



**CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y
DESARROLLO TECNOLÓGICO**
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



INFORME TÉCNICO IT-TINF-2007-01

CURSO DE CONTROL



**José Luis Pérez Silva
Antonio Garcés Madrigal
Francisco Cabiedes Contreras
Andra Miranda Vitela**

CCADET UNAM 2007

INDICE

1. INTRODUCCION	7
2. EL CURSO	9
3. CÓDIGOS	15
3.1 INTRODUCCIÓN	15
3.2 INTRODUCCIÓN. MARCO 1	18
3.3 INTRODUCCIÓN. MARCO 2	18
3.4 INTRODUCCIÓN. MARCO 3	19
3.5 INTRODUCCIÓN. MARCO 4	19
3.6a INTRODUCCIÓN. MARCO 5	20
3.7 INTRODUCCIÓN. MARCO 6	22
3.8 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. INTRODUCCION	22
3.9 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. INTRODUCCION. MARCO 4	24
3.10 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. INTRODUCCION. MARCO 5	26
3.11 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. TEORIA DE CONJUNTOS	27
3.12 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA	52
3.13 ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES	68
3.14 DIFERENCIACION DE UNA FORMA CUADRATICA	73
3.15 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. SOLUCION DE ECUACIONES CUBICAS Y CUARTICAS	80
3.16 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTANEAS	88
3.17 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. LA FRACCIÓN IMPROPIA $N \geq M$	98
3.18 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES SIMULTANEAS	104
3.19 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. MATRICES	119
3.20 FUNDAMENTOS FISICOS. INTRODUCCION	137
3.21 FUNDAMENTOS FISICOS. INTRODUCCION. MARCO 4	139
3.22 FUNDAMENTOS FISICOS. INTRODUCCION. MARCO 5	140
3.23 FUNDAMENTOS FISICOS. PARTICULA LIBRE	143
3.24 FUNDAMENTOS FISICOS. SISTEMA DE PARTICULAS	150
3.25 FUNDAMENTOS FISICOS. MECANICA DE LA PARTICULA	158
3.26 FUNDAMENTOS FISICOS. TRABAJO	165
3.27 FUNDAMENTOS FISICOS. TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA	176
3.28 FUNDAMENTOS FISICOS. PRINCIPIO DE MINIMA ACCION	191
3.29 FUNDAMENTOS FISICOS. DESPLAZAMIENTO VIRTUAL	200
3.30 FUNDAMENTOS FISICOS. METODOS VARIACIONALES	212
3.31 FUNDAMENTOS FISICOS. TRANSFORMACION DE LEGENDRE Y ECUACIONES DE HAMILTON	243
3.32 FUNDAMENTOS FISICOS. PARENTESIS DE POISSON	274
3.33 FUNDAMENTOS FISICOS. PRINCIPIO DE MAUPERTIUS	284
3.34 FUNDAMENTOS FISICOS. TRANSFORMACIONES CANONICAS	292
3.35 FUNDAMENTOS FISICOS. ECUACIONES DE HAMILTON	303
3.36 FUNDAMENTOS FISICOS. INVARIANTES ADIABATICOS	315
3.37 FUNDAMENTOS FISICOS. ECUACION DE HAMILTON-JACOBI	329
3.38 CONTROL LINEAL. INTRODUCCION	337
3.39 CONTROL LINEAL. INTRODUCCION. MARCO 4	342
3.40 CONTROL LINEAL. INTRODUCCION. MARCO 5	343
3.41 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES	345
3.42 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA DESCRIPCION ENTRADA - SALIDA	352
3.43 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA DESCRIPCION ENTRADA - SALIDA. MARCO 4	358
3.44 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LINEALIDAD	359
3.45 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONSTRUCCION DE UN MODELO LINEAL	365
3.46 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODO DE ERROR CUADRATICO MINIMO	379
3.47 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN	389
3.48 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA	413
3.49 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. MARCO	416
3.50 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. TRANSFORMADA DE LAPLACE	417
3. 51 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE	426
3.52 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. LAS RAÍCES DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	445

3.53 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA FUNCIÓN DELTA O FUNCIÓN IMPULSO	462
3.54 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER	471
3.55 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER. MARCO 4	497
3.56 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER. LA INTEGRAL DE FOURIER	498
3.57 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS	519
3.58 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS. MARCO 4	531
3. 59 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS. ECUACIONES DE DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN	533
3.60 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN	539
3.61 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. MARCO 4	541
3.62 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. FUNCION DELTA	543
3.63 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. RELACION ENTRE LA RESPUESTA A UN ESCALON Y LA RESPUESTA A UN IMPULSO	555
3. 64 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. REPRESENTACION DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO	571
3.65 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. SUPERPOSICION Y CONVOLUCIÓN PARA SISTEMAS CONTINUOS	585
3.66 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. LA SECUENCIA IMPULSO RESPUESTA	597
3. 67 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES	605
3.68 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. MARCO 4	608
3.69 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. LA FUNCIÓN DELTA O FUNCIÓN IMPULSO	609
3.70 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN Y LA FUNCIÓN DE GREEN	618
3.71 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN TIPO ESCALÓN Y LA INTEGRAL DE SUPERPOSICIÓN	630
3.72 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. RESPUESTA A UNA COMPUERTA	639
3. 73 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE $H(S)$ A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN SENOIDAL	646
3.74 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. VARIABLES DE ESTADO	652
3.75 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. VARIABLES DE ESTADO. MARCO 4	660
3.76 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. VARIABLES DE ESTADO. SOLUCION DE ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO	662
3.77 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO	667
3.78 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. MARCO 4	676
3.79 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. CARACTERIZACION DE SISTEMAS POR VARIABLES DE ESTADO	677
3. 80 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. DESCRIPCION DE LA ENTRADA POR VARIABLES DE ESTADO	681
3.81 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. MATRIZ DE TRANSICION	697
3.82 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. ANALISIS DE TRANSICION DE ESTADO PARA SISTEMAS DE DATOS DISCRETOS	710
3.83 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ESTABILIDAD. CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD	722
3.84 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ESTABILIDAD. CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD. MARCO 4	736
3.85 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ESTABILIDAD. CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD. SISTEMAS DE MUESTREO NO CONVENCIONAL	732
3.86 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONCEPTO DE CONTROLABILIDAD	753
3.87 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONCEPTO DE OBSERVABILIDAD	771
3.88 SISTEMAS DINÁMICOS. INTRODUCCION	775
3.89 SISTEMAS DINÁMICOS. INTRODUCCION. MARCO 4	777
3.90 SISTEMAS DINÁMICOS. EL CONCEPTO DE SISTEMA	778
3.91 SISTEMAS DINÁMICOS. ELEMENTOS DE UN PUERTO	783

3.92 SISTEMAS DINÁMICOS. COMPORTAMIENTO ESTÁTICO	786
3.93 SISTEMAS DINÁMICOS. LEYES DE CONTROL	793
3.94 SISTEMAS DINÁMICOS. RESPUESTA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN	800
3.95 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMA DE CONTROL RETROALIMENTADO	816
3.96 SISTEMAS DINÁMICOS. RESPUESTA DE UN SISTEMA RETROALIMENTADO DE CONTROL	824
3.97 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMAS MULTIVARIABLES	835
3.98 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMAS CON PARÁMETROS DISTRIBUIDOS	845
3.99 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS	849
3.100 SISTEMAS DINÁMICOS. RELACIONES ESTADÍSTICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	863
3.101 SISTEMAS DINÁMICOS. RELACIONES ESTADÍSTICAS EN EL ESPACIO DE ESTADOS	878
3.102 SISTEMAS DINÁMICOS. CONTROL MODAL	889
3.103 SISTEMAS NO LINEALES. INTRODUCCION	900
3.104 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE ANÁLISIS. INTRODUCCION	907
3.105 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE ANÁLISIS. INTRODUCCION. MARCO 4	910
3.106 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE ANÁLISIS. ANÁLISIS DEL PLANO FASE	913
3.107 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE ANÁLISIS. SISTEMAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN	928
3.108 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE ANÁLISIS. SISTEMAS NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN	948
3.109 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE ANÁLISIS. ANÁLISIS GLOBAL DEL PLANO FASE	957
3.110 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES	965
3.111 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES. MARCO 4	974
3.112 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES. MARCO 5	975
3.113 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES	977
3.114 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES	985
3.115 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. MÉTODO DIRECTO DE LIAPUNOV	994
3.116 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. MÉTODO DE FRECUENCIA DE POPOV	1020
3.117 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. INTRODUCCION	1038
3.118 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. INTRODUCCION. MARCO 4	1044
3.119 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. INTRODUCCION. MARCO 5	1048
3.120 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. ÍNDICE	1049
3.121 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. EXISTENCIA DE CICLOS LÍMITE	1062
3.122 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. COTAS DE AMPLITUD PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN	1078
3.123 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LÍMITE. LIAPUNOV COMO MÉTODO DE ACOTAMIENTO	1101
3.124 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. INTRODUCCION	1111
3.125 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. INTRODUCCION. MARCO 4	1118
3.126 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. INTRODUCCION. MARCO 5	1119
3.127 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS	1121
3.128 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. SISTEMAS CUASILINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION	1135
3.129 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. MÉTODO DE LINEARIZACION EQUIVALENTE	1161
3.130 SISTEMAS NO LINEALES. MÉTODOS DE APROXIMACION. MÉTODO DE PERTURBACION SINGULAR	1167
3.131 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. INTRODUCCION	1193
3.132 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. INTRODUCCION. MARCO 4	1200
3.133 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. INTRODUCCION. MARCO 5	1201
3.134 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. MÉTODOS CLÁSICOS DE IDENTIFICACION DE SISTEMAS	1102
3.135 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. IDENTIFICACION DE PROCESOS LINEALES VARIANTES EN EL TIEMPO POR MEDICION DE LA RESPUESTA SENOIDAL	1229
3.136 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. MODELOS QUE APRENDEN	1268
3.137 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. TEORIA DE WEINER DE SISTEMAS NO LINEALES	1275
3.138 CONTROL ÓPTIMO. INTRODUCCION	1283
3.139 CONTROL ÓPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 1	1286

3.140 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 2	1287
3.141 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 3	1287
3.142 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 4	1287
3.143 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 5	1289
3.144 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. INTRODUCCION. MARCO 4a	1293
3.145 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES	1294
3.146 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. PROBLEMA VARIACIONAL SIMPLE	1308
3.147 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. SE ESPECIFICA EL TIEMPO FINAL PERO $x(t_f)$ ES LIBRE	1321
3.148 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. TIEMPO FINAL LIBRE	1327
3.149 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. t_f y x_f LIBRES	1341
3.150 CONTROL OPTIMO. FUNCIONALES DE VARIAS FUNCIONES INDEPENDIENTES	1352
3.151 CONTROL OPTIMO. INTEGRAL MINIMA DE CONTROL	1364
3.152 CONTROL OPTIMO. INTEGRAL MINIMA DE CONTROL. ECUACIONES FUNCIONALES	1385
3.153 CONTROL OPTIMO. INTEGRAL MINIMA DE CONTROL. MARCO 4b	1391
3.154 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. INTRODUCCION	1393
3.155 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. MARCO 4c	1399
3.156 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. ITERACION	1401
3.157 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. LA ECUACION DE ABEL- SCHRODER	1407
3.158 CONTROL OPTIMO. SISTEMAS Y VARIABLES DE ESTADO	1411
3.159 CONTROL OPTIMO. SISTEMAS Y VARIABLES DE ESTADO. FUNCION DE CRITERIO	1416
3.160 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION	1423
3.161 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 4e	1433
3.162 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. FORMULACION DEL PROBLEMA EN EL CALCULO DE VARIACIONES	1435
3.163 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA DE LAGRANGE	1439
3.164 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA DE MAYER	1446
3.165 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA DE BOLZA	1452
3.166 CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION. INTRODUCCION	1457
3.167 CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION. INTRODUCCION. MARCO 4f	1482
3.168 CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Y CONSTRICCIONES	1483
3.169 CONTROL OPTIMO. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN. INTRODUCCION	1490
3.170 CONTROL OPTIMO. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN. INTRODUCCION. MARCO 4g	1521
3.171 CONTROL OPTIMO. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN. PRUEBA DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO	1522
3.172 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES. INTRODUCCION	1539
3.173 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES. INTRODUCCION. MARCO 4h	1546
3.174 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES. PRINCIPIO DEL MAXIMO PARA SISTEMAS DISCRETOS	1548
3.175 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. INTRODUCCION	1557
3.176 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. INTRODUCCION. MARCO 4i	1564
3.177 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD	1566
3.178 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. ECUACION DE HAMILTON-JACOBI	1574
3.179 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. EL PROBLEMA BASICO DE OPTIMIZACION	1582
3.180 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. INTRODUCCION.	1596
3.181 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. INTRODUCCION. MARCO 4j	1608
3.182 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. PROCESOS DE CONTROL DEPENDIENTES DEL TIEMPO	1609
3.183 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. SISTEMAS DE MULTIPLES DIMENSIONES	1620
3.184 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. LA ECUACION DE HAMILTON- JACOBI-BELLMAN	1627
3.185 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. INTRODUCCION.	1639
3.186 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. INTRODUCCION. MARCO 4k	1653
3.187 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. CONTROL	1654

OPTIMO DE TIEMPO DISCRETO

3.188 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. CONTROL 1669
OPTIMO DE RETROALIMENTACION DE SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS

CURSO DE CONTROL

En casi todo lo que vivimos, así como en el ámbito de la ciencia, El control está presente, podríamos asegurar que la vida actual, como la entendemos, no podría existir sin la participación del control, por lo que estudiarlo y entenderlo es fundamental para poder desarrollar la tecnología actual.

El énfasis del curso está colocado en lo fundamental, ya que considero que si se entienden los conceptos fundamentales, los estudiantes estarán preparados para resolver los problemas de diseño de muchas aplicaciones novedosas con las que se encontrará en su desarrollo profesional. Es muy claro para mí que no sería muy útil un curso que estudiara a detalle cada dispositivo de control, ya que sería equivalente a darlo por obsoleto antes de terminarlo, además de ser muy extenso, pero lo que sí creo es que los estudiantes podrán abordar cualquier dispositivo si maneja conceptual y formalmente un conjunto de principios básicos del control. Para esto se ha desarrollado el curso tratando de presentar este conjunto de principios básicos desde los sistemas lineales hasta el control óptimo.

El curso comprende los siguientes puntos: Control lineal, Teoría de sistemas, Sistemas no lineales, Identificación de sistemas y Control óptimo.

La Teoría del Control ha jugado un papel importante en los avances de las ciencias y la Ingeniería. Es de extrema importancia en el diseño de aviones, sistemas automáticos, Bioingeniería, e inclusive juega un importante papel en los procesos modernos de manufactura e industriales. En cualquier laboratorio o planta de producción moderna se puede apreciar que el control de parámetros de procesos como pueden ser: presión, temperatura, flujo, voltaje, etc. es automático.

1. INTRODUCCION

Los avances de la teoría de control, han permitido mejorar las características de los sistemas dinámicos, mejorar la calidad y disminuir los costos de los productos industriales, dirigir cohetes y aviones, etc.

El primer periodo de la historia del control es el que va desde el final del siglo XIX al principio de siglo XX. Durante este intervalo de tiempo de nuestra historia del control, podemos considerar que el desarrollo obtenido en el campo es fundamentalmente empírico. De esta época tal vez el ejemplo más notorio es el gobernador de Watt para las máquinas de vapor. Dada su acción proporcional de control tenía un error estático en la velocidad del motor. Para corregir este error fue necesario llegar a la integración de la acción de control, pero esta era inestable cuando se aplicó a máquinas de vapor. La solución a estos primeros problemas de control fue muy pobre con la excepción de trabajo de Maxwell "Sobre los Gobernadores", trabajo que es el principio de los desarrollos teóricos.

El primer trabajo importante en control fue el gobernador centrífugo de Watt para el control de la velocidad de rotación de una máquina en el siglo XVIII. Otros importantes trabajos en las primeras etapas del desarrollo de la teoría del control son las debidas a Minorsky, Hazen, y Nyquist.

En 1922 Minorsky trabajo en el control automático de navegación de un barco, y mostró que la estabilidad se podía determinar de las ecuaciones que describieran el sistema.

En 1932 Nyquist desarrollo un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de un sistema de gasa cerrada para entradas senoidales en estado estacionario.

En 1934 Hazen que introdujo el termino Servomecanismo para los sistemas de control de posición, discutió el diseño de servomecanismos a base de relevadores capaces de seguir de cerca un cambio en la entrada.

El segundo periodo es el que está comprendido entre 1900 y el principio de la Segunda Guerra Mundial, época en donde el desarrollo técnico fue ganando impulso. Esta era se puede entender por la gran generación y transmisión de potencia, el nacimiento de la aeronáutica, la industria química, la electrónica y las telecomunicaciones. Los desarrollos para controladores neumáticos, hidráulicos y eléctricos, son básicos en nuestro tiempo.

Al crecer la complejidad de los desarrollos de los sistemas fue necesario sumar a la intuición el empleo de teoría para diseñar los controles. El trabajo de Max Tolle sobre regulación de velocidad fue uno de los primeros intentos en esta dirección. Los métodos teóricos se usaron fundamentalmente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y el empleo de los criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz. Estos métodos se emplearon para resolver sistemas simples y de bajo orden. Para el fin de este periodo era claro que estaba generándose una nueva teoría que unificara todas las aplicaciones de control por retroalimentación.

Durante la década de los cuarenta los métodos de respuesta a la frecuencia permitieron el diseño de sistemas de control lineales retroalimentados, y en esta década también se desarrollan los métodos de localización de raíces para el diseño de sistemas de control. Estos métodos constituyen la parte clásica de la teoría de control, permiten ver si el sistema es estable y si no estabilizarlo y más o menos satisfacen los requerimientos de comportamiento necesarios. En lo general estos sistemas no son óptimos en ningún sentido. A partir de los años cincuenta el énfasis en el diseño de control se dio en la parte de control óptimo.

El tercer periodo comienza con el desarrollo de la teoría de control y en el control automático. Podemos decir que su inicio se da alrededor de 1940 con el empleo del método de respuesta de frecuencia el cual se caracteriza por su aplicación a los servomecanismos y Wiener con la Cibernética incorpora nuevos problemas al campo del control retroalimentado. Los sistemas automáticos de control con o sin retroalimentación, llegaron a ser una parte integral de los sistemas dinámicos y se adelantó mucho con el empleo de las computadoras, tanto analógicas como digitales.

En 1950 se da el descubrimiento de la teoría de los espacios de estado, que fue originalmente desarrollado en la Mecánica Clásica por Poincaré, Lyapunov, Gibbs y otros. Esta teoría toma el nombre de Teoría Moderna del Control y un desarrollo de ella es la teoría de la optimización estática y dinámica.

Como las instalaciones modernas son cada día más y más complejas, con muchas entradas y salidas, la descripción de un sistema de control moderno necesita de un gran número de ecuaciones. La teoría clásica de control que trabaja solo con una entrada y una salida, se ve impotente para resolver los problemas de control de sistemas de múltiples entradas y salidas.

En los años sesenta la teoría de control moderno se ha desarrollado en la dirección de resolver los problemas de incremento en la complejidad de las instalaciones modernas y de sus grandes necesidades de precisión, tamaño y costo.

Con el avance de la electrónica, y el desarrollo de las computadoras tanto digitales como analógicas e híbridas, el desarrollo de técnicas de control basadas en el empleo de la computadora, cobraron énfasis dentro de la teoría, técnicas como control digital, con el empleo en línea de las computadoras, control analógico en tiempo real, etc.

Los desarrollos más recientes de la teoría de control, van en la dirección del control óptimo de sistemas deterministas y estocásticos, así como los sistemas adaptables y que aprenden de sistemas complejos. La aplicación de las microcomputadoras está permitiendo el desarrollo de sistemas autoorganizados de control, y de los sistemas inteligentes.

La teoría de control moderna se aplica en muchos campos, como pueden ser: La Ingeniería, la Física, la Biología, la Economía, la Medicina, etc. y de todas estas aplicaciones surgirán a futuro muy interesantes conclusiones.

2. EL CURSO

En el capítulo de repaso matemático revisaremos toda una gama de conceptos y métodos matemáticos que se requieren para comprender los fundamentos de la teoría de control que estudiaremos en este curso. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos encontrar la teoría de conjuntos, espacios vectoriales, valores propios, ecuaciones diferenciales, formas cuadráticas y otros.

En este capítulo de repaso Físico revisaremos toda una gama de conceptos y métodos físicos que se requieren para comprender los fundamentos de la teoría de control que estudiaremos en este curso. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos encontrar la mecánica de una partícula, Ecuaciones de Legendre y Hamilton, Ecuación de Hamilton-Jacobi, Concepto de Trabajo y energía, Leyes de Conservación y otros.

En el capítulo de Sistemas no lineales revisaremos toda una gama de conceptos y métodos físicos que se requieren para comprender los fundamentos de la teoría de sistemas dinámicos que estudiaremos en este curso. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos encontrar el Concepto de Sistema, Comportamiento Estático, Leyes de Control, Sistemas Multivariables, Sistemas de Parámetros Distribuidos, Sistemas Estocásticos, Control Modal y otros.

Cuando estudiamos un sistema físico, lo que buscamos es construir un modelo matemático, pero el modelo matemático que mejor describe al sistema depende de los factores físicos que incluyen intervalos de variables, consideraciones acerca de las componentes del sistema y sus acoplamientos. Como se ve, modelar es un problema que no es trivial, que requiere conocer al sistema antes de modelarlo. Estas notas para un curso son el estudio de los modelos matemáticos de los sistemas físicos que se describen por medio de ecuaciones diferenciales no lineales.

Muchos problemas en Ingeniería de sistemas, particularmente aquellos relacionados con sistemas de control, se pueden subdividir en cuatro partes interrelacionadas:

1. Identificación de la meta.
2. Determinación de la posición con respecto a la meta.
3. Determinación de los factores externos que afectan el pasado, el presente, el futuro y el subsiguiente establecimiento del sistema.
4. Determinación de una política de acuerdo con la definición de la meta (1), conocimiento del estado actual (2) y modelo del sistema y sus alrededores.

A menudo la política en el paso (4) está determinada por una acción óptima, en cuyo caso aparece el sujeto del control óptimo de un sistema.

Vamos a centrar nuestra atención en el problema de control de mínimo tiempo y desarrollaremos varias técnicas para el control de tiempo óptimo de sistemas continuos y discretos.

El estudio del control óptimo en su forma más general lo vamos a estudiar por técnicas que incluyen el método del cálculo de variaciones, el principio del máximo de Pontryagin y la programación dinámica de Bellman.

Podemos afirmar que la optimización es el más importante de los problemas en automatización, que podemos definir como la rama de la técnica relacionada con el desarrollo de dispositivos y sistemas que operan sin intervención humana y asume la responsabilidad de acercarse a ciertos tipos del trabajo mental humano.

El principio del máximo de Pontryagin es un método elegante para obtener una solución óptima para procesos dinámicos generales y trata del problema de optimización de maximizar o minimizar una funcional sujeta a ciertas constricciones.

La programación dinámica de Bellman es un concepto simple pero muy útil para resolver problemas de decisión de múltiples etapas. La idea básica que subyace bajo la programación dinámica es el principio del embebimiento invariante, que nos dice que un problema que no se

puede, o es muy difícil resolver, se puede embeber en una clase de problema simple de resolver para obtener una solución.

Vamos a presentar una secuencia de imágenes con las portadas de los diferentes temas y los elementos gráficos de estas.



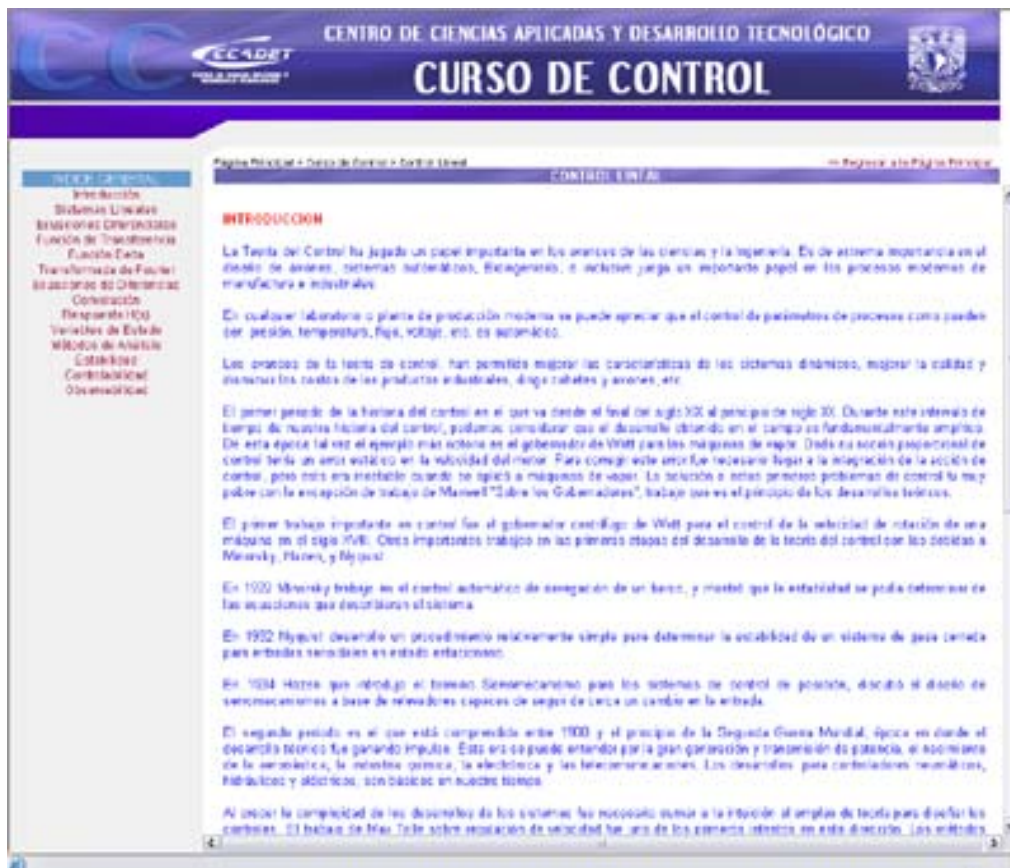
Pantalla de entrada



Pantalla de la Introducción



Pantalla de Fundamentos Físicos



Pantalla de control lineal



Pantalla de Sistemas Dinámicos

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
CURSO DE CONTROL

Página 1 de 1

INDICE
Introducción
Métodos de Análisis
Estabilidad
Control Lineal
Métodos de Aproximación

SISTEMAS NO LINEALES

SISTEMAS NO LINEALES

Cuando estudiamos un sistema físico, lo que buscamos es construir un modelo matemático, pero el modelo matemático que mejor describe al sistema depende de los factores físicos que incluyen interactúan de variables, consideraciones sobre de las propiedades del sistema y sus acoplamientos. Como se ve, modelar es un problema que no es lineal, que requiere entender al sistema antes de modelarlo. Estas notas para un curso con el estudio de los modelos matemáticos de los sistemas físicos pero se describen por medio de ecuaciones diferenciales no lineales.

Vamos ejemplos. Como primer caso vamos a estudiar un péndulo simple, el cual se describe por medio de la ecuación diferencial:

$$I \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \right) = 0$$

donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración gravitacional.

Si hacemos la aproximación para ángulo pequeño de que:

$$\sin \theta \approx \theta$$

la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$I \ddot{\theta} + m^2 \theta = 0$$

La ecuación en esta ecuación es:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

donde A y ω son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Esta ecuación diferencial describe un movimiento armónico simple y es un ejemplo de ecuación diferencial lineal.

Las ecuaciones diferenciales lineales diferenciales lineales tienen la propiedad de superposición, propiedad que podemos definir como:

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial, entonces $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ también será una solución de la ecuación diferencial, donde α y β son constantes arbitrarias, el sistema es lineal.

Si simplificamos la ecuación:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Pantalla de Sistemas no Lineales

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO
CURSO DE CONTROL

Página 1 de 1

INDICE GENERAL
Introducción
Métodos Clásicos
Identif. de Modelos Lineales
Modelos que Aprenden
Teoría de Wiener

IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

INTRODUCCIÓN

Muchos problemas en Ingeniería de Control, particularmente aquellos relacionados con sistemas de control, se pueden dividir en cuatro partes elementales:

1. Identificación de la meta.
2. Determinación de la posición con respecto a la meta.
3. Determinación de los factores externos que afectan al proceso, el presente, el futuro y el comportamiento estocástico del sistema.
4. Determinación de una política de acción con la definición de la meta (1), conocimiento del estado actual (2) y modelo del sistema y del ambiente.

A medida la política en el paso (4) está determinada por una acción óptima, en cuyo caso aparece el objeto del control óptimo de un sistema.

En general nuestro problema es como sigue: Usaremos la versión modificada de un vector de estado $X(t)$ de un sistema modificado por el ruido, una señal de entrada $U(t)$ y un disturbio de estado $W(t)$:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + W(t)$$

En este modelo conocido $A(t)$ representa parámetros desconocidos del sistema y $W(t)$ representa el ruido observado. El vector de estado $X(t)$ assume la forma de una ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)U(t) + W(t)$$

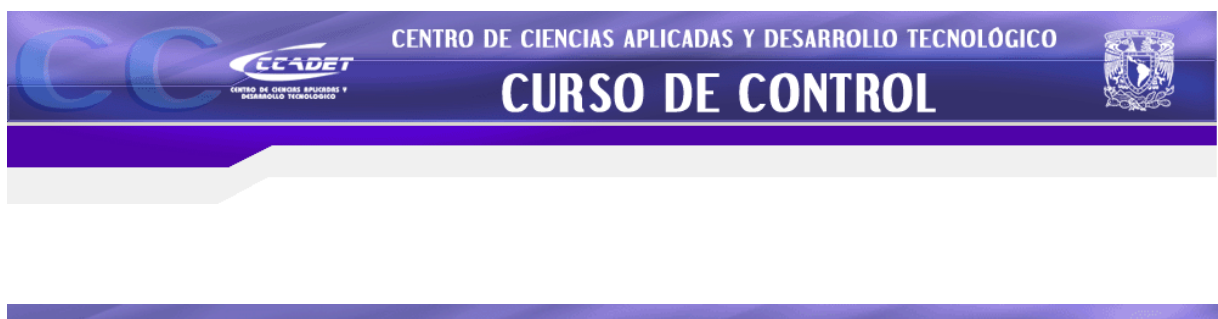
En general se desconoce el orden de la ecuación diferencial, pero para la mayoría de los ejemplos de identificación que presentaremos tomamos modelos de orden conocido. El problema general de identificación lo presentamos en la figura (1) esquemáticamente.

Pantalla de Identificación de Sistemas



Pantalla de Control Óptimo

En las siguientes figuras se presentan la portada gráfica y la banda de títulos del sistema.



Portada y Banda

3. CÓDIGOS

En esta parte se presentan todos los códigos de las diferentes partes del curso de control.

3.1 INTRODUCCIÓN

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="prefcurso_archivos/filelist.xml">
<title>PREFACIO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>4</o:Revision>
<o:TotalTime>89</o:TotalTime>
<o:Created>2007-05-11T17:55:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-05-12T01:05:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>390</o:Words>
<o:Characters>2148</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>17</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2533</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
```

```

margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
@page Section1
{size:612.0pt 792.0pt;
margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="7170"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:red;mso-ansi-language:
ES-TRAD'>PREFACIO<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>En casi todo lo que vivimos,
as&iacute; como en el &aacute;mbito de la ciencia, la electr&oacute;nica est&aacute; presente,
podr&iacute;amos asegurar que la vida actual, como la entendemos, no podr&iacute;a existir

```


sin la participación de la electrónica, por lo que estudiarla y entenderla es fundamental para poder desarrollar la tecnología actual.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El énfasis del curso está colocado en lo fundamental, ya que considero que si se entienden los conceptos fundamentales, los estudiantes estarán preparados para resolver los problemas de diseño de muchas aplicaciones novedosas con las que se encontrarán en su desarrollo profesional. Es muy claro para mí que no sería muy útil un curso que estudiara a detalle cada dispositivo electrónico, ya que sería equivalente a darlo por obsoleto antes de terminarlo, además de ser muy extenso, pero lo que sí creo es que los estudiantes podrán abordar cualquier dispositivo si maneja conceptual y formalmente un conjunto de principios básicos de la electrónica. Para esto se ha desarrollado el curso tratando de presentar este conjunto de principios básicos desde un nivel elemental en el curso de electrónica básico, hasta un nivel avanzado en el curso de electrónica avanzada.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Por este motivo el curso, con todas sus ayudas está dividido en tres cursos, el Curso Básico de Electrónica, el Curso Intermedio de Electrónica y el Curso avanzado de Electrónica. Así partimos de modelos muy sencillos en el curso básico, para llegar a través del curso intermedio al completo formalismo de estos principios en el curso avanzado. También las ayuda correspondiente a electricidad y matemáticas, siguen el mismo modelo.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Quiero agradecer a mi amada esposa Roxanna por su comprensión y motivación para logra este curso, si ella esto nunca lo habría logrado. A mi alumno y colega M en I Antonio Garcés Madrigal por su colaboración invaluable en el curso, por lo que es en todo momento coautor de él. A la D.G. Alma Rivas Rangel por el diseño de las portadas de las páginas. También quiero agradecer la colaboración y participación de una gran cantidad de alumnos que han permitido la mejora y crecimiento de este curso, así como a la Universidad Nacional Autónoma de México desde la cual hemos podido generar este material de Educación a distancia que consideramos, como Académicos de Ella, nuestra labor fundamental. Creemos que la investigación y el desarrollo tecnológico, que realizamos en el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, deben fundamentalmente servir para educar mejor a nuestros estudiantes, ya que ésta es la misión fundamental de la Universidad pública. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>José Luis Pérez Silva.<o:p></o:p></p></td>

</tr>

</table>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p></o:p></p></div>

</body>

</html>

3.2 INTRODUCCIÓN. MARCO 1

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    background-image: url();
    margin-left: 0px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style2 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
a:link {
    color: #FFFFFF;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    color: #FFFFFF;
    text-decoration: none;
}
a:hover {
    color: #FF0000;
    text-decoration: none;
}
a:active {
    color: #FFFFFF;
    text-decoration: none;
}
.style3 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif}
.style4 {color: #FFFFFF}
-->
</style></head>

<body>
<table width="994" height="149" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
background="figuras/control.gif">
<tr>
<td width="289" height="20" align="left" valign="top">&nbsp;  </td>
</tr>
</table>
</body>
</html>
```

3.3 INTRODUCCIÓN. MARCO 2

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
```

```

<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #999999;
}
-->
</style></head>

<body>
</body>
</html>

```

3.4 INTRODUCCIÓN. MARCO 3

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    margin-left: 20px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 10px;
    margin-bottom: 0px;
}
-->
</style></head>

<body>
</body>
</html>

```

3.5 INTRODUCCIÓN. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
-->
</style></head>

<body>
</body>
</html>

```

```

}
.style13 {
    color: #FFFFFF;
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
}
a:link {
    color: #FFFFFF;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #FFFFFF;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
-->
</style></head>

<body>
<table width="785" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
  <tr>
    <td width="792"><span class="indicador style4 style12">P&acute;gina Principal &gt; Curso
de Control</span></td>
  </tr>
  <tr>
    <td align="center" valign="middle" background="figuras/control2.gif"><div align="center"
class="titulogrande style5 style13"><strong>CURSO DE CONTROL </strong></div></td>
  </tr>
</table>
<div align="left"></div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.6 INTRODUCCIÓN. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 12px;
    font-weight: bold;
    color: #0000CC;
}

```

```

}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
a {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 12px;
}
.style14 {
    color: #FFFFFF;
    font-size: 10pt;
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td><div align="center"><span class="style14">INDICE GENERAL </span></div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="fundmate/fundmaticos.htm" target="_parent">Fundamentos Matem&aacute;ticos
</a></span></div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="fundfisicos/fundfisicos.htm" target="_parent">Fundamentos F&iacute;sicos
</a></span></div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="control%20lineal/controllineal.htm" target="_parent">Control Lineal
</a></span></div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="sistemas/sisdinamico.htm" target="_parent">Sistemas</a></span></div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="sisnolin/sistnolineal.htm" target="_parent">Sistemas no Lineales </a></span></div></td>
</tr>

```

```

<tr>
  <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="identsist/identifsist.htm" target="_parent">Identificaci&oacute;n de Sistemas
</a></span></div></td>
</tr>
<tr>
  <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><span class="style14"><a
href="contro%20optimo/controloptin.htm" target="_parent">Control Optimo
</a></span></div></td>
</tr>
</table>
<p class="style1">&nbsp;</p>
</div>
</body>
</html>

```

3.7 INTRODUCCIÓN. MARCO 6

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>

<body>
</body>
</html>

```

3.8 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. INTRODUCCION

```

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="Introfundmat_archivos/filelist.xml">
<title>En este capítulo revisaremos toda una gama de conceptos y métodos
matemáticos que se requieren para comprender los fundamentos</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
  <o:Revision>2</o:Revision>
  <o:TotalTime>2</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-20T21:44:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-23T18:07:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>57</o:Words>
  <o:Characters>319</o:Characters>
  <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
  <o:Lines>2</o:Lines>

```

```

<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>375</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

```

```

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:0cm 0cm 0cm 0cm'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:0cm 0cm 0cm 0cm'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-family:Arial;color:red'>INTRODUCCION</span></b></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-family:Arial;color:red'><o:p>&nbsp;</o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>En este
capítulo revisaremos toda una gama de conceptos y métodos matemáticos que se
requieren para comprender los fundamentos de la teoría de control que
estudiaremos en este curso. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos
encontrar la teoría de conjuntos, espacios vectoriales, valores propios,
ecuaciones diferenciales, formas cuadráticas y otros.</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;mso-ansi-language:
ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

```

3.9 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. INTRODUCCION. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {

```



```

        text-decoration: none;
        color: #990033;
    }
    a:hover {
        text-decoration: none;
        color: #0000FF;
    }
    a:active {
        text-decoration: none;
        color: #FF0000;
    }
    .style16 {
        font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10pt;
        font-weight: bold;
        color: #FFFFFF;
    }
    .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10pt;
        color: #000000;
        font-weight: bold;
    }
    .style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
    <tr>
        <td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
        Curso de Control &gt; Fundamentos Matem&acute;ticos </span></td>
        <td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href=" ../cursocontrol.htm"
        target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
    </tr>
</table>
<div align="left">
    <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
        <tr>
            <td width="789" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
            class="style16">FUNDAMENTOS MATEMATICOS &cdot;TEORIA DE CONJUNTOS
            </span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
        <tr>
            <td><table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
            bordercolor="#FFD7FF">
                <tr bgcolor="#FFE6FF">
                    <td width="278"><div align="center"><span class="style4"><a href="ecuadifvect.htm"
                    target="mainFrame">Ecuaciones Diferenciales Vectoriales </a></span></div></td>
                    <td width="162"><div align="center"><span class="style4"><a href="casoestacionario.htm" target="mainFrame">Caso Estacionario </a></span></div></td>
                    <td width="183"><div align="center"><span class="style4"><a href="casoestacionario.htm" target="mainFrame">Caso no Estacionario
                    </a></span></div></td>
                    <td width="166"><div align="center"><span class="style4"><a href="formascanonicas.htm" target="mainFrame">Formas Can&acute;nicas
                    </a></span></div></td>
                </tr>
            </table></td>
        </tr>
    </table></div>

```

```

    </tr>
  </table>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.10 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. INTRODUCCION. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Fundamentos Matem&acute;ticos</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 12px;
    font-weight: bold;
    color: #0000CC;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
a {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 12px;
}
.style14 {
    color: #FFFFFF;
    font-size: 10pt;
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">

```

INDICE GENERAL
 Introducci&oslash;n
 Teor&iacute;a de Conjuntos
 Espacios Vectoriales Finitos
 Ec. Diferenciales Vectoriales
 Diferen. Formas Cuadr&aacute;ticas
 Ec. C&uacute;bicas y Cu&aacute;ticas
 Ec. Diferenciales Lineales
 Fracci&oslash;n Impropia
 Ec. Integrodiferenciales
 Matrices

3.11 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. TEORIA DE CONJUNTOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```

```

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="teoriaconjuntos_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="teoriaconjuntos_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="teoriaconjuntos_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>TEORIA DE CONJUNTOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>9</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T21:45:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-23T18:16:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1547</o:Words>
<o:Characters>8510</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>70</o:Lines>
<o:Paragraphs>20</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>10037</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;

```

```

        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
p
    {font-size:12.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
p.style1, li.style1, div.style1
    {mso-style-name:style1;
    mso-margin-top-alt:auto;
    margin-right:0cm;
    mso-margin-bottom-alt:auto;
    margin-left:0cm;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:9.0pt;
    font-family:Arial;
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    color:white;
    font-weight:bold;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
    {mso-list-id:1260873101;
    mso-list-type:simple;
    mso-list-template-ids:201981967;}
@list l0:level1
    {mso-level-tab-stop:18.0pt;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:18.0pt;
    text-indent:-18.0pt;}
ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;

```

```

        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
  <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:
ES-TRAD'>TEORIA DE CONJUNTOS</span></b></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>La idea que se
encuentra detrás del concepto de conjunto es básica para poder definir
después otras ideas fundamentales. Una colección bien conocida de objetos se
conoce con el término de conjunto. Un conjunto X se escribe de la
forma:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:39pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

```

$$x \cup y = \{x, y\}$$

donde x y y representan los elementos del conjunto. La notación $x \in A$ indica que x es un elemento de A y la notación $y \in A$ indica que y no es un elemento de A .

Otra representación muy usada de un conjunto X es la siguiente:

$$X = \{x, y\}$$

que

nos dice que el conjunto X representa a todos los elementos x que tengan la propiedad $P(x)$. Un ejemplo es:

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:109.5pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image005.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109847"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>que representa al conjunto de puntos que caen dentro de una circunferencia de radio unitario con centro en el origen, como lo indica la figura.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:122.25pt;height:116.25pt'><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image007.png" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El conjunto cuyos elementos son puntos en un espacio vectorial de dimensión finita se le llama conjuntos de puntos.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>PROPIEDADES BASICAS Y OPERACIONES<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Un conjunto formado por elementos de otro conjunto se llama un subconjunto. Decimos que un conjunto Y es un subconjunto de X si todos los elementos de Y están en X , pero no todos los elementos de X están en Y . La notación que se emplea es la siguiente:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Se dice que dos conjuntos X y Y son iguales si contienen los mismos elementos. Lo anterior significa que $X = Y$ si y solo si $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq X$.

Definimos la unión de dos conjuntos X y Y como un nuevo conjunto Z tal que contiene a todos los elementos de X y a todos los elementos de Y . El símbolo para representar la unión de conjuntos es $X \cup Y$.

La intersección de dos conjuntos X y Y es un nuevo conjunto Z tal que contiene todos los elementos que están tanto en X como en Y . El símbolo para representar la intersección de dos conjuntos es $X \cap Y$.

lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El conjunto de puntos: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:164.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109849"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>describeuna línea recta que pasa por los puntos x_1 y x_2 en un espacio euclidiano E^n , en el cual x_1 ¹ x_2 </p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El conjunto de puntos: <o:p></o:p></p>

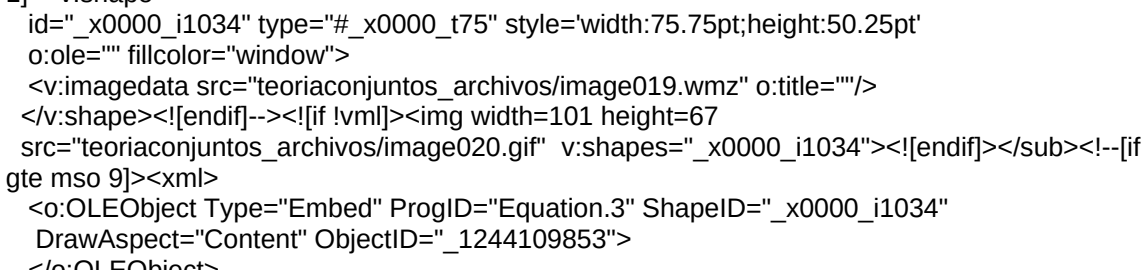
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:173.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109850"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span

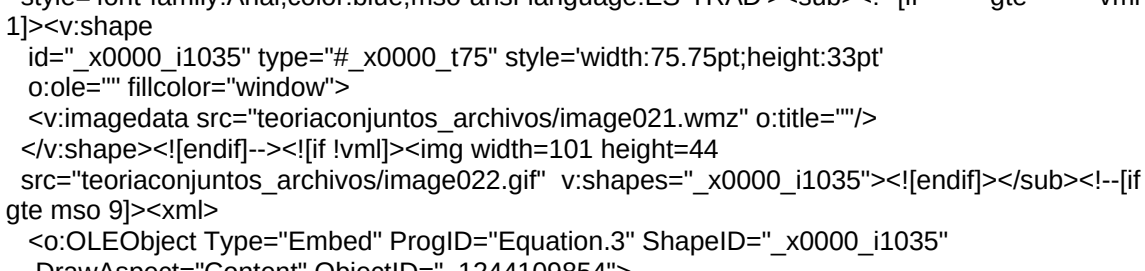
= c en un espacio euclidiano E lo divide en tres conjuntos mutuamente exclusivos que son:

1)



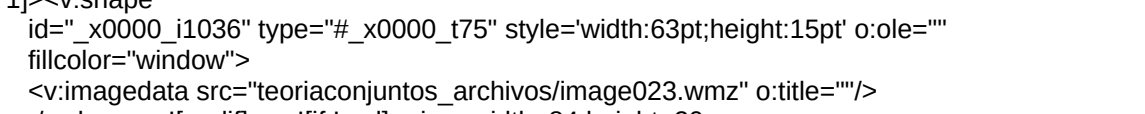
Los espacios X_1 y X_3 describen mitades de espacios abiertas, mientras que los conjuntos:

1)



describen mitades de espacio cerradas. Podemos notar que:

1)



src="teoriaconjuntos_archivos/image024.gif" v:shapes="_x0000_i1036"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109855">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>En el espacio
 euclidiano E^n , se necesitan n puntos para determinar un hiperplano, por lo que un conjunto arbitrario de n puntos
 no da una única definición. Sólo un conjunto de n puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ que se
 puedan numerar de forma tal que $n - 1$ vectores $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$ sean linealmente independientes, describe un hiperplano
 único. </o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Cualquier
 punto x en el hiperplano tiene la propiedad que $x - x_1$ se puede
 escribir como una combinación lineal de $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_n - x_1\}$.
 Si se hace: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape
 id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:84pt;height:30.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image025.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109856">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

donde $\vec{a}$ representa la magnitud del vector $\vec{n}$, la ecuación del hiperplano se reduce a:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = c$$

donde $c = \vec{a} \cdot \vec{n}$.

En el espacio euclidiano E^n , la distancia del hiperplano

$$d(\vec{x}, H) = \frac{|\vec{x} \cdot \vec{n} - c|}{\|\vec{n}\|}$$

a un punto $\vec{x}$ es:

Dos hiperplanos son paralelos si tienen la misma normal unitaria, es decir los hiperplanos

$$\vec{x} \cdot \vec{n}_1 = c_1 \quad y \quad \vec{x} \cdot \vec{n}_2 = c_2$$

son paralelos si:

$$\vec{n}_1 = k \vec{n}_2$$

<o:p> </o:p></p>

E^n con centro en a y radio $r > 0$, por lo que la ecuación de una hiperesfera en E^n es:<o:p></o:p></p>

1]

id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:75pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image037.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109862">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Decimos que un punto x se llama un punto interior a un conjunto X si existe una vecindad alrededor de x que contenga sólo puntos que están en el conjunto X . Si cualquier vecindad e alrededor del punto x contiene puntos que están en el conjunto X y puntos que no están en el conjunto, el punto x se denomina un punto frontera del conjunto X .</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Un conjunto X que tenga todos sus puntos frontera se llama un conjunto cerrado. Un conjunto x que contenga sólo puntos interiores es un conjunto abierto. Si cualquiera dos puntos en un conjunto abierto se pueden unir por una trayectoria poligonal que caiga totalmente dentro del conjunto, se dice que es un conjunto conectado.</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Para un conjunto X si existe un vector **c de un número finito de componentes, tal que **x I X y |<b style='mso-bidi-font-weight:normal'> x | E |<b style='mso-bidi-font-weight:normal'> c |, decimos que el conjunto está acotado por delante. Si existe un vector **c de un número finito de componentes, tal que **x EE</p>********

conectado.

Un punto x de un conjunto convexo X se llama punto extremo si y sólo si no existen puntos x_1 , x_2 en el conjunto tal que:

$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$

Un punto se llama una combinación convexa de un número finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_m$ si se puede describir por:

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$

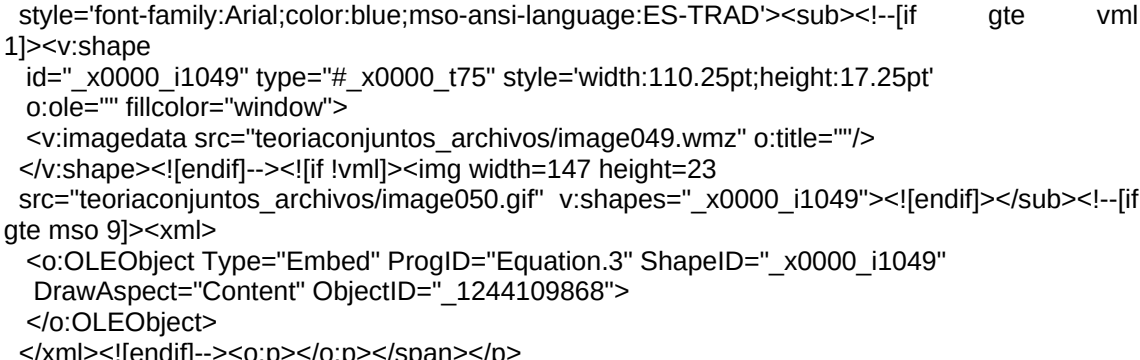
Esta definición nos dice que los puntos extremos no pueden caer entre otros dos puntos del conjunto, en otras palabras no puede caer en el segmento de recta que une los dos puntos. Un punto extremo es un punto frontera del conjunto, pero no todos los puntos frontera de un conjunto convexo son necesariamente puntos extremos.

Un punto se llama una combinación convexa de un número finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_m$ si se puede describir por:

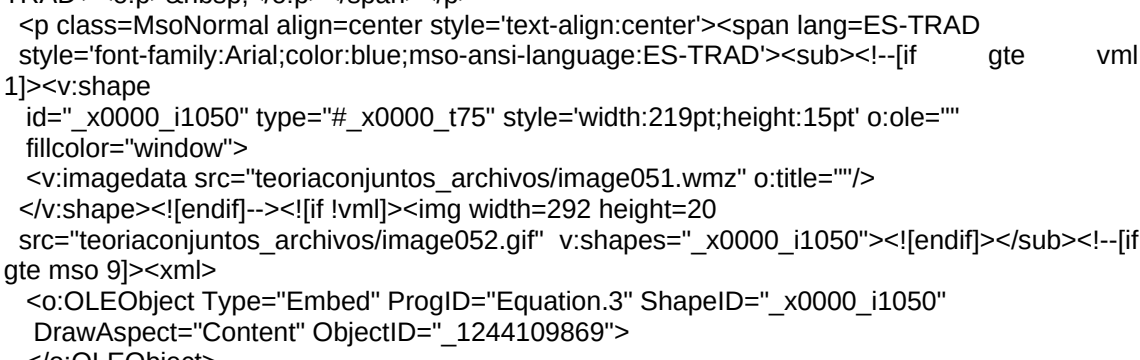
$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$

</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La ecuación anterior implica que la combinación convexa de m puntos puede ser ligada al centro de masa de estos puntos, en los cuales la masa asignada a cada punto es una fracción de la masa total. El conjunto de todas las combinaciones convexas de un número finito de puntos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x₁,<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x₂,...,<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x_mx_m se puede escribir de la forma:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:176.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image045.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109866"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>quees un conjunto convexo.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La cáscara convexa de un conjunto Y se define como el menor conjunto convexo X que contiene al conjunto Y. Como ejemplo sea el conjunto de puntos<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:110.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109867"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

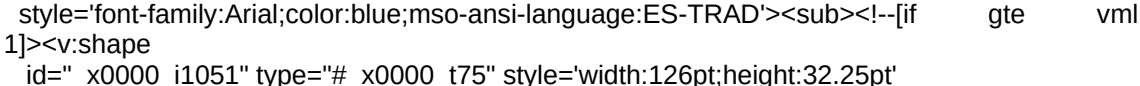
que describe una circunferencia unitaria con centro en el origen. De acuerdo con nuestra definición de cáscara convexa, la cáscara convexa del conjunto Y será el conjunto



La cáscara convexa de dos puntos distintos x y y es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos



Un poliedrón convexo generado por un conjunto finito de puntos se define como la cáscara convexa de esos puntos. El poliedrón convexo generado por m puntos no puede tener más que m puntos extremos ya que es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los m puntos. Cualquier punto x en un poliedrón convexo se puede describir por una combinación convexa de los puntos extremos del poliedrón, luego:



o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image053.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109870">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]></o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'>donde<span
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>
el punto x_k* posiciona los puntos
extremos. Se puede ver que no todo conjunto convexo con un número finito de
puntos extremos tiene la propiedad de que cualquier punto en el conjunto se
puede describir por una combinación convexa de los puntos
extremos.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si tenemos que
los puntos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x de un conjunto X son
tales que si <span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b<span
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>x
para toda <span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b<span
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>
<span
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>³<span
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>
0, luego el conjunto X = {<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x}
genera un cono C. Podemos definir un cono C por el conjunto de puntos tales
que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
gte mso 9]><v:shape
id="_x0000_i1052" type="#_x0000_t75" style='width:164.25pt;height:15pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image055.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109871">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Un cono contiene por elemento el punto 0 que se llama vértice. El negativo de un cono $C = \{-y\}$ es el conjunto de puntos $C^{\sup} = \{-y\}$. La suma de dos conos $C^{\sup}_1 = \{a\}$ y $C^{\sup}_2 = \{b\}$ se denotas por $C^{\sup}_1 + C^{\sup}_2$, que es el conjunto de puntos $a + b$ tales que a ³Î $C^{\sup}_1$ y b Î $C^{\sup}_2$ </p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Se puede mostrar que el subespacio más pequeño contenido en un cono convexo C es $C + C^{\sup}$ </p>
El cono polar de un cono C se define como una conjunto de puntos $\{<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>b\}$ tales que <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>b<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>a ³ 0 para cada <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>b en el conjunto y toda <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>a Î C . En el caso bidimensional el cono polar está formado por las medias líneas perpendiculares al ancho del cono en el origen, como se ve en la figura.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:227.25pt;height:129.75pt'><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image057.png" o:title=""></v:shape></p>

lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>

³

0.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El cono convexo tiene la propiedad de que la suma de dos conos convexos es también un cono convexo.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La definición de cono convexo<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1055" type="#_x0000_t75" style='width:164.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image061.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109873"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>sugiere que las medias líneas se pueden definir como un conjunto tal que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1056" type="#_x0000_t75" style='width:102.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image062.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109874"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span

lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p es el principio para un simple punto y p ¹ 0. El cono polar de una semilínea es un semiespacio abierto que contiene al origen 0 en su hiperplano frontera y que se describe por el conjunto:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teoriaconjuntos_archivos/image064.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]-->}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109875"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Por lo tanto el cono polar H de la semilínea L es el conjunto de puntos m tales que m^{T}y³ 0 para toda y í L.<o:p></o:p></p>

El concepto de semilínea se puede usar para describir un cono poliédrico convexo, el cual definiremos como la suma de un número finito de semilíneas, luego:

$$L = \sum_{i=1}^n C_i$$

donde C_i es un cono poliédrico convexo.

Si el punto genera la semilínea L, el conjunto de puntos

el cono poliédrico convexo C. El cono generado por un poliedro convexo es un cono poliédrico convexo.

Si

style='mso-bidi-font-weight:normal'>A es una matriz m 'n que se puede escribir como<o:p></o:p></p>

m '1, el conjunto de puntos<o:p></o:p></p>

C si éste es generado por el conjunto de todos los


```

<link rel=OLE-Object-Data href="espacvectfinit_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>7</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T23:16:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-23T18:14:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1190</o:Words>
<o:Characters>6550</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>54</o:Lines>
<o:Paragraphs>15</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>7725</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
a: hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}

/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES;}
a:link, span.MsoHyperlink

```



```

        {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
    <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX link="#990033" vlink="#990033" style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

    <span style='font-size:12.0pt;display:none;mso-hide:all;
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span>
    <table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
    style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
    <tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
    <td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:
ES-TRAD'>ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA<o:p></o:p></span></b></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
    style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
    style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
    style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
    gte
    vml
    1]><v:shapetype
    id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
    path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

```

```

<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
  <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
  <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
  <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
  <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
  <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
  <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
  <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
  <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
  <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
  <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
  <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
  <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:66pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
  <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image053.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
  <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
  DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109674">
  </o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Los números  $x_k$ 
se llaman componentes del vector a lo largo de los ejes de coordenadas.
Podemos escribir los vectores como matrices renglón o columna, así para un
vector de n dimensiones podemos escribir:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
gte mso 9]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
  <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image054.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
  <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
  DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109675">
  </o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>como una
matriz renglón, o:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
gte mso 9]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:41.25pt;height:63pt'
o:ole="" fillcolor="window">
  <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image055.wmz" o:title=""/>

```


</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109676">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las x_k ,
que son las componentes del vector son números reales.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a
definir algunos de los vectores básicos que emplearemos en esta sección. Un
vector nulo lo definimos como un vector en el cual todas sus componentes son
cero. Este vector se simboliza por **0**
y se representa de la forma:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
gte vml
1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:33.75pt;height:60.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image056.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109677">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Un vector
unitario se define como aquel en el cual una de sus componentes es uno y las
otras componentes son cero. El símbolo empleado para el vector unitario es **e**
 e_k y se emplea para
representar un vector unitario en una de las k dimensiones del
espacio.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
gte vml
1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:39pt;height:60.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image057.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109678">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Un vector suma se define como un vector renglón con todos sus componentes iguales a uno, lo que es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:54pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image058.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109679">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Este vector renglón se llama vector suma, porque la matriz producto del vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>1 con el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>a = [a₁, a₂, ..., a_n]^T nos da la suma:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:27pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image059.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109680">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Las operaciones básicas con vectores son las siguientes:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

SUMA DE VECTORES

La operación más simple entre dos vectores es la suma, la cual podemos definir de la siguiente forma: sean dos vectores:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

la suma $\vec{a} + \vec{b}$ será:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

La siguiente operación es la sustracción. El vector sustracción lo definiremos como:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La siguiente operación básica es la multiplicación por un escalar d , la cual definimos de la forma:

$$d \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Se puede decir que dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales, por lo que $x = y$ y $x_{\substack{k \\ k}} = y_{\substack{k \\ k}}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. En el caso de las desigualdades podemos decir que

$x < y$ si $x_{\substack{k \\ k}} < y_{\substack{k \\ k}}$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

En el caso de las desigualdades podemos decir que

$x > y$ si $x_{\substack{k \\ k}} > y_{\substack{k \\ k}}$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>>>y_k <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x £ <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y si x_k £y_k y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x < <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y si x_k <y_k, donde k = 1, 2, ..., n.<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La operación producto interno de dos vectores, es la función escalar más importante de dos vectores. Definimos el producto interno de dos vectores de la forma:<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image064.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if vml]><!--[endif]-->}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109685"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La importancia del producto interno es que al realizarse sobre un mismo vector (<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x), obtenemos el cuadrado de su magnitud. De la definición de producto interno podemos ver que las siguientes propiedades se siguen de ella.<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

<o:p> </o:p></p>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109688">

</o:OLEObject>

</xml><![endif--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Distancia. La distancia de un vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x a un vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y se define como:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:114.75pt;height:21.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image067.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif--><![if !vml]><![endif>}<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109689">

</o:OLEObject>

</xml><![endif--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y posee las siguientes propiedades:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:99.75pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image068.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif--><![if !vml]><![endif>}<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109690">

</o:OLEObject>

</xml><![endif--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Longitud. La longitud de un vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x es la distancia del origen al vector.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Desigualdad de Schwarz. Se puede mostrar que para dos vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:54pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image069.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109691"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Desigualdad del triángulo. Para cualquier par de vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image070.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109692"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Angulo. El ángulo entre dos vectores está dado por:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:102.75pt;height:99pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image071.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109693"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

<o:p> </o:p></p>

n vectores de n dimensiones, la combinación lineal de estos m vectores por cualquier escalar c_k está dada por:<o:p></o:p></p>

n vectores unitarios<o:p></o:p></p>

n dimensiones x_k en un conjunto de vectores de un espacio euclidiano E^n se dice que es linealmente dependiente de los otros vectores si x_k se puede expresar como una combinación lineal de algunos estos vectores en el conjunto. El conjunto de vectores también será linealmente dependiente. Por otro lado, si no existen vectores en el conjunto que se puedan expresar como combinación lineal de los otros vectores del conjunto, se dice que el conjunto de vectores es linealmente independiente. La condición para la dependencia lineal de un conjunto de vectores se puede definir de la siguiente forma: Sea un conjunto de vectores de n dimensiones $x_1, x_2, \dots, x_m$ del espacio euclidiano E^n . Este será linealmente dependiente si

[illegible]

m es el máximo número de vectores linealmente independientes en el conjunto, cualquier otro vector se podrá expresar como una combinación lineal de estos q vectores linealmente dependientes.

El vector nulo es linealmente dependiente de cualquier otro vector en un conjunto, y el vector nulo no contiene un conjunto de vectores linealmente independientes.

Un criterio analítico para la dependencia lineal de un conjunto de vectores con componentes reales se expresa en términos del determinante Gramiano del conjunto de vectores. Si realizamos el producto escalar de $x_1, x_2, \dots, x_m$ en ambos lados de la ecuación anterior, encontramos que los coeficientes c_k deben satisfacer la ecuación:

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_m x_m^2 = 0$$

Esta condición nos establece que el lado derecho de la ecuación es ortogonal al vector x .

De acuerdo con la regla de Cramer, el conjunto de n ecuaciones en m coeficientes c_k tiene solución trivial si y sólo si el determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1] <v:shape id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:174pt; height:69pt' o:ole="" fillcolor="window"> <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image076.wmz" o:title="" /> </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml> <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109698"> </o:OLEObject> </xml><![endif]><o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Este determinante es el Gramiano del conjunto de vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x₁, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x₂, ..., <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x_m, por lo que se puede afirmar que un conjunto de vectores es dependiente si su Gramiano es cero. <o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El conjunto de todos vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x que se pueden expresar por la combinación lineal<o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p> <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte mso 9]><v:shape id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:1in; height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"> <v:imagedata src="espacvectfinit_archivos/image077.wmz" o:title="" /> </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml> <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109699"> </o:OLEObject> </xml><![endif]><o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p> <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>se llama el espacio vectorial generado por los vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x_k. Si q y sólo q de los m vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x_k se pueden escribir como una combinación lineal, se dice que el conjunto de vectores es de rango q. Cuando q <$$

m se nota que $m - q$ de los vectores $\mathbf{x}$ se pueden escribir como una combinación lineal de los q vectores independiente, y la ecuación anterior se puede escribir como la combinación de sólo q vectores linealmente independientes, así que sólo son posibles q coeficientes independiente de la combinación.

En un espacio de n dimensiones se puede generar cualquier vector $\mathbf{x}$ de rango n en la forma:

$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^q \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=q+1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$

donde n vectores $\mathbf{v}_k$ son linealmente independientes.

3.13 ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">
```

```
<head>
```

```

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=iso-8859-1">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuadifvect_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuadifvect_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuadifvect_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES </title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T23:31:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T23:32:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>116</o:Words>
<o:Characters>641</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>5</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>756</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";

```

```

        mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
}
.style4 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>
<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES

```

ECUACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES

Veamos la siguiente ecuación diferencial en notación vectorial

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

donde

en un proceso de control tenemos que

A

D es la matriz de coeficientes del proceso
 X es la matriz de manejo
 M es el vector de estado del proceso
 t es el vector de control
 n es el vector de disturbio.

Si el proceso de control es de orden n , la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada $n \times n$. El proceso que nos describe la ecuación diferencial, es lineal y estacionario. Cuando las matrices A y D son funciones de parámetros azarosos del proceso, decimos que se tiene un sistema de parámetros azarosos. El análisis y diseño del sistema de control requiere de la solución de la ecuación diferencial.

