extensión. Por ejemplo,

$$\{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ y } x \in A\}, \text{ y}$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } x > 5\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } (x + 1)^2 \leq 29\}.$$

Consideremos algunos ejemplos adicionales.

1. Los siguientes son ejemplos de conjuntos definidos por medio de propiedades que resultan fácilmente reconocibles:
 - (a) $\{x \mid x \text{ es un entero mayor que } y \text{ que no tiene divisores menores o iguales a } x^{1/2}\}.$
 - (b) $\{x \mid x \text{ es un entero positivo menor que } 9\}.$
 - (c) $\{x \mid x \text{ es una línea de pendiente } 3 \text{ en un plano coordenado}\}.$
 - (d) $\{x \mid x \text{ es una función continua sobre el intervalo cerrado de } 0 \text{ a } 1\}.$
2. El conjunto $\{x \mid x = x_1 \text{ o } x = x_2 \text{ o } \dots \text{ o } x = x_n\}$ es igual al conjunto que previamente habíamos acordado denotar por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
3. En algunos casos, nuestro lenguaje natural nos hace posible enunciar una definición más breve de un conjunto finito por medio de una propiedad de la que se podría obtener por enumeración de los elementos. Por decir, es más corto definir un conjunto particular de, digamos, 1 000 personas usando la propiedad “ x es un profesor universitario” que enumerando los nombres de los miembros.
4. La introducción de conjuntos infinitos definiendo propiedades es un procedimiento familiar en la geometría analítica. Esto se aprecia fácilmente recordando la definición de los lugares geométricos como, por decir, las secciones cónicas. Ilustremos el argumento: el círculo de radio 2 centrado en el origen es el conjunto de todos los (puntos) x tales que x es un punto en el plano que se encuentra a una distancia de dos unidades del origen.
5. Si A es un conjunto, entonces $x \in A$ es una fórmula en x y, como tal, puede ser usada como una propiedad definitoria de un conjunto. Así, debido a que $y \in \{x \mid x \in A\}$ si, y sólo si, $y \in A$, tenemos que

$$A = \{x \mid x \in A\}.$$

Esto resulta del principio de extensión.

Consideremos ahora algunas cuestiones adicionales de notación. Primero, se usan varias modificaciones a la notación de conjuntos basada en las llaves. Por ejemplo, se acostumbra escribir $\{x \in A \mid P(x)\}$ en lugar de $\{x \mid x \in A \text{ y } P(x)\}$ para denotar al conjunto de todos los objetos que son tanto miembros de A como poseedores de la propiedad $P(x)$. Una descripción alternativa de este conjunto es “todos los miembros de A que tienen la propiedad $P(x)$ ”, siendo esta descripción la que enfatiza la nueva notación. Consideremos algunos ejemplos adicionales: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ denota al conjunto de todos los números reales entre 0 y 1, incluyendo los extremos; por su parte, $\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}$ denota al conjunto de todos los números racionales positivos cuyo cuadrado es menor que 2.

Consideremos una segunda modificación. Si $P(x)$ es una propiedad y f es una función, entonces la expresión $\{f(x)|P(x)\}$ será usada para denotar al conjunto de todas las y para las cuales existe una x tal que x tiene la propiedad $P(x)$ y se cumple que $y = f(x)$. Por ejemplo, en lugar de escribir

$$\{y|\text{existe una } x \text{ tal que } x \text{ es un entero y se satisface que } y = 2x\},$$

escribiremos

$$\{2x|x \in \mathbb{Z}\}.$$

Similarmente, $\{x^2|x \in \mathbb{Z}\}$ denota al conjunto de cuadrados de enteros. Las notaciones anteriores tienen extensiones naturales; en general, la intuición es una guía adecuada para interpretar ejemplos. Por decir, en un plano coordenado en el que los puntos son identificados con los miembros del $\mathbb{R}^2$ de todos los pares ordenados $\langle x, y \rangle$ de números reales x, y , resulta razonable interpretar al conjunto $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 | y = 2x\}$ como la línea de pendiente 2 que pasa por el origen.

Vamos a hacer algunos comentarios adicionales. Los principios de extensión y de abstracción de conjuntos (junto con el principio de elección, el cual no se presentará en estas Notas) constituyen la base operativa de la teoría de conjuntos de Cantor. En este contexto es interesante señalar que aunque hicimos un intento de describir lo qué es un conjunto antes de introducir los primeros dos principios, ninguno de estos principios, y de hecho ni el tercero, incluyen una definición de la palabra conjunto. En lugar de ello, cada uno de los principios es meramente una suposición *acerca* de conjuntos. El concepto básico usado para enunciar estos principios es *membresía*. En consecuencia, la relación de membresía para conjuntos asume el papel de concepto principal de la teoría de conjuntos en lugar de la noción de conjunto mismo.

La paradoja de Russell

Ya hemos mencionado que se pueden derivar contradicciones dentro de la teoría intuitiva de conjuntos. La fuente de problemas es el uso *no restringido* del principio de abstracción. De las contradicciones conocidas, la más simple de describir es aquella descubierta por Bertrand Russell en 1901. Discutamos un poco alrededor de esta paradoja.

A principios del siglo XX, la teoría abstracta de conjuntos había ganado tal aceptación que un gran número de matemáticos estaban trabajando duro para demostrar que todas las matemáticas podrían construirse sobre las bases de la teoría de conjuntos. En medio de esta actividad, el matemático y filósofo inglés Bertrand Russell descubrió una paradoja (realmente una verdadera contradicción) que parecía hacer temblar la esencia misma de las bases. La paradoja supone la definición de conjunto de Cantor como, recordemos, “cualquier colección en un todo de objetos definidos y separados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento”.

Paradoja de Russell: La mayoría de los conjuntos no son elementos de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros no es un entero y el conjunto de todos los caballos no es un caballo. Sin embargo, podemos imaginar la posibilidad de que un conjunto sea elemento de sí mismo. Por decir, el conjunto de todas las ideas abstractas puede ser considerado una idea abstracta. Si se nos permite utilizar cualquier descripción de una propiedad como la propiedad de definición de un conjunto, podemos hacer que S sea el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos:

$$S = \{A | A \text{ es un conjunto y } A \notin A\}.$$

¿Es S un elemento de sí mismo?

La respuesta no es ni sí ni no. Porque si $S \in S$, entonces S satisface la propiedad de definición para S y por tanto $S \notin S$. Pero si $S \notin S$, entonces S es un conjunto tal que $S \notin S$ y así S satisface la propiedad de definición para S , lo que implica que $S \in S$. Por tanto, ni es $S \in S$ ni $S \notin S$, lo que es una contradicción.

Para ayudar a explicar su descubrimiento a laicos, Russell ideó un rompecabezas, el rompecabezas del barbero, cuya solución presenta la misma lógica que su paradoja.

El rompecabezas del barbero: En una determinada ciudad hay un barbero hombre que afeita a todos esos hombres, y sólo a esos hombres, que no se afeitan a sí mismos. ¿El barbero se afeita a sí mismo?

Nuevamente la respuesta es ni sí ni no. Si el barbero se afeita a sí mismo, es miembro de la clase de hombres que se afeitan a sí mismos. Pero ningún miembro de esta clase es afeitado por el barbero y así el barbero *no* se afeita a sí mismo. Por otra parte, si el barbero no se afeita a sí mismo, pertenece a la clase de hombres que no se afeitan a sí mismos. Pero el barbero afeita a cada uno en esta clase, por lo que el barbero se afeita a sí mismo.

Pero ¿cómo puede la respuesta ser ni sí ni no? Sin duda cualquier barbero se afeita o no a sí mismo. Podría intentar pensar en circunstancias que harían que la paradoja desapareciera. Por ejemplo, tal vez ocurre que el barbero no tenga nada de barba y nunca se afeita. Pero una condición del rompecabezas es que el barbero es un hombre que afeita a *todos* aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos. Si él no se afeita, entonces no se afeita a sí mismo, en cuyo caso él se afeitó con el barbero y la contradicción sigue estando presente por siempre. Similarmente están condenados al fracaso otros intentos de resolver la paradoja considerando detalles de la situación del barbero.

Así que vamos a aceptar el hecho de que la paradoja no tiene ninguna solución fácil y vamos a ver a dónde conduce ese pensamiento. Dado que el barbero ni se afeita a sí mismo ni no se afeita a sí mismo, la frase “el barbero se afeita a sí mismo” no es ni verdadera ni falsa. Pero la frase surgió de manera natural a partir de una descripción de la situación. Si realmente existió la situación, entonces la frase tendría que ser verdadera o falsa. Por tanto, nos vemos obligados a concluir que la situación descrita en el rompecabezas simplemente no puede existir en el mundo como lo conocemos.

De forma similar, la conclusión que se deduce de la misma paradoja de Russell es que el objeto S no es un conjunto. Ya que si realmente se tratara de un conjunto, en el sentido de satisfacer las propiedades generales de conjuntos que nosotros hemos estado suponiendo, entonces tampoco sería o no un elemento de sí mismo.

En los años siguientes al descubrimiento de Russell se encontraron varias formas de definir los conceptos básicos de la teoría de conjuntos para evitar su contradicción. Nosotros vamos a emplear la estrategia que se describe en la siguiente sección.

3. INCLUSIÓN

Introducimos ahora dos relaciones adicionales, esta vez entre conjuntos. Así, si A y B son conjuntos, decimos entonces que A está **incluido** en B , lo cual se escribe $A \subseteq B$ en símbolos, si, y sólo si, cada miembro de A es un miembro de B . Siendo esto el caso, también decimos que A es un **subconjunto** de B . Todavía más, también acordamos decir que B **incluye** a A , que en símbolos escribimos así $B \supseteq A$, lo cual empleamos como un sinónimo de A está incluido en B . De esta manera, $A \subseteq B$ y $B \supseteq A$ significan, cada una, que para todo objeto x , si $x \in A$, entonces $x \in B$.

De manera similar, se dice que el conjunto A está **incluido propiamente** en B , lo cual se escribe $A \subset B$, (o, alternativamente, A es un **subconjunto propio** de B , o B **incluye propiamente** a A) si, y sólo si, $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Por ejemplo, el conjunto de enteros pares está incluido propiamente en el conjunto $\mathbb{Z}$ de enteros, y el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales incluye propiamente a $\mathbb{Z}$.

Entre las propiedades básicas de la relación de inclusión tenemos:

- $A \subseteq A$;
- $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implican que $A \subseteq C$;
- $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ implican que $A = B$.

Las dos primeras propiedades nos señalan que la relación de inclusión es reflexiva y transitiva, respectivamente. Estos conceptos serán descritos un poco más adelante.

Comencemos por probar las dos primeras propiedades. La primera de ellas es obvia: Ciertamente para todo objeto x , si $x \in A$, entonces $x \in A$. Para probar la segunda propiedad procedemos como sigue. Sea x un elemento de A , esto es, sea $x \in A$. Debido a que A es un subconjunto de B , x también pertenece a B , esto es $x \in B$. Adicionalmente señalamos que $B \subseteq C$, lo cual indica que todos los elementos de B también lo son de C , lo cual incluye al elemento x . De esta manera, tenemos que si $x \in A$, entonces $x \in C$, es decir, A es un subconjunto de C , $A \subseteq C$.

La tercera propiedad también es inmediata. En efecto, dado que $A \subseteq B$, tenemos que todo elemento de A también lo es de B . Pero también tenemos que $B \subseteq A$, lo cual indica que todo elemento de B también lo es de A . Todo esto quiere decir que A y B tienen exactamente los mismos elementos, o sea que son conjuntos iguales: $A = B$.

La última de las propiedades listadas es la formulación en términos de la relación de inclusión de los dos pasos en una prueba de igualdad de conjuntos. Esto es, para probar que $A = B$, primero se prueba que $A \subseteq B$ y, posteriormente, se prueba que $B \subseteq A$, o viceversa.

Por lo que respecta a la relación de inclusión propia, sólo el análogo de la segunda propiedad antes listada (esto es, la transitividad) es válida. Esto es, $A \subset B$ y $B \subset C$ implican que $A \subset C$. No es difícil probar esto. En efecto, debido a que A es un subconjunto propio de B , tenemos que todo elemento de A también lo es de B ; si $x \in A$, entonces $x \in B$. Ciertamente también existe algún elemento $y \in B$ que no pertenece a A , esto es $y \notin A$. Ahora bien, como B también es un subconjunto propio de C , tenemos que todos los elementos de B , incluyendo obviamente a x e y , también lo son de C . De esta manera, todos los elementos de A también lo son de C y éste contiene elementos, por ejemplo y , que no lo son de A . Es decir, C incluye propiamente a A .

Existen otras propiedades que relacionan la inclusión con la inclusión propia. Así, tenemos que:

Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.

No es difícil verificar estos dos resultados.

Con base en la relación de inclusión decimos además que dos conjuntos A y B son **comparables** si ocurre que

$$A \subseteq B \text{ o } B \subseteq A.$$

Esto es, dos conjuntos son comparables si uno de ellos es subconjunto del otro. Adicionalmente, se dice que dos conjuntos A y B son **no comparables** si ocurre que

$$A \not\subseteq B \text{ y } B \not\subseteq A.$$

Es decir, si A no es comparable a B , entonces existe un elemento en A que no se encuentra en B y, a su vez, existe un elemento en B que no se encuentra en A .

Vamos a ilustrar estas últimas ideas con un par de ejemplos concretos. Primero, si consideramos los conjuntos $A = \{a, b\}$ y $B = \{a, b, c\}$, entonces tenemos que A es comparable a B ya que A es subconjunto de B . Si ahora consideramos a los conjuntos $R = \{a, b\}$ y $S = \{b, c, d\}$, entonces ocurre que R y S no son comparables ya que $R \not\subseteq S$, puesto que $a \in R$ y $a \notin S$, y además $S \not\subseteq R$ ya que $c \in S$ y $c \notin R$.

Al empezar el estudio de la teoría de los conjuntos resulta común confundir las relaciones de membresía y de inclusión, por lo que tomaremos toda oportunidad que se presente para señalar las distinciones. Así, en este momento conviene hacer notar que las análogas de membresía de las dos primeras propiedades de la inclusión listadas antes son falsas. Por ejemplo, si X es el conjunto de los números primos, entonces $X \notin X$. De manera similar, aunque $1 \in \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \in \{\mathbb{Z}\}$, no sucede que $1 \in \{\mathbb{Z}\}$ debido a que $\mathbb{Z}$ es el único miembro de $\{\mathbb{Z}\}$.

Vamos a ilustrar la diferencia entre las relaciones de membresía y de inclusión con un ejemplo concreto simple. Así, sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{1, 3\}, D = \{3\}.$$

Para ellos se verifican las aseveraciones siguientes:

$$B \subseteq A, C \subseteq A \text{ y } D \subseteq A.$$

Por otro lado, tenemos que $1 \in \{1, 2, 3\}$ pero 1 no está incluido en $\{1, 2, 3\}$, a pesar de que $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. Esto es, sólo un conjunto puede estar incluido en otro conjunto, o puede ser un subconjunto de otro conjunto, mientras que sólo los elementos pertenecen a un conjunto. Ahora bien, ciertamente un conjunto puede tener a otros conjuntos como elementos. Por ejemplo, si $A = \{\{1\}, 2, 3\}$, entonces se verifica que

$$\{1\} \in A, \{\{1\}, 2\} \subseteq A, \{\{1\}\} \subseteq A, 2 \in A, \{2, 3\} \subseteq A.$$

Subconjuntos y el conjunto vacío

Enfoquemos ahora nuestra atención a los subconjuntos de un conjunto, esto es, los conjuntos incluidos en un conjunto. Este es nuestro primer ejemplo de un procedimiento importante en la teoría de los conjuntos, a saber, la formación de nuevos conjuntos a partir de un conjunto existente. El principio de abstracción puede ser usado para definir subconjuntos de un conjunto dado. En efecto, si $P(x)$ es una fórmula de x y A es un conjunto, entonces la fórmula $x \in A$ y $P(x)$ determina aquel subconjunto de A que ya habíamos acordado escribir como $\{x \in A | P(x)\}$.

Introduzcamos ahora un conjunto muy especial. Si A es un conjunto y escogemos $P(x)$ como $x \neq x$, el resultado es $\{x \in A | x \neq x\}$, y este conjunto claramente no tiene elementos. El principio de extensión implica que sólo puede existir un conjunto sin elementos. Denominemos a este conjunto el **conjunto vacío** y representémoslo con la letra noruega $\emptyset$ (la cual se lee *void*).

El conjunto vacío, por construcción, es un subconjunto de todo conjunto. Para convencernos de la validez de esta afirmación, debemos probar que si A es un conjunto, entonces cada miembro de $\emptyset$ es un miembro de A . Ahora bien, debido a que $\emptyset$ no tiene miembros, la condición se satisface automáticamente. Aunque este razonamiento es correcto, puede no ser satisfactorio. Una prueba alternativa que podría ser más reconfortante es una indirecta. En efecto, asumamos que es falso que $\emptyset \subseteq A$. Esto sólo puede ocurrir si existe algún miembro de $\emptyset$ que no sea un miembro de A . Pero esto es imposible ya que $\emptyset$ no tiene miembros. En consecuencia, la premisa $\emptyset \subseteq A$ no es falsa, con lo cual debemos aceptar que $\emptyset \subseteq A$.

Ya señalamos que el conjunto vacío es único. Vamos a probar esta aseveración. Supongamos que E_1 y E_2 son dos conjuntos sin elementos. Pero el resultado anterior nos señala que $E_1 \subseteq E_2$ puesto que E_1 no tiene elementos. Pero E_2 tampoco tiene elementos. Por tanto, $E_1 = E_2 = \emptyset$ por el principio de extensión.

De lo anterior se deduce que el conjunto de los elefantes rosa es igual al conjunto de todos los números reales cuyo cuadrado es -1 ¡porque cada conjunto no tiene elementos! Dado que sólo hay un conjunto sin elementos, se justifica llamarlo por un nombre especial y denotarlo con un símbolo especial.

Cada conjunto $A \neq \emptyset$ tiene por lo menos dos subconjuntos distintos: A y $\emptyset$. Todavía más, cada miembro de A determina un subconjunto de A ; en efecto, si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$. De manera similar, si a_1 y a_2 son dos miembros cualesquiera de A , entonces $\{a_1, a_2\} \subseteq A$; si a_1, a_2 y $a_3 \in A$, entonces $\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq A$; y así por el estilo.

El conjunto universal

En muchas de las aplicaciones de la teoría de conjuntos es muy probable que todos los conjuntos que estén bajo discusión resulten ser subconjuntos de un conjunto fijo U . Tal conjunto es denominado el **conjunto universal** (o **conjunto universo**) para esa discusión. Como ejemplos podemos mencionar los siguientes: en la teoría elemental de números tenemos que $\mathbb{Z}$ constituye el conjunto universal; por su parte, en la geometría analítica plana tenemos que el conjunto de todos los pares ordenados de números reales es el que actúa como conjunto universal.

Lo anterior también se puede ver en términos de la estrategia que vamos a emplear para evitar la aparición de paradojas. Esto es, cada vez que se defina un conjunto usando un predicado como una propiedad de definición, también debe ponerse como condición que el conjunto es un subconjunto de un conjunto conocido. Este método no nos permite hablar del “conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos”. Sólo se puede hablar del “conjunto de todos los conjuntos que son subconjuntos de algún conjunto conocido y que no son elementos de sí mismos”. Cuando se hace esta restricción, la paradoja de Russell deja de ser contradictoria. Esto es lo que sucede:

Sea U un conjunto universal y suponga que todos los conjuntos bajo análisis son subconjuntos de U . Sea ahora el conjunto siguiente:

$$S = \{A | A \subseteq U \text{ y } A \notin A\}.$$

En la paradoja de Russell se demostraron las dos implicaciones siguientes:

$$S \in S \text{ implica que } S \notin S \text{ y } S \notin S \text{ implica que } S \in S.$$

De esto se dedujo la conclusión contradictoria

$$\text{ni } S \in S \text{ ni } S \notin S.$$

En la situación en la que todos los conjuntos bajo análisis sean subconjuntos de U , la implicación " $S \in S$ implica que $S \notin S$ " se demuestra casi del mismo modo como con la paradoja de Russell: Suponga que $S \in S$. Entonces, por definición de S , $S \subseteq U$ y $S \notin S$. En particular, se tiene que $S \notin S$. Por otra parte, de la suposición que $S \notin S$ sólo podemos deducir que el enunciado " $S \subseteq U$ y $S \notin S$ " es falso. Por una ley de la lógica, esto significa que " $S \not\subseteq U$ o $S \in S$ ". Ya que $S \in S$ contradiría la suposición de que $S \notin S$, lo eliminamos y concluimos que $S \not\subseteq U$. En otras palabras, la única conclusión que podemos sacar es que la aparente "definición" de S es defectuosa, es decir, que S no es un conjunto en U .