3.14 DIFERENCIACION DE UNA FORMA CUADRATICA

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```

```

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="diferenformacuadrat_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="diferenformacuadrat_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="diferenformacuadrat_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>DIFERENCIACION DE UNA FORMA CUADRATICA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-23T18:11:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-23T18:11:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>140</o:Words>
<o:Characters>773</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>6</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>912</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;

```

```

        font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
        mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:red'>DIFERENCIACION DE UNA FORMA
CUADRATICA<o:p></o:p></span></b></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'>Diferenciaci&ocute;n con respecto a un escalar. Sea:<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
        <!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
        coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
        path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
        filled="f" stroked="f">
        <v:stroke joinstyle="miter"/>
        <v:formulas>

```

```

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:117pt;
height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109416">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'>la</span></span><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'> derivada de Q(x) con respecto a <span
class=SpellE>x<sub>k</sub></span> es:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026"
type="#_x0000_t75" style='width:261.75pt;height:87pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109418">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'>Por lo que la derivada se puede expresar en forma matricial
como:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$$

La derivada de $Q(x)$ con respecto a x es igual a la suma del renglón n de la columna de vectores A y B anterior si $A = B$, entonces:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$$

Derivación con respecto a un vector. Sea el vector x dado por:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$$

src="diferenformacuadrat_archivos/image010.gif" v:shapes="_x0000_i1029">
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109421">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'> el operador derivador dado por:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030"
 type="#_x0000_t75" style='width:51pt;height:93pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109422">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
 Arial;color:blue'>Ya que $Q(x) =$ <b style='mso-bidi-font-weight:
 normal'>x'Ax</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031"
 type="#_x0000_t75" style='width:137.25pt;height:93pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109423">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'>pero<span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'> como<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032"
 type="#_x0000_t75" style='width:102.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109424">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'>se<span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'> reduce a:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033"
type="#_x0000_t75" style='width:174.75pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image016.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109425">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'>Por lo que la derivación de una forma cuadrática con respecto
a una variable vectorial nos lleva a la suma de dos vectores columna. En el caso especial
donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A = <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>I tenemos que:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034"
type="#_x0000_t75" style='width:54.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="diferenformacuadrat_archivos/image018.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244109426">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>

```

</body>

</html>

### 3.15 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. SOLUCION DE ECUACIONES CUBICAS Y CUARTICAS

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuacubicacuartica_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuacubicacuartica_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuacubicacuartica_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SOLUCION DE ECUACIONES CUBICAS Y CUARTICAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T00:03:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T21:45:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>271</o:Words>
<o:Characters>1491</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>12</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1759</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
```



```

 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1046756830;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:201981967;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>

```

```

<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>SOLUCION DE
ECUACIONES CUBICAS Y CUARTICAS<span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'>El problema de encontrar las raíces de las
ecuaciones cúbicas ha sido de interés desde la antigüedad. El siguiente
método se ha empleado desde hace 300 años. Consideremos la ecuación cúbica
general:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if
1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuacubicacuartica_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244035920">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

```

[illegible]

[illegible]

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Derivada:

$$\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

Por lo que las raíces son:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

Las ecuaciones de cuarto orden se resuelven reduciéndolas a una cúbica y usando los métodos anteriores. Sea la forma general:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Reagrupándola:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

src="ecuacubicacuartica\_archivos/image018.gif"

v:shapes="\_x0000\_i1033"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035928">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span lang=ES-TRAD  
 style="font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style="font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD">Ahora le añadimos una forma cuadrática a ambos  
 lados de forma de hacer del lado izquierdo un cuadrado perfecto:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style="font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span lang=ES-TRAD  
 style="font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD"><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style="width:98.25pt;height:27.75pt"  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuacubicacuartica\_archivos/image042.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035929">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style="font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD">Por lo que la ecuación llega a ser:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span lang=ES-TRAD  
 style="font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD"><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style="width:225.75pt;height:33pt"  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuacubicacuartica\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035930">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span lang=ES-TRAD  
 style="font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style="font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD">El lado derecho es un cuadrado perfecto si el  
 discriminante es cero o sí:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style="font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span lang=ES-TRAD  
 style="font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD"><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style="width:159.75pt;height:33pt"  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuacubicacuartica\_archivos/image044.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035931">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>En términos de u<sup>n</sup> tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:197.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuacubicacuartica\_archivos/image045.wmz" o:title="" /></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035932"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para resolver la ecuación de cuarto orden debemos resolver la ecuación en u para obtener las raíces u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, y u<sub>3</sub>. Cuando esto se realiza la ecuación de orden cuatro se puede escribir de la forma:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:129.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuacubicacuartica\_archivos/image046.wmz" o:title="" /></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035933"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Luego las raíces se obtienen de:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuacubicacuartica\_archivos/image047.wmz" o:title="" /></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244035934"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y de:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

```

style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml
1]><v:shape
id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:114.75pt;height:27pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuacubicacuartica_archivos/image048.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244035935">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'>Cualquiera de las u_j
nos dará las cuatro raíces.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;mso-ansi-language:
ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.16 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTANEAS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="solecuadifsimul_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="solecuadifsimul_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="solecuadifsimul_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]>
<title>SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTANEAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>

```



```

<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T00:08:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T14:30:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>436</o:Words>
<o:Characters>2404</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>20</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2835</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */

```

```

table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal> <o:p></o:p><b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-MX
style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>SOLUCIÓN DE
ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIMULTANEAS<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'>Vamos a considerar una ecuación que involucre un
operador lineal:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

```

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:71.25pt; height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268970">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Se puede escribir  $H^{(1)}$  como una combinaci&ocute;n lineal de operadores diferenciales e  
 integrales:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image032.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268971">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-  
 MX'>donde</span></span><span  
 lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> el operador <span  
 class=SpellE>D<sup>n</sup></span> es la n-<span class=SpellE>eacute;sima</span>  
 derivada y los valores negativos de n se refieren a integrales de orden -n, o sea  $D^{(1)} =$   
 </span><span lang=ES-MX style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&ograve;</span></span><span  
 class=SpellE><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:  
 ES-MX'>dt</span></span><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-MX'>. Se puede cortar la suma en  $n = 0$ , as&iacute; sin perder  
 generalidad:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

$$L\{e(t)\} = E(s) \quad \text{y} \quad L\{v(t)\} = V(s)$$

Si la transformadas de Laplace de  $e(t)$  y  $v(t)$  son:  $L\{e(t)\} = E(s)$  y  $L\{v(t)\} = V(s)$ , transformamos la ecuaci<sup>o</sup>n entera t<sup>r</sup>mino por t<sup>r</sup>mino para obtener:

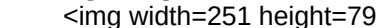
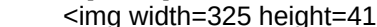
$$L\{e(t)\} = E(s) \quad \text{y} \quad L\{v(t)\} = V(s)$$

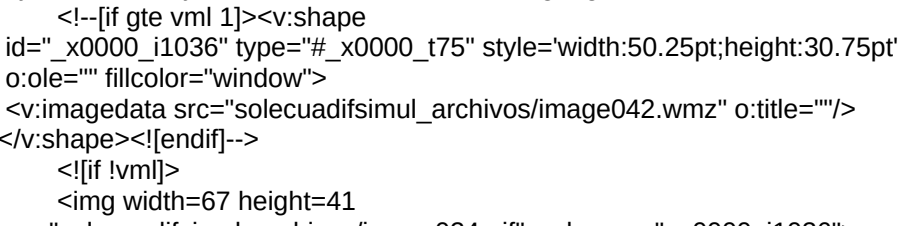
Si resolvemos para  $V(s)$  se tiene:

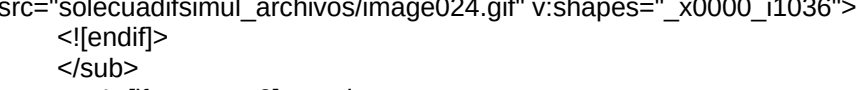
$$V(s) = \frac{E(s)}{s^2 + 2s + 1}$$

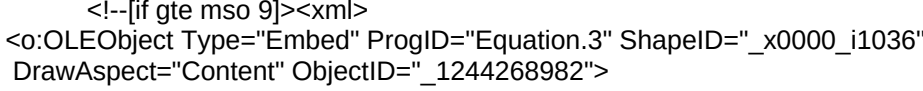
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268975">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si incluimos la integral de <span  
class=GramE>v(</span>t) en el operador H<sup>-1</sup>(t) la expresi&ocirc;n se altera de  
la siguiente forma: Consideremos la mayor integral m&uacute;liple en H<sup>-1</sup>(t) para  
ser M. El polinomio en el denominador en la derecha ser&aacute; de grado (N + M). En suma,  
los t&eacute;rminos en el numerador se multiplican por <span  
class=SpellE>s<sup>M</sup></span>, indicando que M derivaciones de la ecuaci&ocirc;n  
remover&aacute;n la mayor integral. Las condiciones iniciales de la integral tambi&eacute;n se  
incluyen en el polinomio del numerador en la derecha. Como un ejemplo sea el caso  
especial:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:135pt;height:30.75pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image036.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268976">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Despu&eacute;s de la  
transformaci&ocirc;n obtenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:249.75pt;height:29.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268977">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>donde</span></span><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image038.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268978">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si resolvemos para  $V(s)$  se tiene:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:164.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268979">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si regresamos a las formas generales de la soluci&eacute;n para  $V(s)$ , separamos los t&eacute;rminos de la derecha en dos partes. El primer t&eacute;rmino es la transformada de la soluci&eacute;n particular, y el segundo es el transitorio introducido por las condiciones iniciales:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:188.25pt;height:59.25pt'

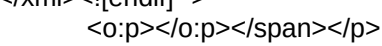
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image040.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="solecuadifsimul\_archivos/image020.gif" v:shapes="\_x0000\_i1034">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268980">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Por conveniencia son  
normalizados los coeficientes del operador  $H^{-1}(t)$ , así que  $\frac{1}{N} = 1$ . Esto nos lleva a factorizar el polinomio en el  
denominador sin renormalizar al dividir por  $\frac{1}{N}$ ,  
luego:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:243.75pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="solecuadifsimul\_archivos/image022.gif" v:shapes="\_x0000\_i1035">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268981">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Las raíces </span><span  
lang=ES-MX style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><sub><span lang=ES-MX  
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>n</span></sub><span  
lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> son las mismas que  
las </span><span lang=ES-MX style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>g</span></span><span  
lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>s empleadas  
anteriormente, luego la inversa de:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX



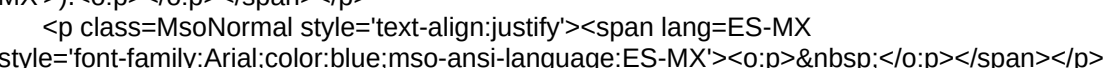


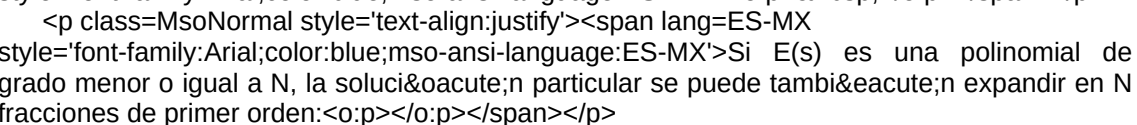


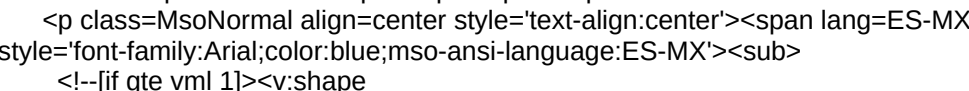


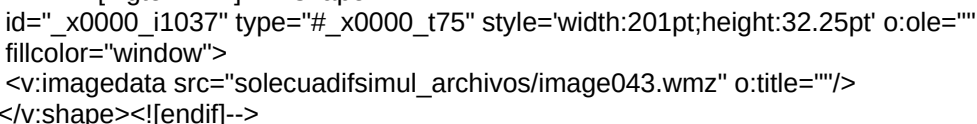


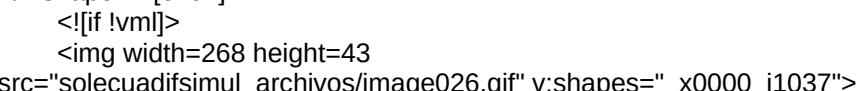


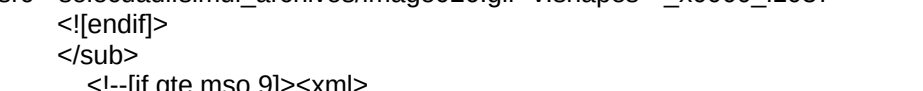


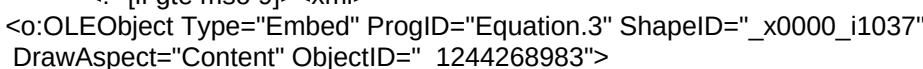
















<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>y</span></span><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:210pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image044.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268984">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Se puede obtener  $L^{<sup>-1</sup>}$  [H(<span class=GramE>E</span>)<sup>-1</sup>] sin especificar E(s) para valores especiales de E. El segundo término se expande en una serie de exponenciales, que son los modos característicos de  $H^{<sup>-1</sup>}(t)$ , con los coeficientes <span class=Spelle>A<sub>n</sub></span>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:155.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="solecuadifsimul\_archivos/image045.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244268985">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Donde se ha considerado que no hay degeneración en <span class=GramE>las <span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span

```

style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>g_n.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.17 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. LA FRACCIÓN IMPROPIA $N \geq M$

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="fraccionimpropia_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="fraccionimpropia_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="fraccionimpropia_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LA FRACCIÓN IMPROPIA $N \geq M$ </title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>José Luis Pérez S.</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>2</o:Revision>
 <o:TotalTime>3</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-21T00:20:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-21T00:20:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>132</o:Words>
 <o:Characters>728</o:Characters>
 <o:Company>CCADET</o:Company>
 <o:Lines>6</o:Lines>
 <o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>859</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>

```

```

<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:

```

normal'><span style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>LA FRACCI&Oacute;N IMPROPIA N </span></b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span></b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>M</span></b><span style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Cuando la potencia en el numerador es mayor o igual a la mayor potencia en el denominador, la soluci&oacute;n contiene la funci&oacute;n delta y derivadas de ella. Este no es un resultado f&iacute;sico y no se encuentra excepto en pocos problemas idealizados para los cuales  $M = N$ . Consideremos:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:141pt; height:59.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image001.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872912"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span><span style='font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp;</span>con N </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span style='font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'> M.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span

<o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align: justify'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'>Evaluamos esta funci&ocirc;n como una serie de potencias en s m&aacute;s un conjunto de N fracciones parciales desdoblado los primeros (M - N + 1) t&eacute;minos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:153pt; height:59.25pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872913">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align: justify'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'>Podemos factorizar el primer numerador para obtener:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align: justify'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt; height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872914">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align: justify'><span class=GramE><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'>luego</span></span><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span style='font-family: Arial; color: blue; mso-ansi-language: ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt; height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!-->  
<![if !vml]>  
  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872915">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>donde</span></span><span  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
 style='font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:141pt;height:63pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872916">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 , para k </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
 ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span><span  
 style='font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'> 0<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>y</span></span><span  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:62.25pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872917">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-family:Arial;  
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Los <span class=Spelle>B<sub>k</sub></span> son  
 los coeficientes propios:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:135.75pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872918">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La inversi&oacute;n de los t&eacute;rminos <span class=SpellE>s<sup>l</sup></span> da la l-<span class=SpellE>&eacute;sima</span> derivada de </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>(t), por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:149.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="fraccionimpropia\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243872919">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 </div></td>
 </tr>
 </table>
 </body>
 </html>

### 3.18 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES SIMULTANEAS

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuaintegrodife_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuaintegrodife_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuaintegrodife_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES SIMULTANEAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>33</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T00:20:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-21T00:53:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>682</o:Words>
<o:Characters>3751</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>31</o:Lines>
<o:Paragraphs>8</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4425</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
```



```

<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>ECUACIONES INTEGRO-
DIFERENCIALES SIMULTANEAS<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

```

Podemos dar el paso de enfocar nuestra atención en problemas que involucren más de una gasa de Maxwell. La declaración inicial de un problema que involucre N gasas y N gasas de corriente consiste en N ecuaciones integro-diferenciales de N incógnitas. La transformada de Laplace de las N ecuaciones las convierte en un sistema de N ecuaciones algebraicas de N incógnitas.

Para tener un ejemplo sencillo analizaremos un circuito simple de dos gasas con dos variables desconocidas como el de la figura.

Las ecuaciones de Maxwell para este circuito son:

```

<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874986">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:161.25pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874987">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las transformadas de Laplace de estas dos ecuaciones son las
siguientes:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:4in;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874988">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<span lang=ES-TRAD

```

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:212.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="ecuintegrodife\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243874989">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>La carga inicial en C<sub>12</sub> es <span class=GramE>q<sub>0</sub></span>(0+) = q<sub>1</sub>(0+) - q<sub>2</sub>(0+). Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma simbólica de la siguiente manera:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:168.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="ecuintegrodife\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243874990">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:173.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="ecuintegrodife\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874991">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'>Estas ecuaciones se pueden escribir para nuestro problema
como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:168pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874992">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874993">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:108.75pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>


```

<![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243874994">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:134.25pt;height:30pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuintegrodife\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243874995">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Se pueden pensar las  
 impedancias individuales como elementos <span class=SpellE>z<sub>lm</sub></span>(s),  
 donde l y m representan el hecho de que los elementos son comunes a las gasas l y m. Las  
 matrices resultantes son sim&eacute;tricas por el hecho de que <span  
 class=SpellE>z<sub>lm</sub></span>(s) = <span class=SpellE>z<sub>ml</sub></span>(s)  
 cuando la direcci&oacute;n de la corriente de la gasa se toma en forma  
 consistente.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>La transformaci&oacute;n de la  
 excitaci&oacute;n <span class=SpellE>E<sub>m</sub></span>(s) representa la suma de las  
 <span class=SpellE>fem's</span> en la m-<span  
 class=SpellE>&eacute;sima</span> gasa, tomadas con el signo apropiado. <span  
 class=GramE>Las transformadas <span class=SpellE>k<sub>m</sub></span>(s</span>) son  
 las excitaciones de la m-<span class=SpellE>&eacute;sima</span> gasa dadas por las  
 condiciones iniciales de todas las variables y las integrales y derivadas apropiadas de las  
 gasas adyacentes a la m-<span class=SpellE>&eacute;sima</span>. Para nuestro  
 problema:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:24.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuintegrodife\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243874996">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>

```

</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874996">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:176.25pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874997">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde<span
lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:42pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874998">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:174.75pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">

```

```

<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243874999">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las ecuaciones algebraicas las podemos representar en forma
de matrices:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:191.25pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875000">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 ;<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>o<span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:108.75pt;height:15.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

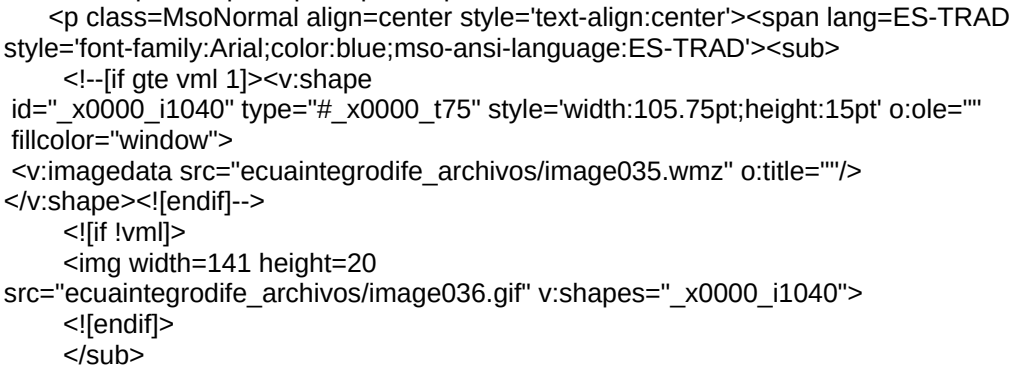
 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875001">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

```

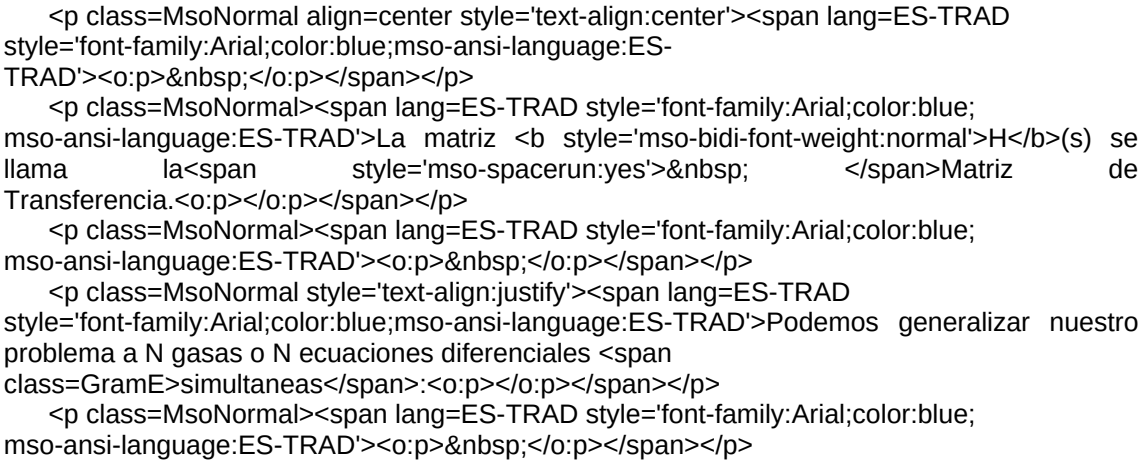


<math display="block">\frac{1}{H(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega\_n s + \omega\_n^2}

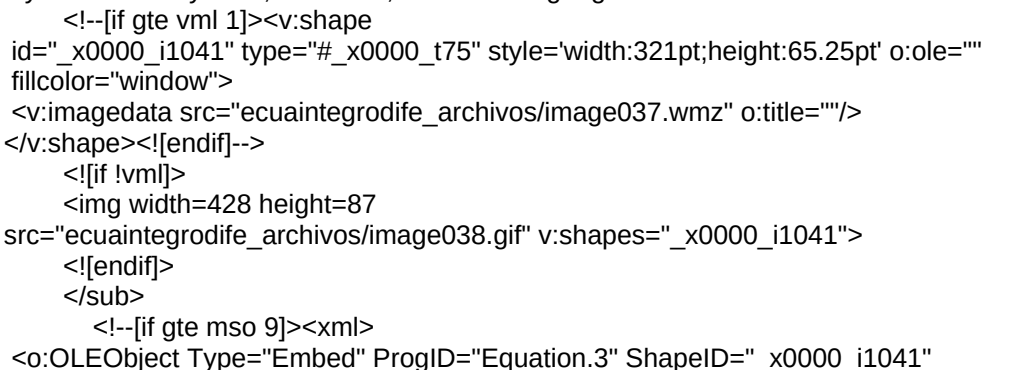
El problema lo podemos resolver si invertimos  $H(s)$  a  $\frac{1}{H(s)}$ , multiplicamos por  $\frac{1}{H(s)}$  por la derecha para obtener:



La matriz de Transferencia:



Podemos generalizar nuestro problema a N gasas o N ecuaciones diferenciales simultaneas:



</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>El conjunto de ecuaciones lineales integro-diferenciales simult&acutes;neas es muy general. Los elementos de la matriz <span class=Spelle><span class=GramE>A'<sub>lm</sub></span></span><span class=GramE>(</span>t) son operadores lineales de cualquier orden.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si en un an&acutes;lisis estamos trabajando con un circuito de N gasas, la forma de las <span class=Spelle>A'<sub>lm</sub></span> depende de lo que buscamos, si es <span class=Spelle><span class=GramE>v<sub>j</sub></span></span><span class=GramE>(</span>t) un voltaje o una gasa de corriente. Las formas t&iacutes;picas son las siguientes:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:189pt;height:30.75pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuaintegrodife\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875004">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ;<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:177pt;height:33pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuaintegrodife\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875005">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>



</v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875008">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Se puede ver que <b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'>V</b>(s) es una respuesta gen&eacute;rica, es decir <b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'>I</b> si las inc&oacute;gnitas son gasas de corriente. Si  
 consideramos que |<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b><sup>-1</sup>| </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:  
 ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0 y  
 est&aacute; definida, calculamos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b>(s) y limpiamos  
 para tener:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:111pt;height:15pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuintegrodife\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875010">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Podemos ver este caso  
 general de <span class=SpellE>H<sub>lm</sub></span>(s) en un problema en el cual <span  
 class=SpellE><span class=GramE>v<sub>k</sub></span></span><span  
 class=GramE>(</span>t) es una gasa de corriente y sus ecuaciones  
 son:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:174pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image051.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875011">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:164.25pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image053.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875012">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> K_j(s) contiene las corrientes y las cargas
iniciales:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1051" type="#_x0000_t75" style='width:234pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuintegrodife_archivos/image055.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875013">
</o:OLEObject>

```

</xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>De nuevo la carga inicial en la gasa <span class=SpellE>lm</span> es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:114.75pt;height:15pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuaintegrodife\_archivos/image057.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875014">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Con estas dimensiones en particular, la funci&uacute;n de transferencia toma unidades de admitancia y se designa por <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Y</b>(s) en lugar de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b>(s).<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>El producto <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b>(s) </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&times;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E</b>(s) es la respuesta a la excitaci&uacute;n externa que se aplica, la que causa un transitorio, o excita los modos caracter&iacute;sticos de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b>(s) y produce una respuesta que s&uacute;lo est&aacute; caracterizada por los modos caracter&iacute;sticos de la excitaci&uacute;n y que son los polos de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E</b>(s). La componente de la respuesta que tiene como elementos las frecuencias caracter&iacute;sticas de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E</b>(s), se denomina soluci&uacute;n de estado estacionario.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>La expansi&uacute;n de un producto del tipo <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b>(s) </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&times;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> <b

(s) producir una serie de fracciones parciales. Un grupo de fracciones parciales contendr todos los polos de  $H(s)$ , que representan el transitorio inicial, y el segundo grupo de fracciones parciales contiene los tminos que involucran los polos de  $E(s)$ , y en el caso de una excitacin senoidal se llaman la solucin de estado estacionario.

<p class=MsoNormal lang=ES style='font-family: Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div></td>  
 </tr>  
 </table>  
 </body>  
 </html>

### 3.19 FUNDAMENTOS MATEMATICOS. MATRICES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="matrices_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="matrices_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="matrices_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>MATRICES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>6</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T00:55:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-21T01:03:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>809</o:Words>
<o:Characters>4451</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>37</o:Lines>
<o:Paragraphs>10</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>5250</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>

```

```

<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

```



```

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:red'>MATRICES</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'>Hemos ya visto que una red de más de una gasa involucra ecuaciones
lineales simultáneas en varias incógnitas.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'>El circuito que se muestra en la figura está descrito por dos ecuaciones
integral diferenciales simultáneas en dos incógnitas.</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coorsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:182.25pt;
height:111pt'>
<v:imagedata src="matrices_archivos/image001.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'></p>
<p class=MsoNormal>Si diferenciamos
cada una de estas ecuaciones obtenemos:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

```

 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026"
type="#_x0000_t75" style='width:137.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875631">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>y<span
 lang=ES
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027"
type="#_x0000_t75" style='width:107.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875632">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Podemos escribir
operacionalmente las ecuaciones como:<o:p></o:p></p>
 <p
 class=MsoNormal><span
 lang=ES
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028"
type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875633">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;

```

color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:102.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875634">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>Se puede ver que esta forma operacional asume que los valores iniciales

<span class=SpellE><span class=GramE>i<sub>j</sub></span></span><span class=GramE></span>0+> <span class=SpellE>yq<sub>j</sub></span></span>(0+) son cero. Este conjunto de ecuaciones se pueden escribir como dos ecuaciones algebraicas <span class=GramE>simultaneas</span><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>para

I<sub>1</sub> e I<sub>2</sub>, donde los coeficientes son funciones de s. Para asumir alguna generalidad, <span class=SpellE>x<sub>j</sub></span> representa los t&eacute;rminos desconocidos, <span class=SpellE>y<sub>j</sub></span> representa las funciones de manejo que son polinomios en s; representaremos los s coeficientes dependientes de s como <span class=SpellE>A<sub>mn</sub></span>(s). Bajo esta notaci&eacute;n el conjunto de ecuaciones simultaneas toma la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875635">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:147pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>





<v:imagedata src="matrices\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875638">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>Los coeficientes <span class=SpellE>A<sub>jk</sub></span> pueden ser n&uacute;meros, operadores lineales, funciones de un par&aacute;metro, etc. <span class=SpellE>Unicamente</span> vamos a especificar que los <span class=SpellE>A<sub>lm</sub></span> son independientes de <span class=SpellE>x<sub>k</sub></span>. Este conjunto de ecuaciones se puede representar<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>en t&eacute;rminos de las matrices <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A</b> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>, y <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b></span> en la forma:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:170.25pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875639">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>La ecuaci&oacute;n la podemos escribir simb&oacute;licamente de la forma:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:39.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875640">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>donde<span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038"
type="#_x0000_t75" style='width:138pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875641">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75"
style='width:41.25pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875642">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037"
type="#_x0000_t75" style='width:41.25pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875643">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->

```

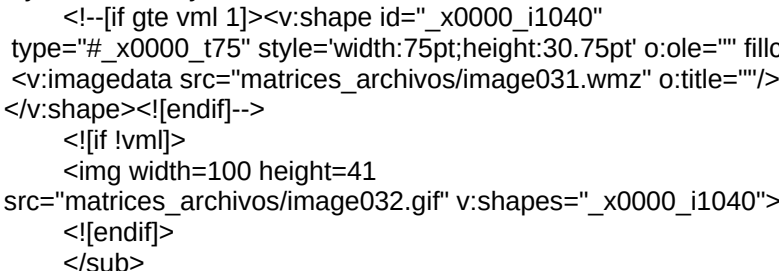
.

&nbsp;

El producto interno es la multiplicaci&ocute;n de una columna del lado derecho de la ecuaci&ocute;n por un rengl&ocute;n del lado izquierdo, y la forma de sus elementos ser&aacute;:



El producto interno de dos matrices **A** y **B** tiene elementos que est&aacute;n formados por la multiplicaci&ocute;n de una columna en la matriz del lado derecho por un rengl&ocute;n de la matriz del lado izquierdo. Si **A** **B** **C** luego:



Si

$M$  es una matriz de transformaci3n, un vector  $x$  se transforma a  $x'$  de acuerdo con:

$x' = Mx$

Una matriz  $A$  es transformada por la matriz  $M$  de acuerdo con la relaci3n:

$A' = MA$



Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&times;</span></span></b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES style='font-family:Arial'> M = A',<o:p></o:p></span></b></p>

<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></b></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'> <span class=SpellE>M<sup>+</sup></span> es el complejo conjugado de la transpuesta de M. En otras palabras los objetos <span class=SpellE>Im</span> de la matriz son los objetos <span class=SpellE>ml</span> de la transpuesta. Designaremos la transpuesta por una tilde sobre el s&iacutem;mbolo, luego la transpuesta de M se escribe  $\tilde{M}$ , donde los elementos de M se escriben como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image037.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875648">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>Si el vector se escribe como una simple columna, el vector transpuesto es un vector rengl&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image039.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875649">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>luego</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:75.75pt;height:15.75pt" o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875650">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>La matriz adjunta, que denotaremos por <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b><sup>+</sup></span>, es el complejo conjugado de la transpuesta de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b>. Recordemos que nuestras ecuaciones involucran la variable compleja s, por lo que el arreglo tendr&aacute; elementos complejos. Considerando los elementos de <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b><sup>+</sup></span> se puede escribir:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:81pt;height:18pt" o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875651">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>El producto interno entre dos vectores est&aacute; definido como el producto de un vector adjunto de la derecha y un vector de la izquierda y es un n&uacute;mero real positivo. El producto interno de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> y <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b></span> se escribe como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:153.75pt;height:63pt" o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image045.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875652">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;  
 color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:161.25pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image047.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875653">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:  
 Arial;color:blue'>El cuadrado de la magnitud de un vector es <span  
 class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sup>+</sup></span>  
 </span><span  
 lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&times;</span></span><span  
 lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'> <b style='mso-bidi-font-weight:  
 normal'>x</b>. Una transformaci&ocirc;n que mantiene invariante la magnitud de un vector  
 es la transformaci&ocirc;n unitaria. El ejemplo m&aacute;s com&uacute;n de una  
 transformaci&ocirc;n unitaria en variables reales es una simple rotaci&ocirc;n. En este caso  
 el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> cambia de direcci&ocirc;n pero no de  
 magnitud. Sea:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:39.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875654">  
 </o:OLEObject>

```

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>luego<span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1050"
type="#_x0000_t75" style='width:56.25pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image051.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875655">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>y<span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1051"
type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image053.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875656">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Si la magnitud del
vector es invariante bajo la transformación, luego:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1052"
type="#_x0000_t75" style='width:60.75pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image055.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875657">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrices\_archivos/image057.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875658">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>La matriz I es la matriz unitaria o la transformaci&oacute;n id&eacute;ntica. Sus elementos son 1 en la diagonal y cero fuera de ella:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrices\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875660">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrices\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



```

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875661">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Al aplicar I en un
producto interno deja la matriz sin cambio. <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>I <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>×<b style='mso-bidi-font-weight:
normal'> x = x y <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>I <b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>×<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>A<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>×<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>I = A, lo que nos dice
que <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>I⁺<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'> = I<.o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:
Arial;color:blue'>La magnitud de la matriz cuadrada es igual al determinante de la matriz. Si la
magnitud es diferente de cero se puede definir un inverso:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" _x0000_i1056"
type="#_x0000_t75" style='width:48.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrices_archivos/image063.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243875662">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;
color:blue'>si<span lang=ES style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES

```

style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:30.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image065.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875663">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;  
 color:blue'>luego</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;  
 color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image067.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875664">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:  
 Arial;color:blue'>De la definici&oacute;n de determinante se puede definir un elemento <b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b><sup>-1</sup> que se designa como M' para indicar  
 el inverso. Los elementos de <b style='mso-bidi-font-weight:  
 normal'>M</b><sup>-1</sup> se representan como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="matrices\_archivos/image069.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875665">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>Se puede ver que la matriz unitaria tiene la propiedad especial de que el adjunto de la matriz es igual al inverso de la matriz:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image071.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875666">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

(<span class=GramE>unitaria</span>)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image072.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875667">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

(<span class=GramE>definici&oacute;n</span> de inverso)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>luego</span></span><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Arial'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:42pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="matrices\_archivos/image073.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243875668">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->



(<span class=GramE>unitaria</span>)<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-family:Arial;color:blue'>Las matrices  
 reales unitarias se llaman matrices ortogonales.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:  
 Arial;color:blue'>Si se suman dos matrices se suman sus elementos correspondientes.  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='font-family:  
 Arial;color:blue'>Consideremos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A</b> + <b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'>B </b>= <b style='mso-bidi-font-weight:  
 normal'>C, <b>luego: <span class=SpellE>A<sub>jk</sub></span> + <span  
 class=SpellE>B<sub>jk</sub></span> = <span  
 class=SpellE>C<sub>jk</sub></span>.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-  
 family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div></td>  
 </tr>  
 </table>  
 </body>  
 </html>

### 3.20 FUNDAMENTOS FISICOS. INTRODUCCION

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"  
 xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"  
 xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">  
 <head>  
 <meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">  
 <meta name=ProgId content=Word.Document>  
 <meta name=Generator content="Microsoft Word 10">  
 <meta name=Originator content="Microsoft Word 10">  
 <link rel=File-List href="Introfundfis\_archivos/filelist.xml">  
 <title>En este capítulo revisaremos toda una gama de conceptos y métodos  
 matemáticos que se requieren para comprender los fundamentos</title>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:DocumentProperties>  
 <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>  
 <o:Template>Normal</o:Template>  
 <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>  
 <o:Revision>3</o:Revision>  
 <o:TotalTime>4</o:TotalTime>  
 <o:Created>2007-06-20T21:44:00Z</o:Created>  
 <o:LastSaved>2007-06-25T18:38:00Z</o:LastSaved>  
 <o:Pages>1</o:Pages>  
 <o:Words>63</o:Words>  
 <o:Characters>348</o:Characters>  
 <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>  
 <o:Lines>2</o:Lines>  
 <o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>  
 <o:CharactersWithSpaces>410</o:CharactersWithSpaces>  
 <o:Version>10.2625</o:Version>  
 </o:DocumentProperties>

```

</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

```

```

<div class=Section1>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>INTRODUCCION</p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>En este capítulo
revisaremos toda una gama de conceptos y métodos físicos que se requieren
para comprender los fundamentos de la teoría de control que estudiaremos en este
curso. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos encontrar la
mecánica de una partícula, Ecuaciones de Legendre y Hamilton, Ecuación de Hamilton-Jacobi, Concepto de Trabajo y energía, Leyes de
Conservación y otros.</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;mso-ansi-language:
ES-TRAD'></p>
</td>
</tr>
</table>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:12.0pt;mso-ansi-language:
ES-MX'></p>
</div>

</body>

</html>

```

### 3.21 FUNDAMENTOS FISICOS. INTRODUCCION. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}

```

```

a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Fundamentos Físicos </td>
<td width="172"><a href=" ../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="789" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center">FUNDAMENTOS FISICOS </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.22 FUNDAMENTOS FISICOS. INTRODUCCION. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Fundamentos Matem´ticos</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}

```

```

.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td align="center">INDICE GENERAL </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Introducci&ocaron;n</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Partícula Libre </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Sistema de Partículas
</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Mecânica de la Partícula
</div></td>
</tr>

```

```
Trabajo
Conservación de la Energía
Principio de Mínima Acción
Despazamiento Virtual
Métodos Variacionales
Transformación de Legendre
Paréntesis de Poisson
Principio de Maupertius
Transformación Canónica
Ecuaciones de Hamilton
Invariantes Adiabáticos
Ecuación de Hamilton-Jacobi

```

```
</body>
</html>
```

### 3.23 FUNDAMENTOS FISICOS. PARTICULA LIBRE

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="particlibre_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="particlibre_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="particlibre_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PARTICULA LIBRE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>6</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T01:11:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:36:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>352</o:Words>
<o:Characters>1936</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>16</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2284</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
```

```

<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

```



<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786 style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>  
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>  
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>  
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>PARTICULA LIBRE</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Un sistema, para el cual el espacio sea homogéneo e isotrópico y el tiempo homogéneo, se llama inercial. Podemos inferir algunas consecuencias acerca de la forma de la Lagrangiana para una partícula que se mueve libremente en un sistema de referencia inercial. La homogeneidad del espacio y del tiempo significa que esta función no puede contener explícitamente ni el vector de posición <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b> de la partícula ni el tiempo t, es decir L será sólo función de la velocidad <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b>, Ya que el espacio es isotrópico la Lagrangiana no puede depender tampoco de la dirección de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b> por lo que sólo será función del valor absoluto de ésta, o sea:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L = L(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup></span><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><sup>1</sup></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> L(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b></span><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>tenemos que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/></v:shapetype><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas>



= 

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Por el Principio de la Relatividad de Galileo si un sistema de referencia inercial K se desplaza con una velocidad muy pequeña </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> con respecto a otro sistema inercial K' tenemos: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial'><b>v</b></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial'>' = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'> v</b> + </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>ya</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que las ecuaciones de movimiento deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. La Lagrangiana L(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup>) por esta transformación se convertirá en L' que si difiere de L(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup>) no será más que en la derivada total con respecto al tiempo de una función de las coordenadas y del tiempo por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L' = L(<b style='mso-bidi-font-weight: normal'>v</b><sup>2</sup>) = L(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup> + 2<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>.</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial'> </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>e</span></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial'>>2</span></sup><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue">Desarrollando </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> en series de potencias:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:123pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="particlibre\_archivos/image023.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287652"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El último término del segundo miembro de esta ecuación será una derivada total con respecto al tiempo, sólo si es una función lineal de la velocidad v. Por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:21.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="particlibre\_archivos/image024.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287653"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>no depende de la velocidad, es decir, la Lagrangiana en este caso es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L = a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>De lo anterior se deduce que la Lagrangiana es invariante para una velocidad finita <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b> del sistema de referencia K con respecto al K'. En efecto:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L' = a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup> = a (<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b> + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b>)<sup>2</sup> = a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup> + 2a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup> + 2a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><sup>2</sup></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;

mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>.</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b> + <span class=Spelle>a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b></span>'<sup>2</sup></span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:116.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="particlibre\_archivos/image025.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287654"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El segundo término es una derivada total con respecto al tiempo y se puede omitir. La constante a se denomina m/2 y la Lagrangiana de una partícula libre es:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:48pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="particlibre\_archivos/image026.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287655"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y como L es aditiva<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="particlibre\_archivos/image027.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287656"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></td></tr></table><p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

</div>

</body>

</html>

```

### 3.24 FUNDAMENTOS FISICOS. SISTEMA DE PARTICULAS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sistparticula_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sistparticula_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sistparticula_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMA DE PARTICULAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>17</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T01:16:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T20:54:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>484</o:Words>
<o:Characters>2667</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>22</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3145</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>

```

```

<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">

```

```

<o:imap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>SISTEMA
PARTICULAS<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Un sistema de partículas que actúan entre sí, pero aisladas
de otros cuerpos se llama Sistema Cerrado. Para poder describir la
interacción de las partículas del sistema añadimos una función que sólo
depende de la posición, o sea que es función de las coordenadas. A esta
función la designamos por U y tenemos:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:111pt;
height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistparticula_archivos/image026.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte
mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292033">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

```



Arial;color:blue'>Esta es la forma general de la Lagrangiana para un sistema cerrado.</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:62.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image027.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292034"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> denomina Energía Cinética y la función U, Energía Potencial. Como la U sólo depende de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r </b>en <span class=GramE>un</span> t dado, se ve que el cambio de posición de una partícula repercute instantáneamente en todas las otras, o sea que la interacción se propaga instantáneamente.</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El tiempo no sólo es homogéneo sino que también es isotrópico según la ecuación</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:111pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image026.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292035"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>

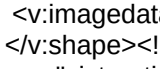
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

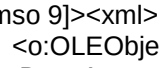
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> sustituye t por -t y las ecuaciones de movimiento y la Lagrangiana quedan invariantes y en este sentido todo movimiento que obedece las leyes de la Mecánica Clásica es invariante.</o:p></o:p></span></p>

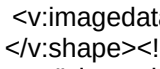
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

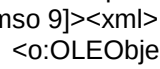
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>A partir de la Lagrangiana podemos obtener las ecuaciones de Movimiento:</o:p></o:p></span></p>

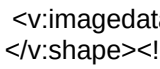
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

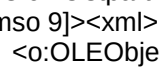
$$\text{Sistparticula\_archivos/image028.wmz}$$


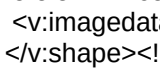
$$\text{Sistparticula\_archivos/image006.gif}$$


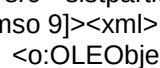
$$\text{Sistparticula\_archivos/image029.wmz}$$


$$\text{Sistparticula\_archivos/image002.gif}$$


$$\text{Sistparticula\_archivos/image028.wmz}$$


$$\text{Sistparticula\_archivos/image006.gif}$$


$$\text{Sistparticula\_archivos/image030.wmz}$$


$$\text{Sistparticula\_archivos/image009.gif}$$


$$\text{Bajo esta forma las ecuaciones de movimiento se llaman ecuaciones de Newton, y constituyen la base de la mecánica de un sistema de partículas interactuantes. Al vector:}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

se le denomina Fuerza que actúa sobre la partícula a. Esta sólo depende de las coordenadas y no de las velocidades. La ecuación

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

demuestra que los vectores aceleración son sólo funciones de las coordenadas.

Si para describir el movimiento empleamos coordenadas generalizadas  $q$  un lugar de las coordenadas cartesianas de las partículas, entonces para obtener la Lagrangiana se efectuará la transformación:

$$L = T - V$$

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo estas expresiones en la función:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:134.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image033.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292043"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se obtiene la Lagrangiana buscada:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:111.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image034.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292044"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>en</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> donde las <span class=Spelle>a<sub>ik</sub></span> sólo son funciones de las ordenadas.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Sólo hemos hablado de sistemas cerrados. Consideremos un sistema A no cerrado, que interactúa con otro sistema B realizando un cierto movimiento. Se dice en este caso que el sistema A se mueve en un campo exterior creado por el sistema B. Como las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del Principio de la Mínima Acción, variando independientemente cada una de las coordenadas, se puede, para encontrar la Lagrangiana<span style='mso-spacerun:yes'> </span>L<sub>A</sub> del sistema total A + B sustituyendo en él las coordenadas <span class=Spelle>q<sub>B</sub></span> por sus funciones dadas del tiempo y omitiendo el término:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:63pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292045">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>ya que depende sólo de t, tenemos:</span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:129.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image036.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292046">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> lo que el movimiento de un sistema en un campo exterior se describe por una Lagrangiana del tipo usual, con la diferencia de que U puede ser función explícita del tiempo.</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Para el movimiento de una partícula en un campo externo, la forma general de la Lagrangiana será:</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292047">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y las ecuaciones de movimiento:</span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:50.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistparticula\_archivos/image038.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292048">  
 </o:OLEObject>

```

</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Un campo tal que en todos sus puntos actúa la misma fuerza <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>F sobre una partícula se llama Campo
Uniforme. En un campo uniforme:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>U = -<b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>F<span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial'>r<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.25 FUNDAMENTOS FISICOS. MECANICA DE LA PARTICULA

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="mecanparticula_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="mecanparticula_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="mecanparticula_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>MECANICA DE LA PARTICULA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>

```

```

<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>5</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T01:40:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:32:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>241</o:Words>
<o:Characters>1329</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>11</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1567</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}

```

```

div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>MECANICA DE LA
PARTICULA<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>La segunda ley de Newton se puede considerar como un
postulado fundamental o como definici3n de fuerza y masa. la forma correcta
de esta ley para una sola part3cula es:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

```



$$\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{21600} \text{pixelWidth}$$

$$\sum_{i=1}^8 \prod_{j=1}^{21600} 0$$

$$\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{21600} \text{pixelHeight}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \prod_{j=1}^{21600} 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = F v$$

donde  $F$  es la fuerza total que actúa sobre la partícula y  $v$  es su ímpetu definido como: Se define la velocidad como:

$$v = \frac{d}{dt} x$$

y el ímpetu se define como:

$$p = m v$$

por lo que se puede escribir:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = F v$$

Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>como en la mayoría de los casos m es constante entonces se puede escribir en estos casos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:71.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="mecanparticula\_archivos/image028.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287267"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>a</b> se define como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:36.75pt;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="mecanparticula\_archivos/image029.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287268"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se denomina la aceleración de la partícula.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>De aquí se desprende un teorema de conservación: Si la resultante de las fuerzas <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b> es nula, <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:27pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="mecanparticula\_archivos/image030.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287269"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b

=

Este es el teorema de conservación del ímpetu lineal.

El momento angular de la partícula respecto a un punto se define por:

**L**

=  **$\mathbf{r} \times \mathbf{p}$**

donde  $\mathbf{r}$  es el radio vector que va desde 0 a la partícula. Definimos el momento de una fuerza como:

**N**

de acuerdo con la ecuación de la fuerza:



Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>de donde obtenemos el segundo teorema de conservación: Si la resultante de los momentos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>N</b>, es nula<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:26.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="mecanparticula\_archivos/image032.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287271"></o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y el momento angular <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>L</b> se conserva.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>El momento angular en n dimensiones sería:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="mecanparticula\_archivos/image033.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287272"></o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>donde:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>r</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>i</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b><sub>i</sub></span>' + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>R</b><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>derivando:<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p></o:p></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:132pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="mecanparticula\_archivos/image034.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287273">

```

</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:122.25pt;height:24.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="mecanparticula_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287274">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:213pt;height:120.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="mecanparticula_archivos/image036.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287275">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>El momento angular es el momento angular del centro de masa
del sistema, más el momento angular alrededor del centro de masa.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.26 FUNDAMENTOS FISICOS. TRABAJO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>

```

```

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="trabajo_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="trabajo_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="trabajo_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>TRABAJO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T01:45:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T20:56:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>332</o:Words>
<o:Characters>1830</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>15</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2158</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;

```

```

text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>TRABAJO<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

```

Arial;color:blue'>El trabajo realizado por un sistema es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt; height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image045.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292267"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero la fuerza:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image046.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292268"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292269"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>



<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>d<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>s</b></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b>dt</span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:279.75pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image048.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292270"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:51pt;height:21pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image049.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292271"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>el</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> campo es un campo conservativo. Por el teorema de <span class=Spelle>Stockes</span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>Ñ</span></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>'</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b> = 0,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero sabemos que el rotacional de un gradiente es cero, por



$$V_{12} + T_{21} = V_{21} + T_{12}$$

que es el teorema de conservación de la energía, si la fuerza es conservativa.

Para  $n$  partículas la fuerza total es:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

El trabajo realizado será:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i$$

pero:

$$W = \sum_{i=1}^n \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

pero:

**$\vec{F} = -\nabla V$**

normal'>v</b><sub>i</sub></span>' + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b></span></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image054.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292276"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo:</span></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:350.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image055.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292277"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:87.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image056.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292278"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si las fuerzas dependen de un potencial:</span></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span></span></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:206.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="trabajo\_archivos/image057.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292279"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></b></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span></span></p></b></span></p>

Si las fuerzas internas son conservativas, las fuerzas recíprocas  $F_{ij}$  y  $F_{ji}$  se pueden obtener de un potencial  $V_{ij}$  de tal forma que éste dependiera sólo de la distancia entre las partículas:

$$F_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}}$$

y están contenidos en la recta que los une y:

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{r}_{ij}}$$

donde  $\vec{r}_{ij}$  es una función escalar.

Cuando todas las fuerzas son conservativas:

$$\vec{F} = -\nabla V$$

src="trabajo\_archivos/image034.gif" v:shapes="\_x0000\_i1041"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292283">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Si llamamos <span class=Spelle>r<sub>i</sub></span> - <span class=Spelle>r<sub>j</sub></span> <span class=Spelle>a,vector</span> de diferencias y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>Ñ</span></span><span class=Spelle><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>i</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> gradiente respecto a <span class=Spelle>r<sub>j</sub></span> tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="trabajo\_archivos/image062.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292284">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=IT-CH style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:IT-CH'>si:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=IT-CH style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:IT-CH'>ds<sub>i</sub></span>  
 - ds<sub>j</sub> = dr<sub>i</sub> - dr<sub>j</sub> =  
 dr<sub>j</sub></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>la integral será:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:53.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="trabajo\_archivos/image063.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292285">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y por lo tanto el trabajo será:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:150.75pt;height:48.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="trabajo\_archivos/image064.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso  
9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292286">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:92.25pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="trabajo\_archivos/image065.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso  
9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292287">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>El segundo término de la derecha es la energía potencial  
interna del sistema y en general no es nula. Sólo en los cuerpos rígidos  
permanece constante el potencial interno, en todos los demás sistemas éste  
varía con el tiempo.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Con lo anterior se ve que la ecuación general de la  
Mecánica es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:32.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="trabajo\_archivos/image066.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso  
9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292288">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</td>  
</tr>  
</table>  
  
<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:  
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span  
style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
  
</div>  
  
</body>

</html>

### 3.27 FUNDAMENTOS FISICOS. TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="teorconserenergia_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="teorconserenergia_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="teorconserenergia_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>17</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T01:24:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T20:55:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1173</o:Words>
<o:Characters>6455</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>53</o:Lines>
<o:Paragraphs>15</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>7613</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
```



```

<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

```

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786 style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>  
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>  
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>  
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>TEOREMA DE CONSERVACION DE LA ENERGIA</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Durante el movimiento de un sistema mecánico las 2s magnitudes <sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:30pt; height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image061.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292153"></o:OLEObject></xml><![endif]-->con y = 1, 2<span class=GramE>, ...</span>, s que determinan el estado del sistema, varían con el tiempo. Existen sin embargo, unas funciones de estas magnitudes cuyos valores permanecen constantes durante el movimiento, dependiendo solamente de las condiciones iniciales. A estas funciones se les llama Integrales de Movimiento. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Para un sistema mecánico cerrado con s grados de libertad el número de las integrales del movimiento independientes es igual a 2s - 1. La solución general de las ecuaciones del movimiento contiene 2s constantes arbitrarias. Como la ecuación del movimiento para un sistema cerrado no contiene explícitamente el tiempo, es totalmente arbitraria la elección del origen de los tiempos, y una de las constantes arbitrarias en la solución de la ecuación puede siempre considerarse como una constante aditiva t<sub>0</sub>



Arial;color:blue">Primero consideremos el teorema de conservación que resulta de la homogeneidad del tiempo. En virtud de esta homogeneidad, la Lagrangiana de un sistema cerrado depende explícitamente del tiempo. Entonces la derivada total respecto al tiempo de la Lagrangiana se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292160">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>De donde se deduce que la magnitud:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image068.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292161">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>permanece</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> constante durante el movimiento de un sistema cerrado, es decir, es una integral de movimiento. A esta magnitud se le llama energía E del sistema. La aditividad de la energía es consecuencia de la aditividad de la Lagrangiana, de la cual es función lineal según la ecuación anterior.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El teorema de la conservación de la energía es válido no sólo para sistemas cerrados, sino para sistemas sometidos a un campo exterior constante (no dependiente del tiempo), ya que la única propiedad de la Lagrangiana utilizada en el razonamiento anterior, la que no contiene explícitamente al tiempo, sigue siendo válida en este caso. Los sistemas cuya energía se conserva se llaman conservativos.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La Lagrangiana de un sistema cerrado es de la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image069.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292162">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Siendo T una función cuadrática de las velocidades. Aplicando el teorema de <span class=SpellE>Euler</span> de las funciones

homogéneas, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v^2) = m v \frac{dv}{dt} = m v a$$

Sustituyendo en

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v a$$

tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v a$$

y en coordenadas cartesianas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v a$$

&nbsp;



<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image074.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292168">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>En virtud de las ecuaciones de Lagrange:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:120pt;height:30pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image075.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292169">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Llegamos así a la conclusión de que en un sistema mecánico  
cerrado, la magnitud vectorial:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:78pt;height:30pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image076.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292170">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>El vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>P</b> se  
llama ímpetu del sistema. Derivando la ecuación de Lagrange encontramos que  
el ímpetu o impulso lineal, viene dado en función de las velocidades de las  
partículas por:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:57.75pt;height:24.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image077.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292171">  
</o:OLEObject>



</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:50.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image074.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292172"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>tiene un sencillo significado físico, ya que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image078.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292173"></o:OLEObject></xml><![endif]--><span style='mso-spacerun:yes'></span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la fuerza <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>a</sub> que actúa sobre la partícula a. La ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:50.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image074.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292174"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>nos dice: La suma de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas de un sistema cerrado nulo:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:24.75pt'

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image079.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292175">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>En particular si el sistema está formado por sólo dos  
partículas <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>1</sub> + <b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>2</sub> = 0 la fuerza que  
ejerce la primera sobre la segunda es igual y opuesta a la que ejerce la  
segunda sobre la primera.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Si el movimiento se describe con coordenadas generalizadas <span  
class=Spelle>q<sub>i</sub></span>, las derivadas de la Lagrangiana con  
respecto a las velocidades generalizadas:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:39.75pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image080.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292176">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>se llaman ímpetus generalizados y las derivadas con  
respecto a las coordenadas generalizadas:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:38.25pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image081.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
-[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292177">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> llaman fuerzas

generalizadas. Con esta notación, las ecuaciones de Lagrange se escriben:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Veremos ahora el teorema de conservación que se infiere de la isotropía del espacio. Esta isotropía significa que las propiedades mecánicas de un sistema cerrado no cambian en una rotación en el espacio de este sistema como conjunto. Consideraremos una rotación infinitesimal del sistema, y buscaremos la solución para que la Lagrangiana no varíe.

Llamaremos vector de rotación infinitesimal  $\vec{\epsilon}$  al vector cuyo módulo es igual al ángulo de rotación  $\epsilon$  y cuya dirección coincide con el eje de rotación.

Consideremos primero el incremento en el vector de posición correspondiente a una partícula del sistema, tomando un origen de coordenadas situado en el eje de rotación. El desplazamiento lineal del extremo del vector de posición en función del ángulo es:

$$\delta \vec{r} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$$

y cuya dirección coincide con el eje de rotación.

Consideremos primero el incremento en el vector de posición correspondiente a una partícula del sistema, tomando un origen de coordenadas situado en el eje de rotación. El desplazamiento lineal del extremo del vector de posición en función del ángulo es:

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292179">

</o:OLEObject>

</xml><![endif--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>como se ve en la figura (1) la dirección del vector </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es perpendicular al plano definido por <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b> y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, y por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>r </span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>= </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span></b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> </span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>' </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></b></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La rotación del sistema no sólo modifica la dirección de los vectores de posición sino también las velocidades de las partículas, transformándose todos los vectores según la misma ley. El incremento de la velocidad con respecto a un sistema fijo de coordenadas será:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD



src="teorconserenergia\_archivos/image052.gif" v:shapes="\_x0000\_i1053"><![endif]></sub><!--  
 [if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292181">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>de acuerdo con las ecuaciones de <span class=SpellE>lagrange</span>  
 tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:24.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image086.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
 [if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292182">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>o también:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:204.75pt;height:30pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image087.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
 [if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292183">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>ya que </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;  
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;  
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>f</span></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:30pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorconserenergia\_archivos/image088.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
 [if gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292184">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y se concluye que el movimiento de un sistema cerrado se
conserva la magnitud vectorial:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:24.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="teorconserenergia_archivos/image089.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292185">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se llama Momento
Angular del sistema.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.28 FUNDAMENTOS FISICOS. PRINCIPIO DE MINIMA ACCION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="princminaccion_archivos/filelist.xml">

```

```

<link rel=Edit-Time-Data href="princminaccion_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="princminaccion_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PRINCIPIO DE MINIMA ACCION</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>José Luis Pérez S.</o:Author>
 <o:Template>Normal</o:Template>
 <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
 <o:Revision>5</o:Revision>
 <o:TotalTime>75</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-21T01:10:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-25T20:44:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>405</o:Words>
 <o:Characters>2228</o:Characters>
 <o:Company>CCADET</o:Company>
 <o:Lines>18</o:Lines>
 <o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>2628</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}

```



```

span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>PRINCIPIO DE MINIMA
ACCION<span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Según este principio llamado de Hamilton, todo sistema
mecánico está caracterizado por una función:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

```

```

<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:117pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="princminaccion_archivos/image030.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244291834">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y el movimiento del sistema satisface la siguiente
condición: supongamos que en los instantes $t = t_1$ y $t = t_2$
el sistema ocupa posiciones dadas caracterizadas por dos conjuntos de
coordenadas $q(1)$ y $q(2)$, entonces el sistema entre estas dos posiciones se
mueve de forma que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:69pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="princminaccion_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244291835">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>sea<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> un mínimo. A la
función L se le denomina Lagrangiana y a la integral se le llama
Acción.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>La función de Lagrange no contiene más que <b

```

style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b> y<sub></sub><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image032.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291836"></o:OLEObject></xml><!--[endif]>>ya que estas definen su estado. Trataremos de determinar el mínimo de la ecuación<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:69pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image033.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291837"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Supondremos que el sistema tiene sólo un grado de libertad y determinaremos una sola función <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b>. Sea <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b> = <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b></span>t) la función para la cual S es un mínimo. Esto significa que S crece si sustituimos <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b></span>t) por.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>q</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(t) + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>q</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(t)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(t) se denomina variación y es pequeña en t<sub>2</sub> - t<sub>1</sub>. Ya que para t = t<sub>1</sub> y t = t<sub>2</sub> todas las funciones (S) deben valer <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b><sup>(1)</sup> y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b><sup>(2)</sup><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>q</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(t<sub>1</sub>)</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>q</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(t<sub>2</sub>) = 0<span style='color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Lo que varía S cuando se reemplaza por <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b> + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> está dada por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:141pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image034.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291838"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La condición del mínimo es que la variación se anule, o sea:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291839"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue">Efectuando la variación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:104.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image036.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291840"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:48pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image037.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291841"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Así que integrando por partes:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:176.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image038.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291842"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Por la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princminaccion\_archivos/image039.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244291843"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>el primer término es cero y en el segundo término para que



[illegible]

```

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>S = 0 y la forma de sus
ecuaciones de movimiento es invariante. la función
de Lagrange se define con la indeterminación aditiva de la derivada total con
respecto al tiempo de cualquier f(q, t).<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.29 FUNDAMENTOS FISICOS. DESPLAZAMIENTO VIRTUAL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="desplasavirtual_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="desplasavirtual_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="desplasavirtual_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>DESPLAZAMIENTO VIRTUAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>6</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T01:48:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:29:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>432</o:Words>

```



```

<o:Characters>2378</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>19</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2805</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */

```

```

table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>DESPLAZAMIENTO
VIRTUAL<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Le llamaremos desplazamiento virtual de un sistema a una
variación de su configuración como resultado de un desplazamiento
infinitesimal <span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>r<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> compatible con las
fuerzas aplicadas y de ligadura en un instante de tiempo.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Si suponemos que el sistema está en equilibrio, es decir,
que la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F_i
= 0, es obvio que el producto <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>F_i <span lang=ES-TRAD style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>x <span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

```

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>r</span></b><sub><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>i</span></sub></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = 0 y por  
lo tanto la suma de estos productos extendida a las partículas será  
nulo.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype  
id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"  
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">  
<v:stroke joinstyle="miter"/>  
<v:formulas>  
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>  
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>  
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>  
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>  
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>  
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>  
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>  
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>  
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>  
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>  
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>  
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>  
</v:formulas>  
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>  
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>  
</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;  
height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286972">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>la fuerza <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:  
normal'>F</b><sub><i</sub></span> es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:black'>F</span></b><sub><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>i</span></sub></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = <span  
class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub><i</sub></span><sup><span  
class=SpellE>apl</span></sup> + <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:  
normal'>f</b><sub><i</sub></span><sup><span  
class=SpellE>lig</span></sup></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>es decir:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:24.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image060.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286973">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>pero como las fuerzas de liga dura realizan un trabajo  
virtual nulo, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:24.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286974">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'> </span>Lo anterior se  
conoce como el principio de los trabajos virtuales. Esta ecuación es estática  
y necesita una condición que contemple el movimiento del sistema. la ecuación  
de movimiento es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:30pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image062.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286975">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>que se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:48pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image063.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286976">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Lo anterior nos dice que las partículas de un sistema estarán en equilibrio bajo los efectos de la fuerza real y de otra fuerza efectiva, por lo que el principio de los desplazamientos virtuales será:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:77.25pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image064.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286977">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Descomponiendo en fuerza aplicada y de ligadura:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image065.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286978">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como los trabajos virtuales de ligadura son nulos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image066.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286979">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es el principio de D'Alambert.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Transformaremos esta ecuación en una que posea los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. El cambio de coordenadas está dado por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>r</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>i</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b><sub>i</sub></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b><sub>1</sub>, ..., <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b><sub>n</sub></span>, t)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>con n coordenadas independientes y las reglas de transformación son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image067.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286980"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y para velocidades:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image068.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286981"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por el principio de D'Alambert:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:155.25pt;height:30.75pt'

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image069.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286982">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:92.25pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image070.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286983">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la Fuerza  
generalizada.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Consideremos el término:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:24.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image071.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286984">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>En coordenadas generalizadas:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:122.25pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image072.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286985">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Por la relación:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:357pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image073.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286986"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:51pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image074.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286987"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:401.25pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image075.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286988"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>como m<sub>i</sub>v<sub>i</sub><sup>2</sup> = T:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:150.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image076.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286989"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Pero para que lo anterior sea cero, es necesario que cada término:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:



Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:84pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image077.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286990"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si el sistema es conservativo:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>F</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>i</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = - </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>Ñ</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>V<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:135.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image078.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286991"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que es la derivada parcial de - V(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b><sub>1</sub>, ..., <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b><sub>n</sub></span>) respecto de <span class=Spelle>q<sub>j</sub></span> y V no es función explícita del tiempo, por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:51pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image079.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286992"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

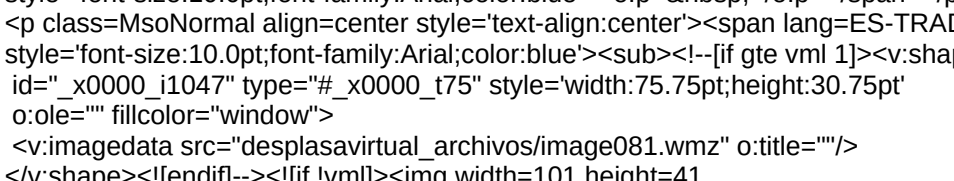
por lo que:



Sea

$L = T - V$

la función llamada Langrangiana, entonces:



En el caso en que sólo parte de las fuerzas deriven de un potencial:



<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Donde <span class=SpellE>Q<sub>j</sub></span> son las fuerzas derivables de un potencial. Sean <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b> fuerzas disipadoras, llamadas de <span class=SpellE>Rayleigh</span>, luego:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>F<sub>R</sub> = <span style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image083.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286997"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></span></b></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image084.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub></b><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286998"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image085.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244286999"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></b></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:236.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="desplasavirtual\_archivos/image086.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub></b><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287000"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p></o:p></b></span></p>

```

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:114pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="desplasavirtual_archivos/image087.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287001">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.30 FUNDAMENTOS FISICOS. METODOS VARIACIONALES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metodvariacional_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metodvariacional_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metodvariacional_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODOS VARIACIONALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>

```

```

<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>22</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T13:40:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:35:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1540</o:Words>
<o:Characters>8475</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>70</o:Lines>
<o:Paragraphs>19</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>9996</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1

```

```

 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1588345960;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1258327296;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}

ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>METODOS
VARIACIONALES<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Enunciaremos el principio integral de Hamilton. Este

```

principio es para sistemas conservativos y dice: El movimiento del sistema entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es tal que la ecuación de la integral curvilínea:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \right) dt$$

es un extremo. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

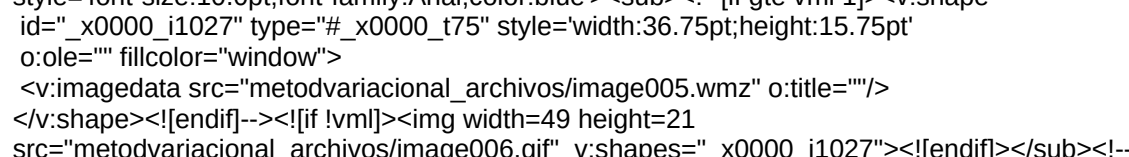
donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

$$L = T - V$$

donde  $L$  es una extremal. sea máxima o mínima respecto a la trayectoria del movimiento. Este principio es válido admitiendo potenciales generalizados dados por la ecuación:

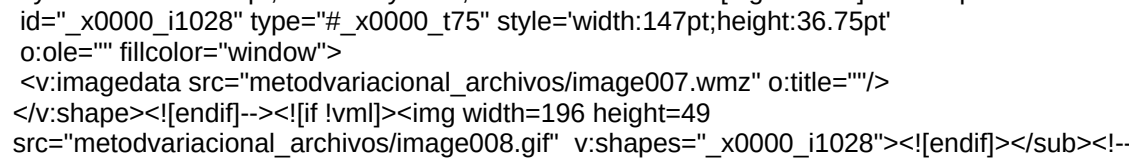
Esto siempre que las fuerzas generalizadas se obtengan de la ecuación anterior de una función  $U$  que depende de:

&nbsp;



&nbsp;

Esto significa que todas las posibles trayectorias que pueda describir el punto representativo entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , describirá en realidad aquella para la cual sea extremal la integral  $I$ , es decir máxima o mínima. Se puede resumir diciendo que la variación de la Integral  $I$  entre  $t_1$  y  $t_2$  fijos es cero.



&nbsp;

Considerando este problema como el más importante trataremos de construir la mecánica de los sistemas conservativos a partir del principio de Hamilton como postulado básico en vez de hacerlo a partir de las leyes de Newton. Para hacer lo anterior revisaremos algunas cosas del cálculo de variaciones, ya que uno de los principales problemas consiste en encontrar la curva que hace extremal una integral curvilínea dada.