Hagamos un comentario final sobre las paradojas. El descubrimiento de Russell tuvo un profundo impacto en las matemáticas porque a pesar de su contradicción pudo desaparecer por definiciones más cuidadosas, su existencia causó que la gente se preguntase si había otras contradicciones. En 1931, Kurt Gödel demostró que no es posible demostrar, de una manera matemáticamente rigurosa, que la matemática está libre de contradicciones. Se podría pensar que el resultado de Gödel habría causado que los matemáticos renunciaran desesperadamente a su trabajo, pero eso no ha sucedido. Por el contrario, ha habido más actividad matemática a partir de 1931 que en cualquier otro periodo de la historia.

El conjunto potencia

Existen otras ocasiones en que uno desea hablar de todos los subconjuntos de un conjunto (universal o no), no sólo de subconjuntos individuales. Para ello introducimos al conjunto (en realidad colección) de todos los subconjuntos de un conjunto A , que denominaremos el **conjunto potencia** de A y lo representaremos por $\mathcal{P}(A)$. Así, $\mathcal{P}(A)$ es una abreviación de $\{B \mid B \subseteq A\}$. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Como otro ejemplo de la diferencia entre las relaciones de membresía y de inclusión, notemos que si $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{P}(A)$, y si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq A$ y $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

El nombre "conjunto potencia de A " para el conjunto de todos los subconjuntos de A tiene su origen en el caso en que A es finito; en tal situación $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n miembros si A tiene n miembros. Para ilustrar esta aseveración consideremos algunos conjuntos finitos y sus conjuntos potencia. Así, el conjunto potencia del conjunto vacío $\emptyset$ únicamente tiene al elemento $\emptyset$, esto es,

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

Nótese que a pesar de que el conjunto vacío no tiene elementos, su conjunto potencia tiene exactamente un elemento. Si consideramos ahora un conjunto unitario $S_1 = \{a\}$, su conjunto potencia es

$$\mathcal{P}(S_1) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, S_1\}.$$

Esto es, si el conjunto tiene un elemento, su conjunto potencia tiene dos elementos. Para un conjunto binario $S_2 = \{a, b\}$, esto es, un conjunto con exactamente dos elementos, su conjunto potencia es

$$\mathcal{P}(S_2) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, S_2\}.$$

Tenemos ahora un conjunto potencia de cuatro elementos. Procediendo análogamente, para un conjunto ternario, esto es, con exactamente tres elementos, $S_3 = \{a, b, c\}$, tenemos que su conjunto potencia es

$$\mathcal{P}(S_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, S_3\}.$$

Esto es, para un conjunto con tres elementos, su conjunto potencia tiene ocho elementos.

Introducimos ahora una notación con la cual podemos designar cualquier subconjunto de un conjunto finito de manera única. Antes de describir tal notación, sería útil *asumir* que los elementos del conjunto dado están ordenados de alguna manera, con lo cual un elemento en particular puede ser llamado

el primer elemento, el siguiente elemento el segundo y así por el estilo. Obsérvese que un ordenamiento como el recién descrito no está implicado en la noción intuitiva de conjunto que estamos usando. Sin embargo, con el propósito de representar a los conjuntos para ser fácilmente contabilizados es necesario, en general, prescribir algún orden arbitrario, esto es, a cada elemento se le asigna una etiqueta que describe la posición del elemento con respecto a otros elementos del conjunto. Por ejemplo, asumamos que en el conjunto S_2 dado antes, el elemento a será el primer elemento, mientras que el elemento b será el segundo. Ahora bien, en cualquier subconjunto de un conjunto dado, algunos elementos del conjunto están presentes, mientras que los restantes están ausentes. Vamos a usar esta idea junto con el ordenamiento prescrito sobre los elementos de un conjunto dado para designar a los subconjuntos. Por ejemplo, los subconjuntos de S_2 pueden ser designados como sigue:

$$\emptyset = B_{00}, \{a\} = B_{10}, \{b\} = B_{01} \text{ y } \{a, b\} = B_{11}.$$

En esta notación, los subíndices de B contienen un 1 o un 0 en la primera posición a partir de la izquierda dependiendo de si el primer elemento, en este caso a , está presente o no lo está. Similarmente, el subíndice tiene un 1 o un 0 en la segunda posición a partir del extremo izquierdo dependiendo de si b , el segundo elemento, está, o no está, presente. Como sólo hay dos elementos en S_2 necesitamos únicamente los subíndices 00, 01, 10 y 11. A la inversa, dado cualquiera de estos $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ subíndices, podemos determinar los elementos del subconjunto correspondiente. Por ejemplo, $B_{01} = \{b\}$. Nótese que es únicamente el subíndice el que determina los elementos del subconjunto; el uso de la letra B para nombrar a los subconjuntos es incidental.

Consideremos ahora al conjunto $J = \{i | i \text{ es un entero binario, } 00 < i < 11\}$, o $J = \{00, 01, 10, 11\}$. Con este conjunto podemos establecer que

$$\mathcal{P}(S_2) = \{B_i | i \in J\}.$$

Similarmente, para el conjunto S_3 podemos establecer que

$$\mathcal{P}(S_3) = \{B_i | i \in J\},$$

donde, en este caso, $J = \{i | i \text{ es un entero binario, } 000 < i < 111\}$.

La notación anterior puede ser generalizada para designar a los subconjuntos de un conjunto que contiene n elementos diferentes. Obviamente, se tienen 2^n de tales subconjuntos. Los subíndices que designan a los subconjuntos se toman de las representaciones binarias de los enteros decimales que van de 0 a $2^n - 1$. Se debe tomar la precaución de insertar tantos ceros como sea necesario a la izquierda del entero binario como para tener exactamente n dígitos en total. Uno puede usar enteros decimales de 0 a $2^n - 1$ y convertirlos sólo en el momento en el que se van a determinar los elementos del subconjunto. Como una ilustración de esto, sea $S_6 = \{a_1, \dots, a_6\}$. Obviamente hay 2^6 subconjuntos de S_6 , los cuales designaremos $B_0, B_1, \dots, B_{2^6-1}$. Los siguientes ejemplos ilustran el método para determinar los elementos de cualquier subconjunto:

$$B_7 = B_{111} = B_{000111} = \{a_4, a_5, a_6\}.$$

$$B_{12} = B_{1100} = B_{001100} = \{a_3, a_4\}.$$

El método de emplear subíndices para designar a los elementos de una colección de subconjuntos se usa frecuentemente. Aquí lo hemos usado para designar a los miembros de un conjunto potencia.

Conjunto indexado

En este momento de la presentación resulta adecuado introducir el concepto de un conjunto indexado. Así, sea el conjunto $J = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ y sea la familia de conjuntos $A = \{A_{s_1}, A_{s_2}, A_{s_3}, \dots\}$ tal que a cualquier $s_i \in J$ le corresponde un conjunto $A_{s_i} \in A$ y también tal que $A_{s_i} = A_{s_j}$ si, y sólo si, $s_i = s_j$, entonces a A se le denomina un *conjunto indexado*, a J un *conjunto índice* y a cualquier subíndice, por decir s_i en A , se le denomina un *índice*. Una familia de conjuntos también puede ser denotada como sigue:

$$A = \{A_i\}_{i \in J}.$$

En particular, si $J = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$, entonces $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$. Similarmente, si $J = \mathbb{Z}_n^+ = \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n^+}$. Con esta notación, el conjunto potencia de un conjunto S que contiene n elementos se puede escribir $\mathcal{P}(S) = \{B_i\}_{i \in J}$, con $J = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$.

4. OPERACIONES PARA CONJUNTOS

Continuamos con nuestra descripción de métodos para generar nuevos conjuntos a partir de conjuntos existentes definiendo varias estrategias para componer un conjunto a partir de un par de otros conjuntos. Tales estrategias se denominan operaciones para conjuntos debido a que son similares, o paralelas, en ciertos aspectos, a las operaciones familiares de adición y multiplicación de números enteros.

Unión

La primera operación es la llamada **unión** (*suma*, *reunión*) de los conjuntos A y B , representada en símbolos con $A \cup B$, lo cual se lee “ A unión B ”, y que corresponde al conjunto de todos los elementos que son miembros o de A o de B . Es decir, la unión de A y B corresponde al conjunto

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Aquí es intencional el sentido inclusivo de la palabra “o”. Así, por definición $x \in A \cup B$ si, y sólo si, x es un miembro de por lo menos uno de los conjuntos A o B . Por ejemplo,

$$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

A partir de la definición de unión de conjuntos se pueden demostrar las proposiciones siguientes:

$$A \cup B = B \cup A.$$

$$A \cup \emptyset = A.$$

$$A \cup A = A.$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

La primera propiedad se denomina conmutativa, mientras que la última se denomina asociativa. Con base en esta última propiedad podemos escribir $A \cup B \cup C$ en lugar de $(A \cup B) \cup C$ o de $A \cup (B \cup C)$.

A manera de ilustración, vamos a probar una de las propiedades anteriores de la unión. Consideremos en particular a la tercera, esto es $A \cup A = A$. Así, para cualquier x , si $x \in A \cup A$, se tiene que o $x \in A$ o $x \in A$. Es decir, debe ocurrir que $x \in A$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces claramente $x \in A$ o $x \in A$, lo cual quiere decir que $x \in A \cup A$.

Nótese también que a partir de la definición de la operación de unión se puede establecer que tanto el conjunto A como el conjunto B son subconjuntos de $A \cup B$. Esta aseveración se expresa simbólicamente como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$. Adicionalmente se puede establecer que si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

La operación de unión se puede extender a familias indexadas de conjuntos como sigue. Para cualquier conjunto indexado $A = \{A_i\}_{i \in J}$ se tiene que

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{x | x \in A_i \text{ para por lo menos un } i \in J\}.$$

En el caso particular de que $J = \mathbb{Z}_n^+ = \{1, 2, \dots, n\}$, podemos escribir

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Por ejemplo, si tenemos que $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$ y $A_3 = \{1, 2, 3, 6\}$, encontramos que

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Intersección

La segunda operación, denominada **intersección** (*producto*, *encuentro*) de los conjuntos A y B , representada en símbolos con $A \cap B$, lo cual se lee “ A intersección B ”, genera el conjunto de todos los objetos que son miembros tanto de A como de B . Esto es, la intersección corresponde al conjunto

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

De esta manera, por definición $x \in A \cap B$ si, y sólo si, $x \in A$ y $x \in B$. Por ejemplo,

$$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4\} = \{1, 3\}.$$

A partir de la definición de intersección se puede demostrar que

$$A \cap B = B \cap A.$$

$$A \cap A = A.$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

De manera similar a cómo se hizo con la operación de unión, la primera y última propiedades corresponden a la propiedad conmutativa y a la propiedad asociativa, respectivamente.

Nuevamente como ilustración vamos a probar dos de las propiedades anteriores de la intersección: la primera y la última. Para cualquier x , si ocurre que $x \in A \cap B$, entonces debe ocurrir que $x \in A$ y $x \in B$. Pero de esto último se desprende que $x \in B$ y $x \in A$, con lo cual tenemos que $x \in B \cap A$. Por otro lado, si $x \in (A \cap B) \cap C$, se cumple que $x \in A \cap B$ y $x \in C$. Pero la primera de las dos pertenencias últimas señala que $x \in A$ y que $x \in B$. Dadas las tres pertenencias, podemos señalar que, en lo particular, $x \in B$ y $x \in C$, esto es, que $x \in B \cap C$ y con ello que $x \in A \cap (B \cap C)$.

La propiedad asociativa para la intersección nos permite escribir $A \cap B \cap C$ en lugar de $(A \cap B) \cap C$ o de $A \cap (B \cap C)$ sin que ello cause confusión alguna. Nótese la similitud con lo que ocurrió con la operación de unión.

Con base en la operación de intersección se pueden introducir otros conceptos útiles para describir conjuntos. Así, dos conjuntos A y B se dice que son **inconexos**, o **ajenos**, si, y sólo si, $A \cap B = \emptyset$; por el contrario, se dice que se **interceptan**, o se **traslapan**, si, y sólo si, $A \cap B \neq \emptyset$. Ilustremos estos conceptos con un par de ejemplos sencillos. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 7, 8\}$ y $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Entonces estos conjuntos se traslapan ya que el 7 pertenece a ambos conjuntos: $7 \in A, B$. Basta un solo elemento en común para que los conjuntos se traslapen. Por otro lado, los conjuntos de números enteros positivos y negativos son inconexos, ya que no existe un número entero que sea al mismo tiempo positivo y negativo.

Los conceptos anteriores se pueden generalizar a una colección de conjuntos de la manera siguiente. Para un conjunto indexado $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}_n^+}$, donde $\mathbb{Z}_n^+ = \{1, 2, \dots, n\}$ podemos escribir

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}_n^+} A_i.$$

En general, para cualquier conjunto índice J tenemos que

$$\bigcap_{i \in J} A_i = \{x | x \in A_i \text{ para todo } i \in J\}.$$

A partir de lo anterior decimos que una colección de conjuntos es una **colección inconexa** si, y sólo si, cada par distinto de sus conjuntos miembros son inconexos. Esto es, si A es un conjunto indexa-

do $A = \{A_i\}_{i \in J}$, entonces A es una colección o familia inconexa si, y sólo si, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j \in J, i \neq j$. Por ejemplo, si $A_1 = \{\{1,2\}, \{3\}\}$, $A_2 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ y $A_3 = \{\{1,2,3\}\}$, entonces la colección $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ es inconexa ya que $A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset$ y $A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Con base en lo anterior decimos que una **partición** de un conjunto X es una colección inconexa $\mathcal{A}$ de subconjuntos diferentes, no vacíos, de X tales que cada miembro de X es miembro de algún miembro de $\mathcal{A}$, y por tanto de exactamente un miembro de $\mathcal{A}$. Por ejemplo, $\{\{1,2\}, \{3\}, \{4,5\}\}$ es una partición de $\{1,2,3,4,5\}$ ya que, por decir, el elemento 2 es miembro de un solo elemento de la colección.

Las operaciones de unión e intersección satisfacen muchas propiedades, algunas de las cuales serán discutidas en la siguiente sección. Por el momento, señalemos que no es difícil probar que para todo par de conjuntos A y B se satisfacen las inclusiones siguientes:

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B.$$

Similarmenete se tiene que

$$\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B.$$

Analicemos la prueba de las proposiciones anteriores. La primera inclusión es inmediata ya que $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto. La segunda inclusión también es inmediata ya que si $x \in A \cap B$, tenemos que $x \in A$ y $x \in B$ y, en particular, $x \in A$ (considerando la primera proposición). Para la última inclusión tenemos que si $x \in A$, entonces es cierto que $x \in A$ o $x \in B$. La segunda proposición se prueba por un razonamiento similar.

Complementos

Un procedimiento adicional para generar conjuntos a partir de conjuntos existentes se basa en la acción de complementar. Expliquémonos. El **complemento relativo** de A en X es el conjunto de aquellos miembros de X que no son miembros de A . Tal operación se denota $X - A$ y se lee “ X menos A ”; de esta manera, tenemos que

$$X - A = \{x \in X | x \notin A\}.$$

El complemento relativo de A en X también se denomina la **diferencia** de X y A .

Por ejemplo, para los conjuntos $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$ tenemos que

$$S - T = \{a, c\}; T - S = \{f, g\}.$$

Nótese que para esta operación de conjuntos ocurrió que $S - T \neq T - S$, esto es, la operación no es conmutativa. De hecho este es un resultado que se cumple en lo general: sólo para ciertos conjuntos particulares la operación de complemento relativo será conmutativa. Como otro ejemplo de la operación consideremos ahora a los conjuntos $\mathbb{R}$, los números reales, y $\mathbb{Q}$, los números racionales. Entonces $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ consiste de los números irracionales, pero $\mathbb{Q} - \mathbb{R} = \emptyset$.

Discutamos brevemente algunos resultados interesantes de la operación de diferencia de conjuntos. Primero, el conjunto A contiene a $A - B$ como subconjunto, esto es, $(A - B) \subseteq A$. Este resultado se obtiene directamente de la definición de la diferencia: Supongamos que x es un elemento cualquiera de $A - B$, esto quiere decir que $x \in A$ y $x \notin B$, por lo que en particular $x \in A$. Es decir, hemos mostrado que un elemento de la diferencia, $x \in (A - B)$ implica que es un elemento de A , $x \in A$, por lo que $(A - B) \subseteq A$. Otro resultado nos señala que $(A - B) \cap B = \emptyset$. Este resultado se puede probar como sigue: Por definición de la intersección se tiene que $x \in (A - B)$ y que $x \in B$. Pero por la definición de la diferencia se tiene que $x \in A$ y $x \notin B$. Sin embargo, no existe elemento que satisfaga $x \in B$ y $x \notin B$, por lo que $(A - B) \cap B = \emptyset$. Otro resultado más indica que los conjuntos $A - B$, $A \cap B$ y $B - A$ son mutuamente inconexos, es decir, son inconexos por pares. Estos resultados se prueban siguiendo una línea de razonamiento similar a la de la última prueba.

Un resultado interesante que relaciona las operaciones de complemento relativo e intersección es el siguiente:

$$A - (A \cap B) = A - B.$$

En efecto, si $x \in (A - (A \cap B))$, entonces tenemos que $x \in A$ y $x \notin (A \cap B)$. Pero esto último implica que $x \notin A$ o $x \notin B$. De esta manera podemos establecer que $x \in A$ y $x \notin A$ o que $x \in A$ y $x \notin B$. La primera conjunción no se satisface, por lo que necesariamente debe ocurrir la segunda conjunción. Pero esto quiere decir que $x \in (A - B)$, como se quería mostrar.

Con base en el complemento relativo de los conjuntos A y B podemos definir la **diferencia simétrica** de A y B , representada en símbolos por $A + B$, lo cual se lee “ A más B ”, como sigue:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$

Nótese que los elementos de $A + B$ son los elementos que están en A o los elementos que están en B pero que no se encuentran en ambos conjuntos. Esta operación es conmutativa, esto es $A + B = B + A$, y es asociativa, esto es $(A + B) + C = A + (B + C)$. Todavía más, tenemos que $A + A = \emptyset$ y $A + \emptyset = A$. No es difícil probar estas aseveraciones, aunque la última es un tanto enredada. Por ello, a continuación vamos a mostrar cómo se realiza.

Para cualquier x , si ocurre que $x \in A + \emptyset$, entonces debe ocurrir que, por un lado, ($x \in A$ y $x \notin \emptyset$) o que ($x \in \emptyset$ y $x \notin A$). La primera proposición de lo anterior se reduce simplemente a $x \in A$; en cambio, la segunda proposición es falsa, no hay elemento x que pertenezca al conjunto vacío y al mismo tiempo no pertenezca al conjunto A . Así pues, todo se reduce a tener que $x \in A$, que es lo que se quería probar.