&nbsp;

Consideremos el problema en forma unidimensional, o sea encontrar una curva

&nbsp;

$y(x) = y$

&nbsp;

entre dos valores  $x_1$  y  $x_2$  tal que la integral



curvilínea sea función de:  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle$

donde:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle$$

donde:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle$$

En este caso la variable está limitada a considerar la diversas trayectorias para las cuales

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle$$

$y(x) = y(x)$

$y = y$

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

Le daremos a cada curva posible un diferente parámetro  $a$  por lo que

$$y = f(x), \quad y(x) = y(x, 0) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) h(x)$$

donde  $(x)$  es una función cualquiera de  $x$ , que es cero para  $x = x_1$

$x = x_2$

Para cualquier representación paramétrica,  $J$  será función de  $a$

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287525"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y la condición para un máximo es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287526"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Derivando J(</span><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>), tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:117.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image019.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287527"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>tomando:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:132pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image021.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287528"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></span></p>

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y sustituyendo en:<span style='position:relative; top:11.0pt;mso-text-raise:-11.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1103" type="#\_x0000\_t75" style='width:17.25pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1103" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287529">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:117pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287530">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>e integrando por partes:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:195pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287531">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero toda curva pasa por (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) y (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>), por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:42.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287532">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>en x<sub>1</sub> y x<sub>2</sub>, por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:147.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image033.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287533"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>para obtener la condición de un extremal se multiplica por d</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y calculamos las derivadas para </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = 0, resultando:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:185.25pt;height:38.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287534"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Llamamos:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:141pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image037.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287535"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;

mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y representa una variación arbitraria  $y(x)$  obtenida al variar </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> en un entorno al valor cero, lo que es un desplazamiento virtual, por lo que:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:125.25pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image039.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287536"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Pero lo anterior sólo es posible si:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image041.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287537"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> lo que J es extremal sólo para las curvas  $y(x)$  tales que f satisfaga la ecuación diferencial anterior. En el caso en que f sea una función de variables independientes <span class=Spelle>y<sub>i</sub></span> y sus derivadas <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image043.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287538"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:182.25pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image045.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287539">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>considerando un parámetro </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y a J = J(</span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>) que caracteriza a  
cada posible curva:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>y<sub>1</sub>(x, </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>) = y<sub>1</sub>(x, 0) + </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><sub><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial'>(x)<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>y<sub>n</sub></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(x, </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>) = <span class=Spelle>y<sub>n</sub></span>(x,  
0) + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>n</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;

mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(x)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y<sub>1</sub>, ..., <span class=Spelle>y<sub>n</sub></span> son soluciones del problema extremal y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, ..., </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>n</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son funciones arbitrarias de x que son cero en los puntos extremos. La variación de J es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:164.25pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287540"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La segunda integral:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:189pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image049.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287541"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por partes:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:273pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image051.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287543"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>



</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:179.25pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image053.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287544">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:138pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image055.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287545">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>como </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>J = 0<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:137.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image057.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287546">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>lo que implica que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287547">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como las y <span class=Spelle>y</span> sus derivadas son independientes, los coeficientes de las </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se anulan por separado y:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image061.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287548">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Este conjunto de ecuaciones son las ecuaciones de <span class=Spelle>Euler</span>-<span class=Spelle>Lagrange</span>. La integral del principio de Hamilton:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:38.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image063.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287549">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>es la ecuación </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>J en varias variables si:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>x </span><span

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'> t, y<sub>i </sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'> q<sub>i</sub>, f(y<sub>i</sub>,<sub></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image064.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287550"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>, x) </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'> L(q,<sub></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image066.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287551"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>t),<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que las ecuaciones de <span class=SpellE>Euler</span> son:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image068.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287552"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son las de <span class=SpellE>Lagrange</span>.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Se puede generalizar el principio de Hamilton de modo que incluya fuerzas no conservativas y se tiene la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image070.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287553"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>con extremos fijos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image072.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287554"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>W es de gran importancia física. Las </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>r</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>i</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> o </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se pueden pensar como desplazamientos virtuales de las coordenadas por no implicar variación del tiempo. Cabe por lo tanto imaginar las diferentes trayectorias en el espacio de configuración como una sucesión de desplazamientos virtuales a

partir de la trayectoria real del movimiento. </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>W representa el trabajo realizado por el desplazamiento virtual desde la trayectoria real hasta la variada. El principio de Hamilton en este caso dice: La integral de la variación de la energía cinética más el trabajo virtual realizado en la variación debe ser cero<i style='mso-bidi-font-style:normal'>.</i><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Las </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>r</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>i</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> por las ecuaciones de transformación entre <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b> y q, donde cada q depende de la trayectoria elegida por L. <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b><sub>i</sub></span> = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b>[q(x,t), t</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>j</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, pero:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:90pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image074.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287555"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo tanto el principio de Hamilton es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image076.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287556">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Si las <span class=Spelle>Q<sub>i</sub></span> derivan de  
un potencial generalizándose tiene que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:330.75pt;height:35.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image078.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287557">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>pero sumando con la primera integral del principio de <span  
class=Spelle>hamilton</span>:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1063" type="#\_x0000\_t75" style='width:152.25pt;height:35.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image080.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287558">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Como las ligaduras son holonómicas cada término se anula  
por si mismo y:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:30pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image082.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287559">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>o sea:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image084.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287560">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Esta es la generalización adecuada del principio de Hamilton para obtener expresiones de <span class=Spelle>Lagrange</span> cuando las fuerzas no derivan de un potencial. En sistemas no holonómicos las coordenadas generalizadas no son independientes entre sí, ni se pueden reducir por ecuaciones de constricción de la forma  $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$  pero se puede operar con estos sistemas si las ecuaciones de constricción son reducibles a la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1066" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image086.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287561">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es una relación entre diferenciales de las q's. En el principio de Hamilton el tiempo correspondiente a cada punto de la trayectoria es constante y los desplazamientos virtuales deben de satisfacer ecuaciones de ligadura del tipo:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1067" type="#\_x0000\_t75" style='width:62.25pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image088.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1067" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287562">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> hay m de estas ecuaciones.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Por multiplicadores de <span class=SpellE>Lagrange</span> se ve que: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1068" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image090.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1068" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287563">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>L</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son constantes indeterminadas.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Combinando estos con las ecuaciones correspondientes a sistemas conservativos tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1069" type="#\_x0000\_t75" style='width:129.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image092.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1069" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287564">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1070" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image094.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><img width=115 height=47



src="metodvariacional\_archivos/image093.gif" v:shapes="\_x0000\_i1070"><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1070"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287565">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>combinando tenemos:</o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1071" type="#\_x0000\_t75" style='width:176.25pt;height:35.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image096.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1071"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287566">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Todavía las </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span  
class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>q<sub>k</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> no son independientes entre sí, pero  
tenemos las </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>L</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>.  
Supongamos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1072" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image098.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1072"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287567">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span  
lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1073" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:75pt;height:14.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image100.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1073"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287568">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>que tiene la forma de las ecuaciones de movimiento respecto a las m variables restantes <span class=SpellE>q<sub>k</sub></span> y se puede escribir:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1074" type="#\_x0000\_t75" style='width:177.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image102.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1074" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287569">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>donde las <span class=SpellE>q<sub>k</sub></span>s</span> son independientes y por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1075" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image103.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1075" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287570">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1076" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:14.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image100.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1076" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287571">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1077" type="#\_x0000\_t75" style='width:111.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image105.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1077"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287572">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span  
lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1078" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:69pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image107.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1078"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287573">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Tenemos ahora  $n + m$  incógnitas que son las  $n$  <span  
class=Spelle>q<sub>k</sub>'s</span> y las  $m$  </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>L</span></span><sub><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>L</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y sólo  
tenemos  $m$  ecuaciones. Las ecuaciones faltantes son las relaciones de ligadura  
<span class=Spelle>Q<sub>k</sub>'s</span> y: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1079" type="#\_x0000\_t75" style='width:81.75pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image109.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1079"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287574">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Pero la ecuación: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1080" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:24.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image111.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1080"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287575">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:





<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1086" type="#\_x0000\_t75" style='width:38.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image123.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1086" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287581"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> al no ser las <span class=Spelle>q<sub>i</sub></span> cartesianas <span class=Spelle>p<sub>i</sub></span> no tiene porque tener unidades de momento lineal.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Si la Lagrangiana de un sistema no incluye una coordenada <span class=Spelle>q<sub>i</sub></span> particular, aunque contenga la velocidad generalizada <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1087" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image125.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1087" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287582"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1088" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image127.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1088" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287583"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>se reduce, por una coordenada cíclica en:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1089" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image129.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1089"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287584">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>o sea:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1090" type="#\_x0000\_t75" style='width:39.75pt;height:27pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image131.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1090"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287585">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>que implica:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span  
class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-  
family:Arial'>p<sub>i</sub></span></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span  
class=SpellE>cte</span>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Por lo que se puede enunciar un teorema de conservación  
generalizado: El momento generalizado conjugado de una coordenada cíclica se  
conserva<i style='mso-bidi-font-style:normal'>.</i><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Consideremos una coordenada <span class=SpellE>q<sub>i</sub></span>  
en la que un cambio <span class=SpellE>dq<sub>i</sub></span> represente una  
traslación del sistema en conjunto en una dirección dada. <span  
class=SpellE>q<sub>j</sub></span>  
no aparecerá en T puesto que las velocidades no se alteran al trasladar el  
origen y por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1091" type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image133.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1091"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287586">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Sea el sistema conservativo en donde V no depende de las

velocidades, por lo que la ecuación de Lagrange será:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$

pero:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$

así que:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$

donde **n** es un vector unitario en la dirección de traslación, por lo que:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$



DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287590">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es la componente de la fuerza total en la dirección de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>n</b>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Sea un sistema conservativo:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>F = - </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>Ñ</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>V<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>con ligaduras independientes del tiempo, o sea que L no es una función explícita de t, por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1096" type="#\_x0000\_t75" style='width:134.25pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image143.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1096" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287591">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1097" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image145.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1097" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287592">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1098" type="#\_x0000\_t75" style='width:206.25pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image147.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1098"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287593">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1099" type="#\_x0000\_t75" style='width:120.75pt;height:35.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image149.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1099"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287594">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1100" type="#\_x0000\_t75" style='width:129pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image151.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1100"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287595">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>pero por el teorema de <span  
class=SpellE>Euler</span><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1101" type="#\_x0000\_t75" style='width:63pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image153.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1101"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287596">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1102" type="#\_x0000\_t75" style='width:65.25pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metodvariacional\_archivos/image233.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1102"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287597">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> $H = 2T - (T - V) = T + V$ <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es la energía total del sistema.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </td>  
 </tr>  
 </table>  
 <p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-other'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES;mso-fareast-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div>  
 </body>  
 </html>

### 3.31 FUNDAMENTOS FISICOS. TRANSFORMACION DE LEGENDRE Y ECUACIONES DE HAMILTON

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"  
 xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"  
 xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"  
 xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">  
 <head>  
 <meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">  
 <meta name=ProgId content=Word.Document>  
 <meta name=Generator content="Microsoft Word 10">  
 <meta name=Originator content="Microsoft Word 10">  
 <link rel=File-List href="translegendreyechamilton\_archivos/filelist.xml">  
 <link rel=Edit-Time-Data href="translegendreyechamilton\_archivos/editdata.mso">  
 <link rel=OLE-Object-Data href="translegendreyechamilton\_archivos/oledata.mso">  
 <!--[if !mso]>  
 <style>  
 v\:.\* {behavior:url(#default#VML);}  
 o\:.\* {behavior:url(#default#VML);}  
 w\:.\* {behavior:url(#default#VML);}  
 .shape {behavior:url(#default#VML);}  
 </style>  
 <![endif]-->  
 <title>TRANSFORMACION DE LEGENDRE Y ECUACIONES DE HAMILTON</title>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:DocumentProperties>  
 <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>  
 <o:Template>Normal</o:Template>

```

<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>17</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T14:55:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T20:59:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1856</o:Words>
<o:Characters>10209</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>85</o:Lines>
<o:Paragraphs>24</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>12041</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}

```

```

div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>TRANSFORMACION DE
LEGENDRE Y ECUACIONES DE HAMILTON<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones de Lagrange<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

```



fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image168.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292559">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]></span> t) a la base (q, p, t) aplicaremos una

transformación de <span class=SpellE>Legendre</span>. Sea una función f(x, y)

de sólo dos variables tal que la diferencial de f tenga la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:15pt'

o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image169.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292560">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'>donde:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:35.25pt;height:27.75pt'

o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image170.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292561">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if

gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:33.75pt;height:30pt'

o:ole="">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image171.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292562">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'>Se pasa de la base (x, y) a la base (U, y) de tal modo que

las magnitudes diferenciales estén expresadas en función de <span

class=SpellE>dy</span> y <span class=SpellE>dU</span>. Sea g(U, y) definida

como: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La diferencial <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>dy</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle>df</span> - <span class=Spelle>Udx</span> - <span class=Spelle>xdU</span>,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>o de acuerdo a <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>df</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle>Udx</span> + <span class=Spelle>Vdy</span>; <span class=Spelle>dy</span>

= <span class=Spelle>df</span> - <span class=Spelle>Udx</span> - <span class=Spelle>xdU</span>,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>o sea <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>dg</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle>vdy</span> - <span class=Spelle>xdU</span>,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image172.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292563"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image173.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292564"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El paso de (q<span class=GramE>, <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image174.wmz" o:title=""/>



</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292565">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->, </span> t) a (g, p, t) sólo difiere de los casos  
anteriores en que es necesario transformar más de una variable. En lugar de  
la Lagrangiana operaremos con la función definida por analogía con la  
ecuación <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>g = f - <span  
class=SpellE>Ux</span>. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>luego<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:117pt;height:24.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image175.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292566">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> H es la Hamiltoniana.  
Considerada como una función de q, p, t la diferencial de H será:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:182.25pt;height:33pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image176.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292567">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Pero de acuerdo a la definición de H:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:245.25pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image177.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292568">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:36.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image178.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292569">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image179.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292570">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>La ecuación de <span class=SpellE>Lagrange</span> nos dice:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:159.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image180.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292571">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>por lo que la ecuación para <span class=SpellE>dH</span> es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:149.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image181.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292572">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>comparando con la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:245.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image182.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292573">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:48pt;height:86.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image183.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292575">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones canónicas de Hamilton, y forman un sistema de 2N ecuaciones de primer orden que sustituyen a las de <span class=SpellE>Lagrange</span>. El método de Hamilton es muy adecuado cuando hay coordenadas cíclicas, que son aquellas para las cuales <span class=SpellE>p<sub>j</sub></span> = <span class=SpellE>cte</span>, lo que significa que <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image184.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292576">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->= 0, entonces:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image185.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292577">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

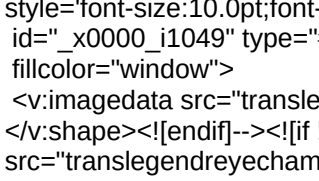
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> las coordenadas cíclicas no figuran en la Hamiltoniana. Cuando alguna coordenada, por ejemplo

<span class=SpellE>q<sub>n</sub></span> es cíclica la </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L(q<span class=GramE>

<sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image186.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292578">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span> t)<span style='color:blue'> es: </span>L(q<sub>1</sub></sub>,..., <span class=SpellE>q<sub>n</sub></span><sub>-1</sub>,<sub></sub><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:12pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image187.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292579">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--,..., <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image188.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292580">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--, t)<span style='color:blue'>. Aparecen todas las velocidades generalizadas. En la hamiltoniana una coordenada cíclica es ignorable ya que en la misma situación <span class=SpellE>p<sub>n</sub></span> = <span class=SpellE>cte</span> y H es de la forma H(q<sub>1</sub></sub>,..., <span class=SpellE>q<sub>n</sub></span><sub>-1</sub>, p<sub>1</sub></sub>,..., <span class=SpellE>p<sub>n</sub></span><sub>-1</sub><span class=GramE>, <span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span></span>, </span> t), que es un problema con n - 1 grados de libertad ya que la coordenada cíclica no aparece a sólo como </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = <span class=SpellE>cte</span>

es una constante de integración que se determina de las condiciones iniciales. El comportamiento de esta coordenada con el tiempo se obtiene integrando la ecuación de movimiento:

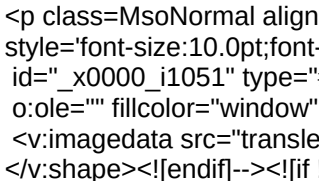
&nbsp;



&nbsp;

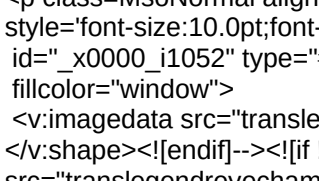
El método de Routh consiste en pasar de la base  $q$ ,  $\dots$ ,  $q$   $s$  son las coordenadas cíclicas introducimos la función:

&nbsp;



&nbsp;

Diferenciando:



DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292584">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y de aquí:</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:129pt;height:119.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image193.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><![if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292585"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Las primeras ecuaciones son las de Hamilton con R como la hamiltoniana y las 2ª indican que las coordenadas que restan se hallan con las ecuaciones de <span class=Spelle>Lagrange</span>:</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image194.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><![if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292586"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>R es la Lagrangiana.</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En la <span class=Spelle>Routhiana</span> R los momentos <sub>1</sub>,...

<span class=Spelle>p<sub>s</sub></span> son constantes y se pueden remplazar por las constantes </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,..., </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>s</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que se determinan de las condiciones iniciales, así que las variables de R son las n - s coordenadas no cíclicas y sus velocidades generalizadas <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image195.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292587"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> lo que las ecuaciones de <span class=SpellE>Lagrange</span> se pueden resolver sin considerar las coordenadas cíclicas.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>El hecho de que una coordenada cíclica en L sea también cíclica en H significa que los teoremas de conservación del momento quedan generalizados a la formulación hamiltoniana sin más que sustituir L por H. En particular, la relación entre las propiedades de simetría del sistema físico y las constantes del movimiento se pueden deducir también en función de la Hamiltoniana.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Si L no era función explícita de t, H es una constante de movimiento. A la misma conclusión llegamos examinando las ecuaciones de movimiento sin más que escribir la derivada total de H respecto a t en la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:131.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image196.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292588"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image197.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292589">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if  
 gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image198.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292590">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75" style='width:147pt;height:33pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image199.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292591">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>así que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:27pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image200.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292592">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>Pero además si las ecuaciones de transformación que definen  
 las coordenadas generalizadas <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:15.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image201.wmz" o:title=""/>





src="translegendreyechamilton\_archivos/image077.gif"

v:shapes="\_x0000\_i1064"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292596">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>o bien:</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image205.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292597">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> a lo anterior se le llama el principio modificado de Hamilton. La única variación con respecto al método empleado para deducir la ecuación de <span class=Spelle>Lagrange</span> a partir del principio de Hamilton es que en este caso las variaciones de p y q son independientes, ya que en la formulación Hamiltoniana ambas tienen la misma categoría como coordenadas necesarias para determinar el movimiento del sistema. </p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>En función del parámetro </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:</span></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1066" type="#\_x0000\_t75" style='width:48.75pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image206.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292598">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>por lo que:</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1067" type="#\_x0000\_t75" style='width:213.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image207.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1067"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292599">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como los tiempos inicial y final no varían y no son funciones de </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> diferenciamos dentro de la integral:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1068" type="#\_x0000\_t75" style='width:231.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image208.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1068"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292600">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Se pueden permutar las derivaciones respecto a t y a </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> en el segundo término del paréntesis por lo que la variación es a tiempo constante. Las integrales donde aparece este término se transforman por integración por partes:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1069" type="#\_x0000\_t75" style='width:201pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image209.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1069"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292601">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como las trayectorias variadas tienen los mismos extremos,

para  $t_1$  y  $t_2$ :  $\langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'} \rangle \langle sub \rangle \langle !-[if gte vml 1] \rangle \langle v:shape \text{ id="_x0000_i1070" type="\#_x0000_t75" style='width:35.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"} \rangle$   
 $\langle v:imagedata \text{ src="translegendreyechamilton_archivos/image210.wmz" o:title=""}/ \rangle$   
 $\langle /v:shape \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle ![/math>if !vml $] \rangle \langle img \text{ width=47 height=36 src="translegendreyechamilton_archivos/image089.gif" v:shapes="_x0000_i1070"} \rangle \langle ![/math>endif $] \rangle \langle /sub \rangle \langle !-[if gte mso 9] \rangle \langle xml \rangle$   
 $\langle o:OLEObject \text{ Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1070" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292602"} \rangle$   
 $\langle /o:OLEObject \rangle$   
 $\langle /xml \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'} \rangle \text{Además:} \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'} \rangle \langle sub \rangle \langle !-[if gte vml 1] \rangle \langle v:shape \text{ id="_x0000_i1071" type="\#_x0000_t75" style='width:59.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"} \rangle$   
 $\langle v:imagedata \text{ src="translegendreyechamilton_archivos/image211.wmz" o:title=""}/ \rangle$   
 $\langle /v:shape \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle ![/math>if !vml $] \rangle \langle img \text{ width=79 height=37 src="translegendreyechamilton_archivos/image091.gif" v:shapes="_x0000_i1071"} \rangle \langle ![/math>endif $] \rangle \langle /sub \rangle \langle !-[if gte mso 9] \rangle \langle xml \rangle$   
 $\langle o:OLEObject \text{ Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1071" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292603"} \rangle$   
 $\langle /o:OLEObject \rangle$   
 $\langle /xml \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'} \rangle y \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD} \rangle \langle sub \rangle \langle !-[if gte vml 1] \rangle \langle v:shape \text{ id="_x0000_i1072" type="\#_x0000_t75" style='width:54.75pt;height:27.75pt' o:ole=""}/ \rangle$   
 $\langle v:imagedata \text{ src="translegendreyechamilton_archivos/image212.wmz" o:title=""}/ \rangle$   
 $\langle /v:shape \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle ![/math>if !vml $] \rangle \langle img \text{ width=73 height=37 src="translegendreyechamilton_archivos/image093.gif" v:shapes="_x0000_i1072"} \rangle \langle ![/math>endif $] \rangle \langle /sub \rangle \langle !-[if gte mso 9] \rangle \langle xml \rangle$   
 $\langle o:OLEObject \text{ Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1072" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292604"} \rangle$   
 $\langle /o:OLEObject \rangle$   
 $\langle /xml \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle /span \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'} \rangle \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'} \rangle y \text{ la ecuación del principio modificado de Hamilton}$   
 $\text{es:} \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$   
 $\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle span \text{ lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'} \rangle \langle sub \rangle \langle !-[if gte vml 1] \rangle \langle v:shape \text{ id="_x0000_i1073" type="\#_x0000_t75" style='width:182.25pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"} \rangle$   
 $\langle v:imagedata \text{ src="translegendreyechamilton_archivos/image213.wmz" o:title=""}/ \rangle$   
 $\langle /v:shape \rangle \langle ![/math>endif $] \rightarrow \langle ![/math>if !vml $] \rangle \langle img \text{ width=243 height=49 src="translegendreyechamilton_archivos/image095.gif" v:shapes="_x0000_i1073"} \rangle \langle ![/math>endif $] \rangle \langle /sub \rangle \langle !-[if gte mso 9] \rangle \langle xml \rangle$   
 $\langle o:OLEObject \text{ Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1073"} \rangle$$$$$$$$$$$$$$$$

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292605">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>p<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son independientes, la integral será cero si los coeficientes se anulan por separado, por lo que tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1074" type="#\_x0000\_t75" style='width:54pt;height:59.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image214.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1074" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292606"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y de aquí:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1075" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:59.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image215.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1075" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292607"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son las ecuaciones de Hamilton.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>A partir del principio de Hamilton modificado hemos obtenido ecuaciones de primer orden por considerar a la variación </span><span

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>p<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1076" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image216.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1076" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292608"></o:OLEObject></xml><!--[endif]>independientes de </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, por lo que a los <span class=SpellE>p<sub>i</sub></span> los consideramos como variables independientes con la misma categoría que las coordenadas, y relacionados con estos y con el tiempo, sólo a través de las propias ecuaciones de movimiento y no por ninguna relación previa de definición.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Existe otro principio variacional asociado con la formulación Hamiltoniana y denominado principio de mínima acción. En mecánica se define la acción como:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1077" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image217.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1077" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292609"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Este principio dice que en un sistema en el que  $H =$  <span class=SpellE>cte</span><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1078" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image218.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1078" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292610"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> representa un nuevo tipo de variación de la trayectoria. El proceso </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se aplica a desplazamientos que implican un cambio <span class=Spelle>dt</span> en el tiempo, por lo que la trayectoria variada se obtiene de una sucesión de desplazamientos, cada uno de los cuales incluye un cambio diferencial <span class=Spelle>dt</span>, por lo que será posible exigir además que la trayectoria variada resulte compatible con el movimiento físico, es decir que si en la trayectoria real se conserva H, también se conserva en la trayectoria variada. El tiempo requerido para recorrer las diversas trayectorias no tiene porque ser el mismo. El punto representativo se ha de acelerar o frenar para que H se conserve y en consecuencia en el proceso </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> varía t aún en los puntos extremos, donde la variación de las <span class=Spelle>q<sub>i</sub></span> = 0.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La trayectoria real variada puede ser la misma tanto en la variación </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> como en <span class=GramE>la </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, aunque

# INFORME TECNICO IT-TINF-2007-01



src="translegendreyechamilton\_archivos/image108.gif"

v:shapes="\_x0000\_i1080"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1080"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292612">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1081" type="#\_x0000\_t75" style='width:48.75pt;height:27.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image221.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1081"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292613">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1082" type="#\_x0000\_t75" style='width:60.75pt;height:15pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image222.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1082"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292614">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Esta relación es válida para toda f(q, t) <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1083" type="#\_x0000\_t75" style='width:65.25pt;height:15.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image223.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1083"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292615">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y en general </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>f

será:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1084" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:30pt'

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image224.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1084"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292616">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>que de acuerdo a: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1085" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:15.75pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image225.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1085"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292617">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>se escribe:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1086" type="#\_x0000\_t75" style='width:150.75pt;height:33pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image226.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1086"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292618">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>La acción A se escribe:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1087" type="#\_x0000\_t75" style='width:197.25pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image227.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1087"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292619">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Como H = <span class=SpellE>cte</span>, la<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1088" type="#\_x0000\_t75" style='width:99.75pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image228.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1088"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292620">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> debe considerar que los límites de integración están sometidos a variación. Si la integral es igual a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1089" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image229.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1089"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292621">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>de acuerdo con la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1090" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image230.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1090"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292622">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1091" type="#\_x0000\_t75" style='width:171pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image231.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1091"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292623">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>o:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1092" type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:36.75pt'

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image232.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1092"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292624">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>En este método <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>D</span></span><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>q<sub>i</sub></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = 0<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>en los extremos, por lo que el valor real de este término  
será:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1093" type="#\_x0000\_t75" style='width:146.25pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image233.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1093"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292625">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>que por las ecuaciones de <span  
class=SpellE>Lagrange</span><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1094" type="#\_x0000\_t75" style='width:263.25pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image234.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1094"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292626">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Aplicando: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1095" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">



</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'> </span><span class=GramE>si</span> no hay fuerzas externas sobre el sistema T se conserva junto con la H y el principio es: </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(t<sub>2</sub>-t<sub>1</sub>)= 0 o sea que entre todas las trayectorias posibles entre dos puntos, compatibles con la conservación de la energía, el sistema sigue aquella para la cual el tiempo de tránsito es mínimo. Si el sistema se compone de una sola partícula, la energía cinética está dada por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1099" type="#\_x0000\_t75" style='width:96pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image239.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1099" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292631"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1100" type="#\_x0000\_t75" style='width:63pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image240.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1100" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292632"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> nos da <span class=Spelle>dt</span> en función de la longitud de la trayectoria seguida por la partícula. En este caso la forma del principio de mínima acción se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1101" type="#\_x0000\_t75" style='width:192.75pt;height:23.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image241.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1101">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292633">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1102" type="#\_x0000\_t75" style='width:42pt;height:18.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image242.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1102" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292634">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>esta</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> forma es aplicable a sistemas de más de una partícula descritas por cualquier conjunto de coordenadas generalizadas. Para ello empleamos una expresión más general de <span class=Spelle>dt</span> en función del elemento de arco de la trayectoria. Como las ecuaciones que definen las <span class=Spelle>q<sub>i</sub></span> no han de contener el tiempo, la energía cinética será siempre una función cuadrática homogénea de sus velocidades.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1103" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image243.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1103" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292635">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>m<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = 2a<sub>i</sub></span><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1104" type="#\_x0000\_t75" style='width:92.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image244.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1104"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292636">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>sea d</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1105" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:26.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image245.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1105" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292637"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y la energía cinética será:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1106" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image246.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1106" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292638"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Con esta relación el principio de mínima acción se escribe como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1107" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image247.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1107" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292639"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>o finalmente:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1108" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:23.25pt'



o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="translegendreyechamilton\_archivos/image248.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID=" \_x0000\_i1108"  
DrawAspect="Content" ObjectID=" \_1244292640">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Esta ecuación se conoce como la forma de <span  
class=SpellE>Jacobi</span> del principio de mínima acción. La d</span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> por geometría  
diferencial es la forma más general de la longitud de una trayectoria en un  
espacio n-dimensional de coordenadas  $q_1, \dots, q_n$ ,  
class=SpellE> $q_n$ </span>.  
Los coeficientes  $m_{ik}$  son los elementos  
del tensor métrico. En un sistema coordenado cartesiano el tensor métrico es  
muy sencillo, sus elementos son  $m_{ik}$  =  
</span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-  
family:Arial;color:blue'>ik</span></sub></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>.  
Comparando con: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(</span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial'>s<sup>2</sup> = (<span class=SpellE>dx</span><sup>2</sup> + (<span  
class=SpellE>dy</span><sup>2</sup> + (<span  
class=SpellE>dz</span><sup>2</sup><span  
style='color:blue'>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>La diferencial d</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>r</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es el  
elemento de longitud de la trayectoria en el espacio de configuración de  
coordenadas  $q_1, \dots, q_n$  que en  
general no serán cartesianas sino curvilíneas. La  $(2T)^{1/2}$  es la  
velocidad del punto representativo en el espacio de configuración. Si no  
actúan fuerzas sobre el cuerpo, T es constante y el movimiento será tal que  
el punto representativo se desplace por el camino más corto en el espacio de  
configuración, es decir, recorrerá una de las geodésicas del espacio.<o:p></o:p></span></p>

```

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span
style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES;mso-fareast-language:
ES'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.32 FUNDAMENTOS FISICOS. PARENTESIS DE POISSON

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="perentpoison_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="perentpoison_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="perentpoison_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PARENTESIS DE POISSON</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T15:10:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:36:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>382</o:Words>
<o:Characters>2106</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>17</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2484</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>

```

```

</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}

span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}

span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}

@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}

div.Section1
 {page:Section1;}

/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:658852333;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1258327296;}

@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;

```

```

 text-indent:-14.15pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>PARENTESIS DE
POISSON<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Sea f(p, q, t) una función de las
coordenadas, ímpetus y tiempo. La derivada total respecto al tiempo
es:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke jointstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

```

```

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:159.75pt;
height:38.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="perentpoison_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287695">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Sustituyendo <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026"
type="#_x0000_t75" style='width:15pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="perentpoison_archivos/image020.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287696">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:12.75pt;height:15pt'
o:ole="">
 <v:imagedata src="perentpoison_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287697">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]> por los
valores obtenidos en las ecuaciones de Hamilton, se tiene:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:63pt;height:27pt' o:ole=""
fillcolor="window">
 <v:imagedata src="perentpoison_archivos/image022.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287698">
 </o:OLEObject>

```

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:138pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="perentpoison\_archivos/image023.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287699"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se denominan paréntesis de <span class=SpellE>Poisson</span> para H y f. Recordando que llamamos integrales de movimiento a aquellas funciones de las variables dinámicas, que permanecen constantes durante el movimiento del sistema. De la ecuación de <span class=SpellE>df</span></span><span class=SpellE>dt</span> se deduce que la condición para que la magnitud f sea una integral de movimiento es que <span class=SpellE>df</span></span><span class=SpellE>dt</span> = 0 se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:57.75pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="perentpoison\_archivos/image024.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287700"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> decir, el paréntesis de <span class=SpellE>Poisson</span> formado con la hamiltoniana debe de anularse si la integral de movimiento no depende explícitamente del tiempo, </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>H, f</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = 0.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

Para dos magnitudes cualesquiera  $f$  y  $q$ , los paréntesis de Poisson se definen como:



Los paréntesis de Poisson tienen las siguientes propiedades que se deducen de su definición:

1.  $\{f, f\} = 0$

2. Si una de las funciones es constante el paréntesis es cero.

[illegible]



symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = f<sub>1</sub></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>f<sub>2</sub>, g</span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> + f<sub>2</sub></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>f<sub>1</sub>, g</span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>Tomando la derivada parcial con respecto al tiempo  
 tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="perentpoison\_archivos/image026.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287702">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>Si una de las funciones f o g coincide con una coordenada o  
 con un ímpetu, los paréntesis de <span class=SpellE>Poisson</span> se reducen  
 a una derivada parcial:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:59.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="perentpoison\_archivos/image027.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287703">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>





style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>f, g, h</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle>cte</span></span></p></p></td></tr></table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES;mso-fareast-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.33 FUNDAMENTOS FISICOS. PRINCIPIO DE MAUPERTIUS

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="princmaupertius_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="princmaupertius_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="princmaupertius_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
```

```

w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PRINCIPIO DE MAUPERTIUS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T15:15:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:37:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>434</o:Words>
<o:Characters>2392</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>19</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2821</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}

```

```

span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>PRINCIPIO
DE
MAUPERTIUS<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>El movimiento de un sistema mecánico está perfectamente
determinado por el principio de mínima acción. Resolviendo las ecuaciones de
movimiento que se deducen de este principio, se puede hallar la forma de la
trayectoria, así como la función sobre la trayectoria en función del tiempo.
Si el problema se restringe a únicamente determinar la trayectoria sin hacer
referencia al tiempo, se puede emplear una forma simplificada del principio
de mínima acción. Supongamos que la Lagrangiana, y por lo tanto la
Hamiltoniana no dependen explícitamente del tiempo, de modo que la energía

```

del sistema se conserva, <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>H(</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>p, q) = E = <span class=Spelle>cte</span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>De acuerdo con el principio de mínima acción, la variación de la acción para valores iniciales y finales, dadas las coordenadas y el tiempo, es nula. Si permitimos la variación del tiempo final t, permaneciendo fijas las coordenadas inicial y final, tenemos: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>s = -H</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>t.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Ahora vamos a comparar, no todos los desplazamientos virtuales del sistema, sino solamente aquellos que satisfacen la ley de la conservación de la energía. Para tales trayectorias podemos sustituir H en la ecuación anterior por la constante E, y tenemos: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>s + E</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>t = 0.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si la acción la escribimos de la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id=" x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke jointstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>







o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287776">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Si lo sustituimos en la ecuación anterior, y expresamos los  
ímpetus en función de q y <span class=SpellE>dq</span>, con la energía E como  
parámetro, el principio variacional así obtenido determina la trayectoria del  
sistema, y usualmente se le llama principio de <span  
class=SpellE>Maupertius</span>. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Cuando la lagrangiana tiene su forma habitual, los cálculos  
anteriores se pueden realizar explícitamente, como la diferencia entre  
energía cinética y potencial: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:111pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287777">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>Los ímpetus son entonces: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:96pt;height:30pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287778">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:blue'>y la energía: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:113.25pt;height:30.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287779">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>de aquí se obtiene:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt;height:38.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image019.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287780">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>que si lo sustituimos en:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image020.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287781">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>da la expresión siguiente para la acción abreviada:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:129.75pt;height:24pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="princmaupertius\_archivos/image022.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287782">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En el movimiento libre de una partícula  $U = 0$  y la ecuación:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

```

<v:imagedata src="princmaupertius_archivos/image024.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287783">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>nos da el resultado trivial:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='color:blue'><span style='position:relative;top:9.0pt;mso-text-raise:
-9.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75"
style='width:39.75pt;height:23.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="princmaupertius_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><!--
[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244287784">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]--><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial'><o:p></o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span
style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES;mso-fareast-language:
ES'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.34 FUNDAMENTOS FISICOS. TRANSFORMACIONES CANONICAS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="transfcanonicas_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="transfcanonicas_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="transfcanonicas_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}

```

```

</style>
<![endif]-->
<title>TRANSFORMACIONES CANONICAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>José Luis Pérez S.</o:Author>
 <o:Template>Normal</o:Template>
 <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
 <o:Revision>3</o:Revision>
 <o:TotalTime>8</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-21T15:24:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-25T20:57:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>1018</o:Words>
 <o:Characters>5599</o:Characters>
 <o:Company>CCADET</o:Company>
 <o:Lines>46</o:Lines>
 <o:Paragraphs>13</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>6604</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1

```

```

 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>TRANSFORMACIONES
CANONICAS</p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>La elección de las coordenadas generalizadas q's no está
limitada por ninguna condición, pueden ser s magnitudes cualesquiera que
definan unívocamente la posición del sistema en el espacio, El aspecto formal
de las ecuaciones de Lagrange no depende de esta
elección, y en este sentido se puede decir que las ecuaciones de Lagrange son invariables respecto a una transformación de
las coordenadas $q_1, q_2, \dots$ q_n
en otras magnitudes independientes $Q_1, \dots$ Q_n .
Las nuevas coordenadas Q son funciones de las antiguas q y pueden depender
explícitamente del tiempo, es decir que la transformación es de la
forma:</p>
</td>

```

$Q$  =  $Q(q, t)$

que se denominan transformaciones puntuales.

Puesto que las ecuaciones de Lagrange son invariantes ante esta transformación, también lo serán las ecuaciones de Hamilton, sin embargo estas ecuaciones admiten un nuevo marco, más amplio de transformaciones. Esto se debe a que en el método de Hamilton los ímpetus  $p$  son variables independientes con igual categoría que las coordenadas  $q$ , y se puede ampliar la transformación para incluir las 2s coordenadas independientes  $p$  y  $q$  que pasarán a  $P$  y  $Q$ , según:

$Q = Q(p, q, t)$

$P = P(p, q, t)$

Esta ampliación de las posibles transformaciones constituye una de las ventajas esenciales del método de Hamilton en la mecánica.

Las ecuaciones de movimiento no conservan su forma canónica para toda transformación de este tipo, por lo que vamos a deducir las condiciones que se deben satisfacer para que las ecuaciones de movimiento en las nuevas variables  $P$  y  $Q$  sean de la forma:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$$

$$\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{21600} \text{pixelWidth}$$

$$\sum_{i=1}^8 \prod_{j=1}^{21600} 0$$

$$\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^{21600} \text{pixelHeight}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \prod_{j=1}^{21600} 0$$

$$\text{Path} \text{ o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"}$$

$$\text{lock v:ext="edit" aspectratio="t"}$$

$$\text{shape id="_x0000_i1025" type="_x0000_t75" style="width:48.75pt; height:59.25pt" o:ole="" fillcolor="window"}$$

$$\text{imagedata src="transfcanonicas_archivos/image019.wmz" o:title=""}$$

$$\text{shape} \text{<![endif]--<![if !vml]} \text{img width=65 height=79}$$

$$\text{src="transfcanonicas_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025"> <![endif]> </sub> <!--[if gte mso 9]> <xml>$$

$$\text{OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292342"> </OLEObject> </xml> <![endif]--> <o:p> </o:p> </span> </p>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'}<\text{o:p}>\&\text{nbsp};</\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span class=GramE}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'}<\text{con}</\text{span}></\text{span}><\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'}> \text{una nueva Hamiltoniana } H(P, Q) \text{ que significa que la transformación es canónica.}<\text{o:p}></\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'}<\text{o:p}>\&\text{nbsp};</\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'}>\text{Las ecuaciones de Hamilton se pueden deducir del principio de mínima acción en la forma:}<\text{o:p}></\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'}<\text{o:p}>\&\text{nbsp};</\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'}<\text{sub}><!--[if gte vml 1]><\text{shape id="_x0000_i1026" type="_x0000_t75" style='width:105pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"> <\text{imagedata src="transfcanonicas_archivos/image020.wmz" o:title=""}> </\text{shape}><![endif]--><![if !vml]} \text{img width=140 height=44}$$

$$\text{src="transfcanonicas_archivos/image004.gif" v:shapes="_x0000_i1026"> <![endif]> </sub> <!--[if gte mso 9]> <xml>$$

$$\text{OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244292343"> </OLEObject> </xml> <![endif]--> <o:p> </o:p> </span> </p>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'}<\text{o:p}>\&\text{nbsp};</\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span class=GramE}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'}<\text{en}</\text{span}></\text{span}><\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'}> \text{la cual la variación se aplica a todas las coordenadas y los ímpetus independientemente. Si las nuevas variables P y Q satisfacen también a las ecuaciones de Hamilton, se debe de verificar el principio de mínima acción:}<\text{o:p}></\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'}<\text{o:p}>\&\text{nbsp};</\text{o:p}></\text{span}></\text{p}>$$

$$\text{p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'}<\text{span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'}<\text{sub}><!--[if gte vml 1]><\text{shape id="_x0000_i1027" type="_x0000_t75" style='width:110.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"> <\text{imagedata src="transfcanonicas_archivos/image021.wmz" o:title=""}> </\text{shape}><![endif]--><![if !vml]} \text{img width=147 height=44}$$

$$\text{src="transfcanonicas_archivos/image006.gif" v:shapes="_x0000_i1027"> <![endif]> </sub> <!--[if gte mso 9]> <xml>$$



<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292344">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Estas dos formas del principio de mínima acción son equivalentes solamente si sus integrantes difieren en una diferencial total de una función arbitraria <span class=GramE>F(</span>q, p, t). La diferencia entre los dos integrandos será una constante cuya variación es nula, por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:168pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="transfcanonicas\_archivos/image022.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292345">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Toda transformación canónica se caracteriza por esta función F llamada generatriz de la transformación, o sea:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:165pt;height:24.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="transfcanonicas\_archivos/image023.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292346">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se tiene:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:51.75pt;height:86.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="transfcanonicas\_archivos/image024.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292347">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se ha supuesto que la transformación generatriz está dada como función de q, Q, t, o sea  $F = F(q, Q, t)$ . Cuando F es conocida las ecuaciones anteriores nos dan las relaciones entre las antiguas variables (p, q) y las nuevas (P, Q), así como la nueva Hamiltoniana.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Puede convenir expresar la función generatriz en función de <span class=GramE>las</span> q y de las P. Para deducir en este caso las ecuaciones de las transformaciones canónicas debemos realizar la adecuada transformación de <span class=Spelle>Legendre</span> para <span class=Spelle>dF</span>, volviendo a escribirla como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:219.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfcanonicas\_archivos/image025.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292348"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>El argumento de la diferencial del primer miembro expresado en función de las variables q y P es una nueva función generatriz. Llamemos </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(q, P, t) y se tiene:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:51pt;height:86.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfcanonicas\_archivos/image026.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292349"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>De modo análogo se pueden obtener las ecuaciones para las transformaciones canónicas que encierran funciones generatrices dependientes de las variables p y Q, o de las p y P.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'>La relación entre la nueva y antigua Hamiltoniana es siempre de la misma forma: La diferencia  $H' - H$  es la derivada parcial de la función generatriz respecto al tiempo. En particular si la función generatriz es independiente del tiempo, entonces  $H' = H$ , es decir, la nueva Hamiltoniana se obtiene al sustituir en  $H$  las magnitudes  $p$  y  $q$  por  $P$  y  $Q$ .</o:p></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'>A las variables  $p$  y  $q$  en el método de Hamilton se les llaman magnitudes canónicamente conjugadas. Estas condiciones se pueden expresar con paréntesis de <span class=Spelle>Poisson</span>. Lo demostraremos: Sea </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'>,  $g$ </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span class=Spelle><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'> $p, q$ </span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'> el paréntesis de <span class=Spelle>Poisson</span> de las magnitudes  $f$  y  $g$ , en el cual la diferenciación se hace respecto a las variables  $p$  y  $q$  y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'>,  $g$ </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span class=Spelle><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'> $p, q$ </span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel;color:blue'>, el paréntesis de <span class=Spelle>Poisson</span> de las mismas magnitudes diferenciales con respecto a las variables canónicas  $P$  y  $Q$ . Entonces:</o:p></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel'>,  $g$ </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span class=Spelle><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel'> $p, q$ </span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Ariel'>,  $g$ </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Ariel;mso-hansi-font-family:Ariel;mso-bidi-font-family:Ariel;mso-char-type:

symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span class=SpellE><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>P,Q</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Esta relación se demuestra de la siguiente forma: en las transformaciones canónicas el tiempo aparece como un parámetro, por lo que se puede demostrar el teorema para magnitudes que no dependen explícitamente del tiempo. Consideremos ahora de modo puramente formal a la magnitud q como la hamiltoniana de un sistema ficticio, luego se tendrá que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:54pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfcanonicas\_archivos/image027.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244292350"></o:OLEObject></xml><![endif]></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La derivada <span class=SpellE>df</span></span><span class=SpellE>dt</span> sólo puede depender de las propiedades del movimiento del sistema ficticio, y no de la particular elección de las variables. De aquí que el paréntesis de <span class=SpellE>Poisson</span> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>f, g</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> sea inalterable por el paso de un conjunto de variables canónicas a otras. Las condiciones que debe satisfacer para que la transformación p, q </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>@</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> P, Q sea canónica son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>Q<sub>i</sub></span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>Q<sub>i</sub></span></span></p>

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>, <span class=Spelle>Q<sub>k</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>p, q</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = 0,<span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>P<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>, <span class=Spelle>P<sub>k</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>p, q</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = 0,<span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>P<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>, <span class=Spelle>Q<sub>k</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>p, q</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = 0,<span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>P<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>, <span class=Spelle>Q<sub>k</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>p, q</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> = 0,<span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span class=Spelle><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>ik</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En la interpretación geométrica de los fenómenos mecánicos, se hace frecuentemente uso del concepto de espacio fase. Este es un espacio de 2s dimensiones cuyos ejes coordenados corresponden a las coordenadas generalizadas y a los s ímpetus del sistema mecánico considerado. Cada punto en este espacio corresponde a un estado definido del sistema. Cuando el sistema se mueve, el punto representativo en el espacio físico describe una línea denominada trayectoria fase. El producto de diferenciales <o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>d</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial'>

mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>G</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial'> = dq<sub>1</sub>,<span class=SpellE>dq<sub>s</sub></span>,</span>  
 dp<sub>1</sub>,<span class=SpellE>dp<sub>s</sub></span><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> puede considerar como  
 un elemento de volumen en el espacio fase. Consideremos la integral </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>ð</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>d</span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> extendida a una región  
 cualquiera de este espacio, y que representa al volumen en dicha región. Esta  
 integral tiene la propiedad de ser invariante respecto a las transformaciones  
 canónicas, o sea si las variables p, q se transforman canónicamente en las  
 variables P, Q, los volúmenes de las regiones correspondientes de los  
 espacios p, q y P, Q, serán los mismos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'><span  
 style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>ð</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x<span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>x<span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>x</span></span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>ð</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>dq<sub>1</sub>,<span class=SpellE>dq<sub>s</sub></span>,<span class=SpellE>dp<sub>s</sub></span> = </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>ð</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x<span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>x<span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>x</span></span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:

Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>ò</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>dQ<sub>1</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>,..., <span class=Spelle>dQ<sub>s</sub></span>, <span class=Spelle>dP<sub>1</sub></span>,..., <span class=Spelle>dP<sub>s</sub></span><span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span></span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Supongamos ahora que cada punto en la región considerada del espacio de fase se mueve en el curso del tiempo de acuerdo con las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico, la región también se moverá como un todo permaneciendo su volumen invariable:<span></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>ò</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>d</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle>cte</span>.<span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span></span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Este resultado conocido como teorema de <span class=Spelle>Lioville</span>, es consecuencia inmediata de esta invarianza del volumen del espacio fase en las transformaciones canónicas, y del hecho de que la variación de p y q durante el movimiento se pueden considerar como una transformación canónica.<span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><span></span></span></p></td></tr></table><p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES;mso-fareast-language:ES'><span></span></span></p></div></body></html>

### 3.35 FUNDAMENTOS FISICOS. ECUACIONES DE HAMILTON

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml" xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuahamilton_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuahamilton_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuahamilton_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES DE HAMILTON</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>14</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-25T21:25:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T21:42:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>514</o:Words>
<o:Characters>2828</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>23</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3336</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;

```



```

 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:36.0pt;
 mso-footer-margin:36.0pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:red'>ECUACIONES DE HAMILTON<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'>La funci3n de Lagrange L es una funci3n de las coordenadas <span

```

class=SpellE>q<sub>k</sub></span>, de las velocidades <sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype

id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt; height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image047.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294905">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><span style='mso-spacerun:yes'> </span>y del tiempo. El estado de un sistema mecánico en cualquier tiempo, esto es, la posición y velocidad de todas sus partes, se especifican por sus coordenadas y velocidades generalizadas. Las ecuaciones de <span class=SpellE>Lagrange</span> son ecuaciones de segundo orden que relacionan las aceleraciones a las coordenadas y velocidades. También se puede especificar el estado de un sistema dando sus coordenadas <span class=SpellE>q<sub>k</sub></span> y los momentos <span class=SpellE>p<sub>k</sub></span> definidos por:

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image048.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294906">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Estas ecuaciones definen a <span class=SpellE>p<sub>k</sub></span> en términos de q<sub>1</sub>, ..., <span class=SpellE><span class=GramE>q<sub>f</sub></span></span><span class=GramE><sub></sub></span>; <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:30pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294907">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--></span> En principio se puede resolver para <sub><!--[if gte vml  
1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:15pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image050.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294908">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><span style='mso-spacerun:yes'> </span>en términos de:  
q<sub>1</sub>, ...,  
<span class=SpellE><span class=GramE>q<sub>f</sub></span></span><span  
class=GramE><sub> </sub>;</span> p<sub>1</sub>, ..., <span  
class=SpellE>p<sub>f</sub></span>. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Escribiremos las  
ecuaciones de movimiento en términos de las coordenadas <span  
class=SpellE>q<sub>k</sub></span><sub>  
</sub><span style='mso-spacerun:yes'> </span>y los momentos <span  
class=SpellE>p<sub>k</sub></span>. Usando la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:30pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image048.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294909">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:33pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image051.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294910">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><span style='mso-spacerun:yes'> </span></span><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>k = 1, 2, ..., 3n<span  
style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

se tiene:

$$H(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(q_i)$$

podemos definir una función:

$$H(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(q_i)$$

como:

$$H(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(q_i)$$

la cual las coordenadas  $q_1, \dots, q_n$  se sustituyeron por sus velocidades y momentos. Así que tenemos:

$$H(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(q_i)$$

La definición de la ecuación

<sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:294.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image052.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294914"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> toma de forma tal que <span class=Spelle>dH</span> depende explícitamente de <span class=Spelle>dp<sub>k</sub></span>, <span class=Spelle>dq<sub>k</sub></span> y <span class=Spelle>dt</span>. De la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image053.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294915"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:53.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image055.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294916"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image056.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294917"></o:OLEObject>

</xml><![endif]></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image057.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294918"></o:OLEObject></xml><![endif]><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> estas son las ecuaciones de movimiento expresadas en función de <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294919"></o:OLEObject></xml><![endif]><span style='mso-spacerun:yes'> </span>y <span class=Spelle>p<sub>k</sub></span> para <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294920"></o:OLEObject></xml><![endif]><span style='mso-spacerun:yes'> </span>y <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image058.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294921"></o:OLEObject></xml><![endif]>. Son las ecuaciones de movimiento de Hamilton.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La función H definida por la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center;tab-stops:148.85pt'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:32.25pt'

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image053.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294922">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify;tab-stops:148.85pt"><span  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify;tab-stops:148.85pt"><span  
class=GramE><span style="font-size:10.0pt;font-  
family:Arial;color:blue">se</span></span></span>  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"> denomina Hamiltoniana  
y es la energía total expresada en términos de las ordenadas y  
momentos.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify;tab-stops:148.85pt"><span  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify"><span style="font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue">Si lo analizamos por los métodos variacionales  
tenemos que si Partimos de la Acción:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify"><span style="font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style="width:42pt;height:36.75pt"  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294923">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify"><span style="font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue">Escribiremos la acción en términos de la  
Hamiltoniana:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify"><span style="font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style="width:81.75pt;height:36.75pt"  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image060.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294924">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style="text-align:justify"><span style="font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue">supongamos que es un extremal:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><span  
style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style="width:213.75pt;height:36.75pt"

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294925">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>El primer término: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:179.25pt;height:27.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image062.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294926">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>aplicando la integral:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:258pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image063.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294927">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>pero:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:129.75pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image064.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294928">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:207pt;height:36.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image065.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><img width=276 height=49



src="ecuahamilton\_archivos/image038.gif" v:shapes="\_x0000\_i1049"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294929">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>pero esto es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:183.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image066.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294930">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>Como vemos el integrando son dos de las ecuaciones de Hamilton. Para que el principio variacional nos de las ecuaciones de Hamilton se requiere que </span><span style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>p<sub>k</sub></span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q<sup>k</sup></span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> sean arbitrarias y linealmente independientes.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>Los conjuntos de las <span class=SpellE>q's</span> y de las <span class=SpellE>p's</span> son disjuntos. Se sabe que las <span class=SpellE>q's</span> son linealmente independientes. Si las <span class=SpellE>p's</span> son linealmente independientes, los dos conjuntos serán linealmente independientes. Como p y q son canónicamente conjugadas a cada p le corresponde una q, por lo que se puede hacer un mapeo <span class=SpellE>biyectivo</span> y son linealmente independientes. Ya que esto es cierto:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:159.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image067.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294931">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>y por lo tanto:</o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:39.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image068.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294932">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:36.75pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="ecuahamilton\_archivos/image069.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244294933">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>con</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> esto tenemos el espacio p, q y un punto en el espacio nos caracteriza el estado de movimiento en este punto de todo el sistema de N partículas. Si damos un sólo <span class=GramE>P(</span>q, p, t) éste sólo es condición necesaria y suficiente para conocer el desarrollo anterior y posterior del sistema a un tiempo t. Lo anterior nos dice que la línea extremal del principio de Hamilton es la línea de desarrollo del sistema. Este espacio p, q se llama espacio fase.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </td>  
 </tr>  
 </table>  
 <p class=MsoNormal><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-fareast-language: ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div>  
 </body>  
 </html>

### 3.36 FUNDAMENTOS FISICOS. INVARIANTES ADIABATICOS

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="invarianadiabat_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="invarianadiabat_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="invarianadiabat_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>INVARIANTES ADIABATICOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>7</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T15:28:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:32:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>788</o:Words>
<o:Characters>4336</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>36</o:Lines>
<o:Paragraphs>10</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>5114</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
```

```

/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

```

&lt;tr style="mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes"&gt;   &lt;td style="padding: 7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt"&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;b style="mso-bidi-font-weight:normal"&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red"&gt;INVARIANTES   ADIABATICOS&lt;/span&gt;&lt;/b&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red"&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt;&lt;o:p&gt;&amp;nbsp;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt;Consideremos un sistema mecánico que realiza un movimiento finito unidimensional caracterizado por un parámetro &lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;&lt;span style="mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;&lt;/span&gt;&lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt; que especifica las propiedades del sistema, o del campo exterior en el que está colocado. Supongamos que bajo la influencia de ciertas causas exteriores el parámetro &lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;&lt;span style="mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;I&lt;/span&gt;&lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt; varía lentamente (adiabáticamente) con el tiempo. Entendemos por lenta una transformación en la cual &lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;&lt;span style="mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;I&lt;/span&gt;&lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt; varía sólo ligeramente durante el periodo &lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;&lt;span style="mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"&gt;t&lt;/span&gt;&lt;/span&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt; del movimiento del sistema:&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt;&lt;o:p&gt;&amp;nbsp;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"&gt;&lt;span lang=ES-TRAD style="font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"&gt;&lt;sub&gt;&lt;!--[if gte vml 1]&gt;&lt;v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"&gt;&lt;v:stroke joinstyle="miter"/&gt;&lt;v:formulas&gt;&lt;v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 1 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum 0 0 @1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @2 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 0 1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @6 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @8 21600 0"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @10 21600 0"/&gt;&lt;/v:formulas&gt;&lt;v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/&gt;
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V=0} + \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V \neq 0}$$

Un sistema como éste no es cerrado y no se conserva su energía E. Sin embargo como

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V=0} + \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V \neq 0}$$

varía lentamente el ritmo de variación

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V=0} + \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V \neq 0}$$

de la energía es proporcional al ritmo de variación

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V=0} + \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V \neq 0}$$

del

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V=0} + \frac{1}{V} \left( \frac{dE}{dV} \right)_{V \neq 0}$$

parámetro

. Esto significa que cuando

la energía del sistema se comporta como si fuese una cierta función de V, en otras palabras existirá una relación entre E y

que permanece

constante durante el movimiento del sistema. Esta magnitud se denomina invariante adiabático.

Sea  $H(p, q)$  la Hamiltoniana del sistema, la cual depende de  $p$  y  $q$ . La derivada total de la energía con respecto al tiempo es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt}$$

Tomemos el valor medio de esta ecuación durante un periodo del movimiento, teniendo en cuenta que  $\frac{dp}{dt}$  y  $\frac{dq}{dt}$  varía lentamente, no es necesario tomar el valor medio de  $\frac{dp}{dt}$  y  $\frac{dq}{dt}$ .

$$\left\langle \frac{dH}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial H}{\partial p} \left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle + \frac{\partial H}{\partial q} \left\langle \frac{dq}{dt} \right\rangle$$

Como  $\frac{dp}{dt}$  y  $\frac{dq}{dt}$  son derivadas temporales, su valor medio es cero.

$$\left\langle \frac{dH}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle$$

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y en la función valor medio<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:27pt;height:42.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image066.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287186"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>podemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> considerar como variables p y q, y no a </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>I</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. En un movimiento de este tipo, se toman los valores medios como si el movimiento tuviese lugar con </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>I</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = <span class=Spelle>cte</span>. El valor medio de la energía se puede escribir explícitamente como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:38.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image067.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287187"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:45pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image068.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287188"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>



</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La integración respecto al tiempo puede por lo tanto reemplazarse por una integración respecto a la coordenada, expresando el periodo en la forma:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:48pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image069.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287189">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:89.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image070.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287190">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Estas integrales deben de formarse sobre la trayectoria para un valor constante <span class=GramE>de </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. A lo largo de esta trayectoria, la  $H =$  <span class=SpellE>cte</span> = E, y el ímpetu es una función definida de la coordenada variable q y de los parámetros constantes e independientes E <span class=GramE>y </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Poniendo por lo tanto:  $p = p(q, E,$  <span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>) y derivando  $H(p, q,$  <span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;

mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>) = E con respecto a </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, se tiene:</span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span>&nbsp;</span></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image071.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287191"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>o</span><span></span><p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:59.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image072.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287192"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span>&nbsp;</span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo esta expresi3n en el numerador de dE</span><span class=Spelle>dt</span> y escribiendo el integrando del denominador en la forma </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¶</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>p</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¶</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>E, tenemos:</span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span>&nbsp;</span></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:198.75pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image073.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287193">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>Finalmente esto se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:33.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image074.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287194">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>siendo<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if  
 gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:27.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image075.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287195">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>Este resultado muestra que en la aproximación que hemos  
 considerado, la magnitud  $I =$  <span class=SpellE>cte</span> cuando varía el <span  
 class=GramE>parámetro </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;  
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>I</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, es un  
 invariante adiabático.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:69pt;height:27pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image076.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287196">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> salvo 2</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> el periodo del movimiento. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:42.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image077.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287197">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>i tiene un significado geométrico en relación con la trayectoria del sistema en el espacio fase. En el caso de un sólo grado de libertad el espacio fase se reduce a un espacio bidimensional de coordenadas p y q, y la trayectoria física de un sistema que realiza un movimiento periódico es una curva cerrada en el plano. La:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image078.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287198">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>tomada</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> a lo largo de esta curva, es el área encerrada. Se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:60.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image079.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287199">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>o superficie<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if  
 gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:27.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image080.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287200">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>Las ecuaciones de movimiento de un sistema cerrado con  
 parámetros constantes se pueden formular en función de I. Efectuamos una  
 transformación canónica de p y q, donde I sea el nuevo ímpetu. <span  
 class=GramE>la</span> función generatriz es la acción abreviada S<sub>0</sub>  
 expresada como función de q e I. Como S<sub>0</sub> se define para una  
 energía dada del sistema, y en un sistema cerrado Y es sólo función de la  
 energía, S<sub>0</sub> se puede escribir como: <span  
 class=GramE>S<sub>0</sub></span></p>  
 t). <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>La:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:32.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image081.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287201">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'>coincidirá con:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:33.75pt;height:32.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image082.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287202">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>para I = <span class=SpellE>cte</span>, por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image083.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287203"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>correspondiente</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> a la 1ª de las fórmulas para una transformación canónica. La 2ª de estas fórmulas nos da la nueva coordenada llamada </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image084.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287204"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>las</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> variables I y w se llaman variables canónicas donde I es la variable de acción y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es la variable angular. Puesto que la generatriz <span class=GramE>S<sub>0</sub></span></span>q. Y) no depende del tiempo, la nueva H' = H, expresada en función de las nuevas variables, en otras palabras H' representa la <span class=GramE>E</span></span>I). Consecuentemente las ecuaciones de Hamilton con nuevas variables canónicas son: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>i = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue">y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image085.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287205"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>La primera ecuación da  $I =$  <span class=Spelle>cte</span>, ya que la energía es constante. De la 2ª ecuación se deduce que la variable angular es función lineal del tiempo:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image086.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287206"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>La acción  $S_{>0}$  </sub>(q, Y) es una función multiforme de las coordenadas. Al cabo de cada periodo esta función no toma su valor inicial, sino que aumenta en </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></span><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'> $S_{>0}$  </sub>( </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q, Y) = 2</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Y. Como es evidente de la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:51pt;height:23.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image087.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287207">  
 </o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>y de<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:53.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image088.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287208">  
 </o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>Durante el mismo tiempo la variable angular se incrementa en:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:123pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="invarianadiabat\_archivos/image089.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287209">  
 </o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='tab-stops:333.15pt'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si expresamos q y p en función de las variables canónicas, permanecerán invariantes cuando </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> aumenta en 2</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, o sea cualquier función uniforme <span class=GramE>F(</span>p, q) expresada por medio de las variables canónicas, es función periódica de </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES-TRAD



```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, con periodo 2<span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left;mso-layout-grid-align:
auto;punctuation-wrap:hanging;text-autospace:ideograph-numeric ideograph-other'><span
style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES;mso-fareast-language:
ES'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.37 FUNDAMENTOS FISICOS. ECUACION DE HAMILTON-JACOBI

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuahamiltonjacobi_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuahamiltonjacobi_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuahamiltonjacobi_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACION DE HAMILTON-JACOBI</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T15:25:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T19:30:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>544</o:Words>
<o:Characters>2994</o:Characters>

```

```

<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>24</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3531</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}

span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}

span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}

@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}

div.Section1
 {page:Section1;}

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable

```

```

 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
 </style>
 <![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
 </xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
 </o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ECUACION DE
HAMILTON-JACOBI<span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>Al considerar la acción S como una función de las
coordenadas y del tiempo, se ha demostrado que la derivada parcial respecto
al tiempo de esta función S(q, t) está relacionada con la Hamiltoniana por la
expresión:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>

```

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

que sus derivadas parciales con respecto a las coordenadas son los ímpetus. Entonces, si sustituimos en la Hamiltoniana los ímpetus  $p$  por

$$p = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}$$

$q$ , se tiene:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 x^2 \right)$$

se tiene:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 x^2 \right)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi es la base de un modelo general de integrar las ecuaciones de movimiento.

Las variables independientes en la ecuación de Hamilton-Jacobi son las coordenadas y el tiempo, y por lo tanto en un sistema con  $s$  grados de libertad, una integral completa de esta ecuación debe de contener  $s + 1$  constantes arbitrarias. Como  $s$  sólo interviene en la ecuación por sus derivadas, una de dichas constantes será aditiva, o sea que

una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi será de la forma  $S = \int dt, q_1, \dots, q_s, \dots$ , siendo  $A$ , constantes arbitrarias. Buscaremos la relación entre la integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi y la solución de las ecuaciones de movimiento que nos interesa. Efectuaremos una transformación canónica de las variables  $p, q$  a las nuevas variables eligiendo la función  $f(t, q, a)$  como generatriz, y las magnitudes  $a$  como los nuevos ímpetus. Designaremos a las nuevas coordenadas por  $b$  y los nuevos ímpetus,  $s$ .

Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:48.75pt;height:86.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image015.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287040"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero como la función f satisface a la ecuación de Hamilton-<span class=Spelle>Jacobi</span>, se ve que la nueva Hamiltoniana es nula:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:105.75pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image016.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287041"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Por lo tanto, las ecuaciones canónicas en las nuevas variables son: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:65.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image017.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244287042"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>de donde resulta que <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>i</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial'> = <span class=Spelle>cte</span> y </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>i</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <span class=Spelle>cte</span>, <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Por otro lado las s ecuaciones </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¶</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>f</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¶</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>i</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>i</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> permiten expresar las s coordenadas q en función del tiempo y las 2s constantes </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span class=GramE>y </span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Así obtenemos la integral general de las ecuaciones de movimiento.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La solución de un problema a partir de este método consiste en que a partir de la Hamiltoniana formamos la ecuación de Hamilton-<span class=Spelle>Jacobi</span> y se encuentra su integral completa. Derivando esta integral respecto a las constantes <span class=GramE>arbitrarias </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, e igualándolas a las </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;

$\mathbf{b}$  se obtiene un sistema de ecuaciones

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \, dt$$

Si se tiene una integral incompleta de la ecuación de Hamilton-Jacobi, dependiente de un número de constantes arbitrarias inferior a  $s$ , aunque no se puede por medio de esta integral encontrar la integral general de las ecuaciones de movimiento, se puede sin embargo simplificar el problema. Si la  $S$  conocida tiene una constante arbitraria

$$S = S_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

la relación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}$$

Si se tiene una integral incompleta de la ecuación de Hamilton-Jacobi, dependiente de un número de constantes arbitrarias inferior a  $s$ , aunque no se puede por medio de esta integral encontrar la integral general de las ecuaciones de movimiento, se puede sin embargo simplificar el problema. Si la  $S$  conocida tiene una constante arbitraria

$$S = S_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

la relación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}$$





```

<o:DocumentProperties>
 <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
 <o:Template>Normal</o:Template>
 <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
 <o:Revision>2</o:Revision>
 <o:TotalTime>7</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-01T15:13:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-01T16:44:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>992</o:Words>
 <o:Characters>5456</o:Characters>
 <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
 <o:Lines>45</o:Lines>
 <o:Paragraphs>12</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>6436</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>

```

```

<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:red'>INTRODUCCION</p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>La
Teoría del Control ha jugado un papel importante en los avances de las ciencias y la
Ingeniería. Es de extrema importancia en el diseño de aviones, sistemas
automáticos, Bioingeniería, e inclusive juega un importante papel en los
procesos modernos de manufactura e industriales. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>En cualquier
laboratorio o planta de producción moderna se puede apreciar que el control de
parámetros de procesos como pueden ser: presión, temperatura, flujo, voltaje,
etc. es automático. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Los avances
de la teoría de control, han permitido mejorar las características de los sistemas
dinámicos, mejorar la calidad y disminuir los costos de los productos industriales, dirigir
cohetes y aviones, etc. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>El primer
periodo de la historia del control es el que va desde el final del siglo XIX al principio de siglo
XX. Durante este intervalo de tiempo de nuestra historia del control, podemos considerar que el
desarrollo obtenido en el campo es fundamentalmente empírico. De esta época
tal vez el ejemplo más notorio es el gobernador de Watt
para las máquinas de vapor. Dada su acción proporcional de control
tenía un error estático en la velocidad del motor. Para corregir este error fue
necesario llegar a la integración de la acción de control, pero esta era inestable
cuando se aplicá a máquinas de vapor. La solución a estos primeros
problemas de control fu muy pobre con la excepción de trabajo de Maxwell "Sobre los
Gobernadores", trabajo que es el principio de los desarrollos
teóricos.<o:p></o:p></p>

```

El primer trabajo importante en control fue el gobernador centrífugo de Watt para el control de la velocidad de rotación de una máquina de vapor en el siglo XVIII. Otros importantes trabajos en las primeras etapas del desarrollo de la teoría del control son las debidas a Minorsky, Hazen, y Nyquist.

En 1922 Minorsky trabajó en el control automático de navegación de un barco, y mostró que la estabilidad se podía determinar de las ecuaciones que describieran el sistema.

En 1932 Nyquist desarrolló un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de un sistema de gasa cerrada para entradas senoidales en estado estacionario.

En 1934 Hazen introdujo el término Servomecanismo para los sistemas de control de posición, discutió el diseño de servomecanismos a base de relevadores capaces de seguir de cerca un cambio en la entrada.

El segundo periodo es el que está comprendido entre 1900 y el principio de la Segunda Guerra Mundial, época en donde el desarrollo técnico fue ganando impulso. Esta era se puede entender por la gran generación y transmisión de potencia, el nacimiento de la aeronáutica, la industria química, la electrónica y las telecomunicaciones. Los desarrollos para controladores neumáticos, hidráulicos y eléctricos, son básicos en nuestro tiempo.

Al crecer la complejidad de los desarrollos de los sistemas fue necesario sumar a la intuición el empleo de teoría para diseñar los controles. El trabajo de Max Tolle sobre regulación de velocidad fue uno de los primeros intentos en esta dirección. Los métodos teóricos se usaron fundamentalmente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y el empleo de los criterios de estabilidad de Routh-Hurwitz. Estos métodos se emplearon para resolver sistemas simples y de bajo orden. Para el fin de este periodo era claro que estaba generándose una nueva teoría que unificara todas las aplicaciones de control por retroalimentación.

Durante la década de los cuarenta los métodos de respuesta a la frecuencia permitieron el diseño de sistemas de control lineales retroalimentados, y en esta década también se desarrollan los métodos de localización de raíces para el diseño de sistemas de control. Estos métodos constituyen la parte clásica de la teoría de control, permiten ver si el sistema es estable y si no estabilizarlo y más o menos satisfacen los requerimientos de comportamiento

necesarios. En lo general estos sistemas no son &acute;ptimos en ning&uacute;n sentido. A partir de los a&ntilde;os cincuenta el &eacute;nfasis en el dise&ntilde;o de control se dio en la parte de control &acute;ptimo. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El tercer periodo comienza con el desarrollo de la teor&iacute;a de control y en el control autom&aacute;tico. Podemos decir que su inicio se da alrededor de 1940 con el empleo del m&eacute;todo de respuesta de frecuencia el cual se caracteriza por su aplicaci&oacute;n a los servomecanismos y <span class=SpellE>Wiener</span> con la Cibern&eacute;tica incorpora nuevos problemas al campo del control retroalimentado. Los sistemas autom&aacute;ticos de control con o sin retroalimentaci&oacute;n, llegaron a ser una parte integral de los sistemas din&aacute;micos y se adelant&oacute; mucho con el empleo de las computadoras, tanto anal&oacute;gicas como digitales.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En 1950 se da el descubrimiento de la teor&iacute;a de los espacios de estado, que fue originalmente desarrollado en la Mec&aacute;nica Cl&aacute;sica por <span class=SpellE>Poincar&eacute;</span>, <span class=SpellE>Lyapunov</span>, <span class=SpellE>Gibbs</span> y otros. Esta teor&iacute;a toma el nombre de Teor&iacute;a Moderna del Control y un desarrollo de ella es la teor&iacute;a de la optimizaci&oacute;n est&aacute;tica y din&aacute;mica.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como las instalaciones modernas son cada d&iacute;a m&aacute;s y m&aacute;s complejas, con muchas entradas y salidas, la descripci&oacute;n de un sistema de control moderno necesita de un gran n&uacute;mero de ecuaciones. La teor&iacute;a cl&aacute;sica de control que trabaja solo con una entrada y una salida, se ve impotente para resolver los problemas de control de sistemas de m&uacute;ltiples entradas y salidas. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En los a&ntilde;os sesenta la teor&iacute;a de control moderno se ha desarrollado en la direcci&oacute;n de resolver los problemas de incremento en la complejidad de las instalaciones modernas y de sus grandes necesidades de precisi&oacute;n, tama&ntilde;o y costo. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Con el avance de la electr&oacute;nica, y el desarrollo de las computadoras tanto digitales como anal&oacute;gicas e h&iacute;bridas, el desarrollo de t&eacute;cnicas de control basadas en el empleo de la computadora, cobraron &eacute;nfasis dentro de la teor&iacute;a, t&eacute;cnicas como control digital, con el empleo en l&iacute;nea de las computadoras, control anal&oacute;gico en tiempo real, etc. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Los desarrollos m&aacute;s recientes de la teor&iacute;a de control, van en la direcci&oacute;n del control &acute;ptimo de sistemas deterministas y estoc&aacute;sticos, as&iacute; como los sistemas adaptables y que aprenden de sistemas complejos. La aplicaci&oacute;n de las microcomputadoras est&aacute; permitiendo el desarrollo de sistemas autoorganizados de control, y de los sistemas inteligentes. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La teor&iacute;a de control moderna se aplica en muchos campos, como pueden ser: La Ingenier&iacute;a, la F&iacute;sica, la Biolog&iacute;a, la Econom&iacute;a, la Medicina, etc. y

de todas estas aplicaciones surgir a futuro muy interesantes conclusiones.

```

<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.39 CONTROL LINEAL. INTRODUCCION. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}

```

```

.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Lineal </td>
<td width="172"><a href=" ../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="789" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL LINEAL </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.40 CONTROL LINEAL. INTRODUCCION. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Fundamentos Matem´ticos</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {

```

```

 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
 a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 }
 .style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 }
 .style16 {color: #FFFFFF; font-size: 10px; font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td align="center">INDICE GENERAL </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Introducci&ocute;n</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Sistemas Lineales </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Ecuaciones Diferenciales </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Funci&ocute;n de Transferencia
</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><a href="fundelta.htm"
target="_parent">Funci&ocute;n Delta </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"> Transformada de Fourier </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Ecuaciones de Diferencias </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Convoluci&ocute;n</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><a href="respH(s).htm"
target="_parent">Respuesta H(s) </div></td>

```



```

</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Variables de Estado </div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Métodos de Análisis
</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Estabilidad</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Controlabilidad</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Observabilidad</div></td>
</tr>
</table>
<p class="style1"> </p>
</div>
</body>
</html>

```

### 3.41 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sistlineales_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sistlineales_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sistlineales_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>

```

```

<o:Created>2007-06-01T15:26:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-01T15:30:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>380</o:Words>
<o:Characters>2094</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>17</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2470</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->

```

```

</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>SISTEMAS LINEALES<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Son aquellos en los cuales la ecuación que los modela es lineal. Una
ecuación diferencial es lineal, si sus coeficientes son constantes o funciones de la
variable independiente. La propiedad más importante de los sistemas lineales, es que
en ellos se cumple el principio de superposición. Este principio establece que la
respuesta que produce la aplicación simultánea de dos diferentes funciones a la
entrada es la suma de las dos respuestas individuales. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Sea u, las entradas o causas de la excitación que se aplican a la entrada,
las salidas o efectos y, se medirán a la salida del sistema. Si las entradas u y las
salidas y satisfacen las condiciones de liberalidad, estas se pueden relacionar por una
ecuación de la forma: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke jointstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

```

```

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;
height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlineales_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242199005">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si la entrada y la salida cumplen con el principio de causalidad, la ecuación
anterior se reduce a: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlineales_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242199006">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si el sistema está en relación con un tiempo inicial t₀,
la ecuación anterior se ve reducida a: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:89.25pt;height:35.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="sistlineales_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

```

```

</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242199007">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Las ecuaciones<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlineales_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242199008">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlineales_archivos/image008.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242199009">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:89.25pt;height:35.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="sistlineales_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1242199010">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>describen la relación entre la entrada y la salida de un sistema y se denomina descripción entrada-salida, o descripción externa del sistema. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>El conjunto de ecuaciones: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight: normal'>X(t) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A(t)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X(t) + <b style='mso-bidi-font-weight: normal'>B(t)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U(t)<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight: normal'>Y(t) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>C(t)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X(t) + <b style='mso-bidi-font-weight: normal'>D(t)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U(t)<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>relacionan la entrada <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U con la salida <b style='mso-bidi-font-weight: normal'>Y y el estado <b style='mso-bidi-font-weight: normal'>X. Este conjunto de ecuaciones se llaman ecuaciones dinámicas, y se emplean en la descripción por variables de estado del sistema. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Estamos interesados en la descripción de sistemas que son modelos de sistemas físicos reales, luego es de esperar que las variables y funciones sean de valores reales. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Clasificaremos los sistemas de una sola variable, o en sistemas de varias variables de acuerdo a la siguiente definición:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>DEFINICION<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Se dice que un sistema es de una sola variable, si y solo si, este tiene solamente
una entrada y una salida. Un sistema es de varias variables, si y solo si, tiene m&aacute;s de
una entrada o de una salida. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Tambi&eacute;n podemos clasificar los sistemas, en sistemas variantes en el
tiempo, o invariantes en el tiempo, de acuerdo a la siguiente definici&oacute;n:
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>DEFINICION<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si esta representado por una
ecuaci&oacute;n diferencial de coeficientes constantes. Si un sistema esta representado por
una ecuaci&oacute;n diferencial con coeficientes como funciones del tiempo, se habla de un
sistema variable en el tiempo. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.42 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA DESCRIPCION ENTRADA - SALIDA

```

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="desentradsalid_archivos/filelist.xml">
<title>LA DESCRIPCION ENTRADA - SALIDA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>5</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-01T15:31:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-01T15:36:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>405</o:Words>
<o:Characters>2231</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>

```

```

<o:CharactersWithSpaces>2631</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:none;
    mso-layout-grid-align:none;
    punctuation-wrap:simple;
    text-autospace:none;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES-TRAD;
    mso-fareast-language:ES-MX;}

span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}

span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}

@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}

div.Section1
    {page:Section1;}

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;

```



```

mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>LA DESCRIPCION ENTRADA -
SALIDA</span></b><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>La descripci&oacute;n entrada salida de un sistema nos da una relaci&oacute;n
matem&aacute;tica entre la entrada y la salida del sistema. En el desarrollo de esta
descripci&oacute;n es importante la suposici&oacute;n de que la estructura interna del sistema
nos es desconocida y no se puede obtener, y que el &uacute;nico acceso al sistema es por
medio de las entradas y las salidas. Bajo esta consideraci&oacute;n, el sistema es por medio
de las entradas y las salidas. Bajo este esquema el sistema se debe de ver como una caja
negra, a la cual, se le pueden aplicar toda clase de entradas y medir todas las respuestas
correspondientes, y extraer propiedades a partir de las parejas de entrada y salida.
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si la salida de un sistema al tiempo t<sub>1</sub> depende solamente de la
entrada aplicada al tiempo t<sub>1</sub>, el sistema se conoce como instant&aacute;neo, o
sin memoria. Hay otros sistemas de inter&eacute;s que poseen memoria, o sea que la salida al
tiempo t<sub>1</sub> dependen solo de la entrada aplicada al tiempo t<sub>1</sub>, sino
tambi&eacute;n de las aplicadas con anterioridad o posteriormente a ese tiempo. Es obvio que
en este segundo caso las posibles relaciones entrada - salida del sistema como &uacute;nicas
relaciones, no nos permiten obtener sus propiedades. Para poder aplicar la descripci&oacute;n
entrada-salida, antes de aplicar una entrada al sistema, hay que verificar que este se encuentre
en reposo, y que la salida es excitada sola y &uacute;nicamente por la entrada que se
aplicar&aacute;. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Se puede pensar que en t&eacute;rminos de energ&iacute;a, un sistema se
encuentra en reposo al tiempo t, si este no almacena energ&iacute;a en ese instante. Bajo
condiciones de reposo se puede escribir: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y</span></b><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>HU</b><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

donde H es algún operador que únicamente determina la salida Y en términos de la entrada U del sistema.

Para hacer esto definiremos primero lo que es un operador lineal, desde el punto de vista matem´tico.

Una función J mapea a (Y, F) dentro de (Y, F) es un operador lineal, si y solo si:

$$J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2)$$
$$J(\alpha x) = \alpha J(x)$$

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>Jx^{2<o:p></o:p>}</p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>para todo vector X₁,X₂ en X, y todo escalar a_{1}, a_{2} en F.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>A partir de esta definiciôn se definiráa un sistema lineal como:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Se dice que un sistema es lineal, si y solo si:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(a_{1}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U^{1} + a_{2}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U^{2}) = a_{1}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>HU<sup><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial'>1</sup> +a_{2}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>HU^{2}<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>para todo par de entradas <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U¹ y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U², y todo numero real a_{1}, a_{2}. Esta definiciôn es valida para sistemas en reposo. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se puede tambi&eacirc;n escribir la definiciôn en forma desglosada como dos ecuaciones: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U^{1} + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U²) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>HU¹ + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>HU²</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(a<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U^{1}) = a<b

HU

1

La condici&ocute;n marcada por la ecuaci&ocute;n

H

U

+ 2

HU

se

denomina aditividad.

La marcada por la ecuaci&ocute;n

H

a

U

1

a

HU

1

se llama condici&ocute;n de homogeneidad.

Cuando se satisfacen las dos condiciones se satisface el principio de superposici&ocute;n.

3.43 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA DESCRIPCION ENTRADA – SALIDA. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Fundamentos Matem&acute;ticos </span></td>
<td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
```

```

</tr>
</table>
<div align="left">
  <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
    <tr>
      <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">CONTROL LINEAL &middot; SISTEMAS LINEALES </span></div></td>
    </tr>
  </table>
  <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
    <tr bgcolor="#FFE6FF">
      <td width="164" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="sistlineales.htm" target="mainFrame">Sistemas Lineales </a></span></div></td>
      <td width="138" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="desentradsalid.htm" target="mainFrame">Entrada-Salida</a></span></div></td>
      <td width="130" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="linealidad.htm" target="mainFrame">Linealidad</a></span></div></td>
      <td width="182" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="constucmodlineal.htm" target="mainFrame">Modelo Lineal</a></span></div></td>
      <td width="176" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="metcuadratminimo.htm" target="mainFrame">Error
Cuadr&aacute;tico</a></span></div></td>
    </tr>
  </table>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.44 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LINEALIDAD

```

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="linealidad_archivos/filelist.xml">
<title>LINEALIDAD</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>2</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-26T14:26:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-26T14:28:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>138</o:Words>
  <o:Characters>759</o:Characters>
  <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>

```

```

<o:Lines>6</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>896</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:none;
    mso-layout-grid-align:none;
    punctuation-wrap:simple;
    text-autospace:none;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES-TRAD;
    mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";

```



```

mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>LINEALIDAD</span></b><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Vamos a definir un operador lineal, desde el punto de vista matem&aacute;tico.
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Una funci&oacute;n </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>J</span></span></span>
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> mapea a (</span><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span class=GramE><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,F</span></span><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>) dentro de (<span
class=Spelle>Y,F</span>) es un operador lineal, si y solo si: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>J</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><sub><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>1</span></sub><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>x<sup>1</sup>+ </span><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><sub><span lang=ES-TRAD

```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>2</sub>x²= a_{1}Jx¹+ a_{2}Jx²</p><p class=MsoNormal> </p><p class=MsoNormal>para todo vector X₁,X₂ en X, y todo escalar a_{1}, a_{2} en F.</p><p class=MsoNormal> </p><p class=MsoNormal>A partir de esta definiciøn se definiráa un sistema lineal como:</p><p class=MsoNormal> </p><p class=MsoNormal>Se dice que un sistema es lineal, si y solo si: </p><p class=MsoNormal> </p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(a_{1}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>a_{2}</p></div>

INFORME TECNICO IT-TINF-2007-01

362

font-family:Arial'>U^{1} + a_{2}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U^{2}) = a_{1}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>HU^{1} +a_{2}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>HU^{2}<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>para todo par de entradas <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U¹ y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U², y todo numero real a_{1}, a_{2}. Esta definici&ocute;n es valida para sistemas en reposo. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se puede también escribir la definici&ocute;n en forma desglosada como dos ecuaciones: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U^{1}<span


```

style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial'>HU</span></b><sup><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial'>1</span></sup><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> llama condici&oacute;n de homogeneidad.
Cuando se satisfacen las dos condiciones se satisface el principio de
superposici&oacute;n.<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.45 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONSTRUCCION DE UN MODELO LINEAL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="constucmodlineal_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="constucmodlineal_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="constucmodlineal_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONSTRUCCION DE UN MODELO LINEAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>22</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-01T15:36:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-01T15:58:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>977</o:Words>
  <o:Characters>5376</o:Characters>
  <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
  <o:Lines>44</o:Lines>

```

```

<o:Paragraphs>12</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>6341</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:none;
    mso-layout-grid-align:none;
    punctuation-wrap:simple;
    text-autospace:none;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES-TRAD;
    mso-fareast-language:ES-MX;}

span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}

span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}

@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}

div.Section1
    {page:Section1;}

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;

```

```

        mso-tstyle-colband-size:0;
        mso-style-noshow:yes;
        mso-style-parent:"";
        mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
        mso-para-margin:0cm;
        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>CONSTRUCCION DE UN MODELO
LINEAL</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>En lo general una variable f&iacute;sica Y, depende de n variables f&iacute;sicas
independientes, esto es: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y = Y(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>,
x<sub>3</sub>,..., <span class=SpellE>x<sub>n</sub></span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>esta</span></span><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> funci&oacute;n es en lo general no lineal, y
cualquier sistema de control que sea descrito por esta funci&oacute;n no se puede analizar por
m&eacute;todos lineales. Luego cuando se presenta este caso se tratar&aacute; de sustituir el
modelo no lineal por uno lineal del tipo: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y = K<sub>0</sub> + K<sub>1</sub>x<sub>1</sub> +
K<sub>2</sub>x<sub>2</sub> + .....+<span
class=SpellE>K<sub>n</sub>x<sub>n</sub></span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>La ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y = Y(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>,
x<sub>3</sub>,..., <span class=SpellE>x<sub>n</sub></span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>representa</span></span><span lang=ES-TRAD

```

superficies generales en espacios n dimensionales, pero la ecuación

$Y = K_0 + K_1 x_1 + K_2 x_2 + \dots + K_n x_n$

es la ecuación de un hiperplano en n dimensiones, por lo que las dos superficies se deben de hacer coincidir pero en una región limitada, por lo que la linealización será efectiva solo alrededor de algunos valores específicos de las variables, y esto lo haremos alrededor del punto de operación. Cuando esto se hace, las variables son valores incrementados de las variables fijas alrededor de un punto central, y se pueden definir de la forma:

$Y = Y_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n$

donde Y_0 , X_1 , X_2 , ..., X_n son los valores de las variables en el punto de operación.

$Y = Y_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n$

color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>en términos de los valores incrementales de las variables: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>DY = Y(DX₁+ X₁₀, DX₂+ X₂₀,.....,DX_n_{ }+ X_{n0}) - Y₀</p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>DY = DY(DX₁, DX₂,....., DX₂,....., DX_n</p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

El modelo lineal que reemplaza la ecuación

$$Y = D + X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

de la forma:

$$Y = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n$$

class=Spelle>X_n<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Es claro que la construcci&ocute;n del modelo lineal reduce los coeficientes a una selecci&ocute;n de valores, y para esto se necesita analizar lo siguiente:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal> 1.) Descripci&ocute;n de un fen&ocute;meno no lineal. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal> 2.) La regi&ocute;n de interés y el punto de operaci&ocute;n. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal> 3.) Un criterio para juzgar el modelo lineal. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La descripci&ocute;n del fen&ocute;meno no lineal, se puede dar en forma analítica como la de la ecuaci&ocute;n (2.10), o se puede dar por un conjunto de datos que se pueden aplicar. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La regi&ocute;n de interés y el punto de operaci&ocute;n se determinan por las consideraciones de todos los aspectos del problema de control. Por ejemplo, en un dispositivo para control de velocidad, el punto de operaci&ocute;n será la velocidad en estado estacionario, y las consideraciones de las variaciones de esta velocidad debido a los efectos de carga nos indican la consideraci&ocute;n para la regi&ocute;n de interés.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

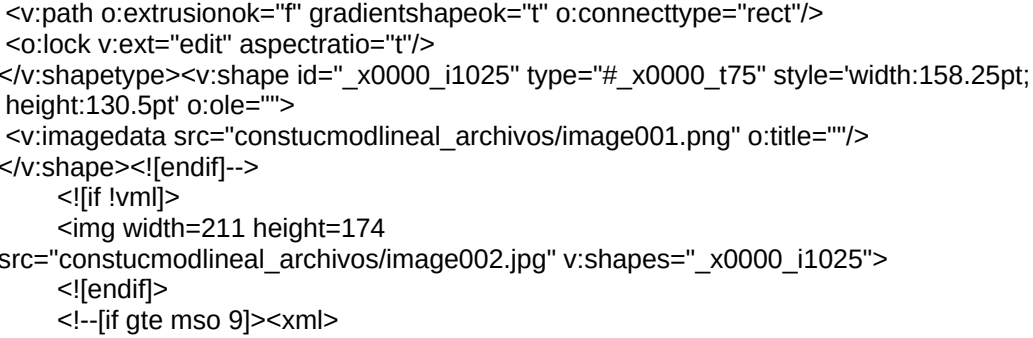
<p class=MsoNormal>El criterio de juicio es primero un método para determinar la precisi&ocute;n con la cual el modelo lineal sigue al modelo físico, pero se deben de tomar algunas consideraciones para obtener la informaci&ocute;n deseada del análisis lineal del sistema, incluyendo su modelo. Una vez que las características no lineales han sido conocidas, lo mismo que la regi&ocute;n y el punto de operaci&ocute;n se han especificado, cualquier técnica se puede aplicar para determinar los valores de los coeficientes K en la ecuaci&ocute;n<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>DY = DY(</p>

mso-symbol-font-family:Symbol'DX₁, DX₂,....., DX_n<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Se verán dos métodos para esto: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>1.) Método de tangentes. (Series de Taylor) <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>2.) Método de error cuadrático mínimo. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>El método de tangentes emplea el primer termino de la serie de Taylor, y es muy fácil de calcular, si en forma gráfica se conoce el sistema no lineal. Con este método se asegura que la respuesta dinámica del sistema linealizado, muy cerca al punto de operación sea el mismo que el sistema no lineal. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Si el sistema no lineal se representa en forma gráfica, el método de tangentes se reduce a la construcción gráfica de la mejor tangente al punto de operación. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>El método del mínimo error cuadrádillo medio, asegura que la mejor linealización se obtiene en el sentido del cuadrado mínimo. Esto se ilustra en la figura (2.1) que nos muestra una relación no lineal entre x,y. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

$$\prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^2 \prod_{k=1}^7 \sum_{l=1}^8 \prod_{m=1}^7 \sum_{n=1}^{10}$$



El punto de operación (X₀, Y₀), y una región de operación igual a +

alrededor del punto de operación.

La curva A, representa una aproximación por el método de tangentes, que es una buena linealización cerca del punto de operación, pero pobre en los extremos. La curva B es la aproximación no lineal sobre el intervalo de operación, aunque su pendiente no corresponde a la de la curva en el punto de operación.

La base técnica y el procedimiento de construcción de un modelo lineal basado en la aproximación por tangentes es el de series de Taylor que dice:

Cualquier función y(x) que tiene un conjunto continuo de derivadas en un intervalo alrededor de un punto, se puede expandir en una serie bajo el intervalo. La serie es:

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:261pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image003.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200697">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Cuando (x-x₀) es pequeño, los términos de alto orden en la serie son despreciables, y estos se pueden aproximar por los dos términos:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:113.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image005.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200699">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>que se puede escribir como:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:113.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image007.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200700">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200701">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Esta aproximaci&eacute;n se puede aplicar a muchos problemas no lineales y la
precisi&eacute;n de los resultados depende de la validez de las consideraciones hechas sobre
los argumentos para despreciar los t&eacute;rminos de alto orden. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Como una aplicaci&eacute;n de este m&eacute;todo, consideremos un
p&eacute;ndulo oscilando con peque&ntilde;as amplitudes. La figura (2.2) nos muestra el
p&eacute;ndulo. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:163.5pt;height:107.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image011.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="PBrush" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200702">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Figura (2.2)<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

La condición para el equilibrio dinámico es obvia. La fuerza de aceleración es la componente de la aceleración gravitacional que es tangente a la trayectoria, y la fuerza de reacción es la reacción al cambio de momento, por lo que la ecuación diferencial que describe al sistema es: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200703">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde la distancia x se define por:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>x = Lq<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se puede escribir la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200704">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>de la forma: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:54.75pt;height:27pt' o:ole=""><v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200705">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuación anterior no es lineal debido al termino senq. Si expandimos este término en series de Taylor alrededor de q = 0 se tiene: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:123pt;height:45pt' o:ole=""><v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200706">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y para pequeños f se tiene: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:39pt;height:27pt' o:ole=""><v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image019.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200707"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>por lo que la solución a la ecuación será:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image021.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200708"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde A¹ y A² son determinados por las condiciones iniciales.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Cuando las no linealidades están representadas por familias de curvas que forman una superficie, la linealización se debe de definir alrededor de un punto en una superficie.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Para hacer esto, hay que generalizar la serie de Taylor para el número de dimensiones requeridas.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Para el caso tridimensional la serie tiene la forma: <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:312pt;height:63pt' o:ole="">
<v:imagedata src="constucmodlineal_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
      
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1242200709">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> las parciales se calculan en el punto de
operaci&oacute;n. <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.46 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODO DE ERROR CUADRATICO MINIMO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metcuadratminimo_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metcuadratminimo_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metcuadratminimo_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}

```

```

</style>
<![endif]-->
<title>METODO DE ERROR CUADRATICO MINIMO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>HHMM</o:Author>
  <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>6</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-19T22:53:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-19T23:00:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>2</o:Pages>
  <o:Words>325</o:Words>
  <o:Characters>1791</o:Characters>
  <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
  <o:Lines>14</o:Lines>
  <o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
  <o:CharactersWithSpaces>2112</o:CharactersWithSpaces>
  <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
  {mso-style-parent:"";
  margin:0cm;
  margin-bottom:.0001pt;
  text-align:justify;
  mso-pagination:none;
  mso-layout-grid-align:none;
  punctuation-wrap:simple;
  text-autospace:none;
  font-size:12.0pt;
  mso-bidi-font-size:10.0pt;
  font-family:"Times New Roman";
  mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
  mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
  {mso-style-name:"";
  mso-spl-e:yes;}
span.GramE
  {mso-style-name:"";
  mso-gram-e:yes;}

```

```

@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>METODO DE ERROR CUADRATICO
MINIMO</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si despreciamos los t&eacute;rminos de orden mayor, la linealizaci&oacute;n queda
de la forma:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

```

```

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1077" type="#_x0000_t75" style='width:105pt;
height:30pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1077"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781187">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Generalizando para el caso de n dimensiones: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1079" type="#_x0000_t75" style='width:162.75pt;height:30pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1079"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781188">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si relacionamos las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>Y = K<sub>1</sub></span><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>X<sub>1</sub>
+
K<sub>2</sub></span></span>

```

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>DX₂ + K₃DX₃ +.....+K_nDX_n<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1107" type="#_x0000_t75" style='width:162.75pt;height:30pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1107"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781189">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>tenemos: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1084" type="#_x0000_t75" style='width:153.75pt;height:30pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1084"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781190">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuación incremental linealizada se puede calcular directamente como la diferencial total de una función de varias variables. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Consideremos que la relación entre las variables dependientes y las n independientes $x_{₁}, x_{₂}, \dots,$ x_n se conocen como un conjunto de puntos experimentales alrededor del punto de operación ($y_{₀}, x_{₁₀}, x_{₂₀}, \dots, x_{_{n0}}$), esto es, para un valor de la variable independiente (Dx₁₁, Dx₂₁, \dots, Dx_{n1}) debimos de haber medido el valor D_{y1}, por lo que el numero de puntos experimentales excedidos sobre el número de variables independientes, dan la relación $m \geq n$, donde m son los puntos y n las variables. Deseamos encontrar una relación entre los incrementos de las variables que sea de la forma:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Dy = K₁ Dx₁ + K₂ Dx₂ + \dots + K_n <span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:

symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>Dx_n<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>tal que el cuadrado de la diferencia entre los valores de Dy dados por la ecuación anterior y el conjunto m de los datos medidos para las variables de un mínimo, es decir encontrar valores de K₁, K₂, ..., K_n, tales que: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1086" type="#_x0000_t75" style='width:191.25pt;height:30.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1086" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781193">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>sea un mínimo. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Para minimizar E², igualamos a cero cada una de sus derivadas parciales: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1092" type="#_x0000_t75" style='width:135pt;height:30.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1092"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781194">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> nos da la ecuación:
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1094" type="#_x0000_t75" style='width:219pt;height:30.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1094"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781195">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1096" type="#_x0000_t75" style='width:246.75pt;height:30.75pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1096"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781196">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Similarmente: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'> <span
 style='mso-spacerun:yes'> <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1098" type="#_x0000_t75" style='width:264.75pt;height:75.75pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1098"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781197">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>con<span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> lo que obtenemos un sistema de n
 ecuaciones lineales con n Ks desconocidas, cuya solución
 se puede obtener por determinantes. Es de especial interés el caso para una o dos
 variables independientes. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Para el primer caso: <span lang=ES-TRAD style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>D<span
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y = K<span
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D<span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>x, donde: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1100" type="#_x0000_t75" style='width:48pt;height:59.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1100"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781198">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Para el caso de dos variables: <span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;

mso-symbol-font-family:Symbol'>D<span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y = K₁<span
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D<span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>x₁ +
 K₂<span
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D<span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>x₂, donde:
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1102" type="#_x0000_t75" style='width:203.25pt;height:63pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1102"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781199">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1104" type="#_x0000_t75" style='width:201.75pt;height:63pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1104"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781200">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Si se conoce la relación no lineal en forma analítica, las sumatorias
 las podemos sustituir por integrales tomando la forma: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1106" type="#_x0000_t75" style='width:60.75pt;height:41.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="metcuadratminimo_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
  <![if !vml]>
  
  <![endif]>
</sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1106"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243781201">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
  <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.47 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuadifer1orden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuadifer1orden_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuadifer1orden_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>HHMM</o:Author>
  <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>18</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-20T01:32:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-20T01:50:00Z</o:LastSaved>

```

```

<o:Pages>5</o:Pages>
<o:Words>925</o:Words>
<o:Characters>5090</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>42</o:Lines>
<o:Paragraphs>12</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>6003</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable

```

```

        {mso-style-name:"Tabla normal";
        mso-tstyle-rowband-size:0;
        mso-tstyle-colband-size:0;
        mso-style-noshow:yes;
        mso-style-parent:"";
        mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
        mso-para-margin:0cm;
        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
    </style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
    <tr>
        <td><div class=Section1>
            <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
            style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES
            DE PRIMER ORDEN</span></b><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
            font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
            <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
            color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
            <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
            color:blue'>Dado un evento en la naturaleza, este se puede observar gracias a que al ocurrir se
            ha presentado un cambio en el sistema en el cual ocurre el evento. De aquí se ve que
            buena parte del conocimiento de un sistema se adquiere encontrando las relaciones de cambio
            en función de los parámetros del sistema bajo estudio. Esto nos lleva a que las
            relaciones matemáticas mediante las cuales se va a describir el comportamiento del
            sistema, involucren cambios. Estos cambios se pueden expresar por medio de derivadas.
            <o:p></o:p></span></p>
            <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
            color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
            <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
            color:blue'>Una ecuación diferencial es una relación que involucra derivadas,
            como por ejemplo, la caída de una partícula en la tierra.
            <o:p></o:p></span></p>
            <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
            color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
            <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
            style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
                <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
                id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
                path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
                <v:stroke joinstyle="miter"/>
                <v:formulas>
                <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
                <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
                <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
                <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
                <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
                <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
                <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
                <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
                <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
                <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
                <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
            </sub>

```

```

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1146" type="#_x0000_t75" style='width:54.75pt;
height:29.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1146"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791620">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Una ecuaci&acute;n diferencial de primer orden, es aquella en la que solo se
involucran derivadas de primer orden, por ejemplo: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1148" type="#_x0000_t75" style='width:48.75pt;height:27.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1148"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791621">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>En general las ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden expresar como:
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1150" type="#_x0000_t75" style='width:53.25pt;height:27.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>
<img width=71 height=37

```

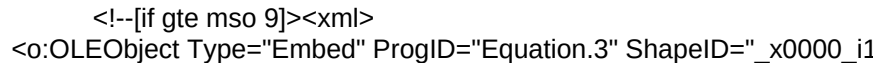


```

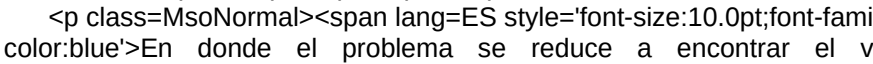
src="ecuadifer1orden_archivos/image006.gif" v:shapes="_x0000_i1150">
  <![endif]>
  </sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
  <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1150"
  DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791622">
  </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
  <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> en el caso m&aacute;s simple ser&aacute;;
<o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1152" type="#_x0000_t75" style='width:44.25pt;height:27.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
  <![if !vml]>
  
  <![endif]>
  </sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
  <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1152"
  DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791623">
  </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
  <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> su soluci&oacute;n simplemente ser&aacute;;
<o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1154" type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;height:36pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
  <![if !vml]>
  
  <![endif]>
  </sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
  <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1154"
  DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791624">
  </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
  <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1156" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;height:35.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
  <![if !vml]>

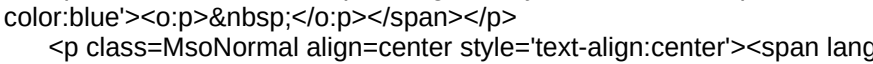
```











En donde el problema se reduce a encontrar el valor de la integral:

Las ecuaciones lineales de primer orden son de la forma:

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Comparando el lado derecho de la ecuación anterior con los términos del lado izquierdo de la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1204" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:27.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1204"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791630">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>multiplicamos la ecuación por la función desconocida Z: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1164" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:27.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1164"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791632">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Para que el lado izquierdo de la ecuación anterior sea una diferencial exacta del producto (YZ) se requiere: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1166" type="#_x0000_t75" style='width:51pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1166"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791633">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Separando variables: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1168" type="#_x0000_t75" style='width:57pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1168"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791634">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>o</span></span><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> sea: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1170" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:24pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1170"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791635">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si el coeficiente p(X) es una funci&oacute;n dada, se puede encontrar Z de la
ecuaci&oacute;n anterior como funci&oacute;n de X. Sustituyendo en la
ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

```

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1205" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image019.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1205" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791636">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>tenemos: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1172" type="#_x0000_t75" style='width:165pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image027.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1172" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791637">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1174" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image029.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1174" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791638">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Integrando ambos lados y reagrupando: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1176" type="#_x0000_t75" style='width:120pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1176"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791639">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es la soluci&oacute;n buscada para la ecuaci&oacute;n
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1206" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1206"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791640">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>La funci&oacute;n Z como la dada en la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1207" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:24pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1207"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791641">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```

color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>nos hace que el lado izquierdo de la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1211" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image015.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1211" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791642">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>sea una derivada exacta que puede integrarse, y se le llama factor integral. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se nota que la solución a la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1210" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1210" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791643">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>se puede separar en dos partes: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Z = Z_c + Z_p<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES

<sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1178" type="#_x0000_t75" style='width:110.25pt;height:27pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1178"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791644">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>es<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la funci´n complementaria que satisface la
ecuaci´n homogénea con $f(X) = 0$ y: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1180" type="#_x0000_t75" style='width:147pt;height:27pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image037.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1180"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791647">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>es<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la integral particular que depende de la funci´n de
entrada $f(X)$. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Cuando la ecuaci´n es de orden mayor que uno, se tiene otro
método para resolverla. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Primero introduciremos lo siguiente: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1182" type="#_x0000_t75" style='width:33pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1182"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791648">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> t la emplearemos como variable
independiente. N&oacute;tese que D no es una funci&oacute;n, es un operador, ya que realiza
una operaci&oacute;n sobre cualquier funci&oacute;n a la que se le aplique, luego:
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1184" type="#_x0000_t75" style='width:42pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1184"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791649">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1186" type="#_x0000_t75" style='width:48.75pt;height:29.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image043.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1186"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791650">

```

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>El álgebra que sigue a este operador, estáa dada por las leyes siguientes: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>SUMA: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'>1.) Conmutativa: (D^m + Dⁿ)w = (Dⁿ + D_m)w <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>2.) Asociativa: [D^l (D^m + Dⁿ)]w = [(D^l + D^m) + Dⁿ]w <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Producto: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>1.) Conmutativa: (D^m Dⁿ)w = Dⁿ D^m)w <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>2.) Asociativa: [D^l (D^m Dⁿ)]w = [(D^l + D^m) Dⁿ]w <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>3.) Distributiva: [D^l (D^m + Dⁿ)]w = D^lmw + D^lnw <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Antes de aplicar el operador a ecuaciones de orden mayor, se lo aplicaremos a las de primer orden: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1188" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image045.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="ecuadifer1orden_archivos/image046.gif" v:shapes="_x0000_i1188">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1188"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791651">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Aplicando el operador a la ecuación anterior se tiene:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>(D + a)w = et<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Sabemos que el factor integral apropiado para et es:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:42pt;height:15.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image047.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="ecuadifer1orden_archivos/image048.gif" v:shapes="_x0000_i1048">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="_x0000_i1048"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791652">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y que la solución general consiste de dos partes:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>1.) Función complementaria: Que es la solución general de la ecuación homogénea: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>(D + a)w_{c} = 0 <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1190" type="#_x0000_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image049.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]><![endif]></sub></p>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1190" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791653"></o:OLEObject></xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>2.) Integral particular: Que es una solución particular de la ecuación no homogénea:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'> (D + a) w_{p} = e(t)<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1192" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image051.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]><![endif]></sub></p>

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1192"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791654">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Por la ecuación anterior: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1194" type="#_x0000_t75" style='width:141pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image053.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1194"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791657">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Consideremos ahora una ecuación de segundo orden:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1196" type="#_x0000_t75" style='width:123pt;height:29.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image055.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1196"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791658">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> a₁, a₂,
a₀ son constantes y e(t) es una señal de entrada arbitraria. Normalizando la
última ecuación y dividiendo entre a₂ se tiene:
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1198" type="#_x0000_t75" style='width:132pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image057.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1198" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791659">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Aplicando el operador D: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>(D² + b₁ + b₀w = et<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1200" type="#_x0000_t75" style='width:83.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image059.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1200" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791660">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</sub><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Para encontrar la solución general de la ecuación:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1212" type="#_x0000_t75" style='width:132pt;height:30.75pt o:ole="">
 <v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image057.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1212"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791661">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>consideraremos<span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la función complementaria y la
 integral particular separadamente: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>1.) Función complementaria, <span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>w<sub><span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>c</sub><span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Resolveremos la ecuación
 homogénea: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(D² + <span
 class=SpellE>b₁ + b₀)<span lang=ES style='font-
 size:10.0pt;font-family:Symbol;
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<sub><span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>c</sub><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = 0
 style='color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>cuyas<span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> raíces son: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>l<sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial'>1</sub> = - (1/2<span
 class=GramE>)b₁ + (b₁²-
 4b₀)^{1/2}]<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>l<sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}$$

La solución de las ecuaciones:

$$(D - 1)(D + 1) = 0$$

Que son solución de la ecuación:

$$(D - 1)(D + 1) = 0$$

Las ecuaciones

Symbol'>l_{1})w_{c1} = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>(D - l_{2})w_{c2} = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>son ecuaciones homogéneas y su solución por lo anterior es: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>w_{c1}l^{1}<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>w_{c2}l^{2}<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Luego la función complementaria de a
ecuación</o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1213" type="#_x0000_t75" style='width:132pt;height:30.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image057.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1213"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791663">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>es: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>w_{c} = w_{c1} + w_{c2} = c₁e^{l}^{1t} +
c₂e^{l}^{2t}<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial;color:blue'>con c₁ y c₂ dos constantes arbitrarias.

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>2.) Integral particular. La ecuación no homogénea es:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>(D² + b₁D + b₀w = et<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde l_{1} y l_{2} toman los valores de las ecuaciones<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>l_{1} = - (1/2)[b₁ + (b₁²-4b₀</sup>1/2</sup>]<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>l_{2} = (1/2)[b₁ + (b₁²-4b₀</sup>1/2</sup>]<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>respectivamente. La solución de la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>(D² + b₁² + b₀w = et<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>se escribe: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1202" type="#_x0000_t75" style='width:93.75pt;height:30pt' o:ole=""> <v:imagedata src="ecuadifer1orden_archivos/image061.wmz" o:title=""/> </v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1202" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243791665">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se puede determinar wp de la ecuación anterior por el método de integraciones sucesivas. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

3.48 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

```

<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="FUNCION%20DE%20TRANSFERENCIA_archivos/filelist.xml">
<title>FUNCION DE TRANSFERENCIA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>7</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-19T23:01:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-19T23:08:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>143</o:Words>
<o:Characters>788</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>6</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>930</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}

```

```

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>FUNCION
    TRANSFERENCIA</span></b><span
    lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
    color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
    color:blue'>La funci&ocute;n de transferencia de un sistema lineal, esta definida como la
    raz&ocute;n de la transformada de Laplace de la variable de salida, a la transformada de
    Laplace de la variable de entrada, con las condiciones iniciales en cero. La funci&ocute;n de
    transferencia de un sistema representa la relaci&ocute;n que describe la din&aacute;mica del
    sistema bajo estudio. <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
    color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
    color:blue'>La funci&ocute;n de transferencia solo es posible de definir para sistemas lineales
    estacionarios, ya que un sistema no estacionario, tiene par&aacute;metros variables en el
    tiempo, y no se le puede aplicar la transformada de Laplace, por lo que se nota que una
    funci&ocute;n de transferencia es la descripci&ocute;n entrada-salida de las
    caracter&iacute;sticas del sistema. Como se ve la funci&ocute;n de transferencia no nos da
    informaci&ocute;n acerca de la estructura interna del sistema. <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
    color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
    color:blue'>Antes de continuar haremos un par&eacute;ntesis matem&aacute;tico para revisar
    el concepto de transformada de Laplace. <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.49 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Funci&acute;n de Transferencia </span></td>
<td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href=" ../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
```



```

</tr>
</table>
<div align="left">
  <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
    <tr>
      <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">CONTROL LINEAL &middot; FUNCION DE TRANSFERENCIA
</span></div></td>
    </tr>
  </table>
  <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
    <tr bgcolor="#FFE6FF">
      <td width="199" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="functransferen.htm" target="mainFrame">Funci&oacute;n de Transferencia
</a></span></div></td>
      <td width="193" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="transflaplace.htm" target="mainFrame">Transformada de Laplace
</a></span></div></td>
      <td width="142" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="proptranslaplace.htm" target="mainFrame">Propiedades</a></span></div></td>
      <td width="255" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="raicesfuntransf.htm" target="mainFrame">Ra&iacute;ces funci&oacute;n de Transferencia
</a></span></div></td>
    </tr>
  </table>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.50 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. TRANSFORMADA DE LAPLACE

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="transflaplace_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="transflaplace_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="transflaplace_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>TRANSFORMADA DE LAPLACE</title>

```

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>HHMM</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
  <o:Revision>2</o:Revision>
  <o:TotalTime>33</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-19T23:09:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-26T15:13:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>339</o:Words>
  <o:Characters>1870</o:Characters>
  <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
  <o:Lines>15</o:Lines>
  <o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
  <o:CharactersWithSpaces>2205</o:CharactersWithSpaces>
  <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}

```

```

div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
    <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>TRANSFORMADA
DE
LAPLACE</span></b><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La
transformada de Fourier de una funci&oacute;n <span class=GramE>f(</span>t), es una
representaci&oacute;n de la funci&oacute;n como una suma continua de funciones
exponenciales de la forma: <o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y
=
<span
class=SpellE>e<sup>j</sup></span></span><sup><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></sup><sup><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial'>t</span></span></sup><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> <o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span

```


height:23.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image077.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358037">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:98.25pt;height:27.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image078.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358038">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Definiremos una función a(t) como f(t) veces la función e⁻jt</sup> donde j es real: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>a(t) = f(t) e⁻jt</sup></p>
<p class=MsoNormal>La transformada de Fourier de a(t) es: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:216.75pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image079.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358039">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuación anterior se puede escribir como: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:111.75pt;height:21pt' o:ole="">

<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image080.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358040">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y f(t) se puede expresar como: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image081.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358041">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Ahora sea s una frecuencia compleja s + jws<span style='font-size:

10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> + jw= s, luego se tiene que:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:44.25pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image082.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358042">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y las ecuaciones<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:111.75pt;height:21pt' o:ole="">

<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image080.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358043">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image081.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358044">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>son: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:33pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="transflaplace_archivos/image083.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358045">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:35.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="transflaplace_archivos/image084.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358046">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Los
 límites de la integral anterior resultan de la sustitución
 de<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>s = s + jw.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Las ecuaciones<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:33pt' o:ole="">

<v:imagedata src="transflaplace_archivos/image083.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358047">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:35.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="transflaplace_archivos/image084.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358048">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>constituyen la transformada compleja de Fourier, o la transformada bilateral de Laplace. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La notación que se emplea es la siguiente: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>F(s) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Lb{f(t)}<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>f(t) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Lb⁻¹</sup>{F(s)}<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Las dos formas de la transformada de Laplace de f(t) se pueden obtener de la transformada de Fourier de f(t) por la mera sustitución de s por jw, considerando a f(t) absolutamente integrable. <o:p></o:p></p>

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$

Para funciones que poseen transformada de Fourier s en el límite, se pueden evaluar las transformadas de Laplace directamente empleando $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$ por

Esto significa que la transformada de Laplace existe para muchas funciones que no tienen transformada de Fourier, esta es una de las ventajas principales de la transformada de Laplace, la habilidad de transformar funciones que no son absolutamente integrables

3. 51 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="proptranslaplace_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="proptranslaplace_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="proptranslaplace_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-26T15:11:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T15:13:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>

```

```

<o:Words>664</o:Words>
<o:Characters>3653</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>30</o:Lines>
<o:Paragraphs>8</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4309</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;

```

[illegible]

Symbol'>s < Min (b_{1}, b_{2})</p><p class=MsoNormal>2.) Escala.</p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id='_x0000_t75' coordsize='21600,21600' o:spt='75' o:preferrelative='t' path='m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe' filled='f' stroked='f'><v:stroke joinstyle='miter'></v:stroke><v:formulas><v:f eqn='if lineDrawn pixelLineWidth 0'><v:f eqn='sum @0 1 0'><v:f eqn='sum 0 0 @1'><v:f eqn='prod @2 1 2'><v:f eqn='prod @3 21600 pixelWidth'><v:f eqn='prod @3 21600 pixelHeight'><v:f eqn='sum @0 0 1'><v:f eqn='prod @6 1 2'><v:f eqn='prod @7 21600 pixelWidth'><v:f eqn='sum @8 21600 0'><v:f eqn='prod @7 21600 pixelHeight'><v:f eqn='sum @10 21600 0'></v:formulas><v:path o:extrusionok='f' gradientshapeok='t' o:connecttype='rect'><o:lock v:ext='edit' aspectratio='t'></v:shapetype><v:shape id='_x0000_i1025' type='#_x0000_t75' style='width:74.25pt; height:32.25pt' o:ole=''><v:imagedata src='proptranslaplace_archivos/image001.wmz' o:title=''></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type='Embed' ProgID='Equation.3' ShapeID='_x0000_i1025' DrawAspect='Content' ObjectID='_1244357992'></o:OLEObject></xml><![endif]></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>½a<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;

>4.)
Corrimiento de frecuencia. <o:p></o:p></p>

e[>]
</sup>^{a}^{t}f(t) « F(s+a) <o:p></o:p></p>

<o:p> </o:p></p>

>5.)
Convoluciôn de tiempo. <o:p></o:p></p>

>f₁(t)
· f₂(t) « F₁(s)F₂(s)<o:p></o:p></p>

>6.)
Convoluciôn de frecuencia. <o:p></o:p></p>

>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style="width:156pt;height:35.25pt o:ole="">

<v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244357993">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>a1 + <span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>a2 < s <
 <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>b<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial'>1+<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>2<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>a1 < c <
 <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>b<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial'>1<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>7.)
 Diferenciaciôn del tiempo. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:27.75pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244357994">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>8.) Integración del tiempo. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:146.25pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244357995">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:144.75pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244357996">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>9.) Diferenciación de frecuencia. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:81.75pt;height:29.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244357997">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

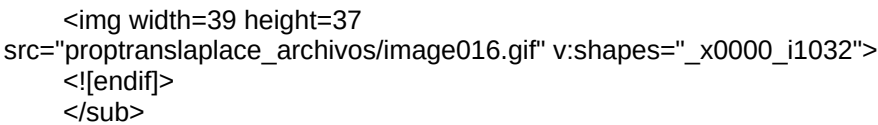
Todas estas propiedades para la transformada de Laplace son válidas para la transformada de un lado con excepción de las propiedades 7 y 8. Existen también teoremas de valor inicial para la transformada de un lado. Las propiedades de integración y derivación de tiempo son importantes para la transformada de un lado en el análisis de fenómenos transitorios en sistemas lineales. El teorema de convolución de tiempo juega un papel central en el análisis de sistemas lineales.

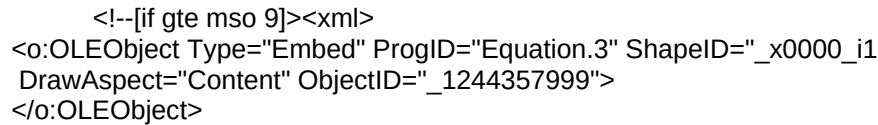
Como ejemplo de función de transferencia consideremos el siguiente:

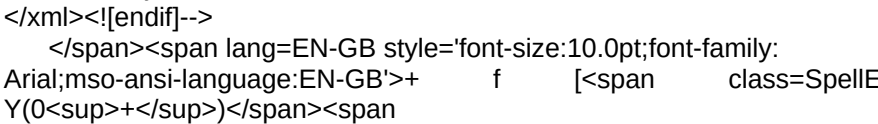
Para un sistema de resorte masa, la función de transferencia se obtiene de la forma:

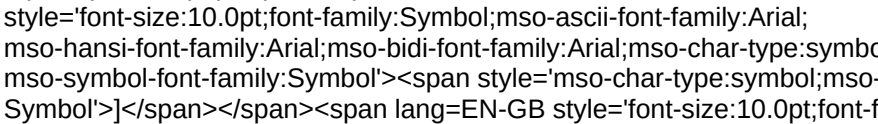
1.) Se plantea la ecuación diferencial del sistema:

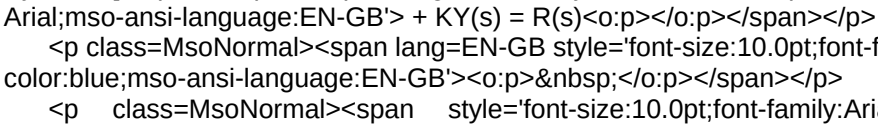
2.) Se obtiene la transformada de Laplace:

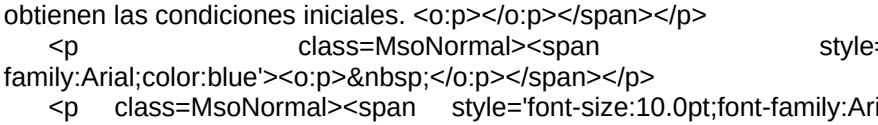


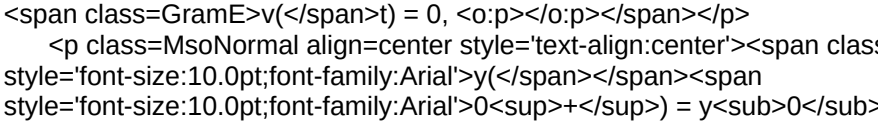


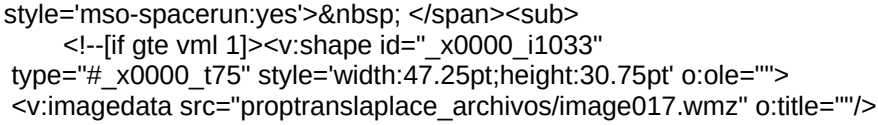




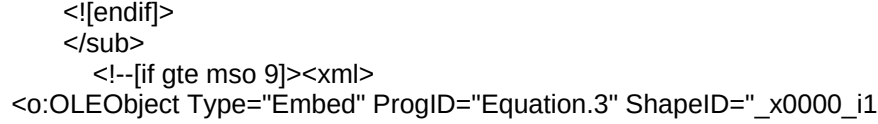


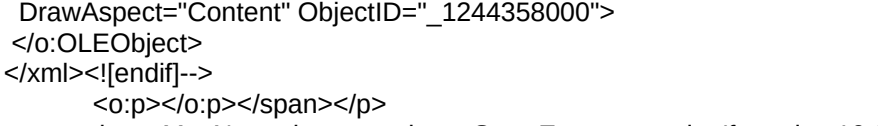


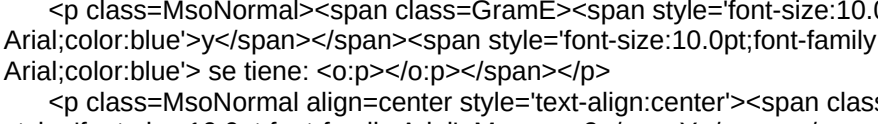


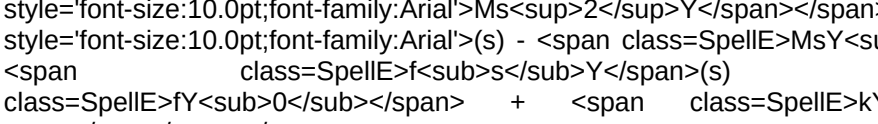


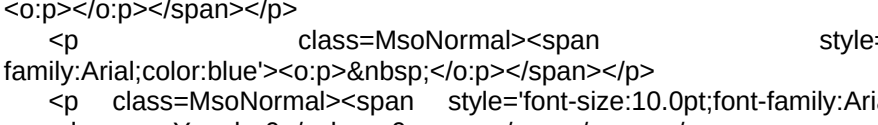


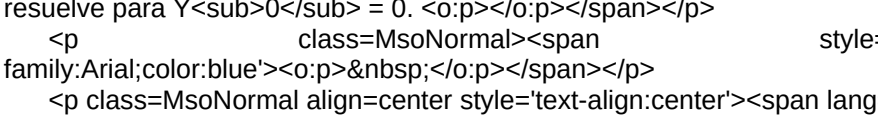












<v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358004">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Hemos visto que la solución a una simple
 ecuación generalmente resulta en una forma:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:119.25pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358005">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>donde<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> k₀ es una polinomial resultante de las condiciones iniciales. Regresando
 al caso del operador diferencial:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:30.75pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358006">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>la polinomial $k ₀(s)$ resultante de la transformación de Laplace era:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:156pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358007">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:204.75pt;height:44.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358008">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>El operador $H(s)$ se llama la función de transferencia de la ecuación diferencial. $H(s)$ transfiere totalmente la excitación

$\{E(s) + k\}$ a una funci&ocute;n de respuesta $V(s)$. Los polos de $H(s)$ se dan en los puntos $s = -$

10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g_{n}, y cada polo corresponde a un modo característico del operador diferencial.

Las g_n corresponden a las frecuencias complejas características de los modos característicos.</p></p>

<p class=MsoNormal></p></p>

<p class=MsoNormal>La dimensi&ocute;n de $H(s)$ y en particular su transformada inversa h(t) = $L^{-1}[H(s)]$, est´n gobernadas por la dimensi&ocute;n de la excitaci&ocute;n $e(t)$ y la respuesta $v(t)$. Como un problema ejemplo veremos el circuito en serie LRC de la siguiente figura:</p></p>

<p class=MsoNormal></p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:141pt;height:105pt'><v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image037.png" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'></p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuaci&ocute;n de gasa de Kirchoff nos da:</p></p>

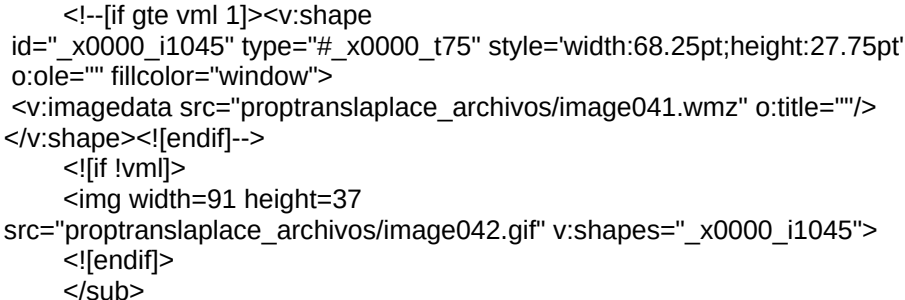
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

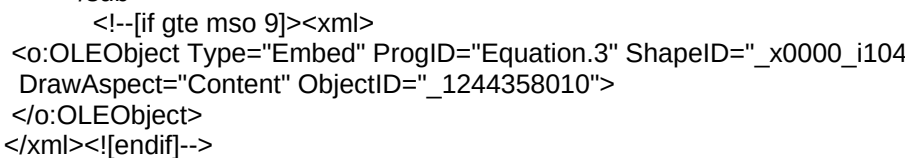
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:111.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image039.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub></p></p>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358009"></o:OLEObject></xml><![endif]></p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span

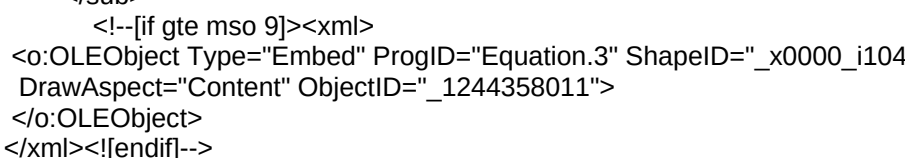
respuesta v(t) es el voltaje través del capacitor C en cualquier tiempo 0 ≤ t.



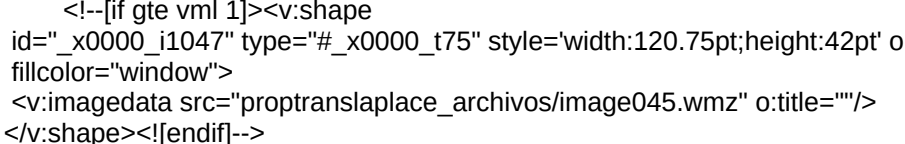


Ahora sea $I(s) = L[i(t)]$, si transformamos la ecuación diferencial para $i(t)$, tenemos por tanto, se obtiene:

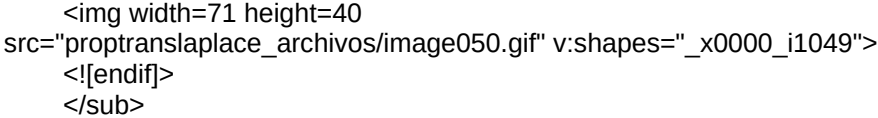


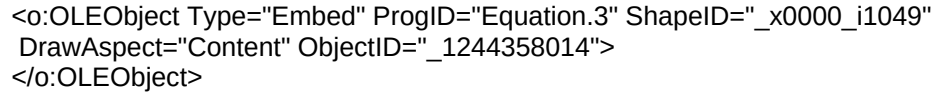


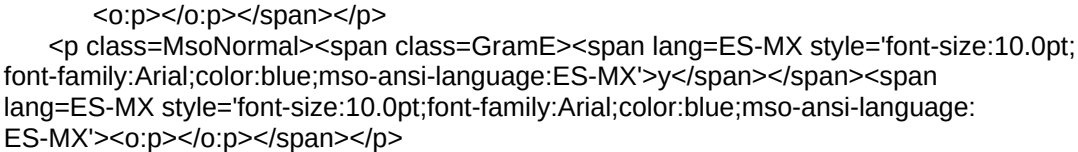
Si resolvemos para $I(s)$, se



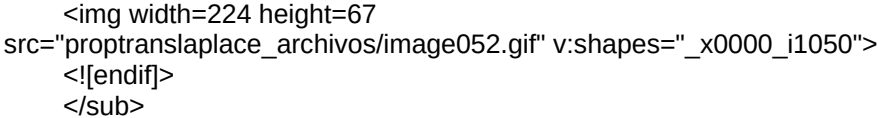
<![if !vml]>
 src="proptranslaplace_archivos/image046.gif" v:shapes="_x0000_i1047">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358012">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Definimos los parámetros: 2ª = R/L y
<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<sub><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>0</sub><sup><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>2</sup><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> = 1/LC.
Luego:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:306pt;height:30.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image047.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>
 src="proptranslaplace_archivos/image048.gif" v:shapes="_x0000_i1048">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358013">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si hacemos i(0+) =0 y
q(0+) = CE₀/2, y sea:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:53.25pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image049.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

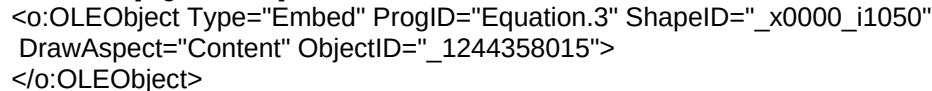




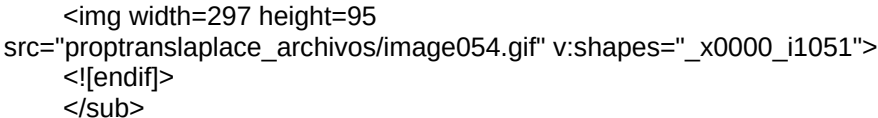


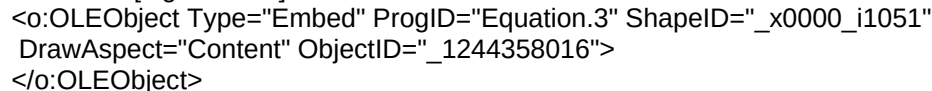


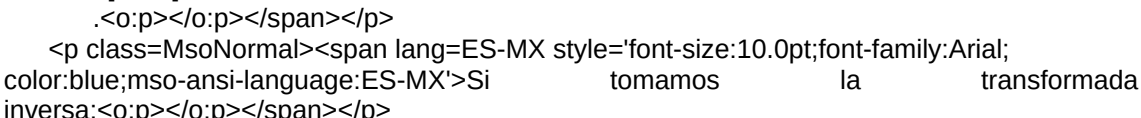


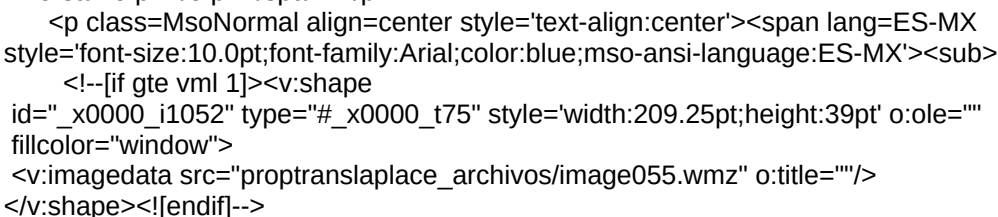












<![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358017">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Podemos ver
 de la respuesta vt un par de polos
 en:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:48.75pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image057.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358018">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>lo<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> que causa que v(t) se levante rápido para tiempos del orden de <sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1054" type="#_x0000_t75" style='width:26.25pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="proptranslaplace_archivos/image059.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244358019">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 . Este resultado indica la forma en la cual las condiciones iniciales entran en el
 problema. El cálculo apropiado para q(0+) nos da una
 solución que entrega en forma correcta<o:p></o:p></p>

```

    <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-
MX'>v(</span></span><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'>0+) =
E<sub>0</sub>/2.<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><o:p>&nbsp;</o:p></p>
  </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.52 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. FUNCION DE TRANSFERENCIA. LAS RAÍCES DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="raicesfuntransf_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="raicesfuntransf_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="raicesfuntransf_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LAS RAÍCES DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>40</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-19T23:57:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T01:15:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>4</o:Pages>
<o:Words>1187</o:Words>
<o:Characters>6530</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>54</o:Lines>
<o:Paragraphs>15</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>7702</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>

```

```

</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
    {mso-list-id:456070349;
    mso-list-type:simple;
    mso-list-template-ids:201981967;}
@list l0:level1
    {mso-level-tab-stop:18.0pt;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:18.0pt;
    text-indent:-18.0pt;}
ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}
-->

```

```

</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>LAS
RA&acute;CES DE LA FUNC&Oacute;N DE TRANSFERENCIA</span></b></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><span>&nbsp;</span></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'>Ya vimos que N ecuaciones en N inc&ocute;gnitas se pueden
reducir a una ecuaci&ocute;n matricial del tipo:</span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'><span>&nbsp;</span></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1077" type="#_x0000_t75" style='width:110.25pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

```


nos da la soluciøn transitoria causada por las condiciones iniciales del problema. Este transitorio contiene las frecuencias propias del operador de transferencia

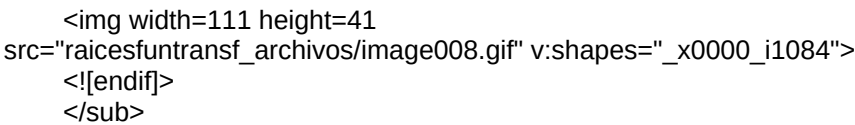
(s).

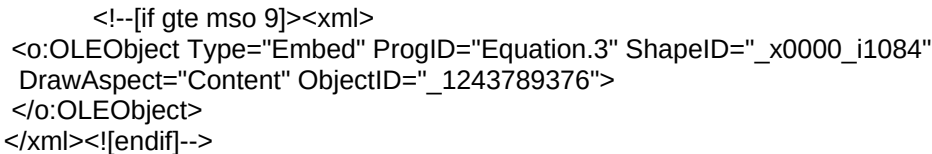
<![if !supportLists]>
2. <![endif]>
El término <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s) ×<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E(s) nos da una soluciøn transitoria en términos de las frecuencias propias de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s). Este transitorio se debe a haber encendido la excitaciøn.</p><p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-indent:-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1; tab-stops:list 18.0pt'><![if !supportLists]>
3. <![endif]>
El término <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s) ×<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E(s) también nos da un término que involucra los polos de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E(s) o las frecuencias características de la excitaciøn. Si la excitaciøn es senoidal se conoce como la soluciøn de estado estacionario.</p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal>Las características de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s) se pueden describir gráficamente, graficando los polos y los ceros de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s) en el plano complejo s. Esto es equivalente a dar los modos característicos (polos) y sus amplitudes (ceros). Los ceros dan las amplitudes de los modos característicos bajo la excitaciøn de una funciøn delta de la siguiente forma: la amplitud de un modo dado es el producto de la distancia entre el polo apropiado y todos los ceros, dividido por el producto de la distancia entre este polo y los otros polos. Es claro que la amplitud será cero, si el cero se construye de forma tal que caiga en la posiciøn de un polo, como lo indica la figura siguiente:</p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

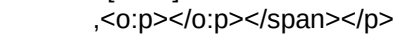
<!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1119" type="#_x0000_t75" style='width:129.75pt;height:117.75pt'
 <v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image003.png" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]><!--
 <![if !vml]>

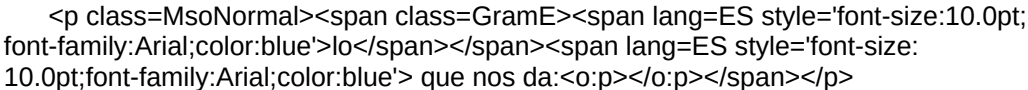
 <![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>El producto de las n_l dividido por todas
 las distancias d_j es la fuerza del modo k en la
 expansión final.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Hasta este momento no hemos estudiado acerca de la estabilidad de un sistema
 que está representado por <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s). Ahora
 enfocaremos nuestra discusión a sistemas estables, es decir nos referiremos
 sólo a los polos en el lado izquierdo del plano complejo s, o sea polos con parte real
 negativa.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Considérese un escalar H(s) del tipo:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1082" type="#_x0000_t75" style='width:188.25pt;height:59.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]><!--
 <![if !vml]>

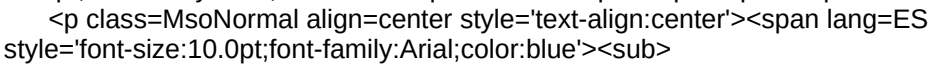
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1082"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789375">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]><!--
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>El teorema de expansión nos permite evaluar los coeficientes <span
 class=SpellE>B_l en la expansión:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1084" type="#_x0000_t75" style='width:83.25pt;height:30.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]><!--
 <![if !vml]>

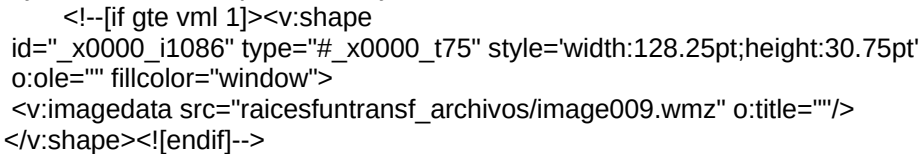




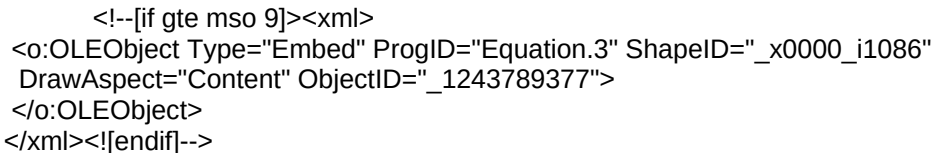


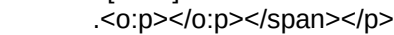


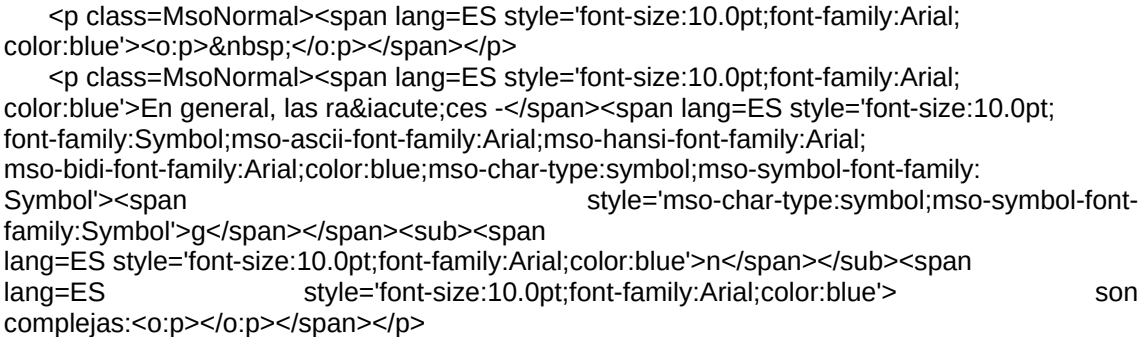


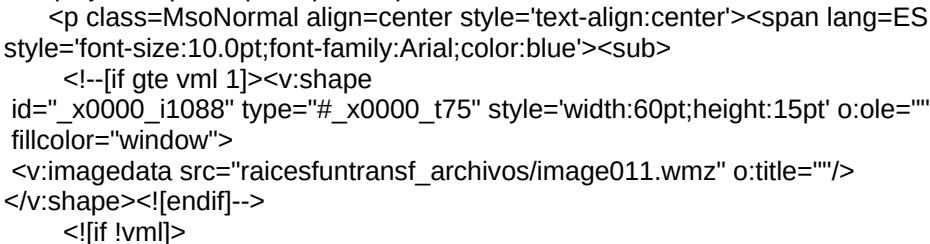


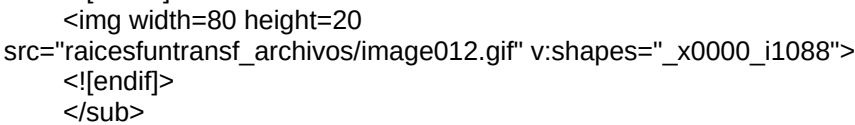


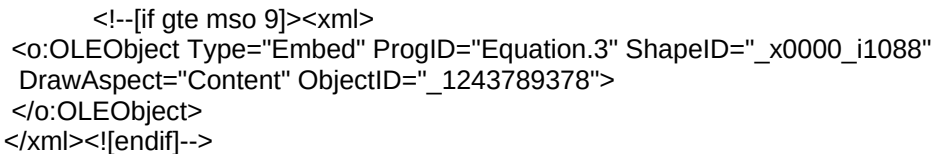














Podemos escribir una polinomial de la forma:

$$N = 1$$

Si todos los coeficientes de la polinomial son reales, la aparición de una raíz compleja $-z$ requiere la presencia de una segunda raíz z , que es el complejo conjugado de $-z$.

lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Una condición necesaria pero no suficiente de que la parte real de las raíces g_{k } sea negativa, es que todas las a_n tengan el mismo signo. Una condición necesaria para las raíces negativas es que todas las a_n en la polinomial sean cero, lo que se sigue debido al signo no definido del cero.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si todas las a_n son del mismo signo y diferentes de cero, la estabilidad de las raíces no está garantizada. Una buena prueba de la estabilidad es el criterio de Routh-Hurwitz. Para analizar arreglamos los coeficientes de la polinomial en renglones, con subíndices pares en el primer renglón y los impares en el segundo. Los demás renglones estarán formados de términos formados por un determinante 2 ´ 2 que se toma de los renglones justamente precedentes.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si la polinomial es de la forma: <sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1097" type="#_x0000_t75" style='width:35.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1097" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789381">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>>

 y asumimos N par, tenemos:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1099" type="#_x0000_t75" style='width:222pt;height:135pt' o:ole="" fillcolor="window">

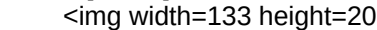
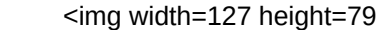
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1099"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789382">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Si examinamos el signo de la primera columna. La raíz est formada
 tomando un determinante 2 <span lang=ES style='font-size:10.0pt;
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>á<span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> 2 de los primeros dos
 renglones:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1102" type="#_x0000_t75" style='width:219pt;height:33pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1102"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789384">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>El cuarto renglón est formado por un determinante 2 <span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>á<span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> 2 de los elementos de los dos renglones anteriores, el
 segundo del tercero, etc.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1104" type="#_x0000_t75" style='width:216.75pt;height:33pt' o:ole=""

fillcolor="window">
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1104"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789386">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Este procedimiento se lleva a cabo hasta que se tenga un solo término
a["]<sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>×<span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>×<span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>×</sup><sup><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>'</sup><sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>N</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Si todos los términos en la
primera columna tienen el mismo signo, la parte real de la raíz es negativa. Como
nuestras <span style='font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>g_n son las raíces negativas, tenemos
que <span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a<sub><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>n</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que es la parte real de
<span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g<sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>n</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son
positivas.</p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Se puede realizar un estudio gráfico de la estabilidad de <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>H(s), tomando <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>H(s) como una transformación del plano complejo s al plano complejo
H(s). Para poder hacer lo anterior debemos de escribir H(s) como una función
compleja:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1106" type="#_x0000_t75" style='width:99.75pt;height:15pt' o:ole=""

fillcolor="window">
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>
 width=133 height=20
src="raicesfuntransf_archivos/image026.gif" v:shapes="_x0000_i1106">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1106"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789387">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1109" type="#_x0000_t75" style='width:95.25pt;height:59.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>
 width=127 height=79
src="raicesfuntransf_archivos/image028.gif" v:shapes="_x0000_i1109">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1109"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789388">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Se puede mapear un contorno C en el plano s
directamente dentro del plano H(s) y estudiar la estabilidad en términos de la estructura
del mapeo. Desafortunadamente estamos interesados en los polos de H(s). Un polo en el plano
s se mapea a un punto al infinito en el plano H(s). Un mapeo
conforme de H(s) coloca el punto |<span
class=SpellE>s| <span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>¥<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> en el origen del plano h. Para simplificar el problema
emplearemos un mapeo del plano s al inverso del plano H, o sea H⁻¹(s). Luego
definimos:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1111" type="#_x0000_t75" style='width:201.75pt;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1111"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789389">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
, <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>con<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1113" type="#_x0000_t75" style='width:101.25pt;height:59.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1113"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789390">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Cuando un contorno cerrado en el plano s contiene un polo de $H(s)$, el contorno transformado C' en el plano $H^{>1}(s)$ encierra el origen, en el mismo sentido de circulaci&ocute;n que el de C , como lo muestra la figura:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1121" type="#_x0000_t75" style='width:307.5pt;height:165pt'>
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image033.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Esta característica de la transformaci&ocute;n es aparente si localizamos puntos en C relativos al cero <span lang=ES style='font-size:10.0pt;

font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>b</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>k</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> por un vector polar <span
class=SpellE>R_keⁱ<sup><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</sup><sup><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>k</sup><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Luego:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1115" type="#_x0000_t75" style='width:225pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1115"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789392">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--
.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Podemos ver que un circuito alrededor de -<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g<sub><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>j</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> da un cambio total en la fase
<span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f<sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>j</sub><span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> de 2<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y un cambio total de fase alrededor del origen de H<sup>-
1</sup>(s) de +2<span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol">p. El cambio total de fase en una transversal de C debido a los polos y ceros fuera de C es cero. Si la trayectoria C encierra n polos, C' hace n circuitos alrededor del origen en H⁻¹(s). Por otro lado si C encierra n polos y m ceros, el contorno C' hace (m - n) circuitos alrededor del origen del plano H⁻¹(s) en la dirección C si n < m. Lo anterior se presenta en la siguiente figura:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1123" type="#_x0000_t75" style='width:218.25pt;height:126.75pt'><v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image037.png" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

<![if !vml]>

<![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si C contiene un cero (-b</sub>j</sub>), la variable (s + b</sub>l</sub>) = R_l</sup>eⁱ</sup>q</sup></sup> causa C' en H⁻¹(t) un círculo en la dirección opuesta a la circulación en s.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se puede construir la prueba de estabilidad para H(s) formando una trayectoria semicircular cerrada en el lado derecho del plano s como se ve en la figura:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1125" type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:177.75pt'><v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image039.png" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'>Todos los circalamientos del origen que ocurren en H⁻¹(s) aparecen
 en el transverso del eje imaginario en el plano s. La gr´fica de -<span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>¥<span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'><<span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'><<span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>¥<span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1117" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:18.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="raicesfuntransf_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1117"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243789394">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>se<span lang=ES style='font-size:

```

10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> llama el lugar de la transferencia de gasa abierta. Un
sistema es estable si el lugar de transferencia de gas abierta no pasa a trav&eacute;s de
H<sup>-1</sup> = 0 y si el n&uacute;mero de circulamientos en la direcci&oacute;n de las
manecillas del reloj de H<sup>-1</sup> = 0 es igual al n&uacute;mero de ceros encerrados en
C.</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.53 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA FUNCIÓN DELTA O FUNCIÓN IMPULSO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="funcdelta_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="funcdelta_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="funcdelta_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LA FUNCIÓN DELTA O FUNCIÓN IMPULSO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>7</o:Revision>
<o:TotalTime>15</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T01:15:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T17:02:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>542</o:Words>
<o:Characters>2983</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>24</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3518</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>

```

```

<w:WordDocument>
  <w:Zoom>91</w:Zoom>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;

```

```

font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>LA FUNCIÓN DELTA O
FUNCIÓN IMPULSO<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Generalmente una función física de excitación es una función continua
y con derivadas continuas. Matemáticamente es tedioso iniciar soluciones,
para primeros principios, de ecuaciones inhomogéneas con excitaciones
arbitrarias pero continuas, ya que inevitablemente involucran la integración
de la excitación y sus derivadas. La integral se puede ver como la suma de
pequeños rectángulos de un ancho infinitesimal </span><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>D</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t y una altura dada por
el valor de la <span class=GramE>e(</span>t) en la posición del rectángulo,
como lo muestra la figura.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

```


</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:121.5pt; height:100.5pt'>
 <v:imagedata src="funcdelta_archivos/image001.png" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Desde el punto de vista matemático esta función es una función discontinua, y por lo mismo no es posible describir una función de este tipo si la función es cero para tiempos menores de un $t < 0$ y cobra un valor máximo diferente de cero para algún $t \geq 0$ </p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La excitación rectangular es muy útil en problemas idealizados. En el más elemental de los tratados se pueden ver soluciones más allá de las discontinuidades para dar soluciones lineales a trazos. La excitación rectangular tiene la útil propiedad de que su integral existe para un tiempo finito t .</p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Sea:</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:50.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="funcdelta_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364553">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>luego:</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:69.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="funcdelta_archivos/image036.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364554">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Se pueden analizar muchos problemas empleando esta función <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;

mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol">D(t), con el entendimiento de que T es mucho menor que la acostumbrada respuesta en el tiempo del sistema. La primera de la función delta es una función escalón de amplitud unitaria. La segunda integral llega a ser $t + C$ para $T \ll t$. La n -ésima integral nos dará una función del tipo t^n .