Para cualquier conjunto A , el complemento relativo de A con respecto al conjunto universal U , esto es $U - A$, se denomina el **complemento absoluto** de A , o simplemente el **complemento** de A , y se le representa por $\bar{A}$, o por $\sim A$. En símbolos, tenemos que $U - A = \bar{A} = \sim A$. Las siguientes igualdades se obtienen de la definición del complemento.

$$\overline{(\bar{A})} = \bar{\bar{A}} = A.$$

$$\bar{\emptyset} = U; \bar{U} = \emptyset.$$

$$A \cup \bar{A} = U; A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Con las operaciones definidas hasta este punto de la presentación, vamos a probar (parcialmente) tres resultados muy interesantes e importantes.

$$A - B = A \cap \bar{B}.$$

Para cualquier x , si ocurre que $x \in A - B$, tiene que ocurrir que $x \in A$ y que $x \notin B$. Pero esto último es equivalente a decir que $x \in A$ y que $x \in \bar{B}$, es decir que $x \in A \cap \bar{B}$, que es lo que se quería probar.

$$A \subseteq B \text{ es equivalente a } \bar{B} \subseteq \bar{A}.$$

Si ocurre que $A \subseteq B$, entonces estamos afirmando que existe un elemento x tal que si $x \in A$, debe ocurrir que $x \in B$. Pero esto es equivalente a afirmar que existe algún elemento x tal que si la proposición $x \in B$ sea falsa, entonces la proposición $x \in A$ también debe ser falsa. Y esto último es equivalente a decir que si existe un elemento x tal que $x \notin B$, entonces debe ocurrir que $x \notin A$. Es decir, hemos encontrado que $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.

$$\text{Para cualquiera dos conjuntos } A \text{ y } B \text{ se tiene que } A - (A \cap B) = A - B.$$

Para cualquier x , si ocurre que $x \in A - (A \cap B)$, entonces ocurre que $x \in A$ y que $x \notin A \cap B$. Esto es equivalente a señalar que $x \in A$ y que ($x \notin A$ o $x \notin B$). Lo anterior es equivalente a tener que ($x \in A$ y $x \notin A$) o que ($x \in A$ y $x \notin B$). En esto último, la primera proposición es falsa, por lo que debe ocurrir que $x \in A$ y $x \notin B$, es decir, se tiene que $x \in A - B$, que es lo que se quería probar.

Diagramas de Venn

Un artilugio gráfico conocido como *diagrama de Venn* se usa para apoyar visualmente el razonamiento sobre relaciones complejas que puedan existir entre los subconjuntos de un conjunto universal U . Un **diagrama de Venn** es una representación esquemática de conjuntos por conjuntos de puntos: el conjunto universal U es representado por los puntos dentro de un rectángulo (o alguna otra figura), y un subcon-

junto A de U es representado por el interior de un círculo o alguna otra curva cerrada simple dentro del rectángulo. De esta manera, el complemento de A (relativo a U) es la parte del rectángulo fuera de la región que representa a A , tal como se muestra en la Figura 1a. Si los subconjuntos A y B de U están representados de esta manera, entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ están representados por las regiones sombreadas que se muestran en las Figura 1b y 1c respectivamente. Los conjuntos inconexos están representados por regiones que no se traslapan, mientras que la inclusión se ilustra dibujando una región contenida completamente dentro de otra, como se muestra en las Figura 2a y 2b respectivamente.

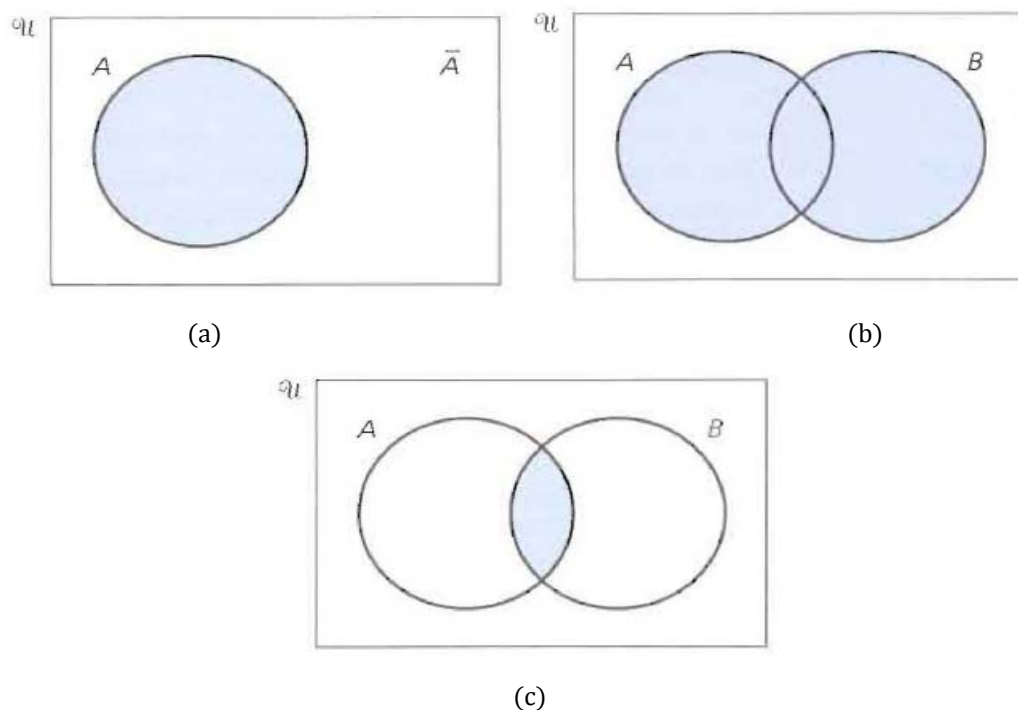


Figura 1. Diagramas de Venn.

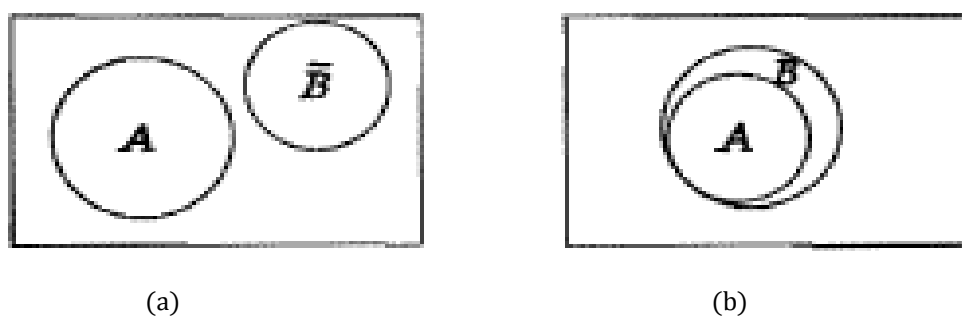


Figura 2. Diagramas de Venn.

Dibujos como los anteriores son los ingredientes para construir el diagrama de Venn para una expresión compuesta por varios conjuntos y las operaciones de unión, intersección, complemento e inclusión. Las principales aplicaciones de los diagramas de Venn son a problemas de simplificación de una expresión compleja dada y para simplificar conjuntos dados de condiciones entre varios conjuntos de un universo de discurso. Algunos ejemplos de estos tipos se presentarán a continuación. Antes de ello conviene señalar de una vez que en muchos casos los diagramas de Venn son inadecuados, pero pueden ser de utilidad si se les conecta con el enfoque algebraico que se introducirá en la siguiente sección.

Consideremos algunos ejemplos del uso de los diagramas de Venn.

1. Suponga que A y B son conjuntos dados tales que $A - B = B - A = \emptyset$. ¿Se puede expresar la relación de A con B de manera más simple? Debido a que $A - B = \emptyset$ significa que $A \cap \bar{B} = \emptyset$, las regiones que representan a A y a $\bar{B}$ no se traslapan (véase la Figura 2a). Claramente, $\bar{\bar{B}} = B$, por lo que concluimos que $A \subseteq B$ (véase la Figura 2b). A la inversa, si $A \subseteq B$ es claro que $A - B = \emptyset$. Concluimos que $A - B = \emptyset$ si, y sólo si, $A \subseteq B$. Intercambiando A y B obtenemos que $B - A = \emptyset$ si, y sólo si, $B \subseteq A$. De esta manera, las relaciones dadas entre A y B se satisfacen si, y sólo si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, esto es, si $A = B$.

2. Vamos a investigar ahora si es posible encontrar tres subconjuntos A , B y C de U tales que $C \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, A \cap C = \emptyset, (A \cap B) - C = \emptyset$.

La segunda condición implica que A y B se interceptan y en consecuencia ninguno de los dos es vacío. Del Ejemplo anterior establecemos que la última condición establece que $A \cap B \subseteq C$, lo cual nos permite establecer que la primera condición es superflua. El diagrama de Venn asociado indica que los conjuntos A y C se interceptan; esto es, la validez de las segunda y cuarta condiciones contradice a la tercera. Por lo tanto, no existen tres conjuntos que satisfagan las cuatro condiciones simultáneamente.

3. Suponga que se dan los subconjuntos F , G y L de U tales que $F \subseteq G, G \cap L \subseteq F, L \cap F = \emptyset$.

¿Es posible simplificar este conjunto de condiciones? El diagrama de Venn de la Figura 3 representa únicamente a las condiciones primera y tercera. La segunda condición obliga a que L y G sean inconexos, esto es $L \cap G = \emptyset$. Por otro lado, si $F \subseteq G$ y $L \cap G = \emptyset$, entonces todas las condiciones se satisfacen. De esta manera, $F \subseteq G$ y $L \cap G = \emptyset$ constituyen una simplificación de las condiciones dadas.

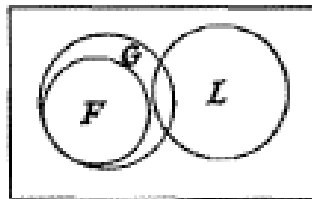


Figura 3. Diagrama de Venn.

Es conveniente enfatizar que las relaciones entre subconjuntos dibujadas en un diagrama de Venn sólo son relaciones sugeridas; los diagramas de Venn no proporcionan pruebas de que tales relaciones son verdaderas en lo general para todos los subconjuntos de U . Vamos a mostrar este punto por medio de un ejemplo particular.

Consideremos los diagramas de Venn que se muestran en la Figura 4. A partir de los dos primeros diagramas que ahí se muestran parece que se puede establecer la igualdad siguiente:

$$[1] \quad A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B).$$

Sin embargo, a partir del tercer diagrama de la figura, parece suceder que

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Esta igualdad no es verdadera en lo general, aunque resulta ser verdadera para los dos conjuntos inconexos A y B empleados en los diagramas.

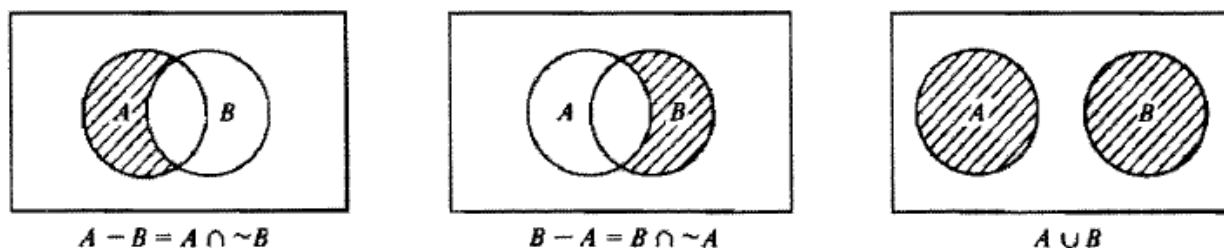


Figura 4. Diagramas de Venn.