La función delta en la forma actual está definida de la forma:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Esta integral define la función escalón unitario $U(t - t_0)$, la cual vale cero para $t < t_0$ y tiene valor 1 para $t > t_0$.

Por notación indicaremos $U(t)$ como $U(t - 0)$.

id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:104.25pt;height:27pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image040.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte
mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364557">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si empleamos el origen como t₀</p></p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:152.25pt;height:33pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte
mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364558">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Como U(t) tiene una definición fuera del signo de integral, se
puede intercambiar el orden de integración y tomar el límite en la primera
integral, por lo que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:93.75pt;height:33pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image042.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte
mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364559">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Es en este contexto que la función delta se puede tomar como
derivada de la función escalón. Después en la discusión sobre el teorema de
la integral de Fourier, aparecerá la función delta en forma modificada en la
relación integral:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:33pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image043.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte
mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364560">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Asumimos que $f(t)$ es bien portada y tiene una integral indefinida $g(t)$ tal que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:51pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image044.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364561">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La integral anterior se puede ahora expandir de acuerdo con la definición de d(t - t):<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:303pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image045.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364562">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:135pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image046.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364563">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Lo que demuestra el teorema.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>En el ejemplo todas las funciones se asumen cero para $t \leq 0$, y diferentes de cero en $t = 0$, por lo que muchas de las integrales tendrán un cero como límite inferior. Para mantener una aproximación consistente veremos que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:209.25pt;height:47.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364564"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>A menudo en la solución de las ecuaciones diferenciales las integrales se toman de $(0+)$ a t . Debemos tener claro que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image048.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364565"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>o sea:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image049.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364566"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>El término $(0+)$ implica $0 +$ <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'>e en el límite cuando e e 0 por la derecha. Otras relaciones que usaremos son:<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:177pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image050.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364567"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal>Cuando están involucradas integrales n-fold es posible emplear<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:36pt;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image051.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364568"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p><p class=MsoNormal>como elemento matemático.<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal>Las función delta es de importancia matemática básica en el estudio de operadores diferenciales. Se puede emplear como fuente excitadora puntual, y en este papel la solución de una ecuación sujeta a una fuente puntual muestra modos característicos del operador.<o:p></o:p></p>

```

        class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    </td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size:
12.0pt'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

```

3.54 CONTROL LINEAL. °SISTEMAS LINEALES. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="transfourier_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="transfourier_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="transfourier_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>10</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-26T17:24:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T17:35:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1107</o:Words>
<o:Characters>6090</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>50</o:Lines>
<o:Paragraphs>14</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>7183</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>

```

```

<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
  <w:BreakWrappedTables/>
  <w:SnapToGridInCell/>
  <w:WrapTextWithPunct/>
  <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
    {mso-list-id:491877577;
    mso-list-type:simple;
    mso-list-template-ids:201981967;}
@list l0:level1
    {mso-level-tab-stop:18.0pt;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:18.0pt;
    text-indent:-18.0pt;}
ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable

```



```

        {mso-style-name:"Tabla normal";
        mso-tstyle-rowband-size:0;
        mso-tstyle-colband-size:0;
        mso-style-noshow:yes;
        mso-style-parent:"";
        mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
        mso-para-margin:0cm;
        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>SERIES      Y
TRANSFORMADA DE FOURIER</span></b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La serie de Taylor es la expansi&oacute;n convencional
de una funci&oacute;n anal&iacute;tica <span class=GramE>f(</span>z). Expandimos <span
class=GramE>f(</span>z) alrededor de z<sub>0</sub> de acuerdo
con:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:126.75pt;
height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

```

<v:imagedata src="transfourier_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366502">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Esta serie se
 puede realizar si f tiene derivadas de todos los ordenes en
 z₀. La convergencia de la serie depende de la posici&ocute;n de todas las
 singularidades en el plano complejo z. El punto singular más cercano a z₀
 determina el radio de convergencia.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>En la parte de
 sistemas lineales vimos que la soluci&ocute;n de las ecuaciones lineales de coeficientes
 constantes se pueden expandir en el intervalo entre 0 a <span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> en el eje real en términos de los modos característicos de la
 ecuaci&ocute;n. Cuando el intervalo de definici&ocute;n de la ecuaci&ocute;n <span
 class=GramE>f es finito o peri&ocute;dico, la funci&ocute;n se puede expandir en
 términos de los modos característicos del operador
 {(d²/dt²) + <span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<sup><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>2</sup><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>} sujeto a la condici&ocute;n de frontera
 específica del problema. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La serie de <span
 class=SpellE>Fourier es más general de lo que se piensa si s&ocute;lo se
 consideran funciones propias del tipo e<sup><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>±</sup><sup><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</sup>^{t}. Para generar un conjunto de soluciones, consideraremos las soluciones f_{n} de la ecuación diferencial:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:207.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image003.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366503"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Las soluciones f_{k}(z) están sujetas a una condición de frontera muy estricta en el eje real:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:204pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366504">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>en<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> el intervalo a <span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> x <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>£<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> b.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Bajo estas
 condiciones las soluciones propias <span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f<sub><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>n</sub><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>(x)pueden formar un
 conjunto ortogonal completo en el intervalo a <span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> x <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>£<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> b. El término completos implica que cualquier función f(x) se puede
 aproximar en el medio si la solución satisface las siguientes condiciones:
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:

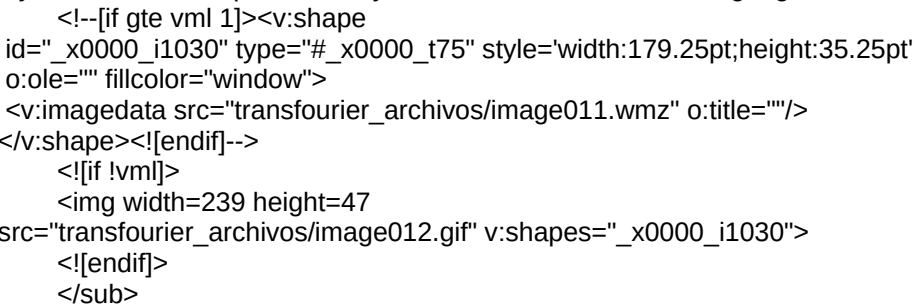
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366505">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><span
 style='mso-spacerun:yes'> <span style='mso-
 spacerun:yes'> <span
 class=GramE>es finita.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Estas son
 llamadas las condiciones de Dirichlet y la tercera condici&ocute;n
 se conoce como la condici&ocute;n de integrabilidad
 cuadrática.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Vamos a
 comenzar la aproximaci&ocute;n con una secuencia y una funci&ocute;n de error
 <span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
 mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e<sub><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>N</sub><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>(x):<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:108.75pt;height:32.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366506">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La
 aproximaci&ocute;n en el medio implica que una mitad de la serie evaluada en
 (x₀+) más una mitad de la serie evaluada en (x₀<span

igualan el valor de la función en $x=0$.

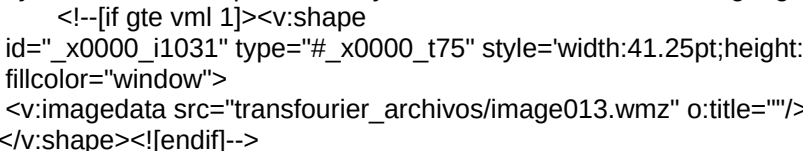
Podemos lograr la completas si la integral cuadrática de la función menos la integral cuadrática de la serie se aproxima a cero conforme N se aproxime a infinito. Definimos la integral J_N por la integral de

$$|f(x)|^2$$



<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366507">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->

Los coeficientes de la expansión a_k , llamados también coeficientes de Fourier, se eligen minimizando J_N respecto a las variaciones de a_k . Para lograr lo anterior hacemos:



<![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366508">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>y<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:39pt;height:30pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366509">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si trabajamos las
 derivadas para la expresión para J_N tenemos:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:105pt;height:35.25pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366510">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} J_n$$

Si sustituimos los valores en $J = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} J_n$ obtenemos la relación de

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} J_n$$

la cual se debe satisfacer si

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} J_n$$

forma un conjunto completo, esto es:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} J_n$$

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Se puede mostrar que las f_n(x) son ortogonales. Las funciones también se pueden normalizar de forma que el producto interno de una función con ella misma sea 1:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:113.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image023.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366513"></o:OLEObject></xml><![endif]--></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde d_{km} es la función Delta de Kronecker, que tiene valores de 1 si k = m, y 0 si k ¹m.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Se desarrolla la serie exponencial para el operador:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX

Symbol'>p. La condición periódica de frontera es menos restrictiva y sólo requiere que.</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><math display="block">\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:150.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image027.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366515"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><math display="block">\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La ecuación anterior implica que:</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:101.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image029.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366516"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><math display="block">\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y que m y n sean enteros. Podemos representar una función f(x) que satisfaga las condiciones de Dirichlet y que sea periódica en el intervalo 2<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>, o <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>p<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'> <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>£<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'> x <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>£<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'> <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>p<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>, como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:99.75pt;height:32.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="transfourier_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366517">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
,<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>con<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:105.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="transfourier_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366518">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>y<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:108.75pt;height:35.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366519">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>si<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> f(x) es real, <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:39.75pt;height:17.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image037.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366520">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Algunas veces se
 quieren series de senos y cosenos para acentuar la paridad de la funci&ocute;n. La serie de

Fourier en senos y cosenos es de la forma:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:135pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="transfourier_archivos/image039.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366521">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

,<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde las A_j y las B_k son reales si f(x9 es real:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:104.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="transfourier_archivos/image041.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366522">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

,<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:147.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="transfourier_archivos/image043.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366523">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:147pt;height:35.25pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image045.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366524">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Otra serie de
 utilidad es la que los coeficientes incluyen un corrimiento de fase:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:165pt;height:32.25pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="transfourier_archivos/image047.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366525">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'>donde<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:69pt;height:20.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="transfourier_archivos/image049.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="transfourier_archivos/image050.gif" v:shapes="_x0000_i1049">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366526">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1050" type="#_x0000_t75" style='width:63.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="transfourier_archivos/image051.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="transfourier_archivos/image052.gif" v:shapes="_x0000_i1050">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366527">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La condición periódica de frontera permite repeticiones periódicas de f(x) cuando la serie se evalúa para x < -p y x < p. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

$\text{Se ha dicho que las series de Fourier aproximan ciertas funciones en medio, lo que implica que la serie no converge uniformemente a discontinuidades en } f(x). \text{ En efecto, la serie presenta sobre tiros y dentro tiros en el punto de discontinuidad. Matemáticamente el valor medio de una serie en la discontinuidad tendr su propio valor. Esta deviaci}^{\circ}\text{n en la discontinuidad se llama fen}^{\circ}\text{meno de Gibbs.}$

$\text{Un ejemplo de lo anterior es la expansi}^{\circ}\text{n en serie para una funci}^{\circ}\text{n de compuerta peri}^{\circ}\text{dica, que se define como:}$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(x)]$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

<o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La siguiente muestra la funci´n.</o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1062" type="#_x0000_t75" style='width:301.5pt;height:119.25pt'><v:imagedata src="transfourier_archivos/image057.png" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>En este ejemplo,<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:87pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image059.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366530"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1054" type="#_x0000_t75" style='width:129.75pt;height:60.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image061.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366531">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Todos los coeficientes para m par son cero menos para $m = 0$. Los coeficientes impares alternan el signo. El comportamiento de la serie en la discontinuidad se puede estudiar examinando una secuencia finita de $t_{\text{eacute;rminos}}$ y observando el comportamiento como el $n^{\text{uacute;mero}}$ de $t_{\text{eacute;rminos}}$ que se incrementa a valores arbitrarios muy grandes. A la secuencia de los primeros $N + 1$ $t_{\text{eacute;rminos}}$ se llamará s_N ; al combinar exponenciales positivas y negativas se tiene:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1055" type="#_x0000_t75" style='width:125.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="transfourier_archivos/image063.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366532">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Si escribimos lo anterior en forma continua de cero a x tenemos:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1056" type="#_x0000_t75" style='width:164.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="transfourier_archivos/image065.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366533">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<p></p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Si se factoriza
e^{iy} de cada término, podemos sumar la serie usando la relación para una secuencia geométrica:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style='width:1in;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="transfourier_archivos/image067.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366534">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>luego<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1058" type="#_x0000_t75" style='width:174.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="transfourier_archivos/image069.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1058" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366535">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Para examinar esta funciøn cerca de la discontinuidad, hacemos que x se aproxime a cero, lo que confina a y un intervalo muy pequeño. De esta forma seny ® y. Definimos una nueva variable z = 2(N + 1)y, y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1059" type="#_x0000_t75" style='width:134.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="transfourier_archivos/image071.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1059" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244366536"></o:OLEObject></xml><![endif]></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>para un n dado el máximo de s_N aparece para $x =$ D(N), y si escogemos a N arbitrariamente grande de tal manera que 2(N+1) D(N) sea constante, se verá que el valor de la funciøn no se aproxima al valor de 1 a la derecha de la discontinuidad. Si por otro lado examinamos <span

</body>

</html>

3.55 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
```

```

<tr>
  <td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
  Curso de Control &gt; Control Lineal </span></td>
  <td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
  target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
</tr>
</table>
<div align="left">
  <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
    <tr>
      <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
      class="style16">CONTROL LINEAL &middot; TRANSFORMADA DE FOURIER
      </span></div></td>
    </tr>
  </table>
  <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
  bordercolor="#FFD7FF">
    <tr bgcolor="#FFE6FF">
      <td width="396" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
      href="transfourier.htm" target="mainFrame">Transformada de Fourier </a></span></div></td>
      <td width="393" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
      href="integfourier.htm" target="mainFrame">Integral de Fourier </a></span></div></td>
    </tr>
  </table>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
  <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.56 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER. LA INTEGRAL DE FOURIER

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="integfourier_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="integfourier_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="integfourier_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LA INTEGRAL DE FOURIER</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>

```

```

<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>59</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-26T15:50:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T16:52:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>692</o:Words>
<o:Characters>3811</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>31</o:Lines>
<o:Paragraphs>8</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4495</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>

```

```

<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]>
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;
mso-ansi-language:ES-MX'>LA INTEGRAL DE FOURIER</span></b><b style='mso-bidi-font-
weight:
normal'><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Expandimos una
funci&oacute;n peri&oacute;dica en t en el intervalo </span><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>.</span></span><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>/</span></span><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><sub><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>0</span></sub><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> </span><span lang=ES-MX style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-MX

```

t £ pw0, o -T2£ t £ T/2. La serie resultante estw0 = 2p

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>T. Como se incrementa el ancho del intervalo en el dominio del tiempo, los <span
class=SpellE>plos en el eje imaginario en el plano s se acercan, así en el
límite cuando el intervalo en el eje real t llega a ser arbitrariamente grande, la
distribución de polos en el eje imaginario del plano s llega a ser una línea
continua.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Conforme T
<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>®<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'> <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>¥<span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'> <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>w<sub><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>0</sub><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> <span lang=ES-MX style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>®<span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> 0 y los espacios
entre los modos característicos decrece, la línea del espectro de <span
class=SpellE>a_n es una función continua de la <span
class=GramE>variable <span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'>.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si empezamos
con:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>

```

<v:formulas>
  <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
  <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
  <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
  <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
  <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
  <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
  <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
  <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
  <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
  <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
  <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
  <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;
height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
  <v:imagedata src="integfourier_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
  <![if !vml]>
    
  <![endif]>
</sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364039">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
  <o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'>podemos</span></span><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'> escribir:<o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:53.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
  <v:imagedata src="integfourier_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
  <![if !vml]>
    
  <![endif]>
  </sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364040">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
  .<o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Ya
  </span><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>p</span></span></span></p>

```

lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w = T/2,<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integfourier_archivos/image005.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364041"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>En el límite como T llega a ser arbitrariamente grande:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:125.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integfourier_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364042"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La suma sobre n llega a ser una integral sobre x

entre los límites a y b

con el límite b

que tomamos. Si sustituimos para a y b convirtiendo la suma tenemos.

<o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:173.25pt;height:54.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image011.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<!--[if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364044">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El orden de los límites es fundamental. Si tomamos primero el límite W ® ¥, encontramos la integral indefinida:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:117pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image013.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<!--[if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364045">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Se puede f´cilmente ver que la I en la integral para f(t) es justamente la función d(t - t). Si tomamos la integral para f(t), primero tomamos el límite para T ® ¥ definimos la transformada de Fourier de f(t) como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:147.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="integfourier_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364046">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Luego:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:224.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364047">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La últime
 integral se denomina la transformada inversa de Fourier de <span
 class=GramE>a(<span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>),
 sea:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:120.75pt;height:17.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364048">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Para mostrar el
 empleo de la transformada de Fourier emplearemos la
 función compuerta que definiremos de la siguiente forma:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>

0

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:132pt;height:29.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="integfourier_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364049">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Esta
funci&oacute;n se muestra en la siguiente gr&aacute;fica.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1055"
type="#_x0000_t75" style='width:75pt;height:93.75pt'>
<v:imagedata src="integfourier_archivos/image023.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
<span
style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>Para este ejemplo:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:207.75pt;height:44.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="integfourier_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364050">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;

```


font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:231.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image031.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364053">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

,<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:209.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364054">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

,<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:204.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image035.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364055">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La función f(t) se ha desdoblado en sus componentes pares f_E(t) e impares f_o(t) en las dos últimas integrales. Lo anterior es posible de hacer gracias a que la integral f_E(t) sen wt y la integral f_o(t) sen wt se hacen cero.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La transformada de Fourier tiene la ventaja de que se puede usar para expandir el intervalo de ¥a ¥, y es más conveniente si se confina a funciones que son cero para t negativo.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Cuando un sistema $H^{⁻¹}$ (t) se sujeta a una excitación e(t), se produce una respuesta v(t), tal que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:69pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image037.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364056">

</o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Si $H^{(t)}$ es un operador integrodiferencial lineal, se puede usar la técnica anterior para escribir $H^{(t)}$ como un producto repetido de operadores de primer orden factorizados. Si es de orden N, existen N modos característicos del operador $H^{(t)}$. Por simplicidad usaremos un operador diferencial simple:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:164.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364057">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Podemos hacer:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:153.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364058">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image043.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->

```

<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364059">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>Luego:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:230.25pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="integfourier_archivos/image045.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364060">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>H<sup>-1</sup>(t) opera bajo la exponencial de </span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>&Aacute;</span></span><sup><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>-1</span></sup><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'><span class=GramE>g</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>]], dando:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:203.25pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="integfourier_archivos/image047.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364061">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>Si agrupamos los términos bajo la integral, se
 tiene:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:138.75pt;height:35.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image049.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364062">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>Una solución para esta ecuación
 es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:138pt;height:45.75pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image051.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364063">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>Finalmente:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:138pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integfourier_archivos/image053.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

<![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364064"></o:OLEObject></xml><![endif]>>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El término H(iw) se obtuvo directamente en el análisis de circuitos como la solución de estado estacionario. Si aplicamos una excitación de entrada a un circuito LR, cuya respuesta sea la caída de voltaje en la resistencia, como lo muestra la siguiente figura:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style='width:123.75pt;height:81.75pt'><v:imagedata src="integfourier_archivos/image055.png" o:title=""/></v:shape><![endif]>><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>la ecuación diferencial del circuito será:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1050" type="#_x0000_t75" style='width:84.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integfourier_archivos/image057.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364065">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=FR style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'>y v(t) = Ri(t),
 luego.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1051" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:27.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image059.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364066">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>Si transformamos la ecuación
 tenemos.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1052" type="#_x0000_t75" style='width:120pt;height:30.75pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="integfourier_archivos/image061.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364067">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

Podemos resolver para <span class=

<span style=

), y encontrar la solución para $v_8(t)$:$\frac{dv_8(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_8(t)$

<span style=

<span style=

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:234.75pt;height:35.25pt'

o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image063.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364068">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

$\frac{dv_8(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_8(t)$

Donde:$\frac{dv_8(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_8(t)$

<span style=

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1054" type="#_x0000_t75" style='width:69pt;height:27.75pt' o:ole=""

fillcolor="window">

<v:imagedata src="integfourier_archivos/image065.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364069">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

$\frac{dv_8(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_8(t)$

<span style=

<span style=

<span style=

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

3.57 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecualindiferencias_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecualindiferencias_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecualindiferencias_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>18</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T13:23:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T17:36:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>707</o:Words>
<o:Characters>3890</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>32</o:Lines>
<o:Paragraphs>9</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4588</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
```

```

<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]>
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ECUACIONES LINEALES DE
DIFERENCIAS</span></b><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```


color:red'><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La teoría de ecuaciones diferenciales lineales, va paralela a la teoría de ecuaciones lineales de diferencias. La mayor diferencia entre estos dos tipos de ecuaciones es que la ecuación diferencial expresa una relación entre funciones continuas en el tiempo y la ecuación de diferencias expresa una relación entre funciones discretas en el tiempo, o secuencias. Antes de ver la solución a este tipo de ecuaciones, definiremos lo que entenderemos por una secuencia, y daremos algunos ejemplos.

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Vamos a definir una secuencia de números {X_k}, como una colección de números que están indicados por un conjunto de enteros {K}. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Denotaremos la secuencia por {X_k} y los valores asumidos por ésta los designaremos por k índices de la forma X_k. Luego, si los índices K toman los valores 0,1,2,.....,n, los valores de la secuencia son: X₀,X₁,.....,respectivamente. Podemos definir {X_k} en dos formas: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>1.) Se puede especificar una regla o formula para calcular X_k. Por ejemplo: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si X_k = a^k se genera la secuencia: {....,a-1,1,..... a,a2,....} <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>2.) Podemos explícitamente listar los valores de la secuencia. Por ejemplo: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

```

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:141pt;
height:21.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecualindiferencias_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243848265">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> la flecha denota a  $x_0$ . <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Definimos la
suma de dos secuencias {<span class=SpellE>X<sub>k</sub></span>} + {<span
class=SpellE>Z<sub>k</sub></span>} como la secuencia {<span
class=SpellE>Y<sub>k</sub></span>}, donde: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>{<span
class=SpellE>Y<sub>k</sub></span>} = {<span class=SpellE>X<sub>k</sub></span>} +
{<span class=SpellE>Y<sub>k</sub></span>}, y <span class=SpellE>Y<sub>k</sub></span>
= <span class=SpellE>X<sub>k</sub></span><sub></sub>+<span
class=SpellE>Z<sub>k</sub></span></span><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>De la misma
forma, el producto de dos secuencias {<span class=SpellE>X<sub>k</sub></span><span
class=GramE>}</span><span class=SpellE>Z<sub>k</sub></span>}, se define como la
secuencia {<span class=SpellE>Y<sub>k</sub></span>}, donde: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>{<span
class=SpellE>Y<sub>k</sub></span>} = {<span class=SpellE>X<sub>k</sub></span><span
class=GramE>}</span><span
class=SpellE>Z<sub>k</sub></span>}, donde <span class=SpellE>Y<sub>k</sub></span> =
<span class=SpellE>X<sub>k</sub></span><span class=SpellE>Z<sub>k</sub></span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

El producto de una secuencia { X_k } y una constante a , es otra secuencia { Y_k } con:

$Y_k = a X_k$

$$Y_k = a X_k$$

$Y_k = a X_k$

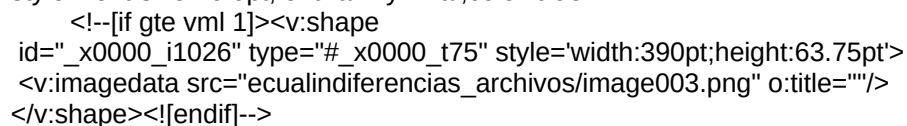
Daremos algunos ejemplos para ilustrar las ecuaciones de diferencias, y motivar buscar las soluciones a estas.

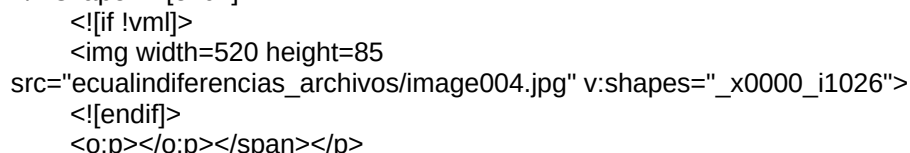
$Y_k = a X_k$

Supongamos que deseamos encontrar los voltajes $V_1, V_2, \dots, V_n$ en los nodos de la red resistiva de la figura.

$Y_k = a X_k$

$Y_k = a X_k$



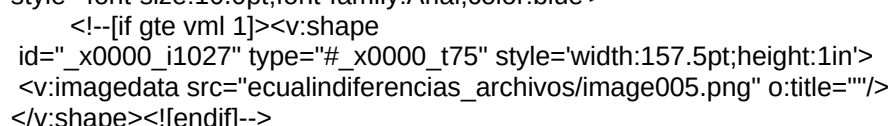


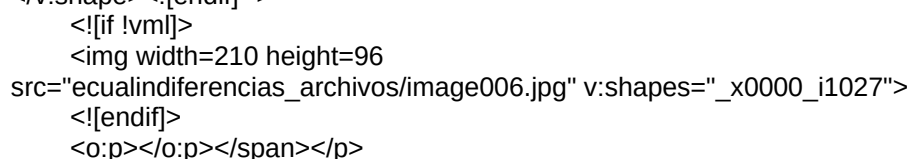
$Y_k = a X_k$

Estos voltajes se pueden relacionar por las leyes de Kirchhoff de corriente como se muestra en la figura

$Y_k = a X_k$

$Y_k = a X_k$





Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a + a^{2},... si se razona inductivamente, se puede obtener que: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Yk = 1 + a + a^{2} + + a^{k}<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Lo anterior representa una solución explícita. Esto no es una forma cerrada por que no se deben de incluir solo k especificados. Reconocemos que el lado derecho de la ecuación anterior forma una progresión geométrica, recordando: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:173.25pt;height:29.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecualindiferencias_archivos/image012.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243848267"></o:OLEObject></xml><![endif]></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecualindiferencias_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243848268">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Luego
 tenemos una forma de expresi&ocute;n explía y cerrada para <span
 class=SpellE>Y_k. Estamos primero interesados en métodos de
 soluci&ocute;n que resulten en soluciones de forma cerrada. Primero consideraremos la
 ecuaci&ocute;n lineal homogénea general de diferencias de orden n con coeficientes
 constantes: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 class=GramE>b_n<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> + b_n<sub>-
 1</sub>Y_k<span
 class=SpellE>+n-1</sub>
 class=SpellE>b₀Y_k = 0, k = 0,1,2,...<span
 style='color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Definimos al
 operador S, como: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>S<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y_k<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>] = <span
 class=SpellE>Y_{k+1}<span
 style='color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>así<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'> que la ecuaci&ocute;n<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 class=GramE>b_n<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> + b_n<sub>-
 1</sub>Y_k<span
 class=SpellE>+n-1</sub>
 class=SpellE>b₀Y_k = 0, k = 0,1,2,...<span
 style='color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>se<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'> puede escribir como: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y_k<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>] = 0<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'>donde L es el operador de diferencias lineal: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>L = b_nSⁿ + b_{n-1}Sⁿ⁻¹ + ^{...} + b₀</p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Como en el caso de las ecuaciones diferenciales, se obtiene una soluciún general para la ecuaciún<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>b_nY_k + b_n₋₁Y_k+n-1</sub> +.....b₀Y_k = 0, k = 0,1,2,...<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>como<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y_k = c₁Y_k + c₂Y_k² + ^{...}+c_nY_kⁿ, k = 0,1,2,...<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde las {Y_{ki}}, i = 1,2,... son n secuencias lineales independientes que se obtienen por el empleo de la ecuaciún característica: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>f(k) = b_nRⁿ + b_{n-1} Rⁿ⁻¹ + ^{...}</p>

<p class=MsoNormal>+ b₀ = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde la ecuaciún anterior tiene n distintas raíces |_{1}, <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'>_{2},.....,_{n}. Las secuencias {Y_{ki}}, 1 = 1,2,...,n, están dadas por: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y_kⁱ = _{i}^{k}, i = 1,2,...,n<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Se puede verificar que la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y_k = c₁Y_k + c₂Y_k²+ ^{....}+c_nY_kⁿ, k = 0,1,2,...<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>es solución de la ecuación homogénea<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>b_nY_k + b_n₋₁Y_k+n-1</sub> +.....b₀Y_k = 0, k = 0,1,2,...<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>por sustitución. Asumamos que la ecuación característica, tiene n raíces distintas. La función solución es: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y_k = c₁<span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Sustituyendo la ecuación anterior en la

$$Y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

se tiene:

$$b_n + c_1 + c_2 = 2k$$

+.....+

$$b_n + c_1 + c_2 = nk$$

)+

$$b_n + c_1 + c_2 = nk$$

style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>l<sub><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'>1</sub><sup>k+n+1
</sup>+ ^{...}+ c_n<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l<sub><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'>n</sub>^{k+n+1})+ ^{...} +
b₀(c₁<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>l<sub><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'>1</sub>^{k }+ ^{...}+c_n<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l<sub><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'>n</sub>^{k})= 0<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'>Reagrupando se tiene: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>c₁<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>l<sub><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'>1</sub>^{k}(b_n<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>l<sub><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'>1</sub>^{n-1}+b_n_{-1}<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l_{1}^{n-1}+ ^{...}+ b₀)²<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;

mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol">l_{2}^{k}(b_nl_{2}^{n }+ b_{n-1}l_{2}^{n-1}+ ^{...}+ b₀)+ ^{...}= 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Notemos los términos entre paréntesis. Por el hecho de que l_{1},l_{2},l_{n} son raíces de la ecuación característica, son cero, luego el lado izquierdo de la ecuación es cero.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

3.58 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS. MARCO 4

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN" "http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">

<html>

<head>

```

<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Control Lineal </span></td>
<td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>

```

```
 <div align="center"><span class="style16">CONTROL LINEAL &middot; ECUACIONES DE DIFERENCIAS </span></div></td> </tr> </table> |
```

3. 59 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ECUACIONES LINEALES DE DIFERENCIAS. ECUACIONES DE DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuadiferencias2orden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuadiferencias2orden_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuadiferencias2orden_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES DE DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T13:42:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T13:45:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>

```

```

<o:Words>129</o:Words>
<o:Characters>712</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>5</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>840</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;

```

```

        mso-style-noshow:yes;
        mso-style-parent:"";
        mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
        mso-para-margin:0cm;
        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ECUACIONES DE DIFERENCIAS DE
SEGUNDO ORDEN</span></b><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Sea la
ecuaci&oacute;n de diferencias de segundo orden: <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y<sub>k+1</sub></span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> - 2aY<sub>k</sub> + <span
class=SpellE>Y<sub>k</sub></span><sub>-1</sub> = 0<span
style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Esta
ecuaci&oacute;n se presenta a menudo en aplicaciones de sistemas lineales. Las reglas de
soluci&oacute;n para diferentes casos son: <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>1.) Si
</span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>a</span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>|</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>&gt;1, la soluci&oacute;n a la
ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=DE
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>Y<sub>k+1</sub> -
2aY<sub>k</sub> + Y<sub>k-1</sub> = 0<span
style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:DE'>es: <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=DE
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>Y<sub>k</sub> =
c<sub>1</sub>e<sup></sup><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;

```

mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>a</sup><sup><span
 lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>k</sup><span
 lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'> +
 c₂e⁻<sup><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>a</sup><sup><span lang=DE style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>k</sup><span lang=DE
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'> =
 c₁cosh(<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>a<span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 mso-ansi-language:DE'>k) + c₂'sinh(<span style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>a<span
 lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>k)
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
 id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
 path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
 <v:stroke joinstyle="miter"/>
 <v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:117.75pt;
 height:30.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="ecuadiferencias2orden_archivos/image001.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]>>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834325">
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>2.) Si
 a < 1, a = cosa y Y_k = lk, la ecuación característica es:
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>l - 2cosl + l^{1} = 0<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>con raíces: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:213.75pt;height:35.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="ecuadiferencias2orden_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026">

[illegible]

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> 1, la ecuación característica de la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y_{k+1} - 2aY_k + Y_k₋₁ = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>tiene raíces repetidas en -1. Luego: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y_k = (c₁ + c₂k) (-1)^k<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div></td></tr></table></body></html>

3.60 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN

```
<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="convolucion_archivos/filelist.xml">
<title>CONVOLUCIÓN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T13:47:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T13:48:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>134</o:Words>
<o:Characters>738</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>6</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>871</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
```

```

<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
  <w:BreakWrappedTables/>
  <w:SnapToGridInCell/>
  <w:WrapTextWithPunct/>
  <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

```

```

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>CONVOLUCI&Oacute;N</span></b><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como ya se
ha visto los sistemas lineales poseen la propiedad de superposici&Oacute;n. Esto es, si
nosotros conocemos la respuesta para una secuencia de entrada  $\{X_{k+1}\}$  y
 $\{X_{k+2}\}$  separadamente, podemos conocer la respuesta a la entrada
 $\{X_{k+1} + X_{k+2}\}$ . Esta es s&Oacute;lo la suma de dos respuestas
individuales. Si el sistema adem&Aacute;s de ser lineal, es tambi&eacute;n invariante en el
tiempo, podemos correr estas entradas a cualquier lugar a lo largo del eje de tiempo
correspondiente, es decir, si<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> $X_{k+1}$  </span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>
 $Y_1(k)$ <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>entonces</span></span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'> <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> $X_{k+1}$  (<span class=SpellE> $k+n$ </span>)
</span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial'>  $Y_{k+1}$  (<span class=SpellE> $k+n$ </span>). <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Empleando
estas dos propiedades de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, desarrollaremos una
relaci&Oacute;n que describa la relaci&Oacute;n entrada-salida de un sistema, que es la
respuesta del sistema a una funci&Oacute;n impulso, o a una secuencia impulso, en el caso de
sistemas discretos. Esta es una ecuaci&Oacute;n caracter&Iacute;stica del sistema.
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.61 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>

```

```

<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
font-size: 10pt;
color: #000000;
font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Control Lineal </span></td>
<td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">

```

```

<tr>
  <td width="788" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">CONTROL LINEAL &middot; CONVOLUCION </span></div></td>
</tr>
</table>
<table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
  <tr bgcolor="#FFE6FF">
    <td width="97" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="convolucion.htm" target="mainFrame">Convoluci&oacute;n</a></span></div></td>
    <td width="122" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="funcdelta2.htm" target="mainFrame">Funci&oacute;n Delta </a></span></div></td>
    <td width="143" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="relrespescalimpulso.htm" target="mainFrame">Escal&oacute;n e
Impulso</a></span></div></td>
    <td width="144" valign="top"><div align="center"><span class="style21"><a
href="repredese&#241;alescont.htm" target="mainFrame">Se&ntilde;ales
Continuas</a></span></div></td>
    <td width="132" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="superposconvolsiscont.htm" target="mainFrame">Superposici&oacute;n</a></span></div></td>
    <td width="151" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="respimulsoresp.htm" target="mainFrame">Secuencia Impulso </a></span></div></td>
  </tr>
</table>
<p>&nbsp;</p>
<p>&nbsp;</p>
<p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.62 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. FUNCION DELTA

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="funcdelta2_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="funcdelta2_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="funcdelta2_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>FUNCION DELTA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>

```

```

<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>8</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T13:48:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T13:56:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>500</o:Words>
<o:Characters>2753</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>22</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3247</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
/* List Definitions */

```



```

@list l0
    {mso-list-id:872158080;
    mso-list-type:simple;
    mso-list-template-ids:-1611351084;}
@list l0:level1
    {mso-level-tab-stop:none;
    mso-level-number-position:left;
    mso-level-legacy:yes;
    mso-level-legacy-indent:14.15pt;
    mso-level-legacy-space:0cm;
    margin-left:14.15pt;
    text-indent:-14.15pt;}

ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>FUNCION DELTA</span></b><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
            style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
            style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'>Desarrollaremos el concepto de una funci&oacute;n Delta, o una
funci&oacute;n impulso. Procederemos intuitivamente. Primero sea </span><span style='font-
size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(t - t<sub>1</sub>) la funci&oacute;n impulso
definida en la figura. <o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
            style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>

```

```

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:81.75pt;
height:102.75pt'>
<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image001.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<span
style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span><o:p></o:p></span></p>
<p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Esto es:
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:153pt;height:54.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834959">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=SpellE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>N&oacute;tece</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> que </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span>

```

(t - t₁) tiene ´rea unitaria para toda D. Cuando D se aproxima a cero, la funci´n límite: </p>
<p class=MsoNormal></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:18.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834960">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
</p>
<p class=MsoNormal></p>
<p class=MsoNormal>se denomina funci´n impulso, o funci´n delta de Dirac, o simplemente funci´n d. La funci´n d(t - t₁) tiene las siguientes propiedades: </p>
<p class=MsoNormal></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:126.75pt;height:36.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image007.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834961">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>para<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'> cualquier t > 0 y que: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:35.25pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834962">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>para<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'> cualquier funci&ocute;n f que sea continua en t₁. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La
 respuesta de un sistema a la secuencia impulso {<span style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>d
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>k} es por definici&ocute;n la secuencia de
 respuesta al impulso {hk}. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>{<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d<span
 class=GramE>k<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>} <span style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>®

{hk<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Si multiplicamos la secuencia impulso por una constante c, dada la linealidad, la salida será: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>cdk} ® c{hk<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Si corremos la posición de la secuencia impulso en el tiempo, dada la invariancia del sistema, corremos la salida por la misma cantidad: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>cdk + n} ® c{hk + n}<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Estamos interesados en la respuesta resultante de secuencias de entrada {Xk}. ¿Cómo podemos emplear la secuencia impulso respuesta para ayudarnos? <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Supongamos que representamos la secuencia de entrada como sigue: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>{X_k}=+ X₋₂{<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'>d_{k}2}+ X₋₁d_{k}1}+ X₀d_{k}}+ X₁d_{k}}+ ...<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>en otras palabras, tomamos cada valor de la secuencia Xi y multiplicamos esta por una versión corrida de la secuencia impulso dk-i, ya que esta tiene un valor 1 solo para k = i, este proceso nos lleva a representar una secuencia de entrada arbitraria como la suma de secuencias de entrada unitaria corridas. Luego: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:77.25pt;height:32.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image011.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834963">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Emplearemos ahora la linealidad del sistema para encontrar la

respuesta de salida. Primero encontramos la salida que resulta de cada termino de entrada

```

<span
class=SpellE><span
class=GramE>X<sub>i</sub></span></span><span
class=GramE>{</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><sub><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>k-i</span></sub><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>, y luego sumamos estas salidas para obtener la respuesta total.
La respuesta a X<sub>0</sub>{</span><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>d</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>k} es por ejemplo: <o:p></o:p></span></p>
<p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>X<sub>0</sub>{</span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><sub><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:black'>k</span></sub><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:black'>}</span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>&reg;</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> X<sub>0</sub>{<span
class=SpellE>h<sub>k</sub></span></span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Similarmente, la respuesta a X<sub>1</sub>{</span><span style='font-
size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><sub><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>k-1</span></sub><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>} es: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>X<sub>1</sub>{</span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><sub><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:black'>k-1</span></sub><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:black'>}</span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:black;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>&reg;</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'> X<sub>1</sub>{<span
class=SpellE>h<sub>k</sub></span><sub>-1</sub>}<o:p></o:p></span></p>
<p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dt}$$

El término $\frac{dk}{dt}$ de la secuencia de salida es:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dt}$$

El término $\frac{dk}{dt}$ de la secuencia de salida es:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dt}$$

<p class=MsoNormal><span style=

<p class=MsoNormal><span style=

<p class=MsoNormal><span style=

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

<p class=MsoNormal>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:71.25pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image015.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<!--[endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834967">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

esta

 se puede escribir como:

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:71.25pt;height:32.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="funcdelta2_archivos/image017.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<!--[endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243834968">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

lo

 que significa que la

convoluci

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span

$$Y_{k'} = \{X_{k'}\} * \{X_{k'}\} = \{X_{k'}\} * \{X_{k'}\}$$

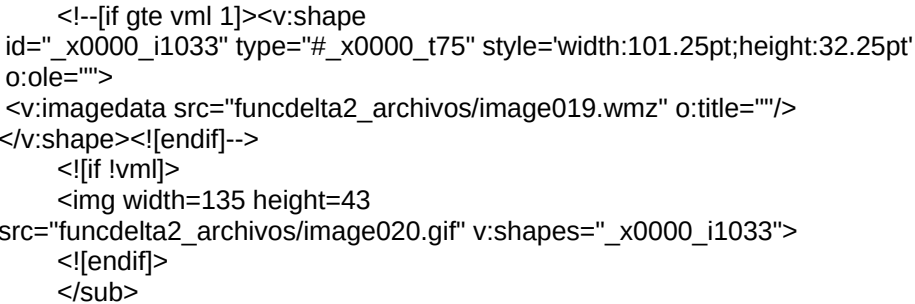
Consideremos dos secuencias $\{X_{k'}\}$ y $\{h(k)\}$, la $\{Y(k)\}$ dada por:

$$Y(k) = \{X_{k'}\} * \{h(k)\}$$

donde:

$$Y(k) = \{X_{k'}\} * \{h(k)\}$$

donde:



Podemos ver la $\{Y(k)\}$ como una serie de operaciones básicas:

1.

Tomar la imagen espejo de $\{X_{k'}\}$ alrededor del eje vertical a través del origen.

Se corre { $h(k-n)$ } una cantidad igual al valor de k, donde se valúa la secuencia de salida para encontrar { $h(k-n)$ }. <p></p>

3. Se multiplica la secuencia corrida { $h(x-n)$ } y la secuencia de entrada { $X(n)$ }. <p></p>

4. Se suma la secuencia resultante para obtener el valor de la convolución en k.

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vmml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="relrespescalimpulso_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="relrespescalimpulso_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="relrespescalimpulso_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
```

```

</style>
<![endif]-->
<title>RELACION ENTRE LA RESPUESTA A UN ESCALON Y LA RESPUESTA A UN
IMPULSO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>15</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T15:25:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T15:40:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>718</o:Words>
<o:Characters>3955</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>32</o:Lines>
<o:Paragraphs>9</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4664</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:595.3pt 841.9pt;
margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;

```

```

        mso-header-margin:35.45pt;
        mso-footer-margin:35.45pt;
        mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>RELACION ENTRE LA RESPUESTA A UN
ESCALON Y LA RESPUESTA A UN<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>
</span>IMPULSO</span></b><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La
respuesta de un sistema lineal a una funci&oacute;n de entrada <span
class=GramE>u(</span>t) denotada por g(t), es la respuesta escal&oacute;n.
<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En
s&iacute;mbolos si <span class=GramE>H(</span>.) representa la transformaci&oacute;n
realizada por el sistema lineal, luego: <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>g(</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>t) = H[U(t)]</span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span
style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span>La respuesta <span class=GramE>g(</span>t) se
puede obtener mediante la <span class=SpellE>convoluci&oacute;n</span> de u(t) y h(t), esto
es: <o:p></o:p></span></p>

```

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:2in; height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image001.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841240">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>ya que u(t) es cero para t < 0, para un sistema causal la ecuación (3.16) se puede definir como: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image003.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841241">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La ecuación anterior establece que la respuesta escalón de un sistema lineal es la integral de la respuesta impulso. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Se puede generalizar la ecuación a entradas arbitrarias. Si Y(t) es la respuesta resultante de una entrada arbitraria X(t), la respuesta que resulta de una entrada: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:23.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841242">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>esto se puede ver como sigue: La salida resultante de una entrada de
òx(t)dt', esta dada por:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:168.75pt;height:35.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028">

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841243">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Considerando que se puede cambiar el orden de integración entre t' y t, se tiene: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:110.25pt;height:23.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841244">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Se puede emplear la respuesta escalón gt) para caracterizar la relación entrada-salida de un sistema lineal. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Consideremos la convolución de una entrada Xt) arbitraria con respuesta impulso h(t): <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:95.25pt;height:35.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841245">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Integrando la ecuación anterior por partes y empleando la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image003.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841247">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>se tiene: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:249.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image013.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841248">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>ya que X(t) y g(t) son cero en t = -¥<span style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial;color:blue'>. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>En palabras, la respuesta de un sistema lineal esta dada por la convolución de la respuesta escalón g(t) con la derivada de la entrada X'(t). <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La función x(t) puede tener una discontinuidad en el origen. Si esto sucede y estamos trabajando con un sistema causal, tenemos que x(t) tiene un impulso en el origen. Este impulso se puede considerar reescribiendo la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:249.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841249"></o:OLEObject></xml><![endif]></p></o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>como<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:345pt;height:71.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841250"></o:OLEObject></xml><![endif]></p></o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde<span style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue'> $X(0)$ es el valor del brinco (discontinuidad) en el origen.

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>En general una función arbitraria x(t) se puede expresar como una suma continua de funciones t_nu(t). Para n = 0, tenemos la función escalón, para n = 1 se tiene la función rampa.

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La respuesta se puede expresar como la suma continua de las respuestas resultantes de la entrada de la función de potencias. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Ahora t_nu(t) es la (n+1)-ésima integral de d</p>

<p class=MsoNormal>(t), por lo que la respuesta t_nu(t) es la (n+1)-ésima integral de h(t), la cual denotaremos por: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>h^{-(n+1)}(t) <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>El resultado general es que podemos expresar la salida Y(t) como:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Y(t) = X^(n+1)(t) * h^{-(n+1)}(t)<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Supongamos que tenemos un sistema definido por la ecuación diferencial: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>L [Y(t)] = X(t)<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>podemos

font-family:Arial;color:blue'> encontrar la respuesta escal&ocute;n de este sistema de:

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:93.75pt;height:30.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image017.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841251">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>con las condiciones iniciales apropiadas. la respuesta impulso h(t) se puede obtener de: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:57.75pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image019.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841252">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>pero otra aproximaci&ocute;n se basa en el conocimiento de la soluci&ocute;n homogénea a: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>L [

<o:p></o:p></p>

<sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:35.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image021.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841254">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>representan dos métodos de encontrar la respuesta. Usando la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:35.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image021.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841255">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>como punto de inicio, considérense las condiciones que la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>L [Y(t)] = (D² + a₁D + a₀)[Y(t)] = X(t)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>y las condiciones iniciales imponen a la Y(t) en la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image021.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841256"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Notamos que Y(0) = 0 para la ecuación anterior. Diferenciando la ecuación con respecto a t, tenemos: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:3in;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image023.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841257"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuación requiere que Y'(0) = 0. Haciendo Y'(0) = 0 en la ecuación anterior tenemos que h(0) diferenciando de nuevo: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:135.75pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image025.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>

```

    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841258">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Las
    ecuaciones<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
    id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:93pt;height:35.25pt' o:ole="">
    <v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841259">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif]-->
    ,<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
    id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:3in;height:35.25pt' o:ole="">
    <v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841260">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
    Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
    Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
    id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:135.75pt;height:35.25pt'
    o:ole="">
    <v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"

```


DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841261">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>son expresiones para $Y(t)$, $Y'(t)$, y $Y''(t)$. Considerando el resultado de formar la suma: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'> $Y''(t) +$ a₁₀$Y(t)$</p>
<p class=MsoNormal>se tiene: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:281.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image027.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841262">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y se observa que: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>a.) b'(0) = 1 <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>b.) <sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:186.75pt; height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image029.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841263">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>luego la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:135.75pt;height:35.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image025.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841264">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>será solución de la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=FR
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>L [Y(t)] = (D² +
a₁D + a₀)[Y(t)] = X(t)<span
style='color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>La
ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:186.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="relrespescalimpulso_archivos/image029.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243841265">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>implica que el integrando del lado izquierdo sea cero. Si x(t) <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;

mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¹ 0 el término entre paréntesis es cero. Haciendo esto:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>h" (tt) + a₁h" (tt) + a₀h" (tt) = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>o <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>h"(t) + a₁h(t) + a₂h(t) = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuación <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>h"(t) + a₁h(t) + a₂h(t) = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>es por supuesto la ecuación homogénea original.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div></td></tr></table></body></html>

3. 64 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. REPRESENTACION DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml" xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head><meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

```

<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="repredeñalescont_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="repredeñalescont_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="repredeñalescont_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>REPRESENTACION DE SEÑALES CONTINUAS EN EL TIEMPO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>10</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T15:40:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T15:52:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>613</o:Words>
<o:Characters>3373</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>28</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3979</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;

```

```

        font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>REPRESENTACION DE SE&Ntilde;ALES
CONTINUAS EN EL TIEMPO</span></b><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
            style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
            style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'>Desarrollaremos la teor&iacute;a de <span
class=SpellE>convoluci&oacute;n</span> para el an&aacute;lisis de sistemas continuos en el
tiempo. Como en el caso ya visto para sistemas discretos, descompondremos la entrada <span
class=GramE>X(</span>t) en una suma de funciones impulso, y luego expresaremos la salida
Y(t) como la suma de las respuestas resultantes de los impulsos individuales.
<o:p></o:p></span></p>
    <p
        class=MsoNormal><span
            style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><span
style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>Lo primero entonces ser&aacute;; definir una
funci&oacute;n impulso apropiada y que sea continua en el tiempo. Aproximaremos una

```

función arbitraria

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke jointstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:168.75pt; height:176.25pt'><v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image001.png" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>

INFORME TECNICO IT-TINF-2007-01

donde P D (t) es un pulso de altura unitaria y ancho D

En el limite cuando

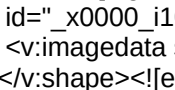
0, la suma se puede escribir como una integral:

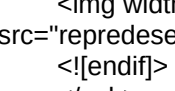
$$\int_0^t P(\tau) d\tau$$

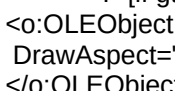
donde

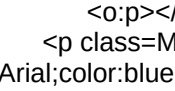
Aquí se reemplaza la variable t por τ y se convierte en τ se convierte en τ y definimos:

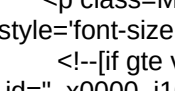
donde

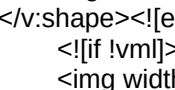
_{}

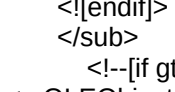
_{}

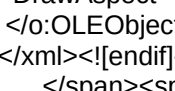
_{}

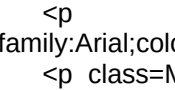
_{}

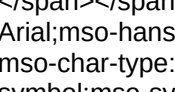
_{}

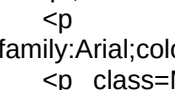
_{}

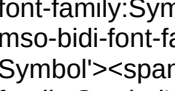
_{}

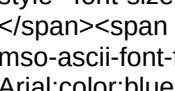
_{}

_{}

_{}

_{}

_{}

_{}

_{}

(t), es rigurosamente hablando un pulso de amplitud infinita y duraci&ocute;n cero. Esta funci&ocute;n impulso puede ser tratada como una funci&ocute;n generalizada por que no podemos definir su valor punto por punto como en las funciones ordinarias. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La funci&ocute;n d posee las siguientes propiedades: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>1.) d(t) = 0 para t ¹ 0 <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>2.) d(t) = ¥ para t = 0 <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>3.)_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:51pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><!--[if !vml]><![endif]-->}</p>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842022"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

Se puede obtener la funci´n impulso por medio de un proceso al i´mite en otra funci´n. En efecto, cualquier secuencia de funciones no negativas {Sk(t)} que tengan:<o:p></o:p></p>

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:51.75pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeseñalescont_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

<![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842023"></o:OLEObject></xml><![endif]>>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>se puede usar en forma de limite como una funci´n impulso. Definiremos la secuencia de la forma: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Sk(t) = kS(t)</p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>o sea: <o:p></o:p></p>

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:1in;height:21pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeseñalescont_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

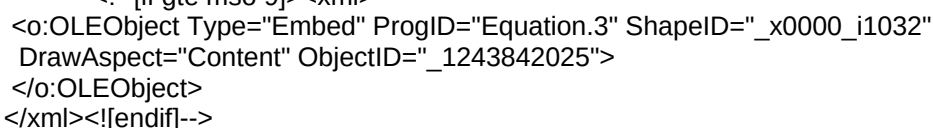
<![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842024"></o:OLEObject></xml><![endif]>>

<o:p></o:p></p>

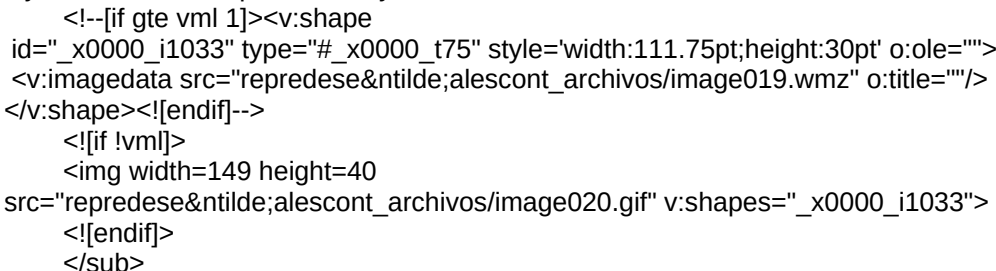
Como ejemplo consideremos la funci´n:





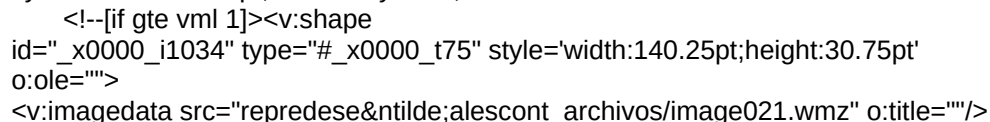
esta funci´n es positiva
 "

t, y tiene ´rea unitaria. Aplicando lo anterior:



es

una funci´n impulso, o sea:



</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842027">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Las propiedades de la función impulso se pueden englobar en una función definición dada por: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:35.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842028">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>siendo f(t) una función continua en t = t₀</p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Sea f(t) cualquier función continua en t = t₀. Consideremos un pulso centrado en t = t₀, como indica la figura.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:91.5pt;height:111.75pt'>
 <v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image025.png" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Para una delta pequeña podemos escribir: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:177pt;height:53.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image027.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842029"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La aproximaciôn se lleva a cabo porque f(t) puede no tener pendientes constantes en la vecindad de t₀. Como D es decreciente la aproximaciôn llega a ser mejor, y en el límite llega a ser:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:135.75pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image029.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842030"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>que es la ecuaciôn definiciôn de la funciôn d. La ecuaciôn<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image023.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842031">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Un método para determinar las propiedades de d(t), es el concepto de función prueba. Una función prueba q(t), es una función que es continua, tiene derivadas continuas en todos los ordenes, y es cero fuera de un intervalo finito. Un tipo de estas funciones es: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:180.75pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="repredeñalescont_archivos/image031.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842032">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

es la generalizaci3n del concepto de una funci3n y, se denomina una funci3n lineal en el espacio de las funciones prueba

(t). La ecuaci3n anterior asigna el numero

a cada funci3n

(t). En este caso asignamos a cada funci3n

el valor: $\langle p \rangle$

F

$\langle p \rangle$

$\langle p \rangle$

Una de las definiciones b3sicas que siempre empleamos en el estudio de las funciones impulso por medio de las funciones de prueba, es la propiedad de equivalencia. Supongamos $\langle d_1 \rangle$ y $\langle d_2 \rangle$ como expresiones envolviendo funciones impulso y otras funciones.