Un esbozo de la prueba formal de la Igualdad [1] se puede establecer como sigue. Para cualquier x , si $x \in A \cup B$, entonces se tiene que $x \in A$ o $x \in B$. Por otro lado, tenemos el razonamiento siguiente:

Supongamos que $x \in (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$. Esto es equivalente a decir que $x \in (A \cap \bar{B})$ o que $x \in (\bar{A} \cap B)$ o que $x \in (A \cap B)$. Pero esto último es equivalente a decir que $(x \in A \text{ y } x \in \bar{B})$ o que $(x \in \bar{A} \text{ y } x \in B)$ o que $(x \in A \text{ y } x \in B)$. Y esto último es equivalente a decir que $(x \in A)$ y $(x \in B \text{ o } x \in \bar{B})$ o que $(x \in \bar{A} \text{ y } x \in B)$. Esto último es equivalente a $x \in A$ o que $(x \in \bar{A} \text{ y } x \in B)$. Y, finalmente, esto último equivale a $x \in A$ o $x \in B$, esto es $x \in A \cup B$.

Vamos a realizar un comentario final acerca de los diagramas de Venn. En la sección anterior mostramos ejemplos de diagramas de Venn con dos, tres y hasta cuatro conjuntos. Anthony W. F. Edwards, un matemático de Cambridge, ha desarrollado un procedimiento para construir (inductivamente) diagramas de Venn para cualquier número finito de conjuntos. Vamos a proporcionar un esbozo de este procedimiento. (Es interesante señalar que el procedimiento que vamos a describir a continuación parece ser el procedimiento más general para crear diagramas de Venn desde el trabajo original de Venn hace ya más de cien años.) Antes de presentar el procedimiento es útil definir de manera más precisa que se entiende por un *diagrama de Venn*. Así, un diagrama de Venn es una colección $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ de curvas cerradas simples (por ejemplo, círculos, cuadrados, o cualquier curva cerrada que no se intercepte a sí misma²) dibujadas dentro de un cuadrado (el cual representa al conjunto universal) con las propiedades siguientes:

- i. La región formada por cualquier intersección de la forma $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$, donde cada X_i es o $\text{int}(C_i)$ o $\text{ext}(C_i)$, es una región conectada no vacía.
- ii. Y existe únicamente un número finito de puntos de intersección entre cualquier par de curvas en $\mathcal{C}$.

En la teoría de conjuntos, la función de un diagrama de Venn con n curvas es la de representar todos los posibles subconjuntos generados al tomar intersecciones de una colección de n conjuntos y/o de sus complementos. Tales conjuntos entonces pueden ser visualizados como conglomerados de “piezas” del diagrama de Venn. A partir de esto es relativamente fácil probar (por inducción) que el número de regiones en un diagrama de Venn para n conjuntos es 2^n . La construcción de Edwards de diagramas de Venn es inductiva. Se comienza con un diagrama de Venn de un conjunto, véase la Figura 5, en el que la curva correspondiente C_1 simplemente es la mitad izquierda del rectángulo que representa al conjunto universal. La siguiente iteración añade una segunda curva C_2 que corresponde a la mitad inferior del rectángulo, véase la Figura 5. La tercera generación añade un círculo C_3 centrado en el origen, véase la Figura 5.

² Informalmente definimos una curva cerrada simple como una curva en el plano que es cerrada y que nunca se cruza a sí misma, e. g., las elipses son ejemplos de curvas cerradas simples, mientras que una curva con figura de ocho no lo es porque se cruza a sí misma, y similarmente una curva con forma de S tampoco lo es porque no es cerrada. Una propiedad importante (e intuitivamente obvia) de cualquier curva cerrada simple C en el plano es que lo separará en dos porciones: el interior $\text{int}(C)$, la porción acotada, y el exterior $\text{ext}(C)$, la porción no acotada. Las definiciones rigurosas, así como las derivaciones de las propiedades de las curvas cerradas simples se pueden encontrar en cualquier buen libro de topología o análisis complejo.

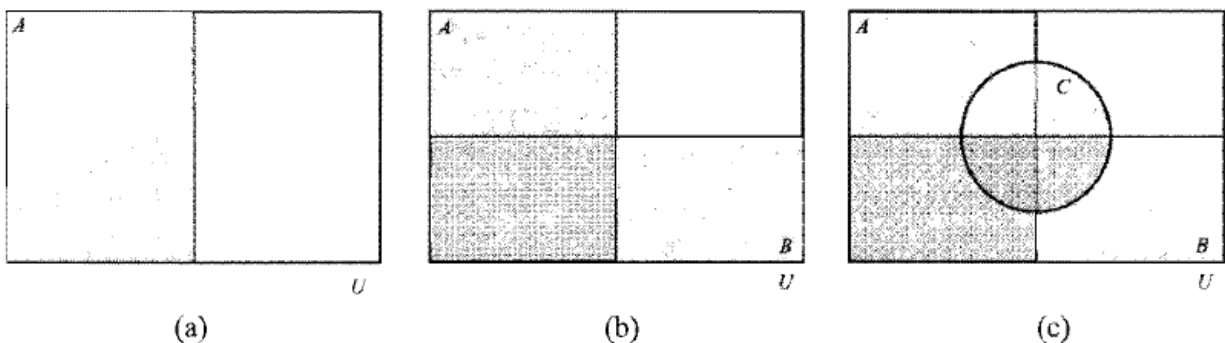


Figura 5. Diagramas de Venn.

En cada nueva iteración, la idea es añadir una nueva curva cerrada simple cuyo interior se encuentre con todas las porciones existentes formando una región conectada no vacía. En la Figura 6 se muestran las siguientes tres iteraciones de la construcción de Edwards. Nótese que cada nueva curva añadida debe cortar cada una de las regiones de Venn existentes en dos regiones: el interior y el exterior del nuevo conjunto.

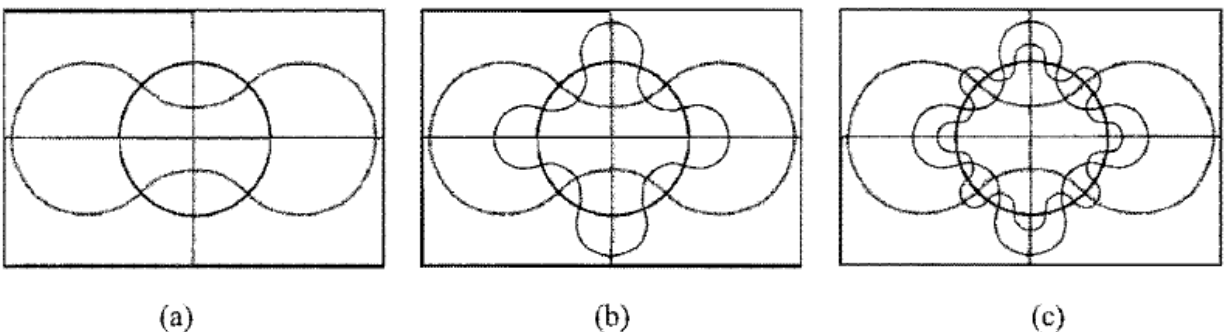


Figura 6. Diagramas de Venn.

5. EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Si fuésemos a considerar el tratamiento de problemas más complejos que los estudiados al final de la sección anterior sentiríamos la necesidad de contar con procedimientos más sistemáticos para realizar nuestros cálculos con conjuntos que están relacionados por inclusión, unión, intersección y complemento. Esto es, lo que estaríamos requiriendo podría ser denominado de forma más propia el “álgebra de conjuntos” —un desarrollo de las propiedades básicas de las operaciones para conjuntos, junto con la inclusión, y sus interrelaciones. Como tal, se pretende que el álgebra de conjuntos sea el análogo en la teoría de conjuntos de la familiar álgebra de los números reales, la cual concierne a las propiedades de las operaciones aritméticas, junto con las relaciones de desigualdad y sus interrelaciones.

Antes de presentar propiamente el álgebra de conjuntos conviene señalar lo siguiente. Ya habíamos convenido que las letras mayúsculas denotan conjuntos definidos. Vamos a usar ahora estas mismas letras como variables de conjuntos en el sentido de que no se considera que sean exactamente conjuntos sino **fórmulas de conjuntos**: Uno obtiene un conjunto a partir de una fórmula de conjuntos al cambiar las variables por conjuntos definidos. Adicionalmente, las operaciones para conjuntos también pueden ser extendidas a las fórmulas de conjuntos, por lo que $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$ (o $\sim A$), etc., son todas fórmulas de conjuntos.

Así, cualquier cadena de símbolos bien formada que involucre variables de conjuntos, las operaciones $\cup$, $\cap$, $\sim$ y paréntesis, es una fórmula de conjuntos; estas fórmulas también serán denominadas conjuntos por razones de simplicidad. Aún más, dos fórmulas se dice que son iguales si resultan ser igua-

les como conjuntos cada vez que las variables de conjuntos que aparecen en ambas fórmulas son reemplazadas por cualquier conjunto definido. En esto se está asumiendo que cualquier variable en particular es reemplazada siempre por el mismo conjunto en ambas fórmulas. Ahora bien, como la igualdad de conjuntos de fórmulas no depende de los conjuntos que sustituyen a las variables, estas igualdades se denominan **identidades**. Algunas de las identidades básicas describen ciertas propiedades de las operaciones involucradas y por ello se les proporcionan nombres especiales.

Nuestro primer resultado lista las propiedades básicas de la unión y de la intersección. Por cuestiones de uniformidad, todas estas propiedades han sido formuladas para subconjuntos de un conjunto universal U . Sin embargo, para algunas propiedades, ello es una restricción artificial como se puede observar al revisar las pruebas de las propiedades.