Definimos

$\langle d_1 \rangle = \langle d_2 \rangle$ si y solo si:



Diagram description: The diagram shows two rectangular boxes, one on the left labeled 'd1' and one on the right labeled 'd2'. A double-headed arrow connects the two boxes. Below the boxes, the text 'si y solo si:' is written.


```

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842034">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>para</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> toda q(t) para la cual la integral exista. Rigurosamente hablando, <span class=GramE>d<sub>1</sub></span>(t) = d<sub>2</sub>(t), si el instrumento de medida no detecta diferencia entre ellos. <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    </div></td>
</tr>
</table>
</body>
</html>

```

3.65 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. SUPERPOSICION Y CONVOLUCIÓN PARA SISTEMAS CONTINUOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="superposconvolsiscont_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="superposconvolsiscont_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="superposconvolsiscont_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SUPERPOSICION Y CONVOLUCIÓN PARA SISTEMAS CONTINUOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>9</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T15:53:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T16:02:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>466</o:Words>
<o:Characters>2564</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>21</o:Lines>

```

```

<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3024</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;

```

mso-para-margin-bottom: .0001pt;
 mso-pagination: widow-orphan;
 font-size: 10.0pt;
 font-family: "Times New Roman";

</style>
 <![endif]-->
 </head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight: normal'>SUPERPOSICION Y CONVOLUCI&Oacute;n PARA SISTEMAS CONTINUOS<o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal><o:p>&nbsp;</o:p></p> <p class=MsoNormal>Mostraremos que podemos caracterizar la relaci&oacute;n entrada salida para sistemas lineales invariantes en el tiempo, por medio de una convoluci&oacute;n que involucre la entrada y la funci&oacute;n respuesta impulso del sistema. <o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal><o:p>&nbsp;</o:p></p> <p class=MsoNormal>La respuesta impulso esta definida como la salida resultante de una entrada d(t). d(t) d(t) d(t). Si aplicamos una entrada impulso de &aacute;rea k, por la linealidad del sistema la salida ser&aacute;: kh(t), o sea: <o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'>kd(t) = kh(t) <o:p>&nbsp;</o:p></p> <p class=MsoNormal>ya que el sistema es invariante en el tiempo: <o:p></o:p></p> <p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'>k<o:p>&nbsp;</o:p></p>
--

style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>d(t - t₀) =
kh(t - t₀)</o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Para
encontrar la respuesta de un sistema continuo en el tiempo, a una entrada arbitraria <span
class=GramE>X(t), podemos representar X(t) por un tren de funciones impulso. De la
ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coorsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:338.25pt;
height:32.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image001.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842656">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>tenemos<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:144.75pt;height:30.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842657">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Si
sustituimos (1/<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D<span
class=GramE>)<sub><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>D</sub><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(t-n<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>D<span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>)<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>d<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>(t), luego la representación en descomposición para
la señal continua X(t), es la misma que la que teníamos para la secuencia {X(t)}.
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Si
aplicamos la representación de tren de impulsos para X(t)
al sistema, podemos calcular la salida por medio de la respuesta que resulta de cada impulso
por separado, y luego sumamos estas respuestas individuales para obtener la salida completa.
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La
respuesta para cada impulso se encuentra de una forma rápida como sigue:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>1.) El
impulso en t = 0 da una salida: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842658">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Como se ve, si D ® 0 el numero de impulsos crece y n ® ¥ y, así que (nD) llega a ser una variable continua t. La suma se aproxima a una integral, y así la respuesta Y(t) resultante de la entrada X(t) es: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:96.75pt;height:35.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842659">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y es una convolución de X(t) y h(t). <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

La evaluación gráfica de la cantidad: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:117.75pt;height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842660">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>esta basada en el hecho de que la integral de una función entre estos limites representa el área bajo la curva entre estos limites. Sea: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:114pt;height:30.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image011.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842661">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:131.25pt;height:29.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842662">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La convolución de dos funciones integrables f₁(t) y f₂(t), esta dada por:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:210.75pt;height:35.25pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

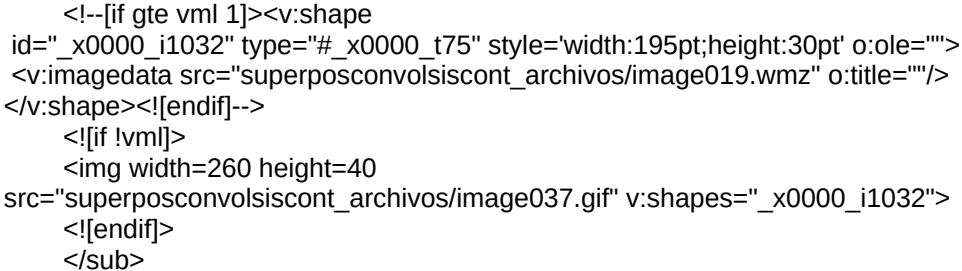
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842663">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>donde los límites más generales de -¥ a ¥ son los empleados. Diferenciando ambas fórmulas respecto a t, se encuentra que:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>f₁t°

$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}$

° $\frac{d}{dt}$ </p>
<p class=MsoNormal>en general: </p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>$\frac{d}{dt}$° $\frac{d}{dt}$ </p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>$\frac{d}{dt}$° $\frac{d}{dt}$ </p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>$\frac{d}{dt}$° $\frac{d}{dt}$ - k </p>
<p class=MsoNormal>$\frac{d}{dt}$ los ´ndices k y -k, denotan la k-ésima derivada e integral respectivamente. La primera de estas dos expresiones se escribe explícitamente como: </p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>$\frac{d}{dt}$
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:155.25pt;height:35.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image017.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

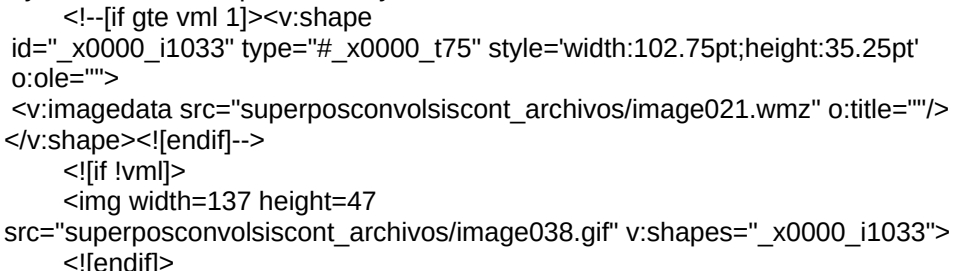
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842664">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
</p>

donde



$$h(t) = \left(\frac{d}{dt} n \right)$$

$$\frac{d}{dt} n$$



$$\frac{d}{dt} n$$



```

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842667">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>se</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> deriven de las ecuaciones: <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:35.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="superposconvolsiscont_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243842668">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La
ecuaci&oacute;n puede tambi&eacute;n ayudar en la evaluaci&oacute;n de la integral de <span
class=SpellE>convoluci&oacute;n</span>, cuando se emplean los m&eacute;todos
anal&iacute;ticos o num&eacute;ricos. <o:p></o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.66 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONVOLUCIÓN. LA SECUENCIA IMPULSO RESPUESTA

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respimulsoresp_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="respimulsoresp_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="respimulsoresp_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}

```

```

</style>
<![endif]-->
<title>FORMA DE ENCONTRAR LA SECUENCIA IMPULSO RESPUESTA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>6</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-20T16:02:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-20T16:25:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>432</o:Words>
  <o:Characters>2381</o:Characters>
  <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
  <o:Lines>19</o:Lines>
  <o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
  <o:CharactersWithSpaces>2808</o:CharactersWithSpaces>
  <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
  {mso-style-parent:"";
  margin:0cm;
  margin-bottom:.0001pt;
  text-align:justify;
  mso-pagination:widow-orphan;
  font-size:12.0pt;
  mso-bidi-font-size:10.0pt;
  font-family:"Times New Roman";
  mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
  {mso-style-name:"";
  mso-spl-e:yes;}
span.GramE
  {mso-style-name:"";
  mso-gram-e:yes;}
@page Section1
  {size:612.0pt 792.0pt;
  margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
  mso-header-margin:36.0pt;

```

```

        mso-footer-margin:36.0pt;
        mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>    LA        SECUENCIA        IMPULSO
RESPUESTA</span></b><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El
m&eacute;todo esta basado en el conocimiento de la soluci&oacute;n homog&eacute;nea de la
ecuaci&oacute;n de diferencias que modela el sistema. Supongamos que tenemos un sistema
que esta modelado por la ecuaci&oacute;n: <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L  [<span class=Spelle>Y<sub>k</sub></span>] =
<span class=Spelle>Y<sub>k+n</sub></span> + <span
class=Spelle>b<sub>n</sub></span><sub>-1</sub>
<span class=Spelle>Y<sub>k+n</sub></span><sub>-1</sub>+
<span class=Spelle>b<sub>n</sub></span><sub>-2</sub>
<span class=Spelle>Y<sub>k+n2</sub></span> +...+ <span
class=Spelle>b<sub>0</sub></span>Y<sub>k</sub></span> = <span
class=Spelle>X<sub>k</sub></span><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> L es el operador de diferencias: <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=EN-GB
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'>L = <span
class=Spelle>S<sup>n</sup></span> + b<sub>n-1</sub> S<sup>n-1</sup> + b<sub>n-
2</sub> S<sup>n-2</sup> + <sup>...</sup></span><span style='font-size:10.0pt;

```


symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>f<sub><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>1k</sub><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>, {<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>f<sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>2k</sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, {<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>f<sub><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>3k</sub><span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>, ..., {<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>f<span
 class=SpellE><sub><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'>nk</sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>}. De la ecuación: <span
 class=GramE>L{<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f<sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>k</sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>}. Esto es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 class=GramE>kk<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = c₁<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>f<sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial'>1k</sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>+ c₂<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>f<sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial'>1k</sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>+ ... + c₂<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'>f<sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial'>2k</sub><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Las
 constantes c₁, ..., , <span
 class=SpellE>c_n, se valúan en base a las condiciones
 iniciales para h_k. Estas condiciones iniciales se
 pueden evaluar con referencia a la ecuación:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>L [Y_k] =
 Y_{k+n} + <span

$$b_{k+n-1} + b_{k+n-2} + \dots + b_0 = X_{k-1}$$

Sea $k = -n$, en la ecuación obtenemos para una entrada impulso: $h_0 = 0$

Sea $k = -n + 1$ en la ecuación:

$$L[h_{k+n-1} + h_{k+n-2} + \dots + h_0] = Y_{k+n-1} + Y_{k+n-2} + \dots + Y_0 = X_{k-1}$$

tenemos:

$$h_1 + h_0 = n + 1$$

nuevo vemos que $h_1 = 0$. Continuando de la misma manera, obtenemos las condiciones iniciales:

<o:p> </o:p></p>
h₁ = h₂ = h₃ =h_n₋₁ = 0<o:p></o:p></p>
<o:p> </o:p></p>
<sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style="width:111.75pt; height:32.25pt" o:ole="">
<v:imagedata src="respimulsoresp_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<!--[if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243844030">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<o:p> </o:p></p>

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style="width:265.5pt;height:85.5pt">
<v:imagedata src="respimulsoresp_archivos/image003.png" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'>Refiriéndonos a esta figura vemos que para una entrada impulso
 {<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>d<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'>k}, el valor unitario para k = 0 es retrasado n veces antes de
 aparecer en la salida. Luego si el sistema esta inicialmente en reposo la primera salida
 diferente de cero ocurre en k = n, y tiene un valor de uno, que es precisamente la
 condición inicial de la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>h₁ = h₂ = h₃
 =....h_n₋₁ = 0<span
 style='color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Luego la
 secuencia respuesta impulso es: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:156.75pt;height:30.75pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="respimulsoresp_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243844031">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Las
 constantes c_i i = 1, 2,

, n se calculan de las n ecuaciones obtenidas de la
 ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>h₁ = h₂ = h₃
 =....h_n₋₁ = 0<span
 style='color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'>Llamémosles: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape

```

id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:135.75pt;height:60.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="respimulsoresp_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243844032">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Este
m&eacute;todo de encontrar la secuencia impulso respuesta para un sistema discreto en el
tiempo es probablemente el m&aacute;s general y poderoso. Se puede emplear cuando la
soluci&oacute;n homog&eacute;nea se encuentra y no se limita a sistemas invariantes en el
tiempo. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3. 67 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES

```

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respuesthexcitimp_archivos/filelist.xml">
<title>LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T16:40:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T16:41:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>136</o:Words>
<o:Characters>748</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>6</o:Lines>

```

```

<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>883</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;

```

```

        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>LA RESPUESTA
DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES</span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-MX'><span>&nbsp;</span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>En muchos casos nuestro sistema se comporta como
una caja negra en la cual estamos imposibilitados de obtener informaci&oacute;n directa de sus
detalles. En estos casos una manera de tener informaci&oacute;n es excitar al sistema con
diferentes tipos de se&ntilde;ales conocidas y medir su respuesta a
ellas.</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><span>&nbsp;</span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>En esta secci&oacute;n describiremos la forma en la
cual la funci&oacute;n de transferencia se relaciona con la respuesta bajo una
excitaci&oacute;n de una se&ntilde;al conocida. Como primera se&ntilde;al se analizar&aacute;
la funci&oacute;n delta. Podemos observar que la funci&oacute;n de transferencia del sistema
es la respuesta a esta funci&oacute;n. Luego la transformada inversa </span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><span></span></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-
MX'>h(</span></span><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'>t) = L<sup>-
1</sup>[H(s)],</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><span>&nbsp;</span></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>es</span></span><span
lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
ES-MX'> la funci&oacute;n de <span class=SpellE>Green</span> del operador del
sistema.</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><span>&nbsp;</span></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Despu&eacute;s de este an&aacute;lisis de la
funci&oacute;n delta, se analizar&aacute;n otras funciones importantes como son, la
funci&oacute;n escal&oacute;n, compuertas y senoidales.</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-MX'><span>&nbsp;</span></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.68 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
```



```

        <td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Control Lineal </span></td>
        <td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
    </tr>
</table>
<div align="left">
    <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
        <tr>
            <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">CONTROL LINEAL &middot; CONVOLUCION </span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
        <tr bgcolor="#FFE6FF">
            <td width="97" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="convolucion.htm" target="mainFrame">Convoluci&oacute;n</a></span></div></td>
            <td width="122" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="funcdelta2.htm" target="mainFrame">Funci&oacute;n Delta </a></span></div></td>
            <td width="143" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="relrespescalimpulso.htm" target="mainFrame">Escal&oacute;n e
Impulso</a></span></div></td>
            <td width="144" valign="top"><div align="center"><span class="style21"><a
href="repredese&#241;alescont.htm" target="mainFrame">Se&ntilde;ales
Continuas</a></span></div></td>
            <td width="132" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="superposconvolsiscont.htm" target="mainFrame">Superposici&oacute;n</a></span></div></td>
            <td width="151" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="respimulsoresp.htm" target="mainFrame">Secuencia Impulso </a></span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <p>&nbsp;</p>
    <p>&nbsp;</p>
    <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.69 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. LA FUNCIÓN DELTA O FUNCIÓN IMPULSO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="funcdelta_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="funcdelta_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="funcdelta_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>

```

```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LA FUNCIÓN DELTA O FUNCIÓN IMPULSO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>7</o:Revision>
<o:TotalTime>15</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T01:15:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T17:02:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>542</o:Words>
<o:Characters>2983</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>24</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3518</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpanE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE

```

```

        {mso-style-name:"";
        mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
    <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>LA FUNCIÓN DELTA O
FUNCIÓN IMPULSO<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:red'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Generalmente una función física de excitación es una función continua
y con derivadas continuas. Matemáticamente es tedioso iniciar soluciones,
para primeros principios, de ecuaciones inhomogéneas con excitaciones
arbitrarias pero continuas, ya que inevitablemente involucran la integración
de la excitación y sus derivadas. La integral se puede ver como la suma de
pequeños rectángulos de un ancho infinitesimal </span><span style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>D</span></span></span>

```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t y una altura dada por el valor de la

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke jointstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:121.5pt; height:100.5pt'><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image001.png" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Desde el punto de vista matemático esta función es una función continua, y por lo mismo no es posible describir una función de este tipo si la función es cero para tiempos menores de un $t > 0$ y cobra un valor máximo diferente de cero para algún t > 0.</p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La excitación rectangular es muy útil en problemas idealizados. En el más elemental de los tratados se pueden ver soluciones más allá de las discontinuidades para dar soluciones lineales a trazos. La excitación rectangular tiene la útil propiedad de que su integral existe para un tiempo finito t .</p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Sea:</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:50.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]-->}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364553">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>luego:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:90.75pt;height:69.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image036.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364554">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Se pueden analizar muchos problemas empleando esta función D(t), con el entendimiento de que T es mucho menor que la acostumbrada respuesta en el tiempo del sistema. La primera de la función delta es una función escalón de amplitud unitaria. La segunda integral llega a ser t + C para T < t. La n-ésima integral nos dará una función del tipo tⁿ⁻¹<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La función delta en la forma actual está definida de la forma:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:203.25pt;height:45pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcdelta_archivos/image038.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364555">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Esta integral define la función escalón unitario U(t - t₀), la cual vale cero para t < t₀ y tiene valor 1 para t₀ < t:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image039.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364556"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Por notación indicaremos D(t) como U(t) - t₀</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:104.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image040.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364557"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si empleamos el origen como t₀</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:152.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image041.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364558"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Como U(t) tiene una definición fuera del signo de integral, se puede intercambiar el orden de integración y tomar el límite en la primera integral, por lo que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:93.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

$\Delta f(x) = \int_a^x f(t) dt$

Es en este contexto que la función delta se puede tomar como derivada de la función escalón. Después en la discusión sobre el teorema de la integral de Fourier, aparecerá la función delta en forma modificada en la relación integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

Asumimos que $f(t)$ es bien portada y tiene una integral indefinida $g(t)$ tal que:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} g(t)$$

La integral anterior se puede ahora expandir de acuerdo con la definición de

$$\int_a^b f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \int_a^b \delta(x-a) dx = f(a) [g(x)]_a^b = f(a) (g(b) - g(a))$$

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:303pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image045.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364562"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:135pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image046.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364563"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p><p class=MsoNormal>Lo que demuestra el teorema.</p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal>En el ejemplo todas las funciones se asumen cero para $t \leq 0$, y diferentes de cero en $t = 0$, por lo que muchas de las integrales tendrán un cero como límite inferior. Para mantener una aproximación consistente veremos que:</p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:209.25pt;height:47.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364564"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal>A menudo en la solución de las ecuaciones diferenciales las integrales se toman de $(0+)$ a t . Debemos tener claro que:</p><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcdelta_archivos/image048.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><img width=87 height=44

src="funcdelta_archivos/image028.gif" v:shapes="_x0000_i1037"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364565">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>o sea:</o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="funcdelta_archivos/image049.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]><!--<![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364566">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>El término (0+) implica 0 + e en el límite cuando e ® 0 por la derecha. Otras relaciones que usaremos son:</o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:177pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="funcdelta_archivos/image050.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]><!--<![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244364567">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Cuando están involucradas integrales n-fold es posible emplear</o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;


```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN Y LA FUNCIÓN DE GREEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>5</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T16:51:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T16:56:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>396</o:Words>
<o:Characters>2180</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2571</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}

```

```

@page Section1
{size:595.3pt 841.9pt;
margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

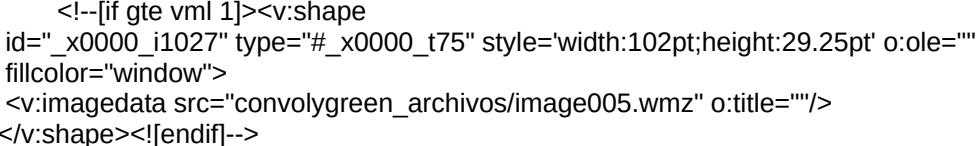
<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>LA INTEGRAL DE
CONVOLUCI&Oacute;N Y LA FUNCI&Oacute;N DE GREEN<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Una relaci&oacute;n muy &uacute;til en la transformada
de Laplace es que el producto de dos transformadas de Laplace es igual a la transformada de
Laplace de la convoluci&oacute;n de la transformada inversa. Si:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

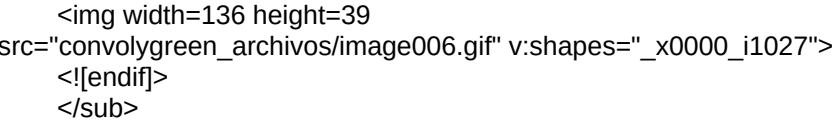
```

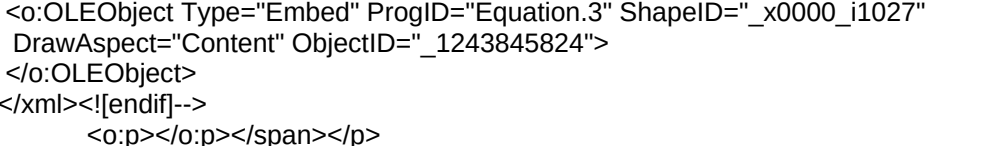
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:123pt; height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="convolygreen_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

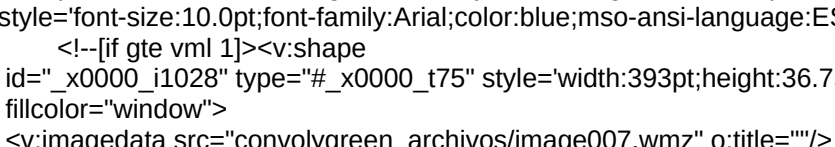
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845822">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>entonces,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:221.25pt;height:36.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="convolygreen_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

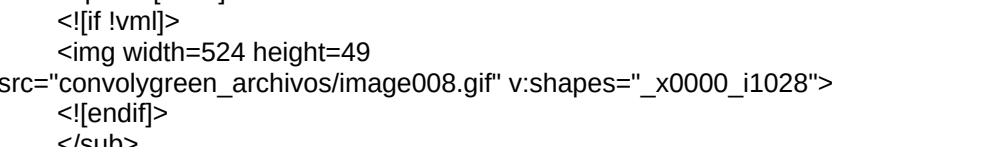
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845823">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Para probar esta relaci&ocute;n convertimos la integral de la derecha a una integral de 0 a ¥ sustituyendo un escal&ocute;n inverso U(t - t')<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX

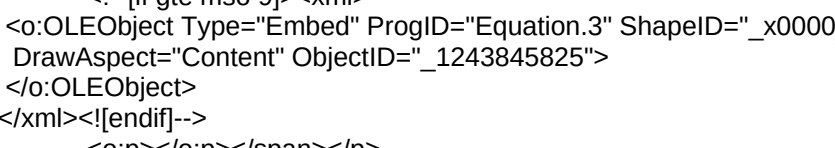


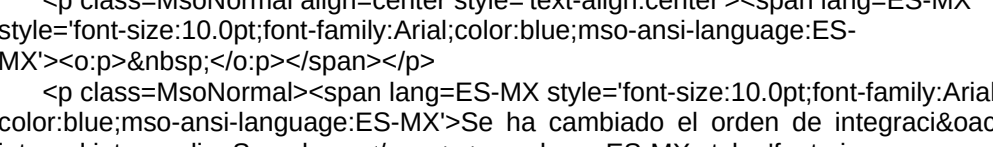


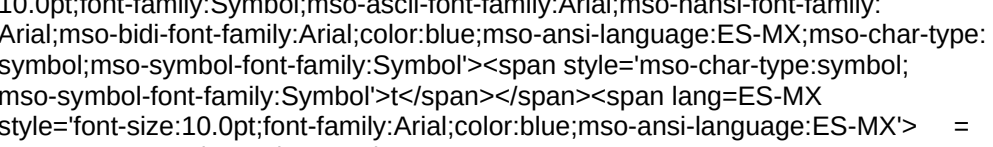


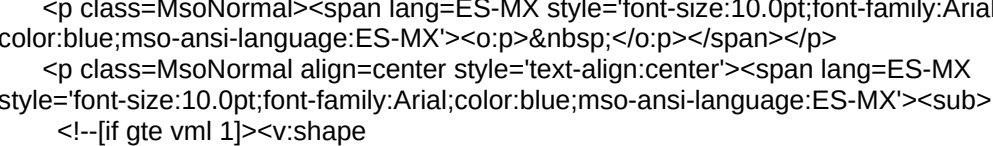


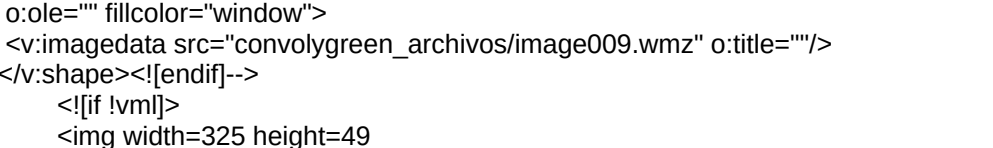














</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845826">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La integral de convolución descrita se puede
 emplear para resolver ecuaciones no homogéneas, en otras palabras, se puede
 obtener la respuesta particular a una excitación e(t).
 Considérese:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:17.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="convolygreen_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845827">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>después<span
 lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:
 ES-MX'> de transformada es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:114.75pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="convolygreen_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845828">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>

Por simplicidad consideremos que el sistema est´ inicialmente relajado, $K(s) = 0$.

Se mostrar´ esto como una multiplicaci&ocaron; escalar. Los resultados se pueden generalizar a una forma matricial. De la ecuaci&ocaron; anterior se sabe que:

$L[v(t)] = V(s), L[h(t)] = H(s) \text{ y } L[e(t)] = E(s).$

El producto $H(s)$ E(s) se puede convertir al dominio del tiempo por medio del teorema de Convoluci&ocaron;. Comenzaremos por:

$V(s) = H(s)$ E(s).

Si empleamos el teorema de convoluci&ocaron;, tenemos:

_{<!--[if gte vml 1]><v:shape}

_{id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:159.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">}

_{<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image015.wmz" o:title=""/>}

_{</v:shape><![endif]>}

_{<![if !vml]>}

_{<img width=213 height=47}

_{src="convolygreen_archivos/image016.gif" v:shapes="_x0000_i1032">}

_{<![endif]>}

</sub>

_{<!--[if gte mso 9]><xml>}

_{<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"}

_{DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845829">}

_{</o:OLEObject>}

_{</xml><![endif]>}

donde

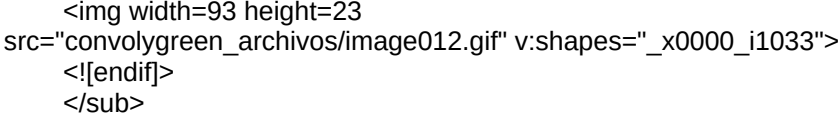
_{<!--[if gte vml 1]><v:shape}

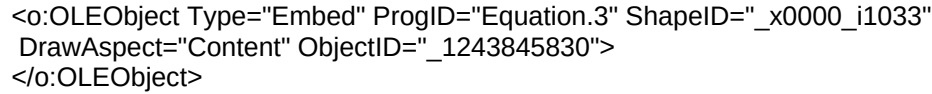
_{id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">}

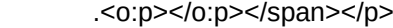
_{<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image017.wmz" o:title=""/>}

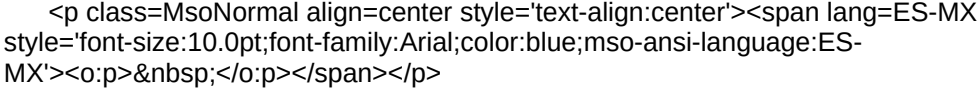
_{</v:shape><![endif]>}

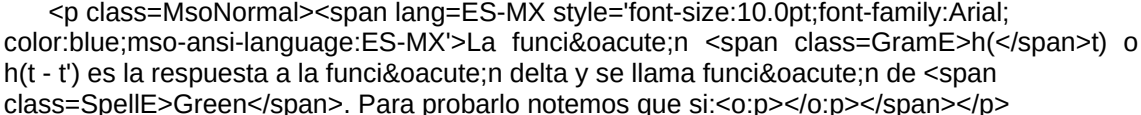
_{<![if !vml]>}

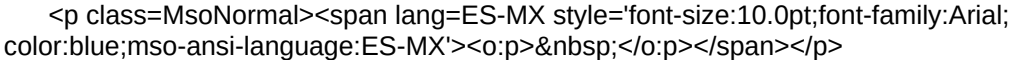


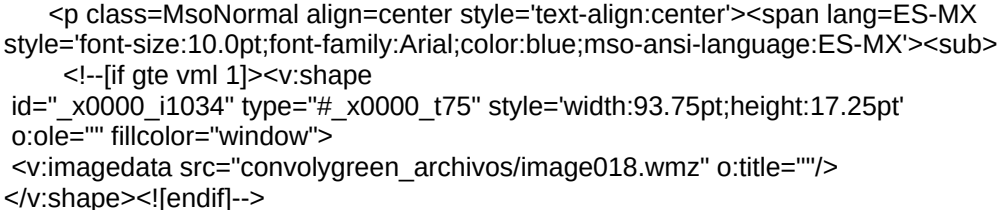


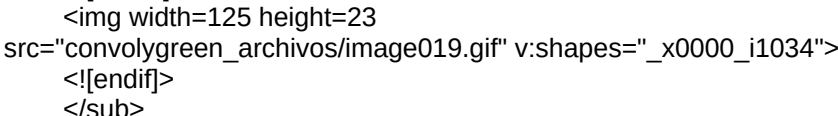


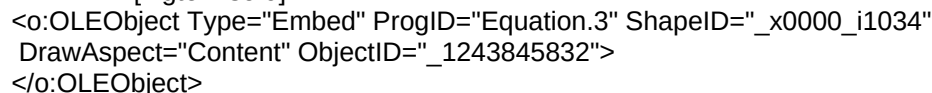


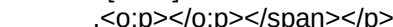


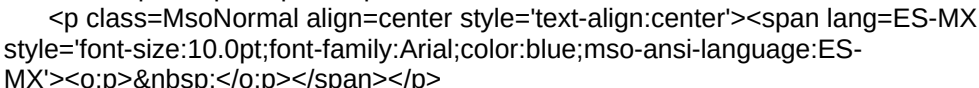


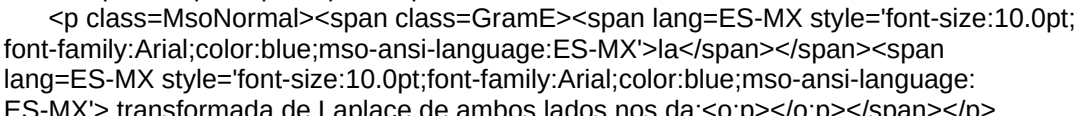


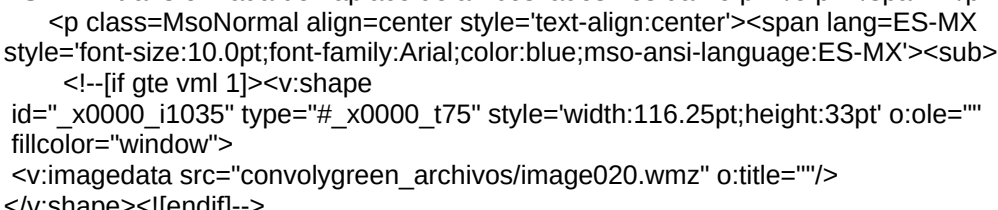


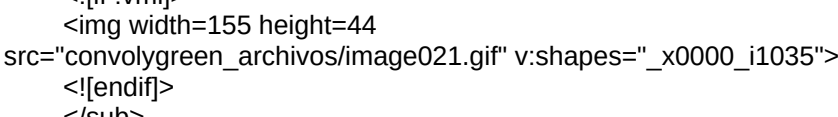


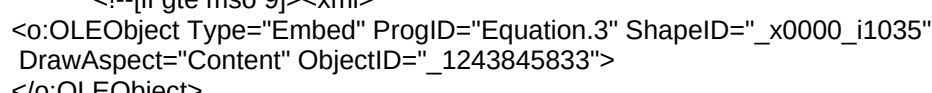












</xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Finalmente operamos directamente un la soluciôn integral para v(t):<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:246pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="convolygreen_archivos/image022.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845834">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>h(t - t') se escribe a menudo como h(t, t'). La funciôn de Green h(t - t') se denomina tambi&eacirc;n como la respuesta impulso.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La forma matricial se puede manejar de la misma forma. Como un ejemplo consideremos el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:132.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="convolygreen_archivos/image024.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845835">
 </o:OLEObject>

```

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:153.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image026.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845836">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    .<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La transformada de Laplace <span
class=GramE>son</span><o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:120.75pt;height:30.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image028.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845837">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    .<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:132pt;height:30.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image030.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845838">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    .<o:p></o:p></span></p>

```

<p class=MsoNormal>En forma de matrices:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:207pt;height:53.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image032.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845839">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si invertimos la matriz $H^{-1}(s)$,
tenemos:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:1in;height:27pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image034.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845840">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:105.75pt;height:53.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image036.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845841">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La función de Green es una matriz en lugar de una función escalar. La transformada inversa de Laplace al dominio del tiempo da elementos h_{lm}{t')<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:200.25pt;height:57pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="convolygreen_archivos/image038.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845842"></o:OLEObject></xml><![endif]-->
.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Para ver como se emplea, haremos la convolución de la matriz:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:185.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="convolygreen_archivos/image040.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845843"></o:OLEObject></xml><![endif]-->
,<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>lo que da:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:183.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image042.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845844">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>o<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:192pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="convolygreen_archivos/image044.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243845845">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

3.71 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN TIPO ESCALÓN Y LA INTEGRAL DE SUPERPOSICIÓN

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"

```

xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respescalon_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="respescalon_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="respescalon_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN TIPO ESCALÓN Y LA INTEGRAL DE
SUPERPOSICIÓN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>11</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T16:56:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T17:07:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>211</o:Words>
<o:Characters>1163</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>9</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1372</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;

```

```

        margin-bottom:.0001pt;
        text-align:justify;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:12.0pt;
        mso-bidi-font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-MX'>RESPUESTA A
UNA EXCITACI&Oacute;N TIPO ESCAL&Oacute;N Y LA INTEGRAL DE
SUPERPOSICI&Oacute;N<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Para este tema supondremos que el sistema
est&aacute; relajado y que se describe en t&eacute;rminos de la funci&oacute;n impulso como
excitaci&oacute;n y una respuesta <span class=GramE>h(</span>t):<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX

```



```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;
height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
  <![if !vml]>
  
  <![endif]>
</sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846499">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
  .<o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Esta ecuaci&oacute;n la podemos integrar y
obtenemos:<o:p></o:p></span></p>
  <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
  <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:105.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
  <![if !vml]>
  
  <![endif]>
</sub>
  <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846500">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
  <o:p></o:p></span></p>

```

<p class=MsoNormal>o<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:105pt;height:35.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846501">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación tenemos:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:96.75pt;height:36.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846502">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>o<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:57.75pt;height:27.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846503">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La transformada de la función de transferencia
 es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:60.75pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="respescalon_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846504">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
 MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si se obtiene la respuesta a un escalón,
 podemos obtener la función de transferencia por
 derivación:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:240pt;height:27.75pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="respescalon_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846505">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue;mso-ansi-language:ES-MX">Se puede representar la respuesta a una excitaciôn general en téminos de la respuesta a una excitaciôn escalôn en la forma:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="respescalon_archivos/image015.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846506">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Esta ecuaciôn se puede convertir al dominio del tiempo al hacer la convoluciôn del producto:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:197.25pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="respescalon_archivos/image017.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846507">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si reagrupamos la expresiôn del producto para V(s) se tiene el resultado de varias formas:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:219pt;height:35.25pt' o:ole=""

```

fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

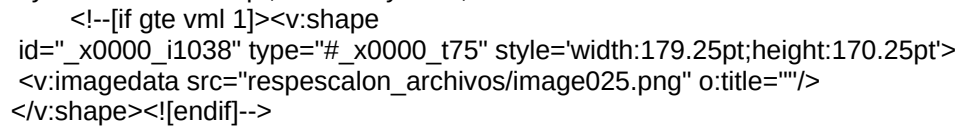
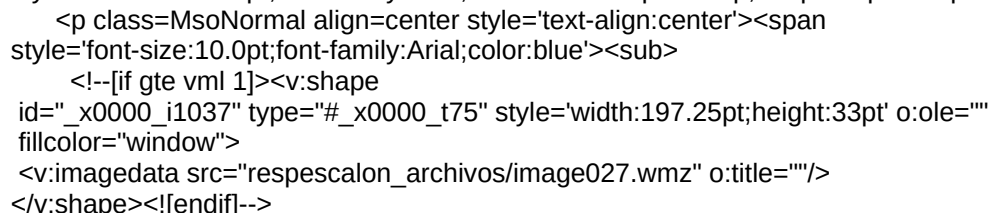
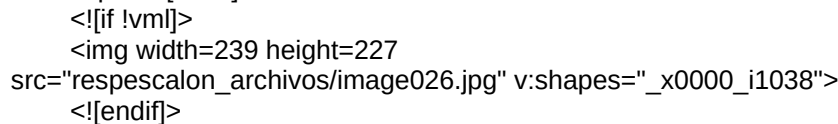
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846508">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:320.25pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846509">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Si asociamos s con V<sub>U</sub>(s),
tenemos:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:240.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respescalon_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846510">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-MX
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-MX style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

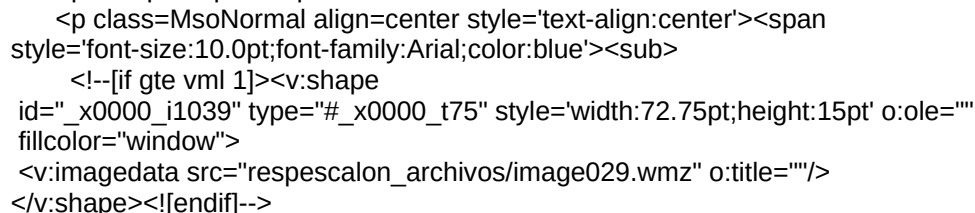
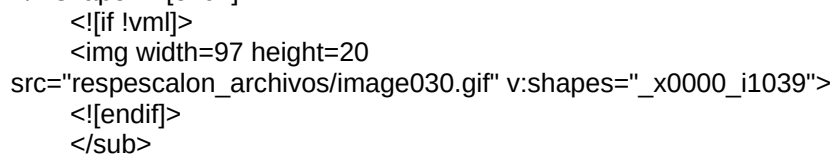
```

color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>La respuesta a un escalón unitario en $t = 0$ es U , por lo que para cualquier tiempo t , como lo muestra la figura:


<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846511">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->

En un intervalo D a t , la respuesta cambia a:

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243846512">
</o:OLEObject>

```

</xml><![endif]-->
      .<o:p></o:p></span></p>
      <p
        class=MsoNormal><span
          family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    </div></td>
  </tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.72 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. RESPUESTA A UNA COMPUERTA

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respcompuerta_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="respcompuerta_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="respcompuerta_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RESPUESTA A UNA COMPUERTA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>18</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T17:07:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T17:29:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>269</o:Words>
<o:Characters>1483</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>12</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1749</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>

```

```

<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
  <w:BreakWrappedTables/>
  <w:SnapToGridInCell/>
  <w:WrapTextWithPunct/>
  <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

```


<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:246.75pt;height:17.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847872">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Luego:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:114.75pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]>

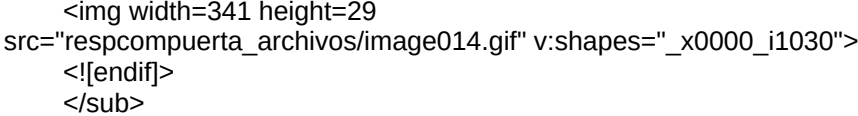
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847873">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Como un
ejemplo, tomemos la respuesta:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:84pt;height:29.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]>

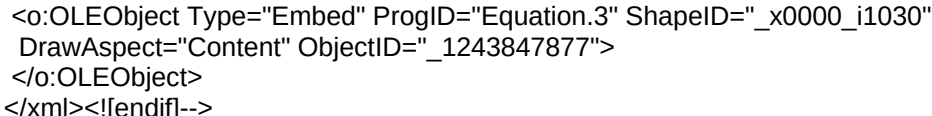
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847874">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!-->
<o:p></o:p></p>

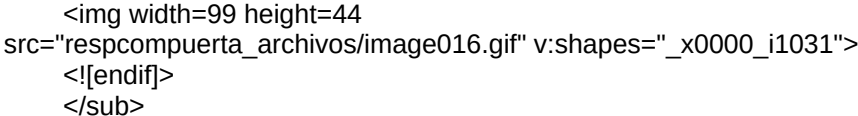
<p class=MsoNormal>luego,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:102.75pt;height:30pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

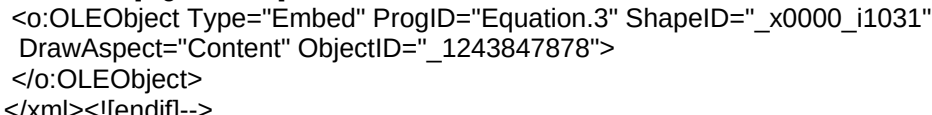
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847875">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 ,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>lo que nos da:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:273.75pt;height:17.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

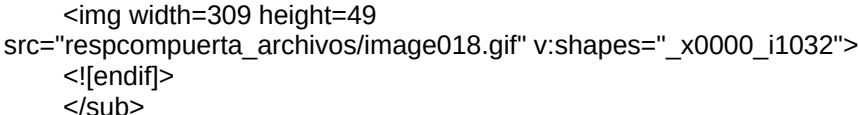
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847876">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Para encontrar la respuesta a estado estacionario examinaremos esta serie en la regiôn de n grande. Se ve que en el primer intervalo $(2n - 1)T$ < t < $2nT$, sôlo contribuyen términos de $U(t)$ a $U[t - (2n - 1)T]$. Si examinamos v(t) en el intervalo $(2n - 1)T$ < t < $2nT$, se puede escribir:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:255.75pt;height:21.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

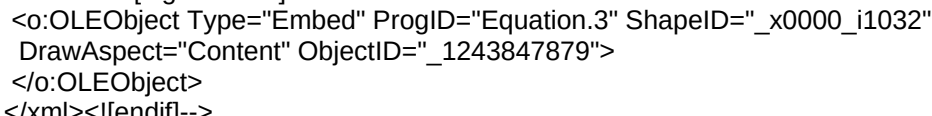




,<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>o empleando la relaci´n para series geométricas del tipo:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>




<p class=MsoNormal>se tiene:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:231.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>




.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

Si ahora expandimos encontramos que un término se hace despreciable para $t \gg 1$, cuando $t \gg 1$.

El segundo término en la ecuación se puede caer para valores grandes de n cuando $t \gg 1$.

El segundo término en la ecuación se puede caer para valores grandes de n cuando $t \gg 1$.

```

<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>que</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> se puede ver en la figura:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:209.25pt;height:110.25pt'>
<v:imagedata src="respcompuerta_archivos/image023.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Dada la
simetr&iacute;a alrededor de <span class=GramE>v(</span>t) = 0, se puede ver que la
componente de <span class=SpellE>C.D</span>. de v(t) desaparece para t
largo.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3. 73 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. LA RESPUESTA DE H(S) A ALGUNAS EXCITACIONES IMPORTANTES. RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN SENOIDAL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respsenoidal_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="respsenoidal_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="respsenoidal_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN SENOIDAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>

```

```

<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T17:29:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T17:31:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>402</o:Words>
<o:Characters>2217</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2614</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->

```

```

</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>RESPUESTA A UNA EXCITACI&Oacute;n
SENOIDAL</span></b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Uno de los
m&eacute;todos tradicionales para tratar circuitos de corrientes variantes en el tiempo es el
an&aacute;lisis de respuesta a una excitaci&oacute;n senoidal. Este m&eacute;todo es una
representaci&oacute;n en t&eacute;rminos de la impedancia y amplitudes complejas para
voltajes y corrientes variables<span class=GramE>..</span><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La magnitud
y fase de la funci&oacute;n de transferencia bajo una excitaci&oacute;n senoidal, nos da una
gran cantidad de informaci&oacute;n relativa a los polos y ceros de H(s). La gr&aacute;fica
logar&iacute;tmica de la magnitud de la respuesta a la frecuencia es &uacute;til y la
emplearemos para caracterizar los circuitos.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En la
respuesta senoidal las caracter&iacute;sticas de H(s) se examinan considerando su forma
evaluada bajo el eje imaginario i</span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span>
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> del plano complejo. Emplearemos
ecuaciones escalares para ilustrar el an&aacute;lisis.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La
respuesta senoidal se refiere a una excitaci&oacute;n del tipo:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```


<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke jointstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:104.25pt;
height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respsenoidal_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847989">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Esta forma
es justamente uno de los modos característicos de una excitación real seno o
coseno. Si se trata con los dos modos de excitación no se le suma algo al
análisis y lo complica porque suma un modo característico en el eje -
i<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>. Si calculamos la magnitud de <span
class=GramE>H(i<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>) y después de evaluarla su fase, trae el análisis a
una excitación real.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si los polos
<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g<sub><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>n</sub><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> de H(s) son N, el producto H(s<span
class=GramE>)E(s) si E(s) es (s - i<span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>⁻¹ toma la forma:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:168pt;height:45.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="respsenoidal_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847990">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!-->
.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Donde P(s)
es una polinomial de orden M.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>El teorema
de Heaviside nos permite expandir esta forma dentro de (N + 1)
fracciones parciales. N de estas representan la respuesta transitoria al encender la
excitación. La otra fracción es la respuesta de estado estacionario a la
excitación senoidal:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:203.25pt;height:65.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="respsenoidal_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847991">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:119.25pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="respsenoidal_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243847992"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>La amplitud de la respuesta de estado estacionario a eⁱ^{w}^{t}es H^{w}). Se puede escribir la funci´n compleja H^{w})</sup> la magnitud de un factor de fase complejo:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:137.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="respsenoidal_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029">


```

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="variabestado_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="variabestado_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="variabestado_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>VARIABLES DE ESTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>17</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T17:31:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T18:00:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>764</o:Words>
<o:Characters>4203</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>35</o:Lines>
<o:Paragraphs>9</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4958</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;

```

```

        mso-bidi-font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
    {mso-list-id:299967805;
    mso-list-type:simple;
    mso-list-template-ids:2131141522;}
@list l0:level1
    {mso-level-number-format:alpha-lower;
    mso-level-text:"%1\\");
    mso-level-tab-stop:none;
    mso-level-number-position:left;
    mso-level-legacy:yes;
    mso-level-legacy-indent:14.15pt;
    mso-level-legacy-space:0cm;
    margin-left:14.15pt;
    text-indent:-14.15pt;}
ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>
<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

```

```

<tr>
  <td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>VARIABLES DE ESTADO</span></b><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></span></p>
    <p
      class=MsoNormal><span
        style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El concepto
de estado es muy general, y puede emplearse tanto para describir sistemas lineales, como no
lineales. Se puede emplear en una gran variedad de sistemas, y no esta limitado a aquellos
modelados por ecuaciones diferenciales o de diferencias. En general el estado de un sistema a
un tiempo t es el conjunto de variables necesarias a ese tiempo, de forma tal que dadas las
entradas al sistema para </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> &gt; t, uno puede especificar exactamente la
característica futura del sistema para </span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'> &gt; t. por ejemplo: Para un sistema modelado por una
ecuación de diferencias, el estado al tiempo t = 0, se puede tomar como el conjunto de
condiciones iniciales para la ecuación de diferencias. <o:p></o:p></span></p>
    <p
      class=MsoNormal><span
        style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p
      class=MsoNormal><span
        style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'>Consideremos por ejemplo una ecuación de diferencias de n-
<span class=SpellE>esimo</span> orden, con entrada <span class=GramE>U(</span>k) y
salida Y(k). <o:p></o:p></span></p>
    <p
      class=MsoNormal><span
        style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Y(</span></span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>k) + <span class=SpellE>b<sub>1</sub></span>Y</span>(k-1)
+ ... + <span class=SpellE>b<sub>n</sub></span>Y</span>(k-n) = a<sub>0</sub></span> U(k)<span
style='color:blue'><o:p></o:p></span></p>
    <p
      class=MsoNormal><span
        style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Hay que
recordar que la solución clásica de esta ecuación, requiere el
conocimiento de las condiciones iniciales para obtener una solución. Ya
que la ecuación (4.1) es una ecuación de diferencias de n-<span
class=SpellE>esimo</span> orden, necesitamos especificar n condiciones iniciales.
Estas n condiciones iniciales, y la secuencia entrada {<span class=GramE>U(</span>k)}, k &gt;
0, determinan la secuencia de salida {Y(k)}, k &gt; 0. Para exhibir las variables de estado
explícitamente, primero construimos el diagrama de bloques del sistema representado
por la ecuación anterior, como se ve en la figura</span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:fuchsia'>.</span><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <o:p></o:p></span></p>
    <p
      class=MsoNormal><span
        style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>
    <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
</v:formulas>

```


style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>C = [-b_n,-b_n₋₁,...,b₁] y D = a₀<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Las ecuaciones<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X(k+1)=<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>AX(k) + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>BU(k)<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:240pt;height:63pt' o:ole=""><v:imagedata src="variabestado_archivos/image003.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]--></sub></p>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243849702"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>constituyen la representaciôn de variables de estado para un sistema discreto modelado por la ecuaciôn<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Yk) + b₁Y(k-1) + ... + b_nY(k-n) = a₀ U(k)<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si conocemos el vector X₀ para algún k₀, se puede calcular X(k) y luego la salida Y(k) para cualquier k > k₀, en términos de la secuencia de entrada U(k₀), U(k₀+1),...,U(k). Luego un vector X satisface la definiciôn de estado para un sistema. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Consideremos un sistema modelado por una ecuaciôn diferencial lineal de coeficientes constantes, y su soluciôn para t > t₀. La

forma completa de la solución se obtiene en términos de constantes arbitrarias, estas constantes pueden determinarse por el hecho de que el sistema debe de satisfacer ciertas condiciones de frontera en el tiempo $t=0$.

No se necesita mayor información, las condiciones de frontera pueden determinar el estado del sistema al tiempo $t=0$. Heurísticamente, el estado de un sistema separa el futuro del pasado, así que el estado contiene toda la información concerniente al pasado del sistema requerida para determinar la respuesta a cualquier entrada.

La idea de sistema es un concepto fundamental, y no se puede definir como en matemáticas, se define un conjunto. Lo más que podemos hacer es establecer las propiedades requeridas de un sistema cuyas características involucren la idea de estado. Los sistemas que consideraremos son sistemas deterministas.

Un sistema determinista está definido de la siguiente forma:

10 level1 lfo1'

Existen una clase de funciones del tiempo $V(t)$ llamadas funciones admisibles de entrada.

10 level1 lfo1'

Para cada tiempo se define un conjunto X , cuyos elementos $X(t)$ son estados posibles del sistema al tiempo t .

10 level1 lfo1'

Para cada $V(t)$, $X(t)$, al último se le asigna una función del tiempo llamada la función salida, y para cualquier t y t' , un elemento $X(t')$, está contenido dentro de $X(t)$.

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Este conjunto de entradas debe de satisfacer la siguiente condiciôn de consistencia para un sistema de estados determinados: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>1.) La funciôn admisible de entrada debe de ser tal que si V₁(t) y V₂(t) son admisibles, luego: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center;'>V₃t) = V₁(t)</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center;'>V₃t) = V₂(t)</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center;'>V₃t) = V₂(t)</p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>2.) La forma en la cual un sistema llega al estado presente, no afecta la salida futura. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>El estado presente de un sistema, y las entradas presentes y futuras a un sistema, únicamente determinan las salidas presentes y futuras. Luego, para cualquier X(t₀) contenida en X(t₀), y una entrada admisible V₁(t), V₂(t) con V₁(t) = V₂(t) para t > t₀, cualquier funciôn de salida asociada con X(t₀) y V₁(t), es idéntica con cualquier funciôn de salida asociada con X(t₀) y V₂(t) es idéntica para t > t₀. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

3.75 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. VARIABLES DE ESTADO. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;

```

```

        margin-bottom: 0px;
    }
    .style12 {
        font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10px;
    }
    a:link {
        color: #990033;
        text-decoration: none;
    }
    a:visited {
        text-decoration: none;
        color: #990033;
    }
    a:hover {
        text-decoration: none;
        color: #0000FF;
    }
    a:active {
        text-decoration: none;
        color: #FF0000;
    }
    .style16 {
        font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10pt;
        font-weight: bold;
        color: #FFFFFF;
    }
    .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10pt;
        color: #000000;
        font-weight: bold;
    }
    .style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
    <tr>
        <td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Control Lineal </span></td>
        <td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href=" ../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
    </tr>
</table>
<div align="left">
    <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
        <tr>
            <td width="788" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">CONTROL LINEAL &middot; VARIABLES DE ESTADO </span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
        <tr bgcolor="#FFE6FF">
            <td width="396" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="variabestado.htm" target="mainFrame">Variables de Estado </a></span></div></td>

```

```
 <div align="center"><span class="style4"><a href="soluecuaestado.htm" target="mainFrame">Soluci&oacute;n de Ecuaciones de Variable de Estado</a></span></div></td> </tr> </table> <p>&nbsp;</p> <p>&nbsp;</p> <p>&nbsp;</p> </div> <p>&nbsp;</p> </body> </html> |
```

3.76 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. VARIABLES DE ESTADO. SOLUCION DE ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="soluecuaestado_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="soluecuaestado_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="soluecuaestado_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SOLUCION DE ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T18:00:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T18:04:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>208</o:Words>
<o:Characters>1148</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>9</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1354</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>

```

```

<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
  <w:BreakWrappedTables/>
  <w:SnapToGridInCell/>
  <w:WrapTextWithPunct/>
  <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->

```

</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>SOLUCION DE ECUACIONES DE VARIABLES DE ESTADO<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Hemos reformulado la solución a las ecuaciones generales de n-eacute;simo orden de diferencias en términos de cantidades que llamamos el vector de estado del sistema. El vector de estado X es una descripción interna completa del sistema, y la evolución del estado X(k) en términos de la secuencia de entrada {U(k)}. Para encontrar la salida Y(k), debemos conocer el estado X(k) donde X(K) evoluciona. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Un método de encontrar X(K) dado X(0), y la secuencia {U(j)}, donde j = 1,2,...,k, es resolver la ecuación <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>Xk+1 = ax(k)+BU(k)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>interactivamente, luego: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X1) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>AX(0) + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>BU(0)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X2) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>AX(1) + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>BU(1) = A₂X(0) + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>ABU(0) + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>BU(1) <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y en general:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke jointstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>


```

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style="width:186pt;
height:33pt" o:ole="">
<v:imagedata src="soluecuaestado_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243849968">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>si</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> el estado inicial es  $X(k_{>0})$ , y tenemos  $U(k)$  para  $k > k_{>0}$ , la ecuaci&ocute;n anterior se puede generalizar a la forma:
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> $X(k)$  = <span class=SpellE> $Ak$ </span>-<span class=SpellE> $k_{>0}$ </span></span><span style='color:blue'> <sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:129.75pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="soluecuaestado_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243849969">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

La matriz A , es el producto $A \times b$ $A \times b$, y se llama matriz fundamental, o matriz de transición del sistema.

Refiríndonos a la ecuación

$$A \frac{dx}{dt} = b(x)$$

reconocen dos clases de términos: el primer término $A \frac{dx}{dt}$ (0), que representa la evolución libre del estado. El segundo término, que es una convolución, corresponde a la respuesta forzada del estado. Luego la salida Y del estado $X(k)$ es:

$$Y(k) = A X(k) + b(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A X(i) b(i)$$

```

    </span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;mso-ansi-language:FR'>+ <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>DU</b>(k)<span
style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue;mso-ansi-language:FR'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    </div></td>
  </tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.77 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metanalvarest_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metanalvarest_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metanalvarest_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>3</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-20T18:09:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-20T18:19:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>516</o:Words>
  <o:Characters>2841</o:Characters>
  <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
  <o:Lines>23</o:Lines>
  <o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
  <o:CharactersWithSpaces>3351</o:CharactersWithSpaces>
  <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>

```

```

<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
  <w:BreakWrappedTables/>
  <w:SnapToGridInCell/>
  <w:WrapTextWithPunct/>
  <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
    {mso-list-id:574626898;
    mso-list-type:simple;
    mso-list-template-ids:201981967;}
@list l0:level1
    {mso-level-tab-stop:18.0pt;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:18.0pt;
    text-indent:-18.0pt;}
ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable

```

	{mso-style-name:"Tabla normal"; mso-tstyle-rowband-size:0; mso-tstyle-colband-size:0; mso-style-noshow=yes; mso-style-parent:""; mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt; mso-para-margin:0cm; mso-para-margin-bottom:.0001pt; mso-pagination:widow-orphan; font-size:10.0pt; font-family:"Times New Roman";}</td><td>
--	--

</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Las técnicas de variables de estado se basan en la idea de estado, introducida por Turing en 1936. Después Shanon empleô este concepto en su trabajo básico de Teoría de la Informaciôn, pero los que realmente realizaron el trabajo para aplicar el concepto en los sistemas de control fueron los rusos Aizerman, Letov, y otros más. En el occidente fue Bellman quien introdujo el concepto de estado en los sistemas de control. Otro de los trabajos importantes en la aplicaciôn del concepto a los sistemas automáticos de control fue Kalman.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Desde el punto de vista de un sistema de análisis y síntesis, es conveniente clasificar las variables que caracterizan o están asociadas con el sistema en:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-indent:-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1; tab-stops:list 18.0pt'>
<![if !supportLists]>
1.
<![endif]>
Entrada o excitaciôn con la variable m_i, que representa el estímulo generados por otros sistemas y que influyen en el comportamiento del sistema en estudio.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-indent:-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1; tab-stops:list 18.0pt'>
<![if !supportLists]>
Salida o respuesta con la variable n_j, que depende de la entrada e salida de informaciôn al sistema en estudio.<o:p></o:p></p>
<![endif]>
</p>
</td><td>

<o:p> </o:p></p>

Las terminales de entrada representan el conjunto de entradas, las variables m_i , y las terminales de salida describen el conjunto de respuesta, las variables y_i . Las variables de estado dentro de la caja no son accesibles. Consideramos que las x_i , las y_j y las x_k son funciones del tiempo, por lo tanto $\dot{x}_i$, $\dot{y}_j$ y $\dot{x}_k$ denotan los valores de las variables en el tiempo t . Representamos al conjunto de entradas como un vector de entrada $\mathbf{m}$.

 </p>

<sub>



</sub></p>

<sub>



</sub></p>

<sub>



</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

<sub>

</sub></p>

Arial;color:blue'>y el conjunto de variables de estado se representa por un vector de estado:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:42pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metanalvarest_archivos/image007.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243850764">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>El conjunto de todos los posibles valores que puede tomar el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m en el tiempo t, forma el espacio de entrada del sistema. De la misma manera el conjunto de todos los valores que puede tomar el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y en el tiempo t, forma el espacio de salida del sistema y el conjunto de todos los valores que el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x puede tomar en el tiempo t forma el espacio de estado del sistema.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>En cualquier instante t, el estado del sistema es una funci&ocute;n del estado inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>xt₀ y el vector de entrada <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m(t₀, t), lo que significa que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:96.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metanalvarest_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243850765">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F es una funcién simplemente valuada de sus argumentos. El vector de salida al tiempo t es también una funcién de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>xt₀) y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m<(t₀, t) que se puede escribir de la forma:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:99.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metanalvarest_archivos/image011.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243850766">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Las ecuaciones anteriores a menudo se llaman las ecuaciones de estado del sistema.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Para sistemas que se pueden describir por ecuaciones diferenciales las dos últimas ecuaciones toman la forma:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:96.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metanalvarest_archivos/image013.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243850767">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

Cuando el sistema es un automatón finito las ecuaciones toman la forma:

<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal>Si el sistema es describable por ecuaciones diferenciales lineales, las ecuaciones de estado se pueden reducir a:<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:110.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metanalvarest_archivos/image020.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243850771">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<p></p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:108pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metanalvarest_archivos/image022.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243850772">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A(t) es la matriz de coeficientes, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>D(t) es la matriz de manejo, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B(t) es la matriz de salida y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>G(t) es la matriz de transmisión del sistema.<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

3.78 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10px;
}
a:link {
    color: #990033;
    text-decoration: none;
}
a:visited {
    text-decoration: none;
    color: #990033;
}
a:hover {
    text-decoration: none;
    color: #0000FF;
}
a:active {
    text-decoration: none;
    color: #FF0000;
}
.style16 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    font-weight: bold;
    color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
    font-size: 10pt;
    color: #000000;
    font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
.style22 {color: #990033}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
```

```

        <td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&acute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Control Lineal </span></td>
        <td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&acute;gina Principal </a></span></td>
    </tr>
</table>
<div align="left">
    <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
        <tr>
            <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">CONTROL LINEAL &middot; METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE
ESTADO </span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
        <tr bgcolor="#FFE6FF">
            <td width="144" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="metanalvarest.htm" target="mainFrame">M&eacute;todos de An&acute;lisis
</a></span></div></td>
            <td width="196" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="carcsisvarest.htm" target="mainFrame">Caracterizaci&acute;n del Sistema
</a></span></div></td>
            <td width="144" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a
href="decentradvarestad.htm" target="mainFrame">Descripci&acute;n
Entrada</a></span></div></td>
            <td width="156" valign="top"><div align="center"><span class="style21"><span
class="style4"><a href="matrizdetransicion.htm" target="mainFrame">Matriz de
Transici&acute;n </a></span></span></div></td>
            <td width="149" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><span
class="style21"><a href="analtransiestasisdisc.htm" target="mainFrame">An&acute;lisis de
Transici&acute;n </a></span></span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <p>&nbsp;</p>
    <p>&nbsp;</p>
    <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.79 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. CARACTERIZACION DE SISTEMAS POR VARIABLES DE ESTADO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="carcsisvarest_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="carcsisvarest_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="carcsisvarest_archivos/oledata.mso">

```

```

<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CARACTERIZACION DE SISTEMAS POR VARIABLES DE ESTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T19:25:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T19:27:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>86</o:Words>
<o:Characters>479</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>3</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>564</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-language:ES-MX;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1

```

```

        {size:595.3pt 841.9pt;
        margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
        mso-header-margin:35.45pt;
        mso-footer-margin:35.45pt;
        mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>CARACTERIZACION DE SISTEMAS POR
    VARIABLES DE ESTADO<o:p></o:p></span></b></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
    family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Se puede
    describir un sistema lineal estacionario por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales
    con coeficientes constantes que se pueden expresar en forma matricial
    como:<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
    family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
    id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
    path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
    <v:stroke joinstyle="miter"/>
    <v:formulas>
    <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
    <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
    <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
    <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
    <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
    <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
    <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
    <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
    <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

```

```

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;
height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="carcsisvarest_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243854846">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b>(t) es un vector para las variables de entrada m<sub>i</sub> y las variables e estado x<sub>k</sub></span></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:38.25pt;height:30.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="carcsisvarest_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243854847">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A</b> es una matriz de coeficientes. Si tratamos las variables de entrada como variables de estado de todo el sistema, el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b> se puede considerar como el vector de estado de todo el sistema.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>

```


</body>

</html>

3. 80 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. DESCRIPCION DE LA ENTRADA POR VARIABLES DE ESTADO

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

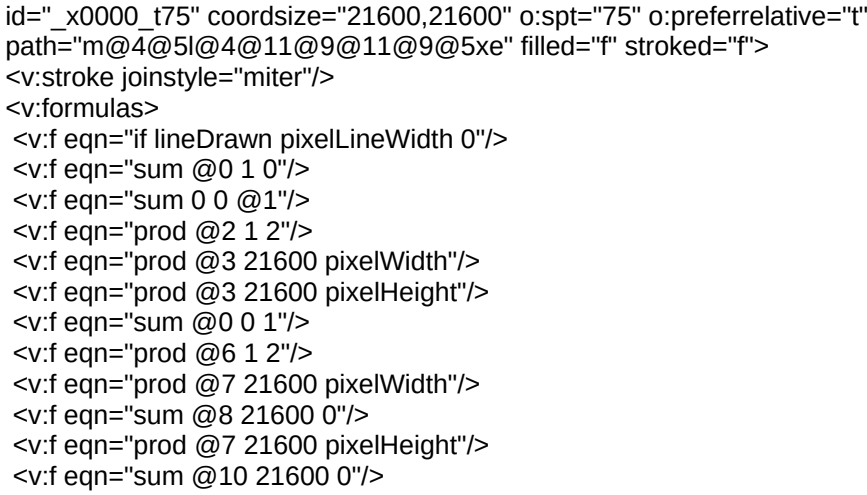
<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="decentradvarestad_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="decentradvarestad_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="decentradvarestad_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>DESCRIPCION DE LA ENTRADA POR VARIABLES DE ESTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>14</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T19:29:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T19:04:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>500</o:Words>
<o:Characters>2756</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>22</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3250</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
```

```

</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
  <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

```

<div class="Section1"> <p style="color: red; font-weight: bold;">DESCRIPCION DE LA ENTRADA POR VARIABLES DE ESTADO</p> <p style="color: blue;"> </p> <p style="color: blue;">Una se&ntilde;al de entrada variable es como la salida de un generador de funciones entrada, es decir un sistema que genera la se&ntilde;al de entrada que se puede describir por variables de estado. Veremos la caracterizaci&ocute;n por variables de estado de algunas se&ntilde;ales de entrada t&iacute;picas.</p> <p style="color: blue;"> </p> <p style="color: blue;">ENTRADAS POLINOMIALES. Una entrada polinomial se puede expresar como:</p> <p style="color: blue;"> </p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>The diagram illustrates a polynomial input signal, which is a rectangular pulse. The pulse has a width of 75 units and a height of 1 unit. It is defined by the equation: $m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe$. The pulse is filled with a light blue color and has a black stroke.</p> <p style="color: blue;"> </p> <p style="color: blue;">con</p> <p style="color: blue;">t</p> </div>

Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>³ 0. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si hacemos $x^3 = r$ después de derivar tenemos que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:162pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image077.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371892">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Similarmente:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:201pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image078.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371893">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:36.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image079.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371894">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:9.75pt;height:12.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image080.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371895">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:38.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image081.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371896">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:6pt;height:12.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image082.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371897">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span

```

<sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:42pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image083.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image016.gif" v:shapes="_x0000_i1031">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371899">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image084.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image018.gif" v:shapes="_x0000_i1032">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371900">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Aquí;
las x_i con i = 1, 2, ..., n,
se refieren a las variables de estado de entrada. Las ecuaciones diferenciales anteriores nos
hacen ver que las entradas se pueden generar por una serie de integradores conectados en
cascada con las siguientes condiciones iniciales:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:44.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image085.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image020.gif" v:shapes="_x0000_i1033">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371901">
</o:OLEObject>

```

</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:44.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image086.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371902">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:6pt;height:12.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image087.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371903">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:80.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image088.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371904">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p
    class=MsoNormal><span
    style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>que</span></span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:

```

Arial;color:blue'> son los coeficientes de la representación polinomial de la entrada.</p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal>FUNCIÓN DE ENTRADA ESCALÓN. Sea la entrada dada por la función:<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:41.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image089.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371905">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal>donde u(t) denota la función escalón unitaria. Si definimos la variable de estado como<p></p></p>

<p class=MsoNormal><p> </p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:29.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image090.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371906">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<p></p></p>

<p class=MsoNormal>luego<p></p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:30.75pt;height:15pt' o:ole=""

fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image091.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image031.gif" v:shapes="_x0000_i1039">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371907">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>con<span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> la condición inicial<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:50.25pt;height:17.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image092.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image033.gif" v:shapes="_x0000_i1040">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371908">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>FUNCIÓN DE ENTRADA RAMPA. La función rampa es un caso especial de las funciones polinomiales que se puede escribir como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image093.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image035.gif" v:shapes="_x0000_i1041">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371909">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>con t ³ 0. Si hacemos:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:27pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image094.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371910">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>las ecuaciones diferenciales de estado son:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:54pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image095.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371911">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

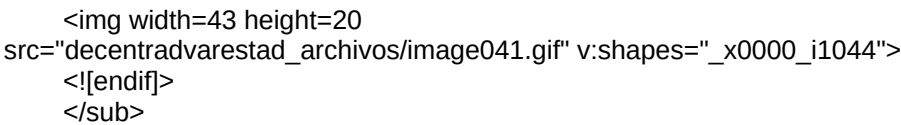
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image096.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371912">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>con las condiciones iniciales:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:44.25pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image097.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371913">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:44.25pt;height:12pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image098.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

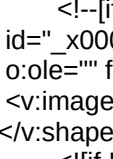
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371914">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

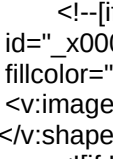
<p class=MsoNormal>Funci&ocute;n de Entrada Exponencial<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

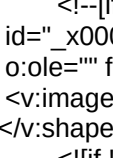
<p class=MsoNormal>La entrada exponencial está dada por:<o:p></o:p></p>

_{}

t ³ 0. Sea:

_{}

luego ³ :

_{}

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371917">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>con la condición inicial que:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1050" type="#_x0000_t75" style='width:84pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image102.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371918">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Si tomamos la transformada de Laplace de <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1051" type="#_x0000_t75" style='width:38.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image103.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371919">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>tenemos<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1052" type="#_x0000_t75" style='width:57pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image104.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371920">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>FUNCIÓN DE ENTRADA SENOIDAL. La solución a la ecuación armónica<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:63pt;height:17.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image105.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

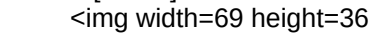
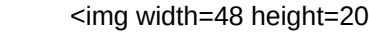
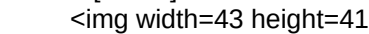
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371921">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>para t ³ 0 nos da una solución senoidal. La ecuación anterior la podemos descomponer de la forma:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1054" type="#_x0000_t75" style='width:48pt;height:30.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image106.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371922">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Las condiciones iniciales son $x^{(1)}(0)$ y $x^{(2)}(0)$. Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones diferenciales que generan una señal senoidal de entrada. La señal es dada por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1055" type="#_x0000_t75" style='width:144.75pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image107.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371923">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>FUNCIÓN DE ENTRADA DIENTE DE SIERRA. La función de entrada diente de sierra que se muestra en la siguiente figura<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1056"
type="#_x0000_t75" style='width:178.5pt;height:87.75pt'>
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image063.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<span
style='color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>podemos notar que durante el intervalo nT < t < (n+1)t la señal diente de sierra es dada; descrita por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style='width:51.75pt;height:27pt' o:ole=""

fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image108.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image066.gif" v:shapes="_x0000_i1057">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371924">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Podemos considerar que la señal diente de sierras está generada por una combinación finita de rampas sucesivamente retardadas, con la excepín del muestreo que se emplea para iniciar la función rampa cada T segundos. Podemos ver que en el instante de muestreo el interruptor se cierra y $x_{nT} = x_{nT+3}(0) = 0$. Las ecuaciones diferenciales de estado son:</p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1058" type="#_x0000_t75" style='width:36pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image109.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image068.gif" v:shapes="_x0000_i1058">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1058"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371925">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1059" type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:30.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image110.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="decentradvarestad_archivos/image070.gif" v:shapes="_x0000_i1059">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1059"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371926">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->


```

        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Las
condiciones iniciales son:<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
        <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1060" type="#_x0000_t75" style='width:53.25pt;height:60pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image111.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
        <![if !vml]>
        
        <![endif]>
        </sub>
        <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1060"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371927">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
        </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><span
style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span><o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> las ecuaciones de transici&oacute;n de estado son:<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
        <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1061" type="#_x0000_t75" style='width:81pt;height:50.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="decentradvarestad_archivos/image112.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
        <![if !vml]>
        
        <![endif]>
        </sub>
        <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1061"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244371928">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
        </div></td>
    </tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.81 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. MATRIZ DE TRANSICION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"

```

xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```
<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="matrizdetransicion_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="matrizdetransicion_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="matrizdetransicion_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>MATRIZ DE TRANSICION</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>7</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T20:33:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T20:40:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>408</o:Words>
<o:Characters>2244</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2647</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
```

```

        margin-bottom:.0001pt;
        text-align:justify;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:12.0pt;
        mso-bidi-font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
        mso-fareast-language:ES-MX;}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>MATRIZ
TRANSICION<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'>Denotaremos las variables de estado del proceso por un vector columna
<b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>x</b>, las variables de estado de entrada por el vector columna <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b>, y las variables de estado del sistema por el vector
columna <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b>. La ecuaci&oacute;n diferencial de

```

estado de un sistema estacionario multivariable sujeto a las entradas **es:**

$$\dot{x} = A x + B u$$

donde A es la matriz de coeficientes de sistema, y los vectores de estado x y u son:

), est´n dados

por:

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:63pt;height:30.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859311">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:93pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859312">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y<span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:93pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859313">
</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Se asume que el proceso de de orden r y que la señal de entrada se puede describir por j variables de estado. La soluci&ocute;n a la ecuaci&ocute;n<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859314">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:77.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859315">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>donde:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->

```

<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859316">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:81.75pt;height:95.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859317">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:78.75pt;height:93pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859318">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La matriz de
transici&oacute;n</span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>F</span></span></b><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:

```

Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l) está dada por:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:186.75pt;height:107.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image017.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859319">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>con j + r = n, donde deben determinarse las a_{ij}l). <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Fl) es la matriz de transición del sistema, ya que cubre tanto las variables de estado del proceso como las variables de estado de entrada. Cuando se especifican las condiciones iniciales, se pueden determinar las funciones del tiempo que describen las variables de estado.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se puede determinar la matriz de transición de la respuesta de un sistema a una función escalón. Si sustituimos la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:77.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image009.wmz" o:title=""/>


```

</v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859320">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>en</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> la<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:186.75pt;height:107.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
    <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859321">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> expandimos, tenemos:<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:270.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
    <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859322">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:276.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
    <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image021.wmz" o:title=""/>

```

```

</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
</sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859323">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Los
elementos <span class=SpellE>a<sub>ik</sub></span> son siempre constantes o funciones
<span class=GramE>de </span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, los cuales describen la respuesta correspondiente a un escal&oacute;n unitario. Cuando:<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:48.75pt;height:17.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
</sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859324">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:300pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
</sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859325">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->

```

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>De la ecuación</o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:270.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image019.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859326">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>se tiene que:</o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image027.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859327">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Luego

a_i(i) es la respuesta a un escalón unitario medida en m_i de variables de estado con entrada m₁(0⁺) = 1 y las condiciones de los demás integradores igual a cero. Similarmente a_i(<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'>) es la respuesta a un escalón unitario medida en m_i</sub> de las variables de estado con x₁</sub>(0⁺+</sup>) = 1 y las condiciones de los demás integradores igual a cero.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Cuando<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:48.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image029.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859328">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:300pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image030.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859329">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>a ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:264.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image031.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859331">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>se reduce a:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="matrizdetransicion_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243859332">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Luego
 a_kl) es la respuesta a un escalón unitario medida en m_i de variables de estado con entrada m₁(0⁺) = 1 y las condiciones de los demás integradores igual a cero. Similarmente a_k₍_{j+1}₎l) es la respuesta a un escalón unitario medida en m_i de las variables de estado con x₁(0⁺) = 1 y las condiciones de los demás integradores igual a cero. El primer subíndice de a_k indica cuando se mide la respuesta y el segundo indica cuando se aplica la entrada.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
 </tr>
 </table>
 </body>

</html>

3.82 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. METODOS DE ANALISIS POR VARIABLES DE ESTADO. ANALISIS DE TRANSICION DE ESTADO PARA SISTEMAS DE DATOS DISCRETOS

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="analtransiestasisdisc_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="analtransiestasisdisc_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="analtransiestasisdisc_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ANALISIS DE TRANSICION DE ESTADO PARA SISTEMAS DE DATOS
DISCRETOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>14</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T20:40:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T20:54:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>456</o:Words>
<o:Characters>2512</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>20</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2963</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
```

```

</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.0pt 792.0pt;
    margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
    mso-header-margin:36.0pt;
    mso-footer-margin:36.0pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span

```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ANALISIS DE TRANSICION DE ESTADO PARA SISTEMAS DE DATOS DISCRETOS</p></p>

<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Un sistema lineal, invariante en el tiempo de datos discretos se puede describir por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes que en forma vectorial se pueden expresar como:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype

id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"

path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;

height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image001.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860174">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde | = t - nT y 0 < <span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'> &t; T. El vecor de estado <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v consiste del vector de estado de entrada <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m y el vector de estado de proceso <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x. La ecuación anterior que caracteriza al sistema de datos discretos durante un periodo de muestreo, es la ecuación de estado del sistema. La condición inicial para la ecuación diferencial de estado se escribe en forma vectorial de la siguiente manera:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:87pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860175">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Esta ecuación que describe la transición de las variables de estado del sistema en el instante de muestreo es la ecuación de transición de estados. Tanto <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A como <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B son matrices cuadradas. Si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image001.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860176">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>obtenemos<span style='font-size:10.0pt;

font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:111pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860177">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>la cual se agrupa como:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:108.75pt;height:18.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image007.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860178">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si sacamos la transformada inversa de la últime ecuación se obtiene la solución a la ecuación diferencial de estado como:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860179">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>donde<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'> la matriz de transición completa está dada
 por:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:107.25pt;height:18.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860180">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>En
 términos de t, la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860181">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>es<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:117pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860182">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>que describe el comportamiento del sistema durante el intervalo nT < t £ (n + 1)T, por lo que en el instante de muestreo t = (n + 1)T, tenemos:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:126pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860183">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Dada la relación de la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:87pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042">

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860184">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>el vector de estado <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v se puede expresar como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:125.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860185">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:120pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860186">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Esta es una ecuaciôn recurrente de la cual se pueden calcular los valores sucesivos de las variables de estado en el instante de muestreo. En el caso de un sistema continuo, la matriz <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B es unitaria, y | = t.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Por definici&ocute;n<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:117.75pt;height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image021.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860187">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>La ecuaci&ocute;n<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:117pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image013.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860188">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>se puede escribir como:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:111.75pt;height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image023.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

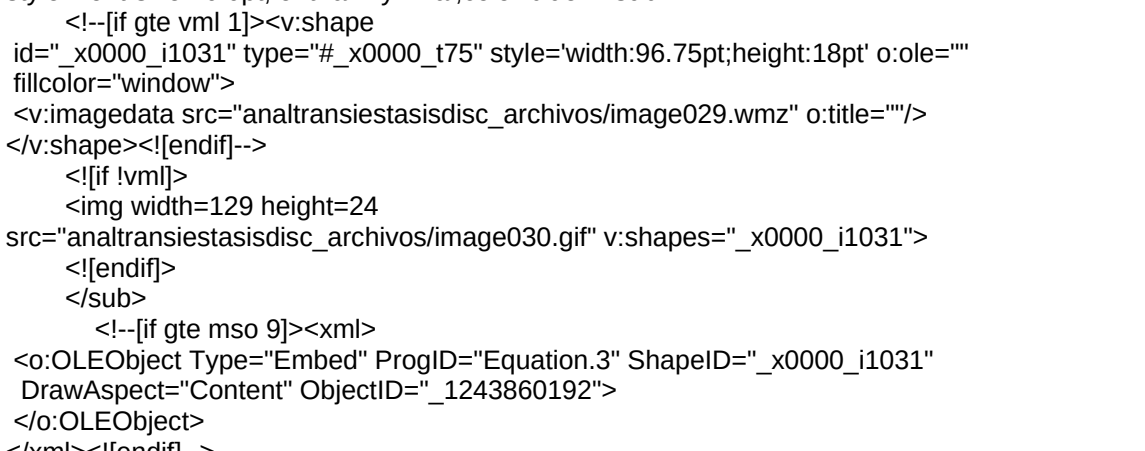
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860189">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Esta ecuación determina las variables de estado del sistema en cualquier instante de tiempo durante el intervalo nT < t < (n+1)T. En t = (n+1)T:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:120.75pt;height:17.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860190">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Si asignamos valores sucesivos de n a la ecuación anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:183.75pt;height:125.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860191">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

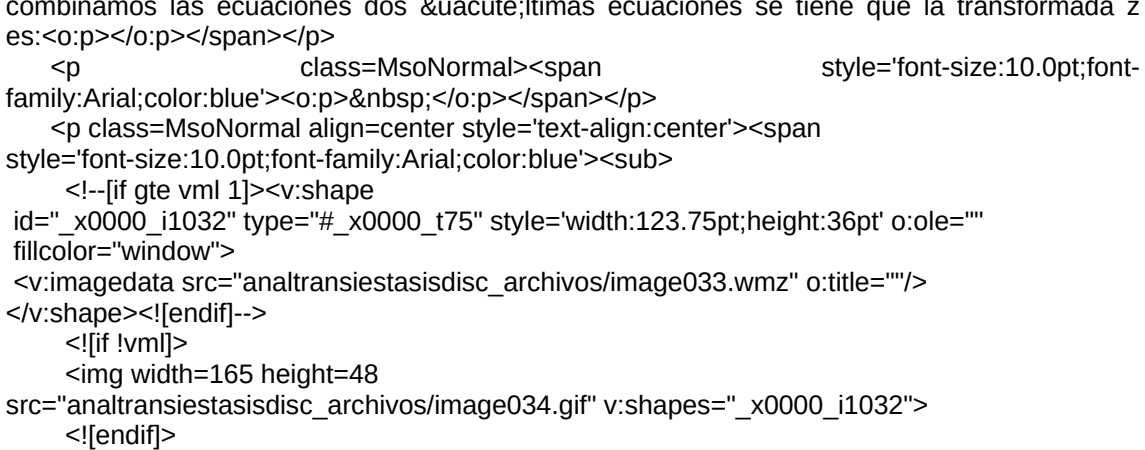
Combinando las ecuaciones y simplificando tenemos:



La transformada z se define como:



Si combinamos las ecuaciones dos últimas ecuaciones se tiene que la transformada z es:



<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860195">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Dada la
 relación:</o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:149.25pt;height:36pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="analtrasiestasisdisc_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860196">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La
 transformada z del vector de estados del sistema discreto está dada
 por:</o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:129.75pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="analtrasiestasisdisc_archivos/image037.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860197">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>La
 transformada inversa de la ecuación (44) nos da el vector de
 estados</o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:149.25pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="analtransiestasisdisc_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860198">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La
&uacute;tima ecuaci&oacute;n nos da una forma unificada y sistem&aacute;tica de analizar el
comportamiento din&aacute;mico de los sistemas de datos discretos.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.83 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ESTABILIDAD. CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="considestabilidad_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="considestabilidad_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="considestabilidad_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]>
<title>CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>

```

```

<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>5</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T20:58:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T21:03:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>210</o:Words>
<o:Characters>1157</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>9</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1365</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:595.3pt 841.9pt;
margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>

```

```

<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>CONSIDERACIONES DE
ESTABILIDAD</span></b></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Partiremos
la matriz <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b></span>T de
acuerdo con las dimensiones de los vectores <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>m</b> y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;
height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image001.wmz" o:title="">

```

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860579">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span
 style='mso-spacerun:yes'> en la cual <b
 style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(T) y <b
 style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b<span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(T) son matrices cuadradas, por lo
 que:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:282.75pt;height:33pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image003.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860580">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Pero por
 definici&ocute;n:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:147.75pt;height:30.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image005.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860581">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>la<span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75"
style='width:129.75pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860582">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>se<span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> puede escribir como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:291.75pt;height:35.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860583">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Luego la
transformada z para el vector de estado de entrada y para el vector de estado de proceso,
están dadas respectivamente por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

```

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:111pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860584">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y<span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:198pt;height:18.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

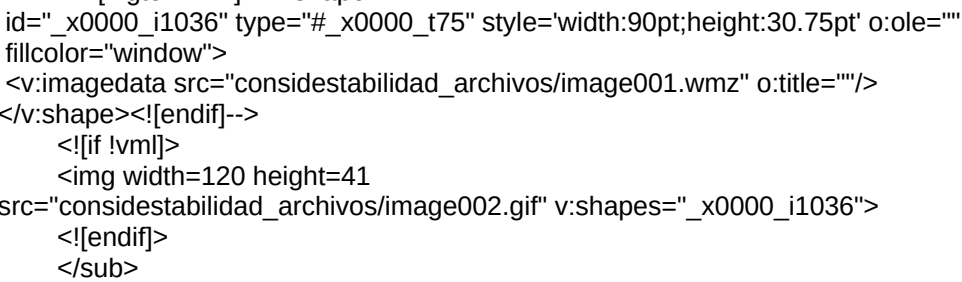
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860585">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>En la
últime ecuación el primer término del lado derecho se debe al vector de
estado de entrada y el segundo término se debe a las condiciones iniciales del sistema,
y es cero para los sistemas que inicialmente están en reposo.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Con el
sistema inicialmente quieto, el vector de estado de proceso está dado en la
transformada z por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:141.75pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>


```

<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243860586">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la ecuaci&oacute;n caracter&iacute;stica del sistema es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:104.25pt;height:18pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="considestabilidad\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243860587">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Para la estabilidad las ra&iacute;ces de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:90pt;height:30.75pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="considestabilidad\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243860588">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>deben</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> caer dentro de un c&iacute;rculo unitario del plano z.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>



Dada la  
ecuaci&oacute;n



el

vector de estado dado por la ecuaci&oacute;n



se

puede expresar como:



se

puede expresar como:

```

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>por<span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> lo que durante el intervalo nT <span
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><<span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'> t <span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>£ (n+1)T el vector
de estado de proceso est´ dado por:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:167.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="considestabilidad_archivos/image021.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243860592">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.84 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ESTABILIDAD. CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {

```

```

 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
 }
 .style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
 }
 a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
 }
 a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
 }
 a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
 }
 a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
 .style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
 }
 .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
 }
 .style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Lineal </td>
<td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL LINEAL · ESTABILIDAD</div></td>
</tr>
</table>
<table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
<tr bgcolor="#FFE6FF">

```

```
 <div align="center">Estabilidad</div></td> <div align="center">Muestreo</div></td> </tr> </table> <p> </p> <p> </p> <p> </p> </div> <p> </p> </body> </html> | |
```

### 3.85 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. ESTABILIDAD. CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD. SISTEMAS DE MUESTREO NO CONVENCIONAL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sistmuestronoconven_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sistmuestronoconven_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sistmuestronoconven_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS DE MUESTREO NO CONVENCIONAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>11</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T21:03:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T21:43:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>480</o:Words>
<o:Characters>2644</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>22</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3118</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>

```

```

<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>

```

```

<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

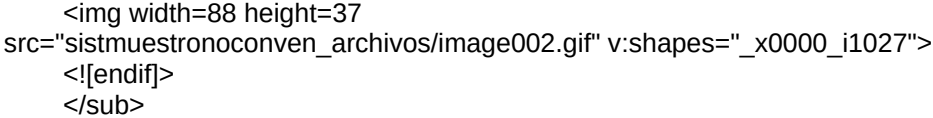
<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>SISTEMAS DE MUESTREO NO
CONVENCIONAL</p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>En esta
sección extenderemos nuestro análisis a sistemas de control de datos discretos
más complicados. Si consideramos
que el periodo básico de muestreo es T segundos y lo
subdividimos en un número de intervalos, la subdivisión de este periodo
básico determina cuando el sistema de datos discretos es de variable cíclica, de
multirazón, no sincronizado, de modulación de
ancho de pulso o del tipo de pulso modulado en frecuencia.</p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Durante un
subintervalo <span style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>t la ecuación diferencial de estado
para un sistema de datos discretos no convencional esta dada por:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

```

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1070" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt; height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image073.emz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1070"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381416">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> est&aacute; en el intervalo 0 </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&lt;</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. La soluci&oacute;n general a la ecuaci&oacute;n es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image075.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381417">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Durante el  
<span class=SpellE>subintervalo</span><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1071" type="#\_x0000\_t75" style='width:69.75pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image076.emz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1071"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381418">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image078.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381419">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>las</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> condiciones iniciales son <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b><span class=SpellE>nT<sup>+</sup></span>) y la soluci&oacute;n a la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image079.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>





<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381420">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>es</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:17.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image080.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
 <img alt="Equation 3" data-bbox="141 371 728 423"/>

<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381421">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>con</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'> la ecuaci&oacute;n de transici&oacute;n de estado dada por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image081.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
 <img alt="Equation 3" data-bbox="141 698 728 750"/>

<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381422">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue'> </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span

style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>F</span></span></b><sub><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>0</span></sub><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>) es la matriz de transici&oacute;n durante este <span class=SpellE>subintervalo</span>.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Ya que</span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = t - <span class=SpellE>nT</span>, la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image080.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381423"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:104.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image082.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381424"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:

Arial;color:blue">y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue"> por definici&acute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center"><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:114.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image083.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381425">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center"><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue">y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;color:blue"> el vector de estado <b style='mso-bidi-font-weight:normal">v</b>(t) se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center"><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image084.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244381426">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue">Por convenirnos escribimos la &uacute;ltime ecuaci&acute;n en la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center"><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue"><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:99.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven\_archivos/image085.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

```


 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381427">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>y<span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'> por definiciôn:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:102.75pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestroconoconven_archivos/image086.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381428">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Durante el
 intervalo:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestroconoconven_archivos/image087.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381429">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestroconoconven_archivos/image088.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381430">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>la condición inicial está dada por el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v(n + t₁⁺), y la solución a la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image079.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381431">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>será.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:93.75pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image089.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381432">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:


```

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381434">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>ser&acute;</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:4in;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image091.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381435">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:255.75pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image092.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381436">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La
ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:98.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image084.wmz" o:title=""/>

```

```

</v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381437">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>nos</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> da que el valor de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v</b>(<span
class=SpellE>nT+<sub>1</sub></span>) como:<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:123.75pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
    <v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image093.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381438">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>luego</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:165pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
    <v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image094.wmz" o:title=""/>
    </v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
    <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
    DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381439">
    </o:OLEObject>
    </xml><![endif-->
        <o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si
definimos:<o:p></o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape

```


id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:167.25pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image095.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="sistmuestronoconven_archivos/image040.gif" v:shapes="_x0000_i1047">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381440">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1048" type="#_x0000_t75" style='width:165pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image094.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="sistmuestronoconven_archivos/image038.gif" v:shapes="_x0000_i1048">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381441">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>se puede escribir como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:114pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image096.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

src="sistmuestronoconven_archivos/image042.gif" v:shapes="_x0000_i1049">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381442">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>Durante el intervalo:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span

<sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1050" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image097.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="sistmuestronoconven_archivos/image044.gif" v:shapes="_x0000_i1050">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381443">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1051" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image098.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="sistmuestronoconven_archivos/image046.gif" v:shapes="_x0000_i1051">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381444">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>la condición inicial está dada por el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>v(n + t₂⁺), y la solución a la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1052" type="#_x0000_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image079.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="sistmuestronoconven_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1052">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381445">
</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>será.</o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:95.25pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image099.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381446">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>con la ecuación de transición de estados dada por:</o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1054" type="#_x0000_t75" style='width:128.25pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image100.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381447">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F_{2}(<span style='font-size:10.0pt;font-family:

Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol">) es la matriz de transición durante este subintervalo.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Como = t - (nT + t₂), la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1055" type="#_x0000_t75" style="width:93.75pt;height:18pt" o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image089.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381448">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>será:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1056" type="#_x0000_t75" style="width:293.25pt;height:18pt" o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image101.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381449">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style="text-align:center"><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style="width:261pt;height:18pt" o:ole=""

```

fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image102.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381450">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>De la
ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1058" type="#_x0000_t75" style='width:165pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image094.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

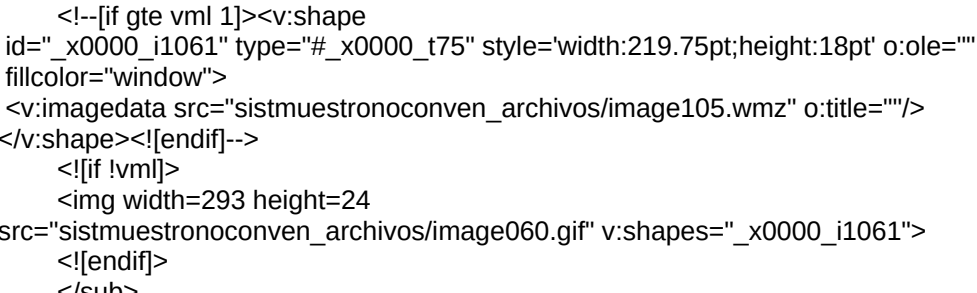
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1058"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381451">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>se</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> tiene:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1059" type="#_x0000_t75" style='width:176.25pt;height:18pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image103.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1059"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381452">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>luego</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>

```

_{}

Si definimos:

_{}

aecuacion

_{}

o

Arial;color:blue'>se puede escribir como:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1063" type="#_x0000_t75" style='width:114.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image106.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1063" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381456">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Para el intervalo:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1064" type="#_x0000_t75" style='width:107.25pt;height:17.25pt' fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image107.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1065" type="#_x0000_t75" style='width:81pt;height:17.25pt' fillcolor="window">

<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image108.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>se puede dar por generalización la solución:<o:p></o:p></p>

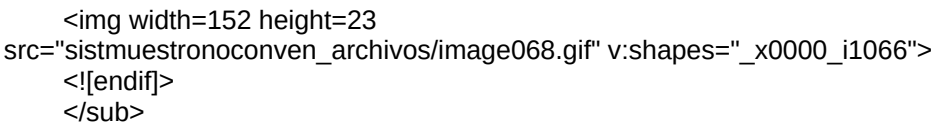
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

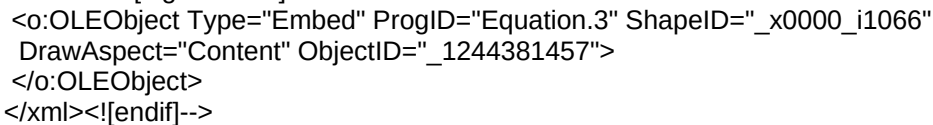
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1066" type="#_x0000_t75" style='width:114pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

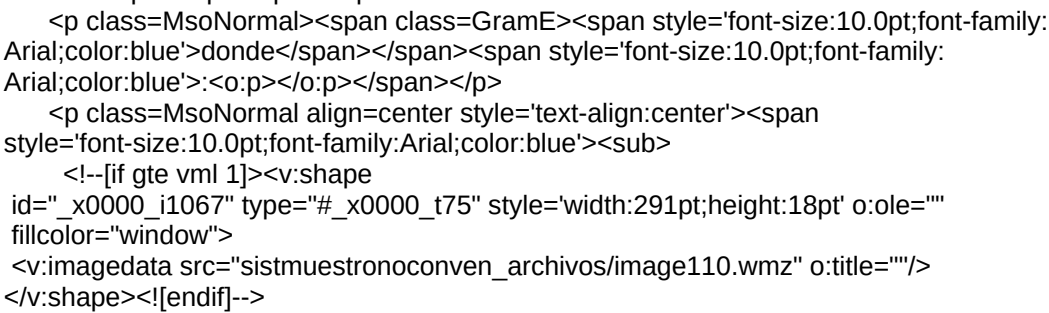
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image109.wmz" o:title=""/>

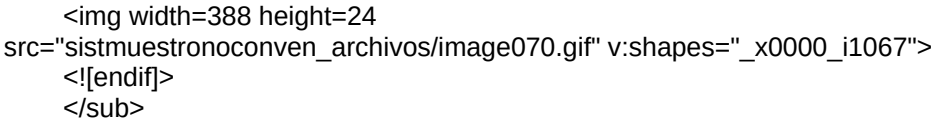
</v:shape><![endif]-->

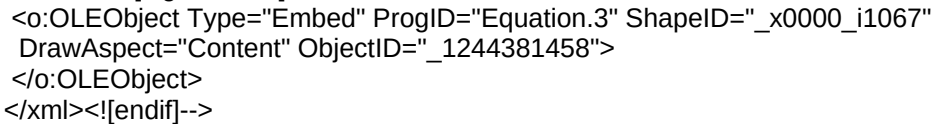
<![if !vml]>

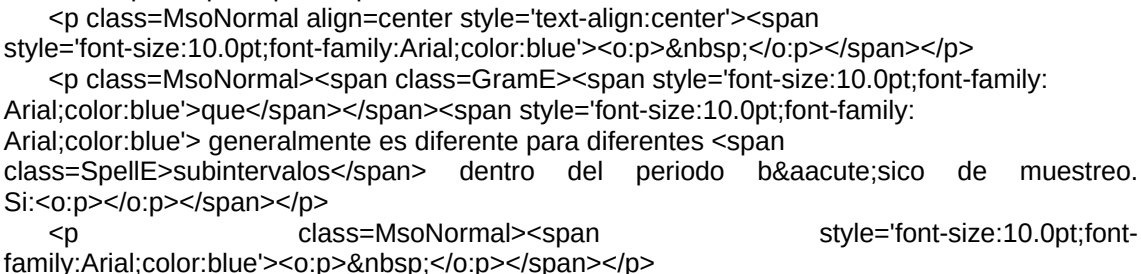


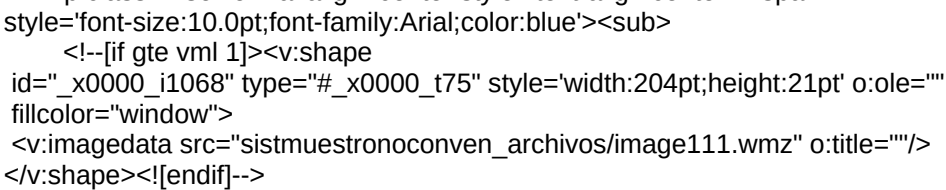


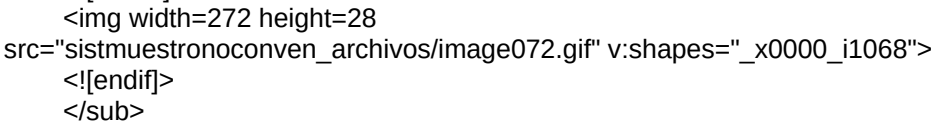


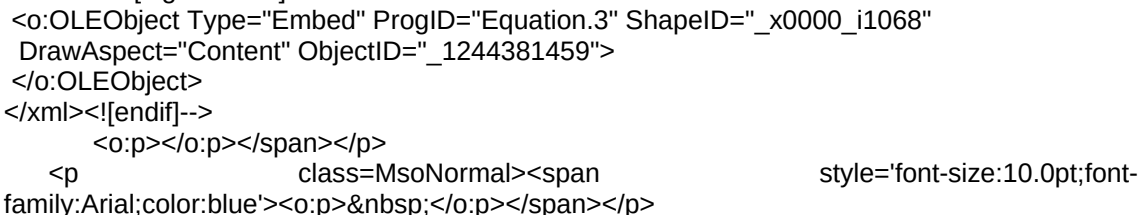













```

    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>la</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> ecuaci&oacute;n</span></span></p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1069" type="#_x0000_t75" style='width:114pt;height:17.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sistmuestronoconven_archivos/image109.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
    <![if !vml]>
    
    <![endif]>
    </sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1069"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244381460">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>describe</span></span><span style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'> la respuesta completa del sistema.<o:p></o:p></span></p>
    <p
class=MsoNormal><span
style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.86 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONCEPTO DE CONTROLABILIDAD

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="controlabilidad_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="controlabilidad_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="controlabilidad_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONCEPTO DE CONTROLABILIDAD</title>

```

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
  <o:Template>Normal</o:Template>
  <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
  <o:Revision>1</o:Revision>
  <o:TotalTime>11</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-20T21:16:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-20T21:36:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>1118</o:Words>
  <o:Characters>6155</o:Characters>
  <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
  <o:Lines>51</o:Lines>
  <o:Paragraphs>14</o:Paragraphs>
  <o:CharactersWithSpaces>7259</o:CharactersWithSpaces>
  <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1

```

```

        {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
    {mso-list-id:47849523;
    mso-list-template-ids:789872192;}
@list l0:level1
    {mso-level-tab-stop:0cm;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:14.2pt;
    text-indent:-14.2pt;}
@list l1
    {mso-list-id:940189903;
    mso-list-template-ids:-1759499762;}
@list l1:level1
    {mso-level-number-format:alpha-lower;
    mso-level-tab-stop:14.2pt;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:14.2pt;
    text-indent:-14.2pt;}
@list l2
    {mso-list-id:1577591738;
    mso-list-template-ids:2102310258;}
@list l2:level1
    {mso-level-number-format:alpha-lower;
    mso-level-tab-stop:0cm;
    mso-level-number-position:left;
    margin-left:14.2pt;
    text-indent:-14.2pt;}
ol
    {margin-bottom:0cm;}
ul
    {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><b style='mso-bidi-font-weight:

```

normal'>CONCEPTO DE CONTROLABILIDAD</p></p>

<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Se dice que un proceso es completamente controlable si es posible llevar al proceso de algún estado inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(t₀) a un estado de equilibrio deseado en un intervalo finito de tiempo t₁ - t₀. </sub>En otras palabras, un proceso es totalmente controlable si existe una señal de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m(t), definida sobre el intervalo finito t₀<span style='font-size:

10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£ t<span style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:

symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£ t₁, que mueve al proceso del estado inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(t₀) al estado de equilibrio deseado <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(t₁) en el intervalo de tiempo t₁ - t₀. </sub><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>En el caso discreto se debe de establecer una condici´n necesaria y suficiente para una controlabilidad completa de la siguiente forma: Un proceso discreto lineal de n-eacute;simo orden es completamente controlable síy s&ocute;lo sí los vectores:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/></v:shapetype>

<v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:72.75pt; height:60.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image001.wmz" o:title=""></v:shape><![endif-->

<![if !vml]>

$\text{img width=97 height=81}$
src="controlabilidad_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862584">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>son linealmente independientes.</o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>Estos vectores aparecen de la siguiente manera: Se asume que el proceso de control estásujeto a una señal simple de control y se caracteriza por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:87.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862585">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La consideración de una señal simple de control se hace por simplificar la interpretación. La ecuación de transición que describe el proceso es:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:153.75pt;height:21.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862586">
</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f(T) es la matriz de transición del proceso
 y<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:77.25pt;height:35.25pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862587">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Para $k = 0$,
 se tiene de la ecuación (1)<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:120.75pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862588">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Si
 consideramos que <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x = 0, el estado inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(0) desde el cual se puede alcanzar el estado de equilibrio en un solo
 periodo de muestreo es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>


```

</v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
</sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862592">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Podemos
considerar que <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b></span>2T)
= 0 y el vector de estado inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(0) desde el cual
se alcanza la condici&oacute;n de equilibrio en un solo periodo de muestreo
es:<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:108.75pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
</sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862593">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>donde</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> los vectores:<o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
    <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:167.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
    <![if !vml]>
        
    <![endif]>
</sub>
    <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862594">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
    <o:p></o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>son</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:

```


Arial;color:blue'> linealmente independientes. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Si los valores de la señal de control m(0) y m(T) no están acotados, todos los estados iniciales <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(0) caen en el plano que contiene a los vectores <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>e₁ y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>e₂ que pueden llevar al estado de equilibrio <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(2T) = 0 en dos periodos de muestreo. Por lo tanto cuando ambos m(0) y m(T) están acotados, la región de estos estados iniciales no incluye el plano completo que contiene a los vectores base <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>e₁ y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>e₂. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>De la misma manera para k = n el vector inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x(0) se puede expresar de la forma: <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:264pt;height:21.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image019.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862595"></o:OLEObject></xml><![endif]></p>

<p class=MsoNormal>donde los vectores <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:2in;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image021.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862596"></o:OLEObject></xml><![endif]></p>

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$

son linealmente independientes.

Los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ forman una base en el espacio de estados del proceso. Luego si los valores de m_i con $i = 1, 2, \dots, n$ no están acotados, cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ y por lo tanto el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede ser llevado al estado de equilibrio $\mathbf{x}^*$ en al menos n periodos de muestreo, esto es, $t \geq nT$.

Si los valores de m_i son acotados, algunos estados iniciales $\mathbf{x}(0)$ no se podrán escribir como una combinación lineal de los vectores base sin causar que m_i exceda el valor límite. Por lo anterior una consecuencia llevar m_i tiempo llevar al estado inicial $\mathbf{x}(0)$ al estado de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es $t \geq nT$.

En el caso continuo las condiciones de controlabilidad se pueden obtener de la misma manera. Se puede ver que en el caso de un proceso continuo de n orden caracterizado por la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{B}$ es una matriz $n \times 1$.

El estado inicial $\mathbf{x}(0)$ puede ser llevado al estado de equilibrio $\mathbf{x}^*$ en al menos n periodos de muestreo, esto es, $t \geq nT$.

es completamente controlable, y los vectores $\mathbf{d}$, $\mathbf{Ad}$, ..., $\mathbf{A}$ son linealmente independientes.

El concepto de controlabilidad se puede aclarar más desde otro punto de vista. Sea el proceso multivariable caracterizado por la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ se puede transformar en una matriz diagonal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

donde

las λ_i denotan los valores propios de la matriz A del proceso lineal y son distintos.

Podemos convertir la última ecuación en su forma canónica por la sustitución

$$Y = XZ$$
 el resultado es

$$Tz = \lambda z$$

donde $T = X^{-1}AX$ es la matriz transformada y z es el vector de estado de la forma canónica y la matriz está dada por

$$T = X^{-1}AX$$

En la ecuación anterior el vector z es el vector de estado de la forma canónica y la matriz está dada por

$$T = X^{-1}AX$$

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862601">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Si
 expandimos la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:87.75pt;height:15pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862602">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:
 Arial;color:blue'>obtenemos<span style='font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;color:blue'> el siguiente conjunto de ecuaciones:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:131.25pt;height:159pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862603">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>Se puede
 observar que la señal de control m_k no
 tendrá influencia bajo la variable de estado z_j
 cuando:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-
 family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;height:32.25pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="controlabilidad_archivos/image036.gif" v:shapes="_x0000_i1044">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862604">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal>que es cuando d_{jk} = 0 para k = 1, 2, ..., r.</p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>La ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:131.25pt;height:159pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

src="controlabilidad_archivos/image034.gif" v:shapes="_x0000_i1045">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862605">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal>implica que el j-ésimo renglón de la matriz D es cero. De esta forma las variables canónicas de estado que correspondan a renglones cero no son controlables, y así si todos los renglones de la matriz son cero, las correspondientes variables de estado son no controlables y no se pueden influir por la señal de control.; en otras

palabras las variables de estado no controlables están desacopladas de la señal de control. Como un resultado el comportamiento dinámico de un proceso incontrolable depende de las condiciones iniciales y la entrada perturbadora. <o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>De todo lo presentado en esta discusión podemos dar una definición de controlabilidad: Se dice que es controlable el proceso descrito por la ecuación (3) si la matriz

D no tiene renglones que contengan ceros. Las variables de estado correspondientes a los renglones no cero de

D son controlables.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Con base en la definición anterior de controlabilidad, Gilbert derivó los siguientes resultados generales relacionados con la controlabilidad de un sistema compuesto:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-indent:-14.2pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

1.

<![endif]>

Conexión en cascada de dos procesos multivariados. La figura nos muestra un sistema compuesto en el cual el proceso P_a es seguido del proceso P_b.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:156.75pt;height:31.5pt'><v:imagedata src="controlabilidad_archivos/image037.png" o:title=""/></v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<![endif]>

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>Sean

I_{1a}<span

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, l_{2a,...,}l_{qa}_{}los<sub>P_a y l_{1b}, l_{2b,...,}l_{qb}, se puede mostrar que:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-indent:-14.2pt;mso-list:l1 level1 lfo2;tab-stops:list 14.2pt'>

<![if !supportLists]>

a.

<![endif]>

Si el sistema compuesto es controlable, ambos procesos a y b lo son.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-indent:-14.2pt;mso-list:l1 level1 lfo2;tab-stops:list 14.2pt'>

<![if !supportLists]>

b.

<![endif]>

Si los procesos P_a y P_b son ambos controlables, cualquier variable de estado incontrolable del sistema compuesto debe

originarse en el sistema P_b, donde las variables de estado se designan de acuerdo con los valores propios del proceso.

P_b

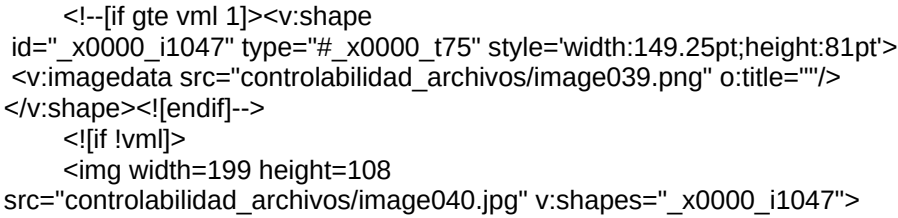
P_a

P_b

Conexión en paralelo de dos procesos multivariados. En la figura se muestra un sistema compuesto de dos procesos P_a y P_b conectados en paralelo.

P_a

P_a



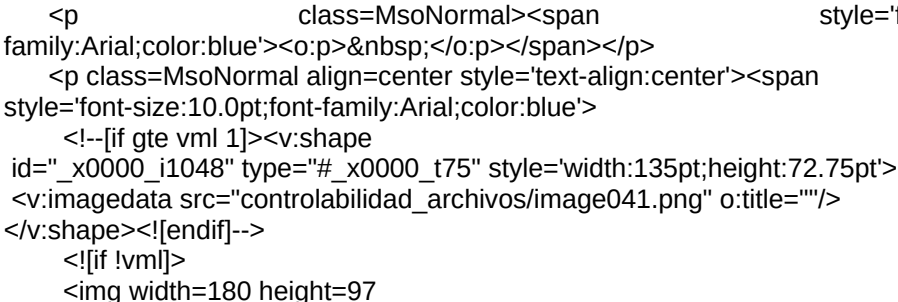
P_b

Se puede mostrar que la condición necesaria y suficiente para que el sistema compuesto sea controlable es que ambos procesos P_a y P_b sean controlables.

P_a

P_b

Conexión retroalimentada de dos procesos multivariados. En la figura se muestra la conexión retroalimentada de dos procesos multivariados.



P_a

P_b

src="controlabilidad_archivos/image042.jpg" v:shapes="_x0000_i1048">
 <![endif]>
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>En este caso el proceso P_a es el proceso principal y el proceso P_b es el proceso retroalimentador. Designaremos la conexión en cascada del proceso P_a seguido del proceso P_b por P₁ y la conexión en cascada del proceso P_b seguido del proceso P_a por P₂, podemos mostrar que:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-indent:-14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo3; tab-stops:list 0cm'>
 <![if !supportLists]>
 a. </p>
 <![endif]>
 La condición necesaria y suficiente para que el sistema compuesto sea controlable es que el proceso P₁ sea controlable.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-indent:-14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo3; tab-stops:list 0cm'>
 <![if !supportLists]>
 b. </p>
 <![endif]>
 Si el sistema compuesto es controlable, ambos procesos lo son.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-indent:-14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo3; tab-stops:list 0cm'>
 <![if !supportLists]>
 c. </p>
 <![endif]>
 Si ambos procesos son controlables, cualquier variable de estado incontrolable del sistema compuesto son variables de estado incontrolables del proceso P₁ y se originan en el proceso P_b.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
 </tr>
 </table>
 </body>
 </html>

3.87 CONTROL LINEAL. SISTEMAS LINEALES. CONCEPTO DE OBSERVABILIDAD

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="observabilidad_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="observabilidad_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="observabilidad_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONCEPTO DE OBSERVABILIDAD</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T21:37:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-20T21:38:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>164</o:Words>
<o:Characters>906</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>7</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1068</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
```

```

<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    text-align:justify;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    mso-bidi-font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>CONCEPTO DE
OBSERVABILIDAD<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El vector de
salida <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b> de un sistema lineal multivariable es
descrito por la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

```

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:89.25pt; height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="observabilidad_archivos/image001.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862753">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal>donde y es el vector de salida, B es la matriz de salida y G es la matriz de transmisi&ocute;n.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal>Sea la matriz <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B definida por:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:105.75pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="observabilidad_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862754">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>y</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> la matriz de transmisi&oacute;n <b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>G</b> sea definida por:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:105.75pt;height:63pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="observabilidad_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862755">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>as&iacute;</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> que expandiendo la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:fuchsia'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:89.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="observabilidad_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862756">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'>se</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:
Arial;color:blue'> tiene:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:138pt;height:162.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="observabilidad_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->

```

```

<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243862757">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Se dice que
una variable de estado es observable si puede ser estimada de las medidas de las variables de
salida. Si examinamos las ecuaciones anteriores podemos ver que la variable de estado <span
class=SpellE>x<sub>k</sub></span> se puede determinar de las variables de salida
y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub>, ..., <span
class=SpellE>y<sub>i</sub></span><span class=GramE>, ...</span>, <span
class=SpellE>y<sub>p</sub></span>, si los coeficientes <span
class=SpellE>b<sub>ik</sub></span> no son todos cero. En otras palabras <span
class=SpellE>x<sub>k</sub></span> es observable si los elementos de la k-<span
class=SpellE>é</span>simas columna de la matriz de salida no son todos igual a cero.
Si esta condici&ocute;n no se satisface, se dice que la variable <span
class=SpellE>x<sub>k</sub></span> es inobservable. En otras palabras un proceso lineal es
observable si la matriz de salida <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B</b> contiene
columnas diferentes de cero. <o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><o:p>&nbsp;</o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.88 SISTEMAS DINÁMICOS. INTRODUCCION

```

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="Introfundfis_archivos/filelist.xml">
<title>En este capítulo revisaremos toda una gama de conceptos y métodos
matemáticos que se requieren para comprender los fundamentos</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>4</o:Revision>
<o:TotalTime>7</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-20T21:44:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:49:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>67</o:Words>

```

```

<o:Characters>374</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>3</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>440</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
@page Section1
    {size:595.3pt 841.9pt;
    margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;

```



```

        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=786
style='width:589.5pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-family:Arial;color:red'>INTRODUCCION</span></b></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span
style='font-family:Arial;color:red'><span style='font-size:12pt'></span></b></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>En este capítulo
revisaremos toda una gama de conceptos y métodos físicos que se requieren
para comprender los fundamentos de la teoría de sistemas dinámicos que
estudiaremos en este curso. Entre los temas básicos que estudiaremos podemos
encontrar el Concepto de Sistema, Comportamiento Estático, Leyes de Control,
Sistemas Multivariables, Sistemas de Parámetros Distribuidos, Sistemas Estocásticos,
Control Modal y otros.</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;mso-ansi-language:
ES-TRAD'><span style='font-size:12pt'></span></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12pt'><span style='font-size:12pt'></span></p>

</div>

</body>

</html>

```

3.89 SISTEMAS DINÁMICOS. INTRODUCCION. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
    background-color: #FFFFFF;
    margin-left: 10px;
    margin-top: 0px;
    margin-right: 0px;
    margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
    font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;

```

```

        font-size: 10px;
    }
    a:link {
        color: #990033;
        text-decoration: none;
    }
    a:visited {
        text-decoration: none;
        color: #990033;
    }
    a:hover {
        text-decoration: none;
        color: #0000FF;
    }
    a:active {
        text-decoration: none;
        color: #FF0000;
    }
    .style16 {
        font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10pt;
        font-weight: bold;
        color: #FFFFFF;
    }
    .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
        font-size: 10pt;
        color: #000000;
        font-weight: bold;
    }
    .style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
    <tr>
        <td width="617"><span class="indicador style4 style12 style19">P&aacute;gina Principal &gt;
Curso de Control &gt; Sistemas Din&aacute;micos </span></td>
        <td width="172"><span class="indicador style4 style12 style19"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent">&lt;&lt; Regresar a la P&aacute;gina Principal </a></span></td>
    </tr>
</table>
<div align="left">
    <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
        <tr>
            <td width="789" background="../figuras/control2.gif"><div align="center"><span
class="style16">SISTEMAS DINAMICOS </span></div></td>
        </tr>
    </table>
    <p>&nbsp;</p>
    <p>&nbsp;</p>
</div>
<p>&nbsp;</p>
</body>
</html>

```

3.90 SISTEMAS DINÁMICOS. EL CONCEPTO DE SISTEMA

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml">
```

```

xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="concepsistema_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="concepsistema_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="concepsistema_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EL CONCEPTO DE SISTEMA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>58</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-03T18:00:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:44:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>417</o:Words>
<o:Characters>2298</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>19</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2710</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal

```

```

        {mso-style-parent:"";
        margin:0cm;
        margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:Arial;
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
        color:blue;
        mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
        {mso-style-name:"";
        mso-spl-e:yes;}
span.GramE
        {mso-style-name:"";
        mso-gram-e:yes;}
@page Section1
        {size:612.1pt 792.1pt;
        margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
        mso-header-margin:35.45pt;
        mso-footer-margin:35.45pt;
        mso-paper-source:0;}
div.Section1
        {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
        {mso-style-name:"Tabla normal";
        mso-tstyle-rowband-size:0;
        mso-tstyle-colband-size:0;
        mso-style-noshow:yes;
        mso-style-parent:"";
        mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
        mso-para-margin:0cm;
        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
  <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]>
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red'>EL CONCEPTO DE SISTEMA<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

Lo primero que tenemos que hacer para tener el modelo matemático de un sistema físico es aislar conceptualmente la parte del universo que nos interesa. A esta porción que aislamos del Universo le llamamos Sistema y la parte del Universo que de alguna manera interactúa, de alguna manera, con el sistema le llamaremos ambiente. El sistema y su ambiente están separados por una frontera imaginaria y para nuestros intereses definiremos el sistema de tal manera que los puntos de interacción se puedan localizar.

La definición de un sistema no depende solamente de la entidad involucrada sino también de los propósitos de la investigación. El modelo puede ser construido a diferentes niveles de abstracción, dependiendo de las necesidades del problema en particular. En un nivel abstracto se puede construir un modelo matemático como un conjunto de ecuaciones que describan el sistema.

Debemos definir la interacción dentro y a través de la interfaz y una vez que esto se ha realizado podemos obtener el modelo matemático encontrando las descripciones matemáticas para las cantidades que interactúan. La forma de estas relaciones depende de nuestro propósito de diseño, la naturaleza del sistema y las técnicas matemáticas que vamos a emplear. La validez del modelo depende de las consideraciones que se realizaron al construirlo.

Vamos a estudiar la estructura de los sistemas lineales de parámetros estacionarios, de orden finito y amortiguados. Debemos primero examinar las consideraciones que debemos hacer a un sistema en particular para poder aplicar esta técnica de análisis. Todos los sistemas experimentan cambios en sus parámetros con el tiempo, pero si estos son pequeños o lentos en el tiempo, un modelo estacionario es una buena aproximación al sistema real. Para modelos de orden finito, propiedades como capacitancias, inductancia y resistencia deben amortiguarse en puntos discretos en el espacio. A menudo estas propiedades están distribuidas en el espacio, esto es expresadas como capacitancias o inductancias por unidad de longitud. ¿Bajo qué circunstancias se pueden considerar amortiguadas sin reducir en forma importante la precisión del modelo?

Una regla genérica es determinar la causalidad del sistema, qué causa qué, para derivar un conjunto de ecuaciones que relacionen las cantidades de entrada con las de salida. Siempre tendremos ecuaciones vectoriales del tipo:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_j$$

```

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:99.75pt;
height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="concepsistema_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302248">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><sub><!--[if
gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:86.25pt;height:15pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="concepsistema_archivos/image006.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302249">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span
lang=ES-TRAD>o</span></span><span lang=ES-TRAD> la forma escalar de estas
ecuaciones en el dominio de Laplace.</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span
lang=EN-GB style='color:windowtext;mso-ansi-language:EN-
GB'>Y<sub>j</sub></span></span><span
lang=EN-GB style='color:windowtext;mso-ansi-language:EN-GB'>(s)=<span
class=Spelle>G<sub>ij</sub></span>(s)<span
class=Spelle>U<sub>i</sub></span>(s)<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=EN-GB
style='mso-ansi-language:EN-GB'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>Donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> es el vector de
estado, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b> el vector de entrada, <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b> el vector de salida y <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>G</b> la función de transferencia, se usa
para expresar la relación entrada-salida.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

```

</div>

</body>

</html>

```

3.91 SISTEMAS DINÁMICOS. ELEMENTOS DE UN PUERTO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="elem1puerto_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="elem1puerto_archivos/editdata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ELEMENTOS DE UN PUERTO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>109</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-04T15:13:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-04T17:02:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>409</o:Words>
<o:Characters>2254</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2658</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>

```

```

    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:Arial;
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    color:blue;
    mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
  <tr>
    <td><div class=Section1>
      <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red'>ELEMENTOS DE UN PUERTO</span></b></p>
      <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD><span style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD>La definici&oacute;n
de un sistema determina que hay que identificar las interacciones de energ&iacute;a entre los

```


sistemas y su ambiente. Después de definir un sistema examinamos las relaciones matemáticas entre las variables internas y externas para obtener el modelo matemático que lo describe. Vamos ahora a deducir la estructura de un sistema en términos de un conjunto de elementos ideales. Como los elementos ideales tienen modelos matemáticos simples, si podemos encontrar una estructura compuesta de estos elementos ideales que representen al sistema original, podemos obtener el modelo matemático del sistema. Estos elementos simples son sistemas simples que interactúan con su ambiente a través de un número limitado de puertos de energía. Un puerto de energía es un punto en el cual se puede transmitir la potencia entre el sistema y su ambiente. Cada puerto de energía transmite un único tipo de potencia, y la transmisión es instantánea y se describe por un par de señales variables. Si varios tipos de potencia se transmiten al mismo punto, un puerto de energía separado se designa para cada una de los tipos de potencia. Nos centraremos con sistemas cuya estructura contiene elementos pasivos y fuentes ideales.

lang=ES-TRAD
style="text-align: justify;"
class=MsoNormal
<p>

Los sistemas o elementos están acoplados por la interconexión de sus puertos. La interconexión se muestra por líneas sólidas llamadas ataduras. Una atadura realmente es un elemento ideal de transmisión de energía, ya que transmite energía de un punto al otro sin disipación ni retardos temporales. Un sistema o elemento se caracteriza por un número de puertos de energía como un puerto, dos puertos, cinco puertos etc. Si un puerto de energía es un punto en el cual otros elementos se puede conectar al elemento, se llama puerto libre.

lang=ES-TRAD
style="text-align: justify;"
class=MsoNormal
<p>

La portabilidad de un elemento determina la complejidad del sistema que se puede lograr interconectando elementos del mismo tipo. Dos elementos de un puerto sólido pueden ser conectados como se muestra en la figura.

lang=ES-TRAD
style="text-align: justify;"
class=MsoNormal
<p>

lang=ES-TRAD
style="text-align: center;"
class=MsoNormal align=center

```
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:177.75pt;
height:119.25pt'>
<v:imagedata src="elem1puerto_archivos/image001.png" o:title="">
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>
```

```

        
        <![endif]>
        </span></p>
        <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD>Dos puertos se
pueden conectar en una estructura de anillo, como se muestra en la figura.</span></p>
        <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD>
        <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:181.5pt;height:103.5pt'>
        <v:imagedata src="elem1puerto_archivos/image003.png" o:title=""/>
        </v:shape><![endif]><!--
        <![if !vml]>
        
        <![endif]>
        </span></p>
        <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
        <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD>Los elementos de un
solo puerto son: resistor, capacitor, inductor, fuente de poder, y fuente de corriente o flujo.
Cada uno de estos elementos se caracteriza por una ecuaci&oacute;n que relaciona las
variables del puerto <span class=GramE>p</span>(t) y f(t) con alguna otra. El producto de
estas variables de puerto es la potencia transmitida al puerto. En el sentido matem&aacute;tico,
estas simples ecuaciones estas ecuaciones simples se pueden escribir con cada variable
indicada como la entrada y las otras como la salida. Para que los modelos tengan sentido
f&iacute;sico, debemos determinar su causalidad natural.</span></p>
        </div></td>
    </tr>
</table>
</body>

</html>

```

3.92 SISTEMAS DINÁMICOS. COMPORTAMIENTO ESTÁTICO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="compestatico_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="compestatico_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="compestatico_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>

```

```

<![endif]-->
<title>COMPORTAMIENTO ESTATICO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
  <o:Author>HHMM</o:Author>
  <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
  <o:Revision>2</o:Revision>
  <o:TotalTime>91</o:TotalTime>
  <o:Created>2007-06-01T23:15:00Z</o:Created>
  <o:LastSaved>2007-06-25T23:45:00Z</o:LastSaved>
  <o:Pages>1</o:Pages>
  <o:Words>607</o:Words>
  <o:Characters>3343</o:Characters>
  <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
  <o:Lines>27</o:Lines>
  <o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
  <o:CharactersWithSpaces>3943</o:CharactersWithSpaces>
  <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:Zoom>91</w:Zoom>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:12.0pt;
    font-family:Arial;
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;

```

```

        mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
    <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:red'>COMPORTAMIENTO
ESTATICO<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'>Para
estudiar el análisis dinámico de los sistemas primero debemos estudiar los
elementos estáticos y las relaciones estáticas entrada-salida. Para poder
hacer esto vamos a pensar en un termómetro. En este la lectura de la temperatura
<span class=GramE>x(</span>t) es el estado del sistema y es la variable que
nos interesa. Esta lectura de temperatura es el resultado de la temperatura
ambiente <span class=GramE>u(</span>t), en el sistema, luego u(t) es la
entrada y x(t) es la salida o respuesta del sistema formado por el termómetro.
Podemos describir en forma gráfica la relación causal por cualquiera de estas
representaciones que se muestran en la siguiente figura:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>

```

<v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:240pt; height:94.5pt'>
 <v:imagedata src="compestatico_archivos/image001.png" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'>En ella es claro que la dirección de la
 causalidad está indicada por las flechas. En la representación de diagrama de
 bloques, la señal aparece como líneas y la relación funcional como los
 bloques, mientras que en el diagrama de flujo
 la señal se representa como los círculos y la relación funcional con
 las líneas etiquetadas.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'>En la expresión ut)
 y x(t) significan tanto la entrada u como la salida x son funciones del
 tiempo. La calibración del termómetro es la relación entre el valor
 estacionario de la temperatura u_s y la
 salida x_s, en lugar que la total
 relación dependiente del tiempo entre la entrada y la salida. En esta
 relación de estado estacionario<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt'>X_s<span
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt'> = f_s(<span
 class=Spelle>u_s)<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'>Esta es una relación <span
 class=GramE>f_s<span
 class=Spelle>u_s) es una función simplemente valuada. Esta
 ecuación se usa en los sistemas dinámicos en los que la relación estática es
 válida.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='font-size:10.0pt;color:blue'>Si la temperatura ut)
 está variando en el tiempo, la respuesta del termómetro x(t) también varía y

no es aplicable al sistema la condición de estático. Luego si la entrada $u(t)$ está cambiando lentamente y su repuesta es rápida, una ecuación estática puede ser una buena aproximación entre la entrada $u(t)$ cambiante y la salida cambiante

$X(s) = \frac{1}{s} u(t)$

Dado el error debido a que está aproximación estática depende de la escala de tiempo, ya que t debe medirse en horas o días para un termómetro de repuesta lenta. Un componente para el cual la ecuación anterior sea válida para todo tiempo se llama un componente estático sin memoria. El que no tenga memoria es debido a que no existen fenómenos de histéresis o retardos en el tiempo, así para cada $u(t)$ hay una única $x(t)$ que no depende de las entradas pasadas.

Si suponemos que la escala de tiempo en el estudio de un sistema dinámico es tal que la relación

$X(s) = \frac{1}{s} u(t)$

se puede usar con suficiente aproximación. Podemos simplificar la relación entrada-salida asumiendo una proporcionalidad entre las variables:

$x(t) = K u(t)$

donde K es la constante de proporcionalidad, también conocida como constante de ganancia. De hecho se puede elegir como ganancia la pendiente promedio de las características

estáticas bajo un intervalo de interés de la entrada $u(t)$. Matemáticamente está dada por la pendiente de la tangente en el origen si la

curva $f(u)$ es suave a través del origen, es decir:

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302291">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>Remplazar la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt'>X_s<span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt'> = <span
class=Spelle>f_s(u(t))<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>Por la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027"
type="#_x0000_t75" style='width:60.75pt;height:32.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="compestatico_archivos/image011.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302292">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'>es<span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'> una forma de linealización.
La relación linealizada por medio de la última ecuación es válida en toda
vecindad del origen.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>Podemos escribir la relación inversa de
las ecuaciones <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
lang=FR style='font-size:10.0pt;mso-ansi-language:FR'>x(<span
lang=FR style='font-size:10.0pt;mso-ansi-language:FR'>t) = <span
class=Spelle>ku(t)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=FR style='font-size:
10.0pt;color:blue;mso-ansi-language:FR'>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
lang=FR style='font-size:10.0pt;mso-ansi-language:FR'>x(<span
lang=FR style='font-size:10.0pt;mso-ansi-language:FR'>t) = <span
class=Spelle>ku(t)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>como:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1028"
type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="compestatico_archivos/image012.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302293">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>u(t) = k⁻¹x(t)<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>ya que el concepto de entrada-salida se basa en una causalidad físicamente realizable, su forma inversa no existe en un sistema físico hasta que la causalidad se reversible.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Podemos generalizar el concepto para r entradas y n salidas. Par un sistema estático no lineal multivariable, la relación que corresponde a la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>X_s = f_s(u(t))<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>X_i(t)= f_{si}(u₁(t)),..., u_r(t) con i = 1, 2,..., n<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Esta ecuación describe n hipersuperficies en un espacio de (r + 1) dimensiones. Si la superficie es suave, y se sustituye por un hiperplano tangente al origen, la relación linealizada es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;height:32.25pt'o:ole="">
 <v:imagedata src="compestatico_archivos/image013.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302294">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]> con i = 1, 2,..., n<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape


```

id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:120.75pt;height:36.75pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="compestatico_archivos/image014.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302295">
</o:OLEObject>
</xml><![endif--><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-size:10.0pt;
color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-family:"Times New Roman";mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

```

3.93 SISTEMAS DINÁMICOS. LEYES DE CONTROL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="leyesdecontrol_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="leyesdecontrol_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="leyesdecontrol_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif-->
<title>CONTROLADORES Y LEYES DE CONTROL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>148</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-03T21:25:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:50:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>548</o:Words>

```

```

<o:Characters>3019</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>25</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3560</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
    {mso-style-parent:"";
    margin:0cm;
    margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:Arial;
    mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
    color:blue;
    mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;

```

```

mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
  <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
  <td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
    <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red'>LEYES DE CONTROL</span></b></p>
    <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD>El elemento
central de un sistema de control retroalimentado es el controlador. Este
elemento tiene por entradas señales de bajo nivel de potencia, que es una
medida de una variable del proceso y tiene por salida señales de alta
potencia, que está relacionada con la señal de entrada por una relación
ajustable de entrada-salida. El controlador es un elemento unilateral, las
condiciones en la terminal de salida del controlador no tiene de manera
alguna retorno a través del controlador en el proceso. La señal de salida se
usa para manipular el proceso de alguna manera vía un actuador. Debido a que
los dispositivos de gran ganancia de potencia pueden ser muy difíciles de
controlar, una técnica común es usar elementos pasivos alrededor de
dispositivos de gran ganancia. Esto reduce la ganancia total, pero el
resultado final es un instrumento que tiene la suficiente ganancia y es capaz
de dar una regulación precisa. Esto se muestra en la figura.</span></p>
    <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
    <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD><!--[if gte
vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

```

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:349.5pt; height:118.5pt'>
 <v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image001.png" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
 TRAD><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Para
 explicarnos como funciona esto, vamos a considerar la relación de la figura,
 tenemos:</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-
 TRAD><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=EN-GB
 style='color:windowtext;mso-ansi-language:EN-GB'>Y(s) = KE(s), E(s) = U(s) –
 B(s), B(S) = H(s)Y(s)<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=EN-GB
 style='mso-ansi-language:EN-GB'>Y <span
 class=SpellE>luego<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=EN-GB
 style='mso-ansi-language:EN-GB'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026"
 type="#_x0000_t75" style='width:105pt; height:29.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
 gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302597">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=EN-GB
 style='mso-ansi-language:EN-GB'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
 ES-MX'>donde k es la gran ganancia del amplificador, por lo que una relación
 entrada-salida aproximada es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
 ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=EN-GB
 style='mso-ansi-language:EN-GB'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027"
 type="#_x0000_t75" style='width:1in; height:29.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image020.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
 gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302598">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
 style='mso-ansi-language:ES-MX'>que<span style='mso-ansi-language:
 ES-MX'> es la propiedad establecida antes.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
 ES-MX'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
 ES-MX'>Vamos a considerar el caso donde H(s) es estática, así que la relación

proporcional es:

$$Y(t) = E(t) - c(t)$$

La entrada a un controlador de retroalimentación es una señal de error $e(t)$, que se genera al tomar la diferencia entre una entrada de referencia $r(t)$ y un valor medido de la variable a ser controlada $c(t)$:

$$E(t) = r(t) - c(t)$$

La salida del controlador $m(t)$ es la entrada al actuador y puede darse la siguiente ley de control:

$$m(t) = \frac{K}{s} e(t) + T \frac{d}{dt} e(t)$$

Este control se llama control proporcional o control P, con una ganancia K . Esta es una acción estática cuando se ignoran todos los efectos dinámicos involucrados en el sistema, en otras palabras, la salida $m(t)$ de la acción P depende solamente de la magnitud del error $e(t)$ en el mismo instante.

Si hacemos una modificación en las componentes de la retroalimentación es posible generar una acción de control que no sólo responda a la magnitud presente del error sino que también lo haga con la razón de cambio ($\frac{d}{dt} e(t)$). Esto se puede escribir como:

$$M(t) = \frac{K}{s} e(t) + T \frac{d}{dt} e(t)$$

Esta forma de control se llama proporcional derivativo o control PD. Si T es la constante de tiempo del retraso en la retroalimentación, por lo que tenemos:

DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302599">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Si el sistema opera en la banda proporcional, la relación lineal aproximada será:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>y^{*} = -KK = -(u-b)K<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>y = - y^{*} = (u - b)k<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>válida y la ecuación:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image021.wmz" o:title=""></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]>}<!--[if gte mso 9]></p>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302600">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>se transforma en:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:189pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image022.wmz" o:title=""></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]>}<!--[if gte mso 9]></p>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302601">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>y(t) = -kb(t) + ku(t)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Esta es la formulación de variables de estado para la acción PD. Si sustituimos b(t) por x(t), obtenemos.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

$$y = -\frac{1}{k} \ln(x)$$

De las ecuaciones:

$$y(t) = -\frac{1}{k} \ln(x)$$

se deriva la función de transferencia:

$$y(t) = -\frac{1}{k} \ln(x)$$

Como k es muy grande aplicamos la ecuación:

$$y(t) = -\frac{1}{k} \ln(x)$$

para obtener la forma aproximada:

style='mso-ansi-language:ES-MX'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:87pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image025.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302606"></o:OLEObject></xml><![endif]></o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'>que es la acción PD.</o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La ley PID, proporcional integral derivada, se define como:<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="leyesdecontrol_archivos/image026.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302607"></o:OLEObject></xml><![endif]></o:p></o:p></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'>también llamada proporcional derivada más acción de restauración, ya que la acción de la integral restaura la posición de la banda proporcional. Ya que el operador 1/D de la ecuación anterior es la operación de integración, la variable m(t) es igual a una proporción constante del error más el error pasado integrado.<o:p></o:p></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p></td></tr></table><p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p></div></body></html>

3.94 SISTEMAS DINÁMICOS. RESPUESTA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml" xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word">


```

xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respsist1orden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="respsist1orden_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="respsist1orden_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RESPUESTA DE UN SISTEMA DE PRIMER ORDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>77</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-03T17:59:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:56:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>458</o:Words>
<o:Characters>2522</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>21</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2975</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;

```

```

        margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:12.0pt;
        font-family:Arial;
        mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
        mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
    {mso-style-name:"";
    mso-spl-e:yes;}
span.GramE
    {mso-style-name:"";
    mso-gram-e:yes;}
@page Section1
    {size:612.1pt 792.1pt;
    margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
    mso-header-margin:35.45pt;
    mso-footer-margin:35.45pt;
    mso-paper-source:0;}
div.Section1
    {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
    {mso-style-name:"Tabla normal";
    mso-tstyle-rowband-size:0;
    mso-tstyle-colband-size:0;
    mso-style-noshow:yes;
    mso-style-parent:"";
    mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
    mso-para-margin:0cm;
    mso-para-margin-bottom:.0001pt;
    mso-pagination:widow-orphan;
    font-size:10.0pt;
    font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:red'>RESPUESTA DE UN SISTEMA DE PRIMER
ORDEN<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'>El

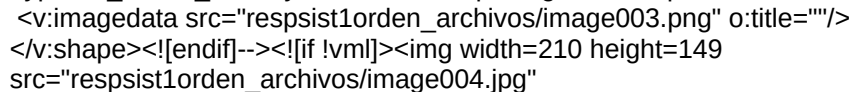
```

integrador es la base para el desarrollo del modelo matemático de un sistema físico. Su salida $x(t)$ es la integral de la entrada $u(t)$, por lo que la ecuación que las relaciona es:

$\frac{dx}{dt} = u(t)$

donde B es una constante o un coeficiente dependiente del tiempo.

Para obtener la forma general de las ecuaciones diferenciales de primer orden, vamos a estudiar un tinaco con descarga libre, como se muestra en la figura.



El diagrama muestra un tinaco con una superficie horizontal superior y una pared vertical lateral. En la parte inferior, hay una salida de agua que se descarga libremente. Se indican las dimensiones: la longitud del tinaco es de 157.5 cm y la altura del agua es de 111.75 cm.

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303273">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:32.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image043.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303274">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:93.75pt;height:32.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image044.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303275">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Geoméricamente la superficie $f(x, u, t)$ se puede aproximar por un plano tangente en el origen, por lo que la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image040.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303276">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>con esta linealización llega a ser:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:111.75pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image045.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303277">

</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Si consideramos a A y a B como constantes, tenemos:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image046.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303278">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Aplicando lo anterior al tinaco de la figura<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:157.5pt;height:111.75pt'>
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image003.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>tenemos que en la ecuación Ax(t) representa la razón del flujo de descarga, por lo que debe ser negativa en este sistema.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La solución de la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image046.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303279">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>para una u(t) genérica es:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:131.25pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image047.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303280">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'>donde<span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'> x₀ es el valor
inicial de x(t) y <span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;
color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t<span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'> es una variable muda de
integración. La ecuación anterior se puede derivar comenzando con la
ecuación:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039"
type="#_x0000_t75" style='width:120pt;height:30.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image048.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303281">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>Si sustituimos la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040"
type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image046.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303282">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>en el lado derecho de la ecuación<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041"
type="#_x0000_t75" style='width:120pt;height:30.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image048.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303283">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>tenemos:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1042"

type="#_x0000_t75" style='width:96pt;height:27.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image049.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303284">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>Después de la integración, la última
ecuación será:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043"
type="#_x0000_t75" style='width:117pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image050.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303285">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>El primer término <span
class=Spelle>e^{At}x₀
se llama la respuesta libre. Esta es la respuesta cuando no es forzado el
sistema, o sea cuando $u(t) = 0$.< El segundo término de la solución es la
respuesta forzada con valor inicial cero<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044"
type="#_x0000_t75" style='width:104.25pt;height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="respsist1orden_archivos/image051.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303286">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--, <span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt'>x_f<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt'>(0) = 0<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'>que<span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;color:blue'> recibe el nombre de
integral de convolución.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;color:blue'>La respuesta total está dada por la suma

de las dos componentes. Esta suma sólo es válida en sistemas lineales y se llama superposición. También se puede emplear cuando la entrada $u(t)$ está dada como una suma de los componentes $u_1(t)$, ..., $u_k(t)$, ..., $u_n(t)$.

y la respuesta forzada será:

donde

el patrón de la respuesta libre es:

cuando

A es negativa es un decaimiento exponencial.