Teorema 5.1 Para cualesquiera subconjuntos A, B y C de un conjunto universal U , las ecuaciones siguientes son identidades. (Recordemos que $\bar{A}$ denota al conjunto $U - A$.)

$$\begin{array}{ll} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup B = B \cup A & , \quad A \cap B = B \cap A \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup \emptyset = A & , \quad A \cap U = A \\ A \cup \bar{A} = U & , \quad A \cap \bar{A} = \emptyset \end{array}$$

Prueba. A excepción de las identidades 3 y 3', las restantes se probaron en la Sección 4. Vamos entonces a presentar una demostración de la validez de la propiedad 3. (La propiedad 3' se prueba siguiendo un procedimiento similar.)

(a) Probemos que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Sea $x \in A \cup (B \cap C)$. Entonces $x \in A$ o $x \in (B \cap C)$. Si $x \in A$, entonces $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$, y, en consecuencia, x pertenece a su intersección. Si $x \in (B \cap C)$, entonces $x \in B$ y $x \in C$. En consecuencia, $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$, por lo que, de nueva cuenta, x es un miembro de su intersección.

(b) Probemos que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. De esta manera, $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$. En consecuencia, $x \in A$ o $x \in B$ y $x \in C$. Esto implica que $x \in A \cup (B \cap C)$. ■

A las identidades 1 y 1' se les refiere, como ya se mencionó en la Sección 4, como las leyes asociativas para la unión e intersección, respectivamente. También ya se había mencionado que las identidades 2 y 2' se les conoce como las leyes conmutativas para las operaciones en cuestión. Por su parte, las identidades 3 y 3' son las leyes distributivas para las operaciones de unión e intersección, respectivamente.

La analogía de las propiedades de las operaciones de unión e intersección con las propiedades de la adición y de la multiplicación de números, respectivamente, es llamativa. Por decir, la identidad 3' corresponde precisamente a la ley distributiva de la aritmética. Sin embargo, también existen diferencias importantes. Estas se ilustran con la propiedad 3, que no tiene análogo en la aritmética.

Profundicemos un poco más en las propiedades recién enunciadas y sus consecuencias. Primero un poco de análisis: De acuerdo con la ley asociativa para la unión, identidad 1, los dos conjuntos que pueden ser formados con la operación de unión a partir de los conjuntos A, B y C , en este orden, a saber $(A \cup B) \cup C$ y $A \cup (B \cup C)$, son iguales. Debido a esto, acordamos denotar a estos conjuntos por $A \cup B \cup C$. Así pues, la ley asociativa nos asegura que no importa la forma en la que se introducen los paréntesis en la expresión anterior. Claramente se puede realizar un análisis similar a la propiedad 1'. De tal análisis se desprende que la expresión $A \cap B \cap C$ puede denotar, indistintamente, a cualquiera de los conjuntos $A \cap (B \cap C)$ o $(A \cap B) \cap C$.

Consideremos ahora una consecuencia. Retomemos la identidad 1. Usando la inducción sobre el razonamiento del párrafo anterior podemos establecer lo siguiente. Los conjuntos que se pueden obtener a partir de los conjuntos dados $A_1, A_2, \dots, A_n$, en este orden, usando la operación de unión son todos iguales los unos a los otros. En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} A_1 \cup (A_2 \cup A_3) &= (A_1 \cup A_2) \cup A_3. \\ A_1 \cup ((A_2 \cup A_3) \cup A_4) &= (A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) \cup A_4 \\ &= ((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup A_4 \\ &= A_1 \cup (A_2 \cup (A_3 \cup A_4)). \end{aligned}$$

Etcétera.

Debido a esto, el conjunto definido por $A_1, A_2, \dots, A_n$, en este orden, y siguiendo el procedimiento recién descrito, se puede escribir como

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Usando ahora la identidad 1' se puede demostrar que también existe una generalización correspondiente para la intersección, a saber:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

Aún más, con las leyes asociativas generales recién establecidas, podemos establecer la ley conmutativa general. En efecto, si $1', 2', \dots, n'$ son $1, 2, \dots, n$ en cualquier orden, tenemos que:

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n &= A_{1'} \cup A_{2'} \cup \dots \cup A_{n'}. \\ A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n &= A_{1'} \cap A_{2'} \cap \dots \cap A_{n'}. \end{aligned}$$

También podemos establecer las leyes distributivas generales:

$$\begin{aligned} A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) &= (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \dots \cap (A \cup B_n). \\ A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n). \end{aligned}$$

Estos resultados también se pueden probar por inducción.

Sea A una familia de conjuntos indexados sobre un conjunto índice I tal que $A = \{A_1, A_2, \dots\} = \{A_i\}_{i \in I}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x | x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}. \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x | x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}. \end{aligned}$$

Usando nuevamente el método inductivo, se puede probar lo siguiente.

$$\begin{aligned} B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) &= \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i). \\ B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) &= \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i). \end{aligned}$$

Estas son las leyes asociativa y distributiva generalizadas.

Las pruebas detalladas de las propiedades de unión e intersección que se acaban de enunciar no requieren de hacer referencia a la relación de membresía, sino que se obtienen a partir de las identidades listadas en el Teorema 5.1. Lo mismo va a ocurrir con las identidades que se presentarán más adelante. Tales hechos pueden ser vistos como el origen del “enfoque axiomático” al álgebra de conjuntos que se desarrollará en otras notas. Una consecuencia importante de este enfoque es la conclusión de que todo teorema del álgebra de conjuntos es derivable de las identidades 1-5 y 1'-5'.

Las diez identidades (o propiedades) listadas en el Teorema 5.1 tienen otra consecuencia importante. En el enunciado del teorema que nos ocupa se han listado las diez propiedades apareadas en una tabla de manera tal que cada miembro de un par se obtiene del otro miembro al intercambiar $\cup$ por $\cap$ y viceversa, y simultáneamente $\emptyset$ por U y viceversa. A partir de este hecho, podemos señalar que una expresión o ecuación o proposición dentro del marco del álgebra de conjuntos obtenida a partir de otra por un intercambio como el recién mencionado se dice que es la **dual** de la original. Afirmamos además que

el dual de cualquier teorema expresable en términos de las operaciones de unión, intersección y complemento, y que puede ser probado usando únicamente las identidades 1-5 y 1'-5', es también un teorema. Discutamos un poco más esto último.

Supóngase que la prueba de un teorema está escrita como una secuencia de etapas, y que en oposición a cada etapa se coloca su justificación. Por lo dicho previamente, cada justificación es una de las identidades 1-5, una de las identidades 1'-5', o es una premisa del teorema. Reemplazamos ahora la identidad o relación en cada etapa por su dual. Debido a que las identidades 1-5 y 1'-5' contienen cada una su dual, y el dual de cada premisa del teorema original es ahora una premisa, el dual de cada justificación en la prueba original está disponible para servir como una justificación para una etapa en la nueva secuencia, la cual, en consecuencia, constituye una prueba. La última fila de la nueva secuencia es, en consecuencia, un teorema, precisamente el dual del teorema original.

Con esto, y aceptando el hecho de que todo teorema del álgebra de conjuntos es deducible a partir de las identidades 1-5 y 1'-5', obtenemos entonces el **principio de dualidad** para el álgebra de conjuntos:

Si T es cualquier teorema expresado en términos de las operaciones de unión, intersección y complemento, entonces el dual de T también es un teorema.

Esto implica que, por ejemplo, si las fórmulas identificadas por un número sin prima en el siguiente teorema son deducidas únicamente a partir del Teorema 5.1, entonces las fórmulas identificadas con números con prima se obtienen por dualidad.

Presentemos pues nuestro segundo resultado del álgebra de conjuntos.

Teorema 5.2 Para todos los subconjuntos A y B de un conjunto universal U , las siguientes proposiciones son válidas.

.	Si para todo A , $A \cup B = A$, entonces $B = \emptyset$.	
'.	Si para todo A , $A \cap B = \emptyset$, entonces $B = U$.	
., 7'.	Si $A \cup B = U$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $B = \bar{A}$.	
., 8'.	$\bar{\bar{A}} = A$.	
.	$\bar{\emptyset} = U$.	, $\bar{U} = \emptyset$.
0.	$A \cup A = A$.	0'. $A \cap A = A$.
1.	$A \cup U = U$.	1'. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2.	$A \cup (A \cap B) = A$.	2'. $A \cap (A \cup B) = A$.
3.	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.	3'. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Prueba. Algunas de estas identidades ya fueron probadas en la Sección 4 usando la relación de membresía. También se pueden probar recurriendo únicamente al Teorema 5.1. Vamos a ilustrar esto último con las identidades 12 y 12'. Así, primero hagamos notar que

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

Aquí se hizo uso de la identidad 10 y de la ley distributiva. A continuación se muestra que

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A.$$

Aquí se hizo uso de la identidad 4' y nuevamente de la ley distributiva. ■

Algunas de las identidades del Teorema 5.2 tienen nombres bien establecidos. Así, las identidades 10 y 10' son las **leyes idempotentes**, las 12 y 12' son las **leyes de absorción**, las 13 y 13' son las **leyes de De Morgan**. Las identidades 7, 7' y 8, 8' se han numerado por duplicado para enfatizar que cada una de ellas no cambia al aplicarles el procedimiento de dualidad; tales fórmulas son denominadas **auto duales**. Note que 7, 7' asevera que cada conjunto tiene un único complemento.

Con el objetivo de completar nuestra discusión, vamos a listar algunas implicaciones y ciertas inclusiones de conjuntos. Así, tenemos que

$$A \cup B \neq \emptyset \text{ implica que } A \neq \emptyset \text{ o que } B \neq \emptyset.$$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ implica que } A \neq \emptyset \text{ y que } B \neq \emptyset.$$

Para probar la primera de estas implicaciones asumamos que $(A \neq \emptyset \text{ o } B \neq \emptyset)$ es una proposición *falsa*. Esto requiere que $A \neq \emptyset$ sea una proposición *falsa*, y que también $B \neq \emptyset$ sea una proposición *falsa*. De todo esto se desprende que $A = B = \emptyset$. Pero entonces se tiene que $A \cup B = \emptyset$, con lo cual tenemos que $A \cup B \neq \emptyset$ es una proposición *falsa*. De esta manera queda probada la implicación. Obviamente esta implicación también puede ser probada asumiendo primero que $A \cup B \neq \emptyset$ es una proposición *verdadera* y mostrando a continuación que de ello se desprende que $(A \neq \emptyset \text{ o } B \neq \emptyset)$ es también una proposición *verdadera*. La segunda implicación se prueba empleando un procedimiento similar.

Las siguientes inclusiones se pueden probar directamente a partir de la definición, lo cual de hecho ya se hizo en la sección anterior:

$$A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B; A \subseteq A \cup B; A - B \subseteq A.$$

Con la ayuda de las identidades e implicaciones que se han listado hasta este punto de la presentación se pueden simplificar una gran variedad de expresiones complejas que involucran conjuntos, de manera similar a cómo se hace en el álgebra elemental. Proporcionamos a continuación tres ejemplos de tales simplificaciones.

$$\overline{A \cap \bar{B}} \cup B = \bar{A} \cup \bar{\bar{B}} \cup B = \bar{A} \cup B \cup B = \bar{A} \cup B.$$

$$(A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

$$= [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

$$= [U \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

$$= (B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

$$= U.$$

$$(A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap X)$$

$$= (A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup [(\bar{A} \cup \bar{B} \cup X) \cap C]$$

$$= [(A \cap B \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cup \bar{B} \cup X)] \cap C$$

$$= [(A \cap B \cap \bar{X}) \cup \overline{(A \cap B \cap \bar{X})}] \cap C$$

$$= U \cap C$$

$$= C.$$

Antes de presentar el siguiente teorema (y último de nuestra exposición del álgebra de conjuntos) es conveniente hacer el comentario siguiente. Una aseveración de la forma “las proposiciones $R_1, R_2, \dots, R_k$ son equivalentes la una con las otras” significa lo siguiente: “Para todos los índices i, j , R_i si, y sólo si, R_j ”. Esto, a su vez, quiere decir que se tiene un hecho si, y sólo si, R_1 implica R_2 implica $R_3 \dots R_{k-1}$ implica R_k implica R_1 . El teorema es de gran interés ya que señala que la relación de inclusión para conjuntos es definible en términos tanto de la unión como de la intersección.

Teorema 5.3 Las siguientes proposiciones acerca de los conjuntos A y B son equivalentes la una con las otras:

$$(I) \quad A \subseteq B.$$

$$(II) \quad A \cap B = A.$$

$$(III) \quad A \cup B = B.$$

Prueba.

(I) implica (II). Asumamos que $A \subseteq B$. Ahora bien, como para todos los conjuntos A y B se cumple que $A \cap B \subseteq A$, entonces es suficiente con probar que $A \subseteq A \cap B$. Pero si $x \in A$, entonces $x \in B$ y, en consecuencia, se tiene que $x \in A \cap B$. Así, se cumple que $A \subseteq A \cap B$.

(II) implica (III). Asumamos que $A \cap B = A$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap B = B. \end{aligned}$$

(III) implica (I). Asumamos que $A \cup B = B$. Entonces esta suposición y el resultado $A \subseteq A \cup B$ implican $A \subseteq B$. ■

El principio de dualidad tal como fue formulado unos párrafos atrás no aplica directamente a expresiones en las que aparece la operación de complemento y la relación de inclusión. Sin embargo, hay alternativas. Uno puede tratar con la diferencia usando su forma equivalente, a saber $A \cap \bar{B}$ equivale a $A - B$. Similarmente, y con base en el Teorema 5.3, $A \subseteq B$ puede ser reemplazada por $A \cap B = A$ (o por $A \cup B = B$). Todavía mejor, debido a que el dual de $A \cap B = A$ es $A \cup B = A$, lo cual equivale a $A \supseteq B$, el principio de dualidad puede ser extendido para incluir el caso en el que está presente el símbolo de inclusión, añadiendo la previsión de que todos los símbolos de inclusión deben ser invertidos.

Con la ayuda de las identidades que ahora tenemos a nuestra disposición podemos simplificar una gran variedad de expresiones complejas, de manera muy similar a cómo se hace en el álgebra elemental. A continuación proporcionamos tres ejemplos.

$$(a) \quad \overline{A \cap \bar{B}} \cup B = \bar{A} \cup B \cup B = \bar{A} \cup B.$$

$$\begin{aligned} (b) \quad (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup \bar{B} \cup \bar{C} \\ &= [(A \cup \bar{A}) \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} \\ &= [U \cap B \cap C] \cup \bar{B} \cup \bar{C} \\ &= (B \cap C) \cup \overline{B \cap C} \\ &= U. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad (A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (C \cap X) \\ &= (A \cap B \cap C \cap \bar{X}) \cup [(\bar{A} \cup \bar{B} \cup X) \cap C] \\ &= [(A \cap B \cap \bar{X}) \cup \overline{A \cap B \cap \bar{X}}] \cap C \\ &= U \cap C \\ &= C. \end{aligned}$$

Con esto terminamos nuestra presentación de los elementos principales de la teoría de conjuntos.

COMENTARIOS FINALES

En esta nota técnica hemos introducido los fundamentos de la teoría de conjuntos. Para finalizar nuestra presentación vamos a considerar algunos hechos históricos que consideramos relevantes en el desarrollo de la teoría de conjuntos.

El álgebra de la teoría de conjuntos se desarrolló durante buena parte del siglo XIX y durante las primeras décadas del siglo XX. En Inglaterra, George Peacock (1797-1858) fue un pionero de las reformas matemáticas y estuvo entre los primeros que revolucionaron la concepción completa del álgebra y la aritmética; esto lo hizo en su trabajo *Treatise on Algebra*. Sus ideas fueron desarrolladas todavía más por Duncan Gregory (1806-1871), William Rowan Hamilton (1805-1865) y Augustus DeMorgan (1806-1871); fue este último quien intentó remover la ambigüedad del álgebra elemental y colocarla en una forma pos-

tular estricta. Sin embargo, no fue sino hasta 1854 con la publicación del trabajo *Investigation of the Laws of Thought* de George Boole (1815-1864) que se formalizó un álgebra que trataba con conjuntos y lógica, extendiendo el trabajo iniciado por Peacock y sus contemporáneos.

La presentación que hemos hecho en estas notas trata principalmente con conjuntos finitos. Sin embargo, la investigación sobre conjuntos infinitos y sus cardinalidades ha ocupado los pensamientos de muchos matemáticos y filósofos. El enfoque intuitivo a la teoría de conjuntos se había seguido hasta la época del matemático de origen ruso Georg Cantor (1845-1918), quién en 1895 definió a un conjunto de una manera comparable a un “sentimiento fundamental”; su definición, sin embargo, fue uno de los obstáculos que él nunca fue capaz de remover por completo de su teoría de conjuntos.

Durante la década de los 1870, cuando Cantor estaba haciendo investigaciones sobre series trigonométricas y de números reales, cayó en cuenta de que requería de una estrategia para comparar los tamaños de conjuntos infinitos de números. Su tratamiento de lo infinito como un hecho, en el mismo nivel de lo finito, fue ciertamente revolucionario. Debido en gran medida a esto, una buena parte de su trabajo fue rechazado por los matemáticos de su época: ellos los consideraban demasiado abstractos, por lo menos más de lo que estaban acostumbrados. A pesar de esto, el trabajo de Cantor fue ganando amplia aceptación, tanto que alrededor de los 1890 la teoría de conjuntos, tanto finitos como infinitos, comenzó a ser considerada como una rama de las matemáticas por derecho propio.

Ya hacia el cambio de siglo, la teoría de conjuntos era ampliamente aceptada, y fue en esta época que comenzaron los problemas. En 1901 se presentó una paradoja, conocida en la actualidad como la paradoja de Russell, que mostró que la teoría de conjuntos, como se propuso originalmente, era internamente inconsistente. La dificultad parecía encontrarse en la manera no restringida en la que se podían definir los conjuntos; la idea de que un conjunto pudiese ser miembro de sí mismo fue considerada como particularmente sospechosa. En su trabajo *Principia Mathematica*, los matemáticos y filósofos Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred Whitehead (1861-1947) desarrollaron una jerarquía en la teoría de conjuntos conocida como la teoría de tipos. Esta teoría axiomática de conjuntos, junto con varias otras desarrolladas en el siglo XX, evitaban la paradoja de Russell.

El descubrimiento de la paradoja de Russell —aunque podía ser remediada— tuvo un profundo impacto sobre la comunidad matemática en el sentido que muchos investigadores y pensadores comenzaron a preguntarse si existían otras contradicciones que no se habían localizado. Fue en este contexto que en 1931, el matemático y lógico Kurt Gödel (1906-1978) formuló que “bajo una condición de consistencia especificada, cualquier sistema axiomático formal suficientemente fuerte debe contener una proposición tal que ni ella misma ni su negación es probable, y que cualquier prueba de consistencia para el sistema debe usar ideas y métodos más allá de los del sistema mismo”. Y desafortunadamente, a partir de esto aprendimos que no podemos establecer —de una manera matemáticamente rigurosa— que no existan contradicciones en las matemáticas. Ahora bien, a pesar de la “prueba de Gödel”, la investigación matemática ha continuado.

El uso del símbolo $\in$ (una forma estilizada de la letra griega épsilon) para indicar la membresía de conjuntos fue introducido en 1889 por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932). El símbolo “ ϵ ” es una abreviación de la palabra griega “ $\epsilon\sigma\tau\iota$ ” que significa “está”.

Los diagramas de Venn fueron introducidos por el lógico John Venn (1834-1923) en 1881. En su libro *Symbolic Logic*, Venn clarificó las ideas previamente desarrolladas por Boole; incluso contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad.

Si queremos resumir la importancia del rol de la teoría de conjuntos en el desarrollo de las matemáticas del siglo XX, la siguiente aseveración, atribuida al gran matemático David Hilbert (1862-1943), es más que pertinente: “Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor creó para nosotros”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Epp, Susanna S. (2012): *Matemáticas Discretas Con Aplicaciones*. Cuarta edición. Cengage Learning, México.

Grimaldi, Ralph P. (2003): *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. Fifth edition. Pearson, Addison-Wesley, Boston.

Halmos, Paul R. (1960): *Naïve Set Theory*. Springer-Verlag, New York.

Joshi, K. D. (1989): *Foundations of Discrete Mathematics*. John Wiley & Sons, New York.

Stanoyevitch, Alexander (2010): *Discrete Structures With Contemporary Applications*. CRC Press, Chapman & Hall, Boca Raton.

Stoll, Robert S. (1979): *Set Theory and Logic*. Dover Publications, Inc., New York.

Tremblay, J. P. y Manohar, R. (1987): *Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science* (International Edition). McGraw-Hill Book Company, New York.