```

<link rel=Edit-Time-Data href="siscontretroalim_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="siscontretroalim_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMA DE CONTROL RETROALIMENTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>4</o:Revision>
<o:TotalTime>154</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-04T22:42:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:58:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>845</o:Words>
<o:Characters>4648</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>38</o:Lines>
<o:Paragraphs>10</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>5483</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle

```

```

        {mso-style-name:"";
        mso-spl-e:yes;}
span.GramE
        {mso-style-name:"";
        mso-gram-e:yes;}
@page Section1
        {size:612.1pt 792.1pt;
        margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
        mso-header-margin:35.45pt;
        mso-footer-margin:35.45pt;
        mso-paper-source:0;}
div.Section1
        {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
        {mso-style-name:"Tabla normal";
        mso-tstyle-rowband-size:0;
        mso-tstyle-colband-size:0;
        mso-style-noshow:yes;
        mso-style-parent:"";
        mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
        mso-para-margin:0cm;
        mso-para-margin-bottom:.0001pt;
        mso-pagination:widow-orphan;
        font-size:10.0pt;
        font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
  <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='color:red'>SISTEMA                                DE                                CONTROL
RETROALIMENTADO</span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES>La figura siguiente muestra una estructura
de control retroalimentado de variable y gasa únicas.</span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><!--[if gte vml
1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>

```

```

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:385.5pt;
height:239.25pt'>
  <v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image001.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span
lang=ES>esta</span></span><span lang=ES> configuración tiene por propósito
mantener una variable de control de una planta C(s) cerca de los valores deseados
de referencia R(s). La variable s indica que se está trabajando dentro del
dominio de Laplace. La naturaleza escalar de las relaciones entre la entrada
R(s) y la salida C(s) permite la aplicación eficiente de la teoría clásica de
control.</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>En la figura el
controlador de retroalimentación representado por la función de transferencia
<span class=SpellE>G<sub>c</sub></span>(s), con un error E(s), produce una
variable manipulable M(s). El objeto de control, la planta, se representa por
otra función de transferencia <span class=SpellE>G<sub>p</sub></span>(s) y un
conjunto de funciones de transferencia <span class=SpellE>N<sub>j</sub></span>(s)
de los disturbios de entrada <span class=SpellE>V<sub>j</sub></span>(s), con
J = 1,..., u. Las funciones de transferencia se obtuvieron de la manera
clásica, es decir obteniendo la transformada de Laplace de la razón
salida-entrada de los elementos correspondientes con condiciones iniciales
cero. La trayectoria de retroalimentación puede o no tener elementos H(s). La
señal de retroalimentación es B(s). La diferencia entre B(s) y la entrada de
referencia R(s)</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='color:windowtext'>E(s) = R(s) – B(s)<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Se alimenta
dentro al controlador para producir M(s). Esta variable controla la planta de
forma tal que <span class=SpellE>que</span> los efectos perturbadores de <span
class=SpellE>V<sub>j</sub></span>(s) en C(s) sean mínimos y C(s) se aproxime
lo máximo al valor deseado. Si el sistema tiene retroalimentación unitaria,
H(s) = 1, luego B(s) = C(s) y:</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='color:windowtext'>E(s) = R(s) – C(s)<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>En este caso E(s)
es el error del sistema de control por retroalimentación. De otro lado
debemos hacer una diferencia entre el error</span></p>

```

[illegible]

[illegible]

ϵ

Si consideramos un sistema lineal de parámetros amortiguados descrito por una función de transferencia dada en forma general por:

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

cuando la retroalimentación es unitaria, $H(s) = 1$. Para una función de transferencia físicamente realizable el orden del denominador polinomial debe ser igual o mayor que el del numerador polinomial, es decir $m \leq n$. Si escribimos la ecuación

$$1 = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

en forma factorial se obtiene la segunda forma canónica:

$$1 = \frac{K}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}$$

ES-MX'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Algunas veces es conveniente escribir la ecuación:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image013.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303492"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>en la forma canónica donde todos los números son reales.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:165.75pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image015.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303493"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>dondez_j y p_i

son ceros y polos reales respectivamente.<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Los polos de gasas cerrada<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>s = P₁, P₂, ..., P_n<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>son las raíces de la ecuación<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>1 + G(s) = 0<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Si aplicamos<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:194.25pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image011.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303494">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>encontramos que la ecuación característica del sistema de gasa cerrada es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:339.75pt;height:30.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image017.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303495">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Podemos escribir la respuesta de gasa cerrada C(s) de la ecuación<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:185.25pt;height:32.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image003.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303496">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>en la forma</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:144.75pt;height:32.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image019.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303497">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde la función de transferencia de gasa cerrada está definida por:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:78.75pt;height:29.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image021.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303498"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043" type="#_x0000_t75" style='width:81pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image023.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303499"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>De las ecuaciones<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image013.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303500"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>

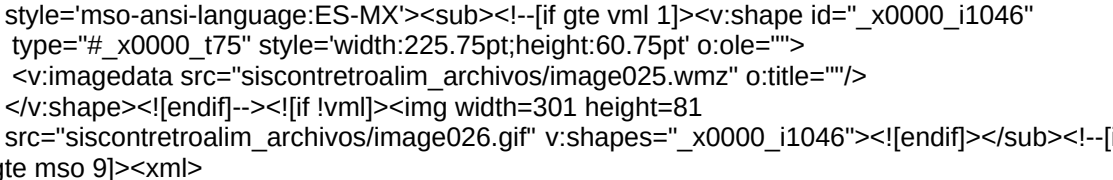
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>_{<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:339.75pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image017.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]>}<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303501"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>la función de transferencia para la entrada de referencia G_{LR}(s) se puede escribir en forma factorizada como:<o:p></o:p></p>

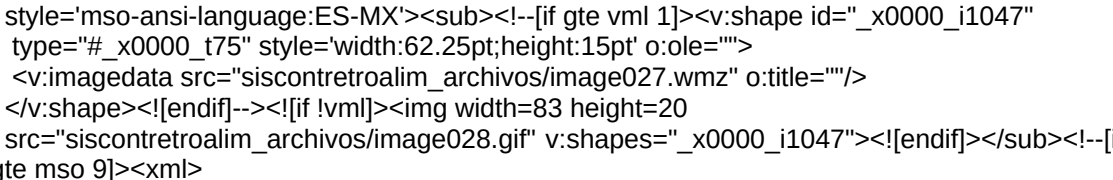
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span



donde
 n se considera mayor que m , que es una condición más fuerte que m

donde
 n , pero que es generalmente satisfecha en sistemas reales. Sea:



$\text{para polos conjugados complejos de gasa cerrada, donde}$

s

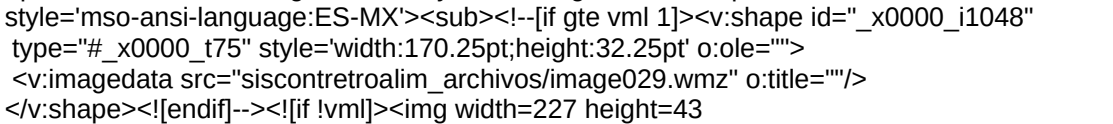
y

w

w

son reales y

$\text{\> 0, se tiene la forma alternativa:}$



src="siscontretroalim_archivos/image030.gif" v:shapes="_x0000_i1048"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303504">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde B(s) es el numerador en s y P_i son los polos de gasa cerrada.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Un sistema lineal de parámetros amortiguados, estacionario retroalimentado es estable asintóticamente estable si y sólo si todos los polos reales y todas las partes reales de los polos complejos conjugados son negativos, esto es:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'>P_i = -|_{i,} con s_{i} ></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Donde |_{i} > 0. De acuerdo con las ecuaciones:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:185.25pt;height:32.25pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image003.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303505">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="_x0000_i1050" type="#_x0000_t75" style='width:176.25pt;height:32.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303506">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1051"
type="#_x0000_t75" style='width:170.25pt;height:32.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303507">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>pueden aparecer los siguientes modos de movimiento en la respuesta de
un sistema de control estable:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1052"
type="#_x0000_t75" style='width:24pt;height:15.75pt' o:ole="">
<v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303508">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1053"
type="#_x0000_t75" style='width:54pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303509">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1054"
type="#_x0000_t75" style='width:54.75pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="siscontretroalim_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"
  DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303510">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span
style='mso-ansi-language:ES-MX'>donde</span></span><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'> todos los polos de gasa cerrada se consideran distintos.<o:p></o:p></span></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

```

3.96 SISTEMAS DINÁMICOS. RESPUESTA DE UN SISTEMA RETROALIMENTADO DE CONTROL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="respsisretroalim_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="respsisretroalim_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="respsisretroalim_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RESPUESTA DE UN SISTEMA RETROALIMENTADO DE CONTROL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>4</o:Revision>
<o:TotalTime>161</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-05T01:21:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:57:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>609</o:Words>
<o:Characters>3351</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>

```



```

<o:Lines>27</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3953</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
  <w:Zoom>91</w:Zoom>
  <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
  <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
  <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
  <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
  <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
  <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
  <w:Compatibility>
    <w:BreakWrappedTables/>
    <w:SnapToGridInCell/>
    <w:WrapTextWithPunct/>
    <w:UseAsianBreakRules/>
  </w:Compatibility>
  <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;

```

```

mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:imap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>RESPUESTA DE UN SISTEMA
RETROALIMENTADO DE CONTROL<o:p></o:p></span></b></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La
figura muestra la respuesta debida a una entrada escalón unitaria para un
sistema de control que empieza con un estado inicial cero.<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:240.75pt;
height:150.75pt'>
<v:imagedata src="respsisretroalim_archivos/image001.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Por la transformada inversa de Laplace tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:213.75pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image003.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303366">

</o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si expandimos C(s) en fracciones parciales, tenemos.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:359.25pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image005.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303367">

</o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> C<sub>1</sub> y C<sub>2</sub></span> son los coeficientes de expansión de los polos dominantes. La respuesta a una entrada escalón está dominada por los componentes de estado estacionario <span class=GramE>c</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>), introducidos por la entrada escalón y la oscilación amortiguada del modo dominante. Todos los otros modos desaparecen después de la aplicación y vuelven a aparecer como distorsión de la curva <span class=GramE>c</span></span>t en la vecindad del origen. Nótese que la naturaleza de la respuesta <span class=GramE>c</span></span>t a una entrada particular r(t) depende solamente de las raíces de la ecuación característica.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>1 + G(s) = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

$$\frac{t_{\text{respuesta}}}{t_{\text{levantamiento}}} = 1$$

El sobretiro porcentual SP se puede definir como:

$$SP = \frac{t_{\text{respuesta}}}{t_{\text{levantamiento}}}$$

El valor del restablecimiento es definido como el tiempo al cual la respuesta se mantiene dentro de  $\pm 5\%$  de su valor final  $t_{\text{final}}$ , donde 5% es el valor típico para  $t_{\text{respuesta}}$ , para evitar discontinuidades el tiempo de restablecimiento a veces se define como la envolvente más suave de la oscilación decadente. El valor de error final se define como:

$$e = \frac{t_{\text{respuesta}}}{t_{\text{levantamiento}}}$$

src="respsisretroalim\_archivos/image010.gif" v:shapes="\_x0000\_i1029"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303369">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una medida de la precisión estática. </o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Una discusión general del error de estado estacionario se puede dar si aplicamos el teorema del valor final que dice:</o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:99.75pt;height:18.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image011.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303370">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para determinar el error de estado estacionario en forma más general se emplea la forma canónica:</o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:203.25pt;height:35.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image013.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303371">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una función de transferencia de un sistema con retroalimentación unitaria.</o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El denominador de la última ecuación es la frecuencia natural no amortiguada </span><span lang=ES-TRAD style='font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language: ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span

style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>ni</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> de la respuesta oscilatoria. La respuesta amortiguada de la respuesta está dada por la parte imaginaria del polo complejo conjugado:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:71.25pt;height:20.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image015.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303372"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La parte real del polo complejo conjugado está dada por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image017.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303373"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Una señal escalón es una entrada del tipo

1. Las entradas del tipo 1 generalmente tienen un valor de estado estacionario cuando todas las T y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>z</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> de la señal son positivas:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:18.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image019.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303374"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<o:p></o:p></span></p>

$$v(t) = \frac{R(s)}{k}$$

Una rampa de entrada  $r(t)$

$$v(t) = \frac{R(s)}{k}$$

con  $R(s)$

$$v(t) = \frac{R(s)}{k}$$

Una entrada del tipo 2 donde  $k$  es la pendiente de la rampa.

Un sistema de control retroalimentado con una función de transferencia del tipo  $\frac{1}{s}$  y gasa abierta produce errores de estado estacionario para una entrada de referencia del tipo 1.

Por las ecuaciones:

$$v(t) = \frac{R(s)}{k}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{T} y + \frac{1}{T} u$$

Encontramos que el error es:

$$e = -\frac{1}{T} e + \frac{1}{T} u$$

El error de estado estacionario de un sistema de control como el anterior se llama  $e_{ss}$ . Si  $N(s)$  es también del tipo 0, el  $e_{ss}$  debido a los disturbios está dado por:

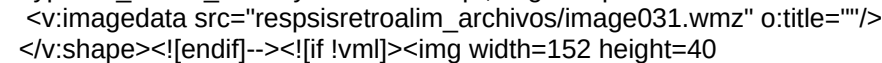
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$$

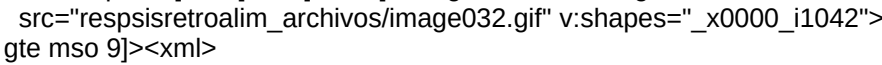
Consideremos la respuesta de un sistema de control a una entrada de referencia  $R(s)$ :

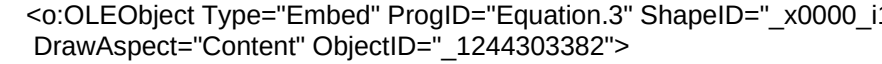
$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} R(s)$$

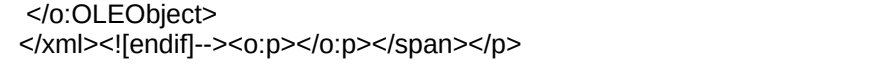


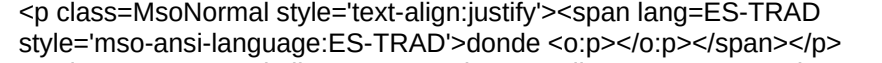
donde

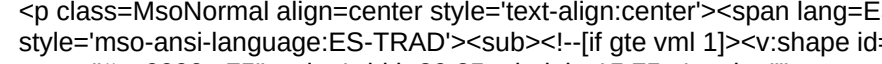


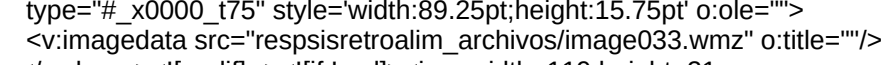


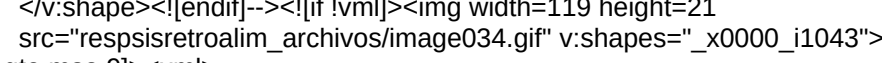


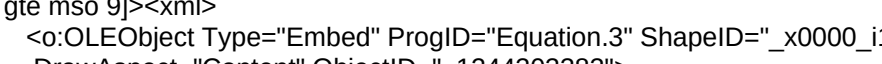


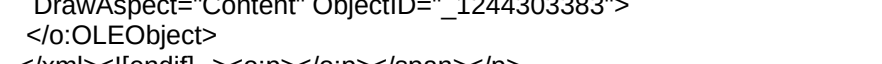












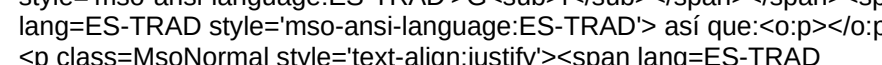
es la función de transferencia directa. Supongamos que la desviación

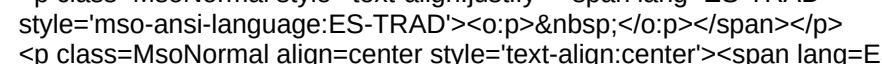
D

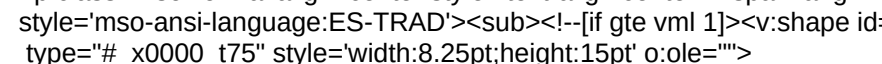
C aparece para un cambio

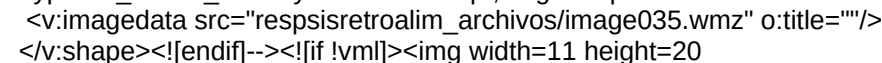
D

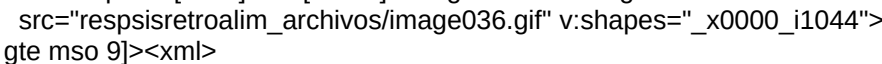
G

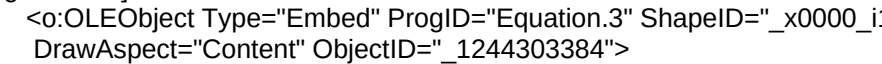


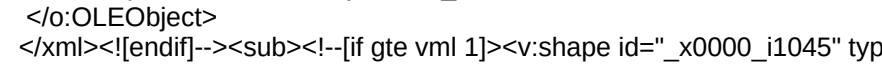


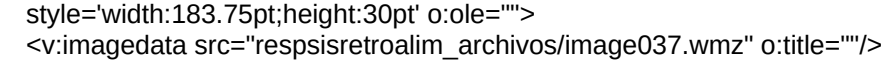












src="respsisretroalim\_archivos/image038.gif" v:shapes="\_x0000\_i1045"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303385">  
 </o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se sigue que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:279.75pt;height:60.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image039.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303386">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>o<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:45pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image041.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303387">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La retroalimentación no es efectiva para  
hacer </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>C/C insensible a cambios de la ganancia de  
retroalimentación </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>H/H. La razón del error de  
salida es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:53.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image043.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303388">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y por lo tanto:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:53.25pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="respsisretroalim\_archivos/image045.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303389"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>si</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> |<span class=Spelle>G<sub>f</sub>H</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>ñ<span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>ñ</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 1 y |</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>H</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>á<span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>á</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> |<span class=Spelle>H</span></span><o:p></o:p></span></p></td></tr></table><p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div></body></html>

### 3.97 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMAS MULTIVARIABLES

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sismultivar_archivos/filelist.xml">
```

```

<link rel=Edit-Time-Data href="sismultivar_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sismultivar_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS MULTIVARIABLES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>3</o:Revision>
 <o:TotalTime>276</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-05T23:05:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-25T23:59:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>428</o:Words>
 <o:Characters>2360</o:Characters>
 <o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
 <o:Lines>19</o:Lines>
 <o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>2783</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-fareast-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";

```

```

 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='color:red;mso-ansi-language:ES'>SISTEMAS
MULTIVARIABLES<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-
language:ES'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'>Los sistemas multivariantes son aquellos que
tienen múltiples entradas y salidas. Las gasas de control en este tipo de
sistemas están acopladas a otras. Si la interacción es suficientemente fuerte
como para ser un efecto dominante, debemos considerar al sistema
multivariable como una entidad.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:

```

blue;mso-ansi-language:ES'>Vamos a considerar un sistema de control con dos entradas  $m_1$  y  $m_2$  y dos salidas controladas  $c_1$  y  $c_2$ . Si usamos el diagrama de bloques de la figura siguiente podremos escribir las relaciones para el dominio de Laplace para una planta lineal como:

El diagrama de bloques representa un sistema de control. Las entradas  $m_1$  y  $m_2$  se combinan a través de sumadores y bloques de transferencia para producir las salidas  $c_1$  y  $c_2$ . Las relaciones de Laplace se detallan a continuación:

$$c_1 = \frac{1}{s^2} (m_1 + m_2)$$

$$c_2 = \frac{1}{s^2} (m_1 - m_2)$$

El código XML adjunto genera una representación visual de este sistema de control, incluyendo los bloques de suma y multiplicación, y las salidas resultantes.

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>El superíndice P indica la planta. Estas ecuaciones las podemos escribir en forma vectorial como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image043.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303626"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Podemos escribir ecuaciones similares para un conjunto de controladores expresados por la matriz de la función de transferencia que relaciona el vector de error <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>E</b>(s) y al vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b>(s):<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image044.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303627"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Para obtener la matriz de la función de transferencia <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>G</b><sup>C</sup>(s), sustituimos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b>(s) de la ecuación anterior en la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image043.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303628">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>y obtenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:165pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image045.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303629">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image046.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303630">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Si introducimos el vector de referencia <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>R</b>(s) tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image047.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303631">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>para un sistema de retroalimentación unitaria tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:15pt'



o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image048.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
 mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303632">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'>o<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:17.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
 mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303633">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'>La ecuación característica del sistema de gasa  
 cerrada es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:15pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image050.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
 mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303634">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'>y la matriz de la función de transferencia de gasa  
 cerrada para el vector de referencia de entrada es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
 blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:117pt;height:17.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image051.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
 mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303635">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Podemos generalizar el principio de retroalimentación hacia delante a un sistema multivariable como lo muestra la figura.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:255pt;height:138.75pt'><v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image025.png" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>V</b>(s) es una entrada perturbadora medible. Para la planta lineal tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:201pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image052.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303636"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>N<sup>V</sup></b>(s),<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>N<sup>W</sup></b>(s),<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>G</b><sup>P</sup>(s)<span style='mso-spacerun:yes'> </span>son funciones de transferencia matriciales de una planta para disturbios medibles <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>V</b>(s), disturbios inmensurables <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>W</b>(s) y un vector de entrada <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b><sup>f</sup></span>(s). Para la función de transferencia hacia delante <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>G</b><sup>f</sup></span>(s), tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image053.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub></span></p>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303637">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'>y luego:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:206.25pt;height:17.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image054.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303638">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'>Es posible una compensación dinámica exacta para <b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>V</b>(s) si existe [<b style='mso-bidi-font-weight:  
normal'>G</b><sup>P</sup>(s)]<sup>-1</sup> y:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:18.75pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image055.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte  
mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303639">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>es</span></span><span  
lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> realizable.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'>Ya que la compensación hacia delante no es posible  
para los disturbios inmensurables <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>W</b>(s),  
y ya que en general es imposible la compensación exacta es necesario diseñar  
un sistema combinado retroalimentado hacia delante, como lo muestra la  
siguiente figura.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:310.5pt;height:111pt'>  
<v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image035.png" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>La respuesta de gasa cerrada del sistema combinado está dada por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:300pt;height:18.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image056.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303640">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:120.75pt;height:17.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sismultivar\_archivos/image057.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303641">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>introduce</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> una compensación de error debido a la imperfección del controlador hacia delante <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>G</b><sup>f</sup></span>(s). En el caso ideal se puede elegir <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>G</b><sup>f</sup></span>(s)

de tal manera que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></b><span lang=ES style='mso-ansi-language:ES'>(s) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>0</b><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>para</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> todo <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>V</b>(s) en todo tiempo.<o:p></o:p></span></p>

</td>

</tr>

```

</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-MX;mso-fareast-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.98 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMAS CON PARAMETROS DISTRIBUIDOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sisparamdistribuid_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sisparamdistribuid_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sisparamdistribuid_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS CON PARAMETROS DISTRIBUIDOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>55</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-06T14:32:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T00:00:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>135</o:Words>
<o:Characters>747</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>6</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>881</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>

```

```

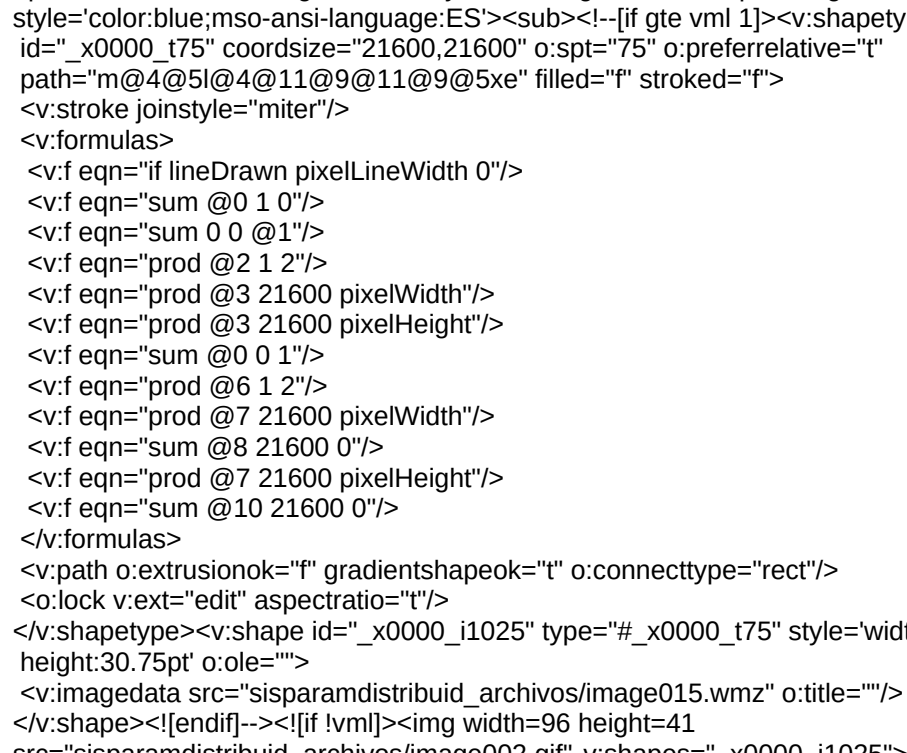
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

```

SISTEMAS DISTRIBUIDOS   Designamos un elemento como distribuido si el estado del elemento depende del valor de una variable como una función de la posición dentro del elemento y el tiempo. Los modelos matemáticos para este elemento deben de ser ecuaciones diferenciales parciales, ya que tenemos dos elementos: la posición y el tiempo.   Los sistemas que están caracterizados por matrices 2 con elemento diagonal cero se denominan simétricas, ya que muestran el mismo comportamiento cuando cambian 180°. Este concepto se puede generalizar para sistemas con <math>q(z, t)</math> como un vector <math>2n</math> tal que:  $q(z, t) = \begin{bmatrix} q_1(z, t) \\ q_2(z, t) \end{bmatrix}$	CON PARAMETROS   Los sistemas que están caracterizados por matrices 2 con elemento diagonal cero se denominan simétricas, ya que muestran el mismo comportamiento cuando cambian 180°. Este concepto se puede generalizar para sistemas con <math>q(z, t)</math> como un vector <math>2n</math> tal que:
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



2 con elemento diagonal cero se denominan simétricas, ya que muestran el mismo comportamiento cuando cambian 180°. Este concepto se puede generalizar para sistemas con  $q(z, t)$  como un vector  $2n$  tal que:

<sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:77.25pt;height:47.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sisparamdistribuid\_archivos/image016.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303673">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:47.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sisparamdistribuid\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303674">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>La ecuación vectorial para un sistema simétrico es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:111pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sisparamdistribuid\_archivos/image018.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303675">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p></o:p></b></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>que tiene por solución:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sisparamdistribuid\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303676">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:30.75pt' o:ole="">



```

<v:imagedata src="sisparamdistribuid_archivos/image020.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303677">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'>es una matriz tal que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:378.75pt;height:39pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="sisparamdistribuid_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244303678">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->^{<o:p></o:p>}</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.99 SISTEMAS DINÁMICOS. SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sislinestocastic_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sislinestocastic_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sislinestocastic_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}

```

```

.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>4</o:Revision>
<o:TotalTime>100</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-08T16:15:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T00:03:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>783</o:Words>
<o:Characters>4309</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>35</o:Lines>
<o:Paragraphs>10</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>5082</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:595.3pt 841.9pt;
margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;

```

```

 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='color:red;mso-ansi-language:ES'>SISTEMAS LINEALES
ESTOCASTICOS<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-
language:ES'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'>Existen sistemas en los cuales las entradas, los
estados y las variables de salida, cambian azarosamente. Si lo azaroso está caracterizado
por alguna regla, como la distribución Gaussiana, a menudo es posible
relacionar teóricamente estas variables.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'>Las variables del tiempo pueden ser
determinísticas o azarosas. Cuando las variables del tiempo varían
azarosamente, de forma que pueden ser caracterizadas por una función de
probabilidad decimos que las variables son estocásticas.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue;mso-ansi-language:ES'>En teoría d la probabilidad una variable

```

estocástica es el resultado de un experimento en un espacio de muestreo que representa una colección de salidas posibles. Para describir las características de este espacio de muestreo, definiremos la función de distribución de probabilidad  $F(x)$  de una variable estocástica  $x$  por la relación:

$$F(x) = P(x \leq x)$$

En esta ecuación  $P(x \leq x)$  es la probabilidad de que la variable estocástica sea menor o igual al valor  $x$ . Si  $F(x)$  es diferenciable y existe  $\frac{dF}{dx}(x)$ , la primera función de densidad de probabilidad  $p(x)$  se define como:

$$p(x) = \frac{dF}{dx}(x)$$

blue;mso-ansi-language:ES'>de lo que se sigue que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image003.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303407"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Si el intervalo de valores posibles de x está acotado por a y b, tal que a </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> x </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> b, luego <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='mso-ansi-language:ES'>p(x) </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>³</span></span><span lang=ES style='mso-ansi-language:ES'> 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>sobre el intervalo y:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image005.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303408"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>y</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> es posible que a = - </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> y b = </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥</span></span></p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Podemos expresar la funci3n<o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='mso-ansi-language:ES'>F(x<sub>1</sub>) = P(x </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£</span></span></span><span lang=ES style='mso-ansi-language:ES'> x<sub>1</sub>)<o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>En t3rminos de la primera funci3n de densidad de probabilidad como:<o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div><div class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:33.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image007.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303409"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Definiremos un valor esperado </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> de la variable estoc3stica como E{x}, por la ecuaci3n:<o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div><div class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image009.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303410"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p></o:p></span></p></div><div class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

INFORME TECNICO IT-TINF-2007-01

854

id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:36pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303411">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'>El momento n-ésimo central es el valor esperado de  
(x - </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><sup>n</sup> está definido por:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:156pt;height:35.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303412">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'>El valor esperado de un término producto <span  
class=SpellE>xy</span> de dos variables estocásticas x y <span class=SpellE>y</span>  
se expresa como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:143.25pt;height:35.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303413">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde</span></span><span  
lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> p(x, y) se llama la función  
de densidad de probabilidad adjunta.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:

blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>La primera función de densidad de probabilidad de la distribución normal o Gaussiana se expresa de la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303414"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Como x está sólo en forma cuadrática la distribución es simétrica alrededor de x = </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> es el valor medio. El parámetro </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>s</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> es la desviación típica y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>s</span></span></span><sup><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>2</span></sup><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> es la varianza, que es una medida de la dispersión. Como </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>s</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> decrece la curva es más puntiaguda y delgada. La varianza es el segundo momento central y está definida como.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:150.75pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image019.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><img width=201 height=47



src="sislinestocastic\_archivos/image020.gif" v:shapes="\_x0000\_i1034"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303415">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde  $p(x)$  es la distribución normal dada por: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:35.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image017.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303416">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>La discusión anterior de la función de densidad de probabilidad se basa en un ensamble, que es una colección de posibles salidas. Ahora vamos a aplicar esta técnica a una variable azarosa simple <span class=GramE>x(</span>t) en lugar de a un ensamble.<span style='mso-spacerun:yes'> </span>Esto es que vamos a reemplazar los procesos de promedio sobre el ensamble por promedios de tiempo. En la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt;height:35.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image009.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303417">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:36pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image011.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303418">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>>vamos a considerar que el promedio del ensamble es igual al promedio del tiempo, o sea:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:165.75pt;height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image021.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303419">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>El conjunto de consideraciones que es necesario tomar<span style='mso-spacerun:yes'> </span>con la variable azarosa <span class=GramE>x(</span>t) en el dominio del tiempo se llama la hipótesis ergódica, y la variable de tiempo se dice que viene de un proceso ergódico.<span style='mso-spacerun:yes'> </span>Una condición necesaria para esta hipótesis, es que se requiere que la función de densidad de probabilidad de la variable azarosa <span class=GramE>x(</span>t), no debe cambiar por un corrimiento en el origen del tiempo y decimos que la variable es azarosa estacionaria y ergódica. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>De la última ecuación el significado del valor medio esperado de una señal azarosa ergódica estacionaria, está dado por un proceso de promedio en el dominio del tiempo:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:138pt;height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image023.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303420">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>donde</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> la barra marca el promedio del tiempo. El valor esperado del producto x(t) x(t + </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>), con un corrimiento </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> en el tiempo involucra a la densidad adjunta de probabilidad dada por<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:143.25pt;height:35.25pt'o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image015.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303421"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>que en el dominio del tiempo vamos a definir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:210.75pt;height:35.25pt'o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image025.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303422"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>y</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> se llama función de autocorrelación.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>La varianza o el valor cuadrático medio  $x(t)^2$  para </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'> = 0, es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES

style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:23.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image027.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303423"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>y<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image029.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303424"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Una señal  $x(t)$  cuya correlación está dada por:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:134.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sislinestocastic\_archivos/image031.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244303425"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>se</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>llama ruido blanco.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>Si aplicamos las técnicas de correlación a una relación entrada-salida del sistema representado por su respuesta a un impulso  $g(t)$ , la función de correlación cruzada de entrada-salida es:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:138.75pt;height:35.25pt' o:ole="">





Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>) será la respuesta. Si </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span><span class=Spelle><span class=GramE><sub><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>uy</span></sub></span></span><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>(</span></span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>) está dada por una función delta, </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span></span><span class=Spelle><sub><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>uy</span></sub></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>(</span></span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span></span><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'>) será el patrón de la respuesta a un impulso del sistema.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue;mso-ansi-language:ES'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></td></tr></table><p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p></div></body></html>

### 3.100 SISTEMAS DINÁMICOS. RELACIONES ESTADÍSTICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns:st1="urn:schemas-microsoft-com:office:smarttags"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="relestadfrecuen_archivos/filelist.xml">
```

```

<link rel=Edit-Time-Data href="relestadfrecuen_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="relestadfrecuen_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RELACIONES ESTADISTICAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA</title>
<o:SmartTagType namespaceuri="urn:schemas-microsoft-com:office:smarts"
name="City"/>
<o:SmartTagType namespaceuri="urn:schemas-microsoft-com:office:smarts"
name="place"/>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>319</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-16T01:11:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:50:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>558</o:Words>
<o:Characters>3075</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>25</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3626</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]--><!--[if !mso]><object
classid="clsid:38481807-CA0E-42D2-BF39-B33AF135CC4D" id=ieooui></object>
<style>
st1\:*{behavior:url(#ieooui) }
</style>
<![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;

```



```

 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;
 mso-fareast-language:ES;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>RELACIONES ESTADISTICAS EN EL DOMINIO
DE LA FRECUENCIA<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:
blue'><o:p> </o:p></p>

```



mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES  
style='color:blue'>) de la variable azarosa  $x(t)$  se transforma al dominio de  
las frecuencias por:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:108.75pt;height:35.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image051.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302690">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'>y la transformación inversa es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:122.25pt;height:35.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image052.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302691">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'>De la ecuación anterior si </span><span lang=ES style='font-family:  
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES  
style='color:blue'> = 0 tenemos la ecuación para el valor cuadrático:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:141pt;height:35.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image053.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302692">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:  
blue'>Como el valor cuadrático está asociado a la energía, el término </span><span  
lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span><span>  
</p>

class=Spelle><span class=GramE><sub><span lang=ES style='color:blue'>xx</span></sub></span></span><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue'>(</span></span><span lang=ES style='color:blue'>j</span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='color:blue'>)</span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='color:blue'>, ya que no tiene corrimiento de fase. Si sustituimos:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image054.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302693"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>en la ecuación:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image051.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302694"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>tenemos:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:201pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image055.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302695"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>Como </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span></span><span lang=ES style='color:blue'>)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } x \text{ es par} \end{cases}$$

La ecuación  $f(x) = x$  se reduce a:  $x = x$

Ya que el lado derecho de la última ecuación es una función impar de

lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:81.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image057.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302698"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>y<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image058.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302699"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>Cuando se tienen los datos de una señal azarosa primero calculamos la funci3n de autocorrelaci3n y luego sacamos la transformada de Laplace para obtener el espectro de potencia. Podemos usar el siguiente par de ecuaciones:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image059.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302700"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:168pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image060.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302701"></o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>La ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:120pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image061.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302702"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue'>es</span></span><span lang=ES style='color:blue'> como la relación determinística de entrada-salida de un sistema lineal. Si tomamos el par de la transformada de Laplace de una relación entrada-salida, tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES>Y(s) = G(s)U(s)</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>Y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image062.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302703"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES style='color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='color:blue'> u(t) es la entrada, y(t) es la salida y g(t) = L<sup>-1</sup>. Vamos a escribir la relación de dominio del frecuencia de<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:120pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image061.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302704"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><st1:City><st1:place><span class=Spelle><span lang=EN-GB style='color:blue;mso-ansi-language:EN-GB'>como</span></span></st1:place></st1:City><span lang=EN-GB style='color:blue;mso-ansi-language:EN-GB'><o:p></o:p></span></p>

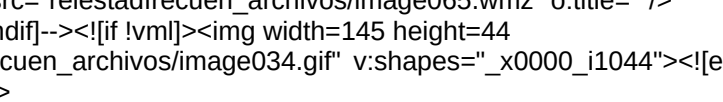
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES





$\frac{dP}{dy} = G$

donde



es el espectro de densidad de potencia de la función de correlación de entrada, y,

(3)

el espectro de densidad de potencia cruzado de las señales de entrada y de salida. De la ecuación:

(4)



integral de convolución para una salida  $y(t)$ ,<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image062.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302709">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:131.25pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image067.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302710">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>Por la definición de autocorrelación tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:374.25pt;height:33.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image068.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302711">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:231pt;height:35.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image069.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302712">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'>donde la integral entre corchetes es por definición la función de autocorrelación, por lo que tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES style='color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $s$  e integrando:

$$sG(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

El arreglo de exponenciales de la ecuación anterior se ajusta para que los factores sean reemplazados por funciones de autocorrelación de frecuencia de entrada y salida y la función de transferencia del sistema para obtener:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

En el dominio de la frecuencia, como  $G(j\omega)$

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>) es el conjugado de G(j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>), tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>G(j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>) G(-j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>) = | G(-j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>)|<sup>2<o:p></o:p></sup></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>Por lo que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span></span><span class=Spelle><sub><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>yy</span></sub></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> (j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>) = |G(j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>)|<sup>2</sup></span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span></span><span class=Spelle><sub><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>uu</span></sub></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> (j</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'>y la función de transferencia:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='color:blue;mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:81.75pt;height:38.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="relestadfrecuen\_archivos/image072.wmz" o:title="">

```

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302715">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='color:blue;
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-MX;mso-fareast-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.101 SISTEMAS DINÁMICOS. RELACIONES ESTADISTICAS EN EL ESPACIO DE ESTADOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="relestadvarest_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="relestadvarest_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="relestadvarest_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>RELACIONES ESTADISTICAS EN EL ESPACIO DE ESTADOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>3</o:Revision>
 <o:TotalTime>88</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-18T00:39:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-25T23:51:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>420</o:Words>
 <o:Characters>2310</o:Characters>
 <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>

```

```

<o:Lines>19</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2725</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;

```

```

mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:imap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>RELACIONES ESTADISTICAS EN EL
ESPACIO DE ESTADOS</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'>RELACIONES ESTADISTICAS EN EL
ESPACIO DE ESTADOS</p>
<p class=MsoNormal>Vamos
a considerar que todo vector azaroso es gaussiano, y con valor promedio cero.
Un vector azaroso <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x es gaussiano
cuando su distribución de probabilidades tiene la forma:</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'>RELACIONES ESTADISTICAS EN EL
ESPACIO DE ESTADOS</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:248.25pt;
height:32.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="relestadvarest_archivos/image028.wmz" o:title="">

```



</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302776">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:  
ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
además E{<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x} = </b>0 para un valor  
medio de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> = 0. Vamos a definir la  
matriz de <span class=SpellE>covariancia</span> como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte  
vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:120pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302777">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos  
a considerar el sistema discreto en el tiempo:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;  
mso-ansi-language:ES-TRAD'>X</span></b><sub><span lang=ES-TRAD  
style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>k+1</span></sub></span><span  
lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = <span  
class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Px</b><sub>k</sub></span>  
+  
<span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-  
weight:normal'>Qu</b><sub>k</sub></span><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Donde  
el vector de entrada <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-  
weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>  
es valor medio cero, ergódico, ruido azaroso gaussiano sin correlación entre  
diferentes muestras, luego:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image030.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302778">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

$\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle$  Por lo que un vector de ruido blanco se define solamente para el caso continuo en el tiempo, un vector de ruido blanco discreto en el cual cada muestra es independiente le llamaremos también blanco.  $\langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle$  Para calcular la covarianza de la matriz  $\langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle X \langle /b \rangle$  del vector de estado  $\langle \text{span class=Spelle} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle x \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle \langle /span \rangle$  en la ecuación:  $\langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle \text{span class=Spelle} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle X \langle /span \rangle \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle k+1 \langle /span \rangle \langle /sub \rangle \langle /span \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle = \langle \text{span class=Spelle} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle P x \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle \langle /span \rangle + \langle \text{span class=Spelle} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle Q u \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle \langle /span \rangle \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal style='text-align:justify'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle$  La multiplicamos por la transpuesta  $\langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle X' \langle /span \rangle \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle k+1 \langle /span \rangle \langle /sub \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle = \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle P' x' \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle + \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle Q' u' \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal style='text-align:justify'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle o:p \rangle \&nbsp; \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal style='text-align:justify'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle$  Ambos lados y tomamos el valor esperado de cada producto vectorial. Ya que el estado  $\langle \text{span class=Spelle} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle x \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle \langle /span \rangle$  no es correlacionado con la entrada  $\langle \text{span class=Spelle} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle u \langle /b \rangle \langle \text{sub} \rangle k \langle /sub \rangle \langle /span \rangle$ ,  $\langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle \text{sub} \rangle \langle \text{!--[if gte vml 1]} \langle v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:57pt;height:15pt' o:ole="" \rangle \langle v:imagedata src="relestadvarest_archivos/image031.wmz" o:title="" \rangle \langle /v:shape \rangle \langle \text{!} \rangle \langle \text{endif} \rangle \text{--} \rangle \langle \text{!} \rangle \langle \text{if !vml} \rangle \langle \text{img width=76 height=20 src="relestadvarest_archivos/image008.gif" v:shapes="_x0000_i1028"} \rangle \langle \text{!} \rangle \langle \text{endif} \rangle \langle /sub \rangle \langle \text{!--[if gte mso 9]} \rangle \langle \text{xml} \rangle$

$\langle o:OLEObject \text{ Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302779"} \rangle \langle /o:OLEObject \rangle$

$\langle /xml \rangle \langle \text{!} \rangle \langle \text{endif} \rangle \text{--} \rangle \langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal style='text-align:justify'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle$  y obtenemos:  $\langle o:p \rangle \langle /o:p \rangle \langle /span \rangle \langle /p \rangle$

$\langle p \text{ class=MsoNormal align=center style='text-align:center'} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle X = \langle /span \rangle \langle /b \rangle \langle \text{span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'} \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle P X P' \langle /b \rangle + \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle Q U Q' \langle /b \rangle \langle b \text{ style='mso-bidi-font-weight:normal'} \rangle$

normal'><o:p></o:p></b></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La matriz de covarianza<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image032.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302780"></o:OLEObject></xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se puede determinar por la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>X =</span></b><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>PXP</b> + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>QUQ</b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p></o:p></b></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si la respuesta escalar <span class=SpellE>y<sub>k</sub></span> del sistema está dada en términos del vector renglón <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>c</b> por la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Y<sub>k</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>cx</b><sub>k</sub></span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La varianza de la respuesta es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:117.75pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image033.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302781"></o:OLEObject></xml><![endif]></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>También podemos expresar la matriz <span class=GramE>E</span><span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k+m</sub></span><sub>

</sub><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>'<sub>k</sub></span>}  
 que corresponde a la función de autocorrelación en términos de variables  
 escalares. Para este propósito multiplicamos por <b style='mso-bidi-font-weight:  
 normal'>x</b>'<sub>k</sub> ambos lados de la ecuación:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD'>X</span></b><sub><span lang=ES-TRAD  
 style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>k+1</span></sub></span><span  
 lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = <span  
 class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Px</b><sub>k</sub></span>  
 +  
 <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Qu</b><sub>k</sub></span><sub><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Y tomamos el valor esperado de cada  
 producto vectorial. Si:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
 type="#\_x0000\_t175" style='width:57pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image031.wmz" o:title="">  
 </v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302782">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>obtenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032"  
 type="#\_x0000\_t175" style='width:71.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image034.wmz" o:title="">  
 </v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302783">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033"  
 type="#\_x0000\_t175" style='width:81pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image035.wmz" o:title="">  
 </v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302784">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD



style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=FR style='color:windowtext; mso-ansi-language:FR'>AX</span></b><span lang=FR style='color:windowtext; mso-ansi-language:FR'> + <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>XA</b></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>'</b> + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>BUB</b>'<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>=</b> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>0<o:p></o:p></b></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image038.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302788"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>y</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:windowtext'>E{<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t + </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='color:windowtext'>)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t)} = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>S</b>(</span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span></span><span lang=ES style='color:windowtext'>)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X, </b>0 </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span></span><span lang=ES style='color:windowtext'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>AX</span></b><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'> + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>XA</b> + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>BUB</b>'<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>=</b> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>0<o:p></o:p></b></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>A través de<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>E{<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t + </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t)} = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>S</b>(</span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>)<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X, </b>0 </span><span lang=ES

style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£</span></span><span lang=ES style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Aplicado a un sistema descrito por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image039.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302789"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>donde <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b>(t) es un ruido blanco dado por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="relestadvarest\_archivos/image040.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302790"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Para calcular la matriz de covarianza del vector de estado <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t),<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='margin-top:12.0pt;text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=FR style='color:windowtext;mso-ansi-language:FR'>X</span></b><span lang=FR style='color:windowtext;mso-ansi-language:FR'> = E{<span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b></span>t}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>'(t)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Los elementos</span><span lang=FR style='mso-ansi-language:FR'> diagonales de:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>E{<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t + </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>}<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>'(t)} = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>S</b></span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'>t</span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>X, </b>0 </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£</span></span><span lang=ES style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Son funciones de autocorrelación de las variables de estado. <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>S</b></span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>)es la matriz solución del sistema <span class=SpellE>e<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><sup>A</sup></b></span></span><sup><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span></sup><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>. <o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Si tomamos el proceso límite que se da cuando el intervalo de muestreo T es infinitesimal, <span class=SpellE>dt</span><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'>P</span></b><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'></span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®</span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>I</b></span><span lang=ES style='color:windowtext'> + <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A</b> <span class=SpellE>dt</span><span style='mso-spacerun:yes'> </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Q </b></span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®</span></span><span style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B</b> <span class=SpellE>dt</span><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>La ecuación que define la función </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> es:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:33pt' o:ole="">



```

<v:imagedata src="relestadvarest_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244302791">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.102 SISTEMAS DINÁMICOS. CONTROL MODAL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="controlmodal_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="controlmodal_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="controlmodal_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL MODAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>49</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-06T13:32:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-25T23:46:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>926</o:Words>
<o:Characters>5099</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>42</o:Lines>

```

```

<o:Paragraphs>12</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>6013</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;

```

```

mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>CONTROL
MODAL<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>En muchos problemas prácticos de control se
encuentran casos en los cuales es imposible la medición completa de un vector
de estado y más de uno menos de n variables de control se pueden aplicar a
los objetos a controlar. Luego el número de medidas m y/o el número de
controles r son menores que el orden del objeto. La matriz del controlador <b
style='mso-bidi-font-weight:normal'>K llega a ser rectangular con r <span
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>´
m elementos por lo que aparece una dificultad en la búsqueda de estos parámetros
controlables en el espacio de estados original, debido a que con r <span
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>´
m elementos sólo se puede lograr una corrección parcial en los n²
elementos de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>A y es difícil ver
los efectos de este control en la formulación original de espacio de estados,
dada por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke jointstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

```

$$\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{21600} \prod_{k=1}^{21600} \sum_{l=1}^0 \prod_{m=1}^2 \prod_{n=1}^{21600} \sum_{o=1}^{21600} \prod_{p=1}^{21600} \sum_{q=1}^{21600} \prod_{r=1}^{21600} \sum_{s=1}^{21600} \prod_{t=1}^{21600} \sum_{u=1}^{21600} \prod_{v=1}^{21600} \sum_{w=1}^{21600} \prod_{x=1}^{21600} \sum_{y=1}^{21600} \prod_{z=1}^{21600} \sum_{\dots}^{\dots}$$

Se obtiene una gran disminución en el número de elementos de **A** cuando se reduce a una diagonal o una forma canónica de **Jordan**

**L** por una transformación de coordenadas:

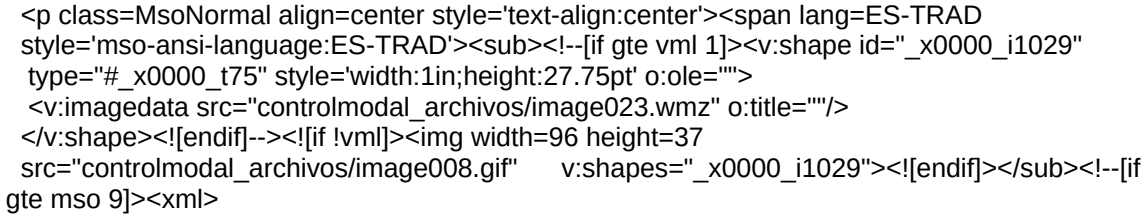
$$X = T^{-1} B T$$

Cuando todos los valores propios del objeto de control son distintos y reales, sólo estos valores propios aparecen como elementos diagonales de

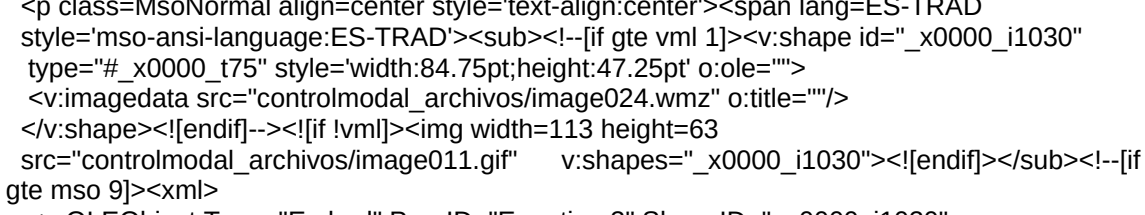
**L** es diagonal.

style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> condiciones que deben  
satisfacer varios grados de control modal son más restrictivas que las  
condiciones de controlabilidad y observabilidad. En esta parte nos vamos a  
limitar a condiciones de entrada cero. El estado correspondiente al punto  
fijo de operación estará considerado como el espacio de estados original.  
Como se muestra en la siguiente figura, el objeto controlado moralmente se  
puede ver como un subsistema de un sistema de control en cascada.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:365.25pt;height:186.75pt'>  
<v:imagedata src="controlmodal\_archivos/image003.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El sistema total también puede incluir,  
además del controlador modal <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>K</b>, un  
compensador hacia delante para disturbios medibles. Ya que el control modal  
en este esquema totalizador actúa para recolocar los modos originales del  
objeto a controlar, deseamos mover el punto de operación cambiando el vector  
de referencia de entrada <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>r</b>, la  
salida y la salida <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b> tendrá  
mejorías dinámicas con estos cambios.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Como se ve de la figura anterior el  
controlador modal se puede ver como una retroalimentación interna sumada a la  
retroalimentación externa del controlador G<sub>C</sub> que puede ser un PID  
o un PI. Desde este punto de vista se va a usar la gasa de control interno  
para modificar los valores propios de los sistemas (dinámica), mientras la  
gasa externa de control asegura cualquier estado deseado de  
equilibrio.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para estudiar el principio básico del  
control modal, primero consideraremos un caso ideal donde todos los elementos  
del vector de estado <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(s) son  
directamente medibles y el vector de control<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;  
mso-ansi-language:ES-TRAD'>U</span></b><sub><span lang=ES-TRAD  
style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>c</span></sub></span><span  
lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>(t) = <span  
class=Spelle><b style='mso-bidi-font-  
weight:normal'>Bu</b></span>(t)<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El objeto de control está descrito  
por:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:113.25pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="controlmodal\_archivos/image021.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302352"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para obtener la matriz  $n$  </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>'</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>n del controlador proporcional <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>K</b> debemos convertir la ecuación anterior a un dominio modal por:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>X</span></b><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Tx</b></span>\*<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Así que<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="controlmodal\_archivos/image022.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302353"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>u</span></b><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>\* = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>T</b><sup>-1</sup><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>c</sub><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si consideramos que todos los valores propios son reales y distintos, la matriz </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>L</span></span></b><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> de la ecuación<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

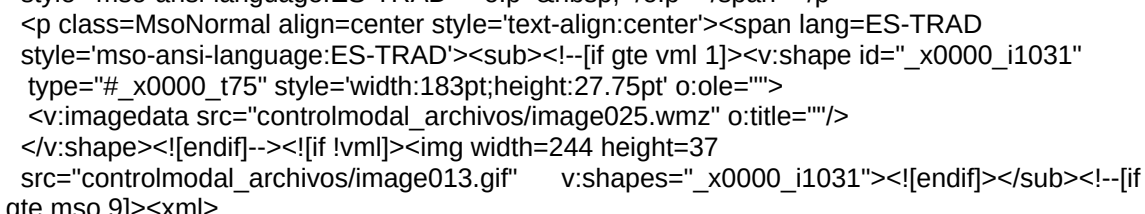


es diagonal, por lo que supondremos



la matriz del dominio modal deseado del objeto a controlar con control modal, donde  $p_1, \dots, p_n$  son los valores propios de la gasa cerrada del sistema controlado. Por un vector de retroalimentación de dominio modal

tenemos la ecuación del sistema de gasa cerrada



$$K = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

luego  $K$ , la matriz del dominio de retroalimentación modal se puede determinar por:

$$K = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Nuestro siguiente problema es el control independiente de  $q$  modos de un objeto de  $n$ -ésimo orden, donde  $q$  <  $n$  y  $q$  es el número de medidas si  $m$

$$y_o q$$
 es el número de controles si  $r$

$$m \cdot \dots = \dots$$

Un par de variables modales  $x$  y  $x+1$  que corresponden a un par complejo conjugado de valores propios que debe estar contenido en las  $q$  variables conjugadas como un par o borrados del conjunto como un par. Si un sistema tiene valores propios repetidos, está no es razón para un control modal para controlar solamente uno de ellos, en otras palabras, valores propios de alto orden

$$p \cdot \dots = \dots$$

deben ser todos incluidos o excluidos del control modal. Para propósito del control modales lógico considerar el control de los primeros modos  $q$  tales que:

$$\hat{A} \cdot \dots \leq 1$$

$$\dots \leq 3$$



style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&A</span></span>ep<sub>2</sub>  
<span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>3</span></span> <span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>A</span></span>ep<sub>3</sub>  
<span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>3</span></span></span>  
...</p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El vector del dominio modal <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>q</sub></span>\* en este caso es de q dimensiones y deben producirse por la medición del vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b>. El vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>y</b> <span class=Spelle>y</span> el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> en el espacio modal están relacionados por:</p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>Y</span></b><span style='color:windowtext'> = <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b></span>\*, <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>F</span></b><span style='color:windowtext'> = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>CT</b></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La matriz rectangular <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b> de m <span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>'</span></span> n consiste de una matriz cuadrada <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>m</sub></span> y una matriz rectangular <b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></span>F</b> de m <span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>'</span></span> (n – m), tal que:</p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="controlmodal\_archivos/image027.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302358"></o:OLEObject></xml><![endif]--></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Un modo orientado es práctico cuando existe <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sup>-1</sup>, esto es:</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span style='color:windowtext'>det<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>m</sub></span></span><span style='color:windowtext'> </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><sup>1</sup></span></span><span style='color:windowtext'> 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Consideraremos ideal a un sistema de medida cuando además de la ecuación anterior se cumple la siguiente condición:</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>F</span></b><sub><span style='color:windowtext'>m</span></sub></span><span style='color:windowtext'> = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La segunda condición implica que son observables <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>\*<sub>m+1</sub></span>, ..., <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>\*<sub>n</sub></span>.

En el diseño de sistemas de control modal es importante seleccionar puntos de medida y luego <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>C</b> de tal forma que la condición</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span style='color:windowtext'>det<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>m</sub></span></span><span style='color:windowtext'> </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='color:windowtext'> 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE>se</span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span class=SpellE>F<sub><span style='font-weight:normal'>n</span></sub></span></b> sean tan pequeños como sea posible. Lo anterior significa que la medida debe ser sensible a los primeros m modos diferenciando entre ellos y al mismo tiempo insensible a los modos rechazados. Se hace inobservable un modo a un elemento sensitivo cuando el sensor está localizado en un nodo de ese modo. Si conocemos bien el vector propio <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>T</b> de un sistema, se puede escoger la matriz de medición <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>C</b> siempre que se satisfaga la condición</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>F</span></b><sub><span style='font-weight:normal'>n</span></sub></span></p>

sean tan pequeños como sea posible. Lo anterior significa que la medida debe ser sensible a los primeros m modos diferenciando entre ellos y al mismo tiempo insensible a los modos rechazados. Se hace inobservable un modo a un elemento sensitivo cuando el sensor está localizado en un nodo de ese modo. Si conocemos bien el vector propio <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>T</b> de un sistema, se puede escoger la matriz de medición <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>C</b> siempre que se satisfaga la condición</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>F</span></b><sub><span style='font-weight:normal'>n</span></sub></span><span style='color:windowtext'> = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>También podemos establecer condiciones en la manipulación. El vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b> en el espacio de estados original, y el vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b>\* en el dominio modal definido por:</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="controlmodal\_archivos/image028.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244302359"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>están relacionados por la ecuación:</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>u</span></b><span style='color:windowtext'>\* = <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>Hu</b></span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>H</span></b><span style='color:windowtext'> = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>T</b><sup>-1</sup><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>B</b></span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Para tener un control modal efectivo se requiere que el vector de control en el dominio modal<b style='mso-bidi-font-weight:normal'> u</b>\* se convierta en <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b> en el espacio de estados óptimo y para que esto sea posible debe existir <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b><sup>-1</sup><sub>r</sub></span>, así que:</p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span style='color:windowtext'>Det</span></span><span style='color:windowtext'> <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>H</b><sub>r</sub></span></span></span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>'</span></span><span style='color:windowtext'> 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El control no provoca disturbios en <span class=SpellE>x\*<sub>r+1</sub></span>, ..., <span class=SpellE>x\*<sub>n</sub></span> si</p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:windowtext;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></b><span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='color:windowtext'>H</span></b><sub><span style='color:windowtext'>r</span></sub></span><span style='color:windowtext'> = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p>&nbsp;</o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE>esto</span> si todos los otros modos diferentes de r se hacen incontrolables.</p>

```

</td>
</tr>
</table>

```

```

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
color:windowtext'><o:p> </o:p></p>

```

```

</div>

```

```

</body>

```

```

</html>

```

### 3.103 SISTEMAS NO LINEALES. INTRODUCCION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sistnolineales_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sistnolineales_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sistnolineales_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS NO LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>3</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T17:53:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T19:19:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>536</o:Words>
<o:Characters>2951</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>24</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3481</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>

```

```

<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>

```

```

<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='color:red'>SISTEMAS NO LINEALES<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Cuando estudiamos
un sistema físico, lo que buscamos es construir un modelo matemático, pero el
modelo matemático que mejor describe al sistema depende de los factores físicos
que incluyen intervalos de variables, consideraciones acerca de las
componentes del sistema y sus acoplamientos. Como se ve, modelar es un
problema que no es trivial, que requiere conocer al sistema antes de
modelarlo. Estas notas para un curso son el estudio de los modelos
matemáticos de los sistemas físicos que se describen por medio de ecuaciones
diferenciales no lineales.</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Veamos ejemplos.
Como primer caso vamos a estudiar un péndulo simple, el cual se describe por
medio de la ecuación diferencial:</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte
vml 1]><v:shapetype
 id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
 path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
 <v:stroke joinstyle="miter"/>
 <v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:75pt;
 height:30.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="sistnolineales_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988753">
 </o:OLEObject>
 </p>
</td>
</tr>
</table>

```

</xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>donde</span></span><span lang=ES> l es la longitud del péndulo y g es la aceleración gravitacional.</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Si hacemos la aproximación para ángulo pequeño de que:</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:42.75pt;height:11.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image003.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988754"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>la ecuación diferencial se puede escribir como:</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:54pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image005.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988755"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>La solución a esta ecuación es:</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image007.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988756"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>donde</span></span><span lang=ES> A y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span><span lang=ES> son constantes determinadas por las condiciones iniciales. Esta ecuación diferencial describe un oscilador armónico simple y es un ejemplo de ecuación diferencial lineal.</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Las ecuaciones

diferenciales lineales diferenciales lineales tienen la propiedad de superposición, propiedad que podemos definir como:

Si  $x_1$  y  $x_2$  son soluciones de la ecuación diferencial, entonces  $x_1 + b x_2$  también será una solución de la ecuación diferencial, donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias, el sistema es lineal.

Si ahora tomamos la ecuación:

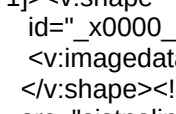
$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

la aproximación para ángulo pequeño, tendremos que la solución no satisface el principio de superposición, ya que el periodo de oscilación en este caso depende de las condiciones iniciales.

Un ejemplo clásico de ecuación diferencial no lineal es la ecuación:

$$x'' + x = \epsilon x^3$$

se conoce como ecuación de Van der Pol's. Esta ecuación se da en el circuito de la siguiente figura:





id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:51.75pt;height:29.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988759">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Esta ecuación  
presenta un ciclo límite, los cuales no se presentan en los sistemas  
lineales.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Para definir un  
sistema no lineal vamos a emplear el concepto de linealidad, el cual nos dice  
que los sistemas que satisfacen el concepto del principio de superposición  
son lineales y los que no lo satisfacen son no lineales.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Consideremos un  
sistema caracterizado por la ecuación:</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte  
vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:15pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988761">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES>donde</span></span><span lang=ES> x es un vector, la función X(.,.)  
es continua en todos sus argumentos y sus derivadas parciales también, u(t)  
es el vector de entrada y x(t) es el estado del sistema. Vamos a considerar  
que u(t) es una función continua conocida, la condición de continuidad es  
suficiente, aunque no necesaria, para la existencia de una solución única en  
el intervalo [t<sub>0</sub>, t<sub>0</sub> + </span><span lang=ES  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span  
lang=ES>] para alguna </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>e</span></span><span lang=ES>, y con la condición inicial:</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte  
vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988762">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Sea  $x(t, x_{>0</sub>, t_{>0</sub>, u)$  la solución a la ecuación diferencial, con la condición inicial  $x_{>0</sub>$  en  $t = t_{>0</sub>$  y la entrada  $u(t), t$  </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><sup>3</sup></span></span><span lang=ES>  $t_{>0</sub>$ , entonces la ecuación:</span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image021.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988763"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>es lineal porque satisface las siguientes propiedades básicas:</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>1. Linealidad de estado cero.</span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='margin-left:14.2pt;text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:149.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image023.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988764"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></p>  
<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>donde</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span lang=ES>x es el estado cero del sistema para toda entrada  $u_{>1</sub>}$   $u_{>2</sub>}$  y constantes a y b.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>2. Linealidad de entrada cero.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:210pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image025.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"></o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></p>

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988765">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify'><span  
 class=GramE><span lang=ES>donde</span></span><span lang=ES> </span><span  
 lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><sub><span  
 lang=ES>u</span></sub></span><span lang=ES> denota a la función de entrada cero,  
 para los estados  $x_{<sub>0</sub>}$  y  $x_{<sub>0</sub>}$  y las  
 constantes a y b.</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>3. Propiedad de  
 descomposición.</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte  
 vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:174pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolineales\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]--><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
 gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988766">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]--></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify'><span  
 class=GramE><span lang=ES>para</span></span><span lang=ES> todo estado  
 $x_{<sub>0</sub>}$   
 y entrada u.</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </td>  
 </tr>  
 </table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";  
 color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.104 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE ANALISIS. INTRODUCCION

```
<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metodanalisis_archivos/filelist.xml">
<title>METODOS DE ANALISIS</title>
```

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>1</o:Revision>
 <o:TotalTime>2</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-08-30T17:58:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-08-30T18:00:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>192</o:Words>
 <o:Characters>1059</o:Characters>
 <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
 <o:Lines>8</o:Lines>
 <o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>1249</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}

@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}

div.Section1
 {page:Section1;}

/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:827938641;
 mso-list-type:hybrid;

```

```

mso-list-template-ids:-1797594 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>METODOS DE
ANALISIS</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Los dos conceptos
básicos en el análisis de sistemas no lineales son el de estabilidad y
oscilación. La estabilidad la asociamos con los puntos de equilibrio del sistema o las
trayectorias solución del sistema. Centramos nuestra atención alrededor de las
perturbaciones que disturban al sistema de un punto de equilibrio, o alteren la trayectoria del
sistema, y por lo mismo, su comportamiento.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La oscilación aparece
en sistemas no lineales como periódica o no periódica, forzada o no forzada. En
el análisis del sistema son de interés las condiciones para la existencia de
oscilaciones, las fronteras de amplitud y el periodo de oscilación.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Para trabajar con problemas
no lineales contamos con métodos de análisis que podemos clasificar
en:</p>

```



```

<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style15 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #FFFFFF;
 font-weight: bold;
}
-->
</style></head>

<body>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="552">Curso de Control > Sistemas no Lineales >
Métodos de Análisis </td>
<td width="234"><div align="right">
sistnolineal.htm" target="_parent"><< Regreso a la página de Sistema no Lineales
</div></td>
</tr>
</table>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
background="..">
<tr>
<td align="center"><div align="center">METODOS DE ANALISIS </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<div align="left"></div>
<p> </p>
</body>

```

</html>

### 3.105 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE ANALISIS. INTRODUCCION. MARCO 5

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.style17 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td><div align="center">INDICE</div></td>
</tr>
</tr>
```



<span class="style17"> <a href="metodanalisis.htm" target="mainFrame">Introducci&amp;ocirc;n</a> </span>
<span class="style17"> <a href="anaisislplanofase.htm" target="mainFrame">An&amp;acirc;lisis del Plano Fase</a> </span>
<span class="style14"> <span class="style17"> <a href="sistlinsegorden.htm" target="mainFrame">Sistema lineal de 2&amp;ordm; Orden</a> </span> </span>
<span class="style14"> <span class="style17"> <a href="sistnolinsegorden.htm" target="mainFrame">Sistema no lineal de 2&amp;ordm; Orden</a> </span> </span>
<span class="style14"> <span class="style17"> <a href="anlglobalplanofase.htm" target="mainFrame">An&amp;acirc;lisis global del Plano Fase</a> </span> </span>

### 3.106 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE ANALISIS. ANALISIS DEL PLANO FASE

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="anaisislplanofase_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="anaisislplanofase_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="anaisislplanofase_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ANALISIS DEL PLANO FASE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>

```

```

<o:Created>2007-08-30T18:00:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:02:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>577</o:Words>
<o:Characters>3179</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>26</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3749</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:655308323;
 mso-list-type:hybrid;

```

```

mso-list-template-ids:-1900805882 -131707788 201981977 201981979 201981967
201981977 201981979 201981967 201981977 201981979;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>ANALISIS DEL PLANO
FASE<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Vamos a considerar un
sistema descrito por un par de ecuaciones diferenciales de primer orden
acopladas:</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

```

```

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:62.25pt;
height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image001.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

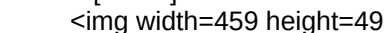
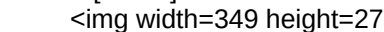
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984162">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image003.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984163">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El método a estudiar
es para sistemas de segundo orden.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La trayectoria de un sistema
de segundo orden se puede graficar en un plano, por lo que es útil en el estudio de
sistemas de segundo orden.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>La solución al sistema
de ecuaciones la vamos a estudiar en el plano (x_1 , x_2), plano que
llamaremos plano fase.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Sean:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:117.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image005.wmz" o:title="">

```

</v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984164">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span  
 lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES>las</span></span><span  
 lang=ES> soluciones al sistema de ecuaciones, donde ( $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ) es  
 la condici&oacute;n inicial en  $t = 0$ . La soluci&oacute;n se describe al graficar en el plano fase  
 una curva </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>G</span></span><span  
 lang=ES> contra  $t$  como par&aacute;metro, y la curva </span><span lang=ES  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span  
 lang=ES> se llama la trayectoria. Un punto ( $x_1$ ,  $x_2$ ) en el plano fase  
 se llama punto singular del sistema de ecuaciones, si:</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span  
 lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984165">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984166">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>y</span></span><span lang=ES> se considera un punto aislado del sistema. Por el t&eacute;rmino aislado vamos a entender que existe una vecindad del punto ( $x_1$ ,  $x_2$ ) en el plano fase, tal que esta vecindad no contiene otro punto singular.</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>La consideraci&oacute;n de continuidad de la funci&oacute;n:</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:30.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image011.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984167">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>nos</span></span><span lang=ES> permite expandir las funciones  $X_1(x_1, x_2)$  y  $X_2(x_1, x_2)$  en series de Taylor en la vecindad del punto singular, en la forma:</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:336pt;height:36.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image013.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984168">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:344.25pt;height:36.75pt'

o:ole="">  
<v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

</sub>  
src="anaisislplanofase\_archivos/image016.gif" v:shapes="\_x0000\_i1027">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984169">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES>donde</span></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:261.75pt;height:20.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

</sub>  
src="anaisislplanofase\_archivos/image018.gif" v:shapes="\_x0000\_i1028">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984170">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span  
lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES>donde</span></span><span  
lang=ES> 0 indica el comportamiento asintótico de la función. Este  
símbolo se emplea cuando la naturaleza exacta de la función no es material al  
argumento pero sí se requiere su comportamiento asintótico.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span  
lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Veamos, consideremos las  
funciones f(x) y g(x) definidas <span class=GramE>en </span></span><span  
lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&Acirc;</span></span><span  
lang=ES>. Sea x<sub>0</sub> el punto límite del conjunto <span class=GramE>en  
</span></span><span  
lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&Acirc;</span></span><span  
lang=ES>. El elemento x<sub>0</sub> puede o no pertenecer al conjunto, luego  
definiremos:</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span  
lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:  
-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops:list 0cm'>  
<![if !supportLists]>  
<span







Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&Acirc;</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&Ccedil;</span></span><span lang=ES> N</span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES>,<sub>x0</sub>.</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Vamos a emplear la siguiente notaci&oacute;n:</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:15.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image023.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984174">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:261.75pt;height:36.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image025.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984175">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:174.75pt;height:20.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image027.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



```

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984176">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:176.25pt;height:20.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984177">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>el sistema se reduce a:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:63pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

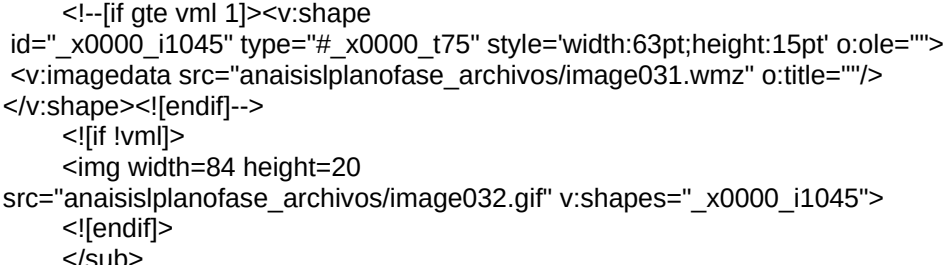
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984178">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

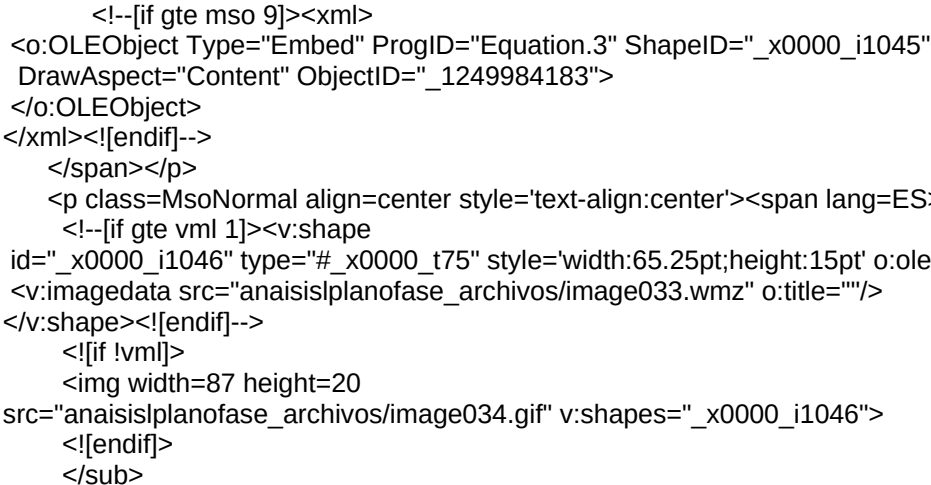
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984179">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>

```



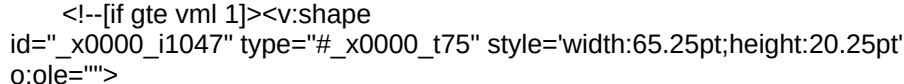
Podemos definir un punto singular en el origen para el sistema:





que

es estable si para todo  $\epsilon > 0$ , debe existir un  $\delta$  tal que si:



<v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984185">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>la</span></span><span lang=ES> soluci&oacute;n Y<sub>1</sub>(t, Y<sub>10</sub>, Y<sub>20</sub>), Y<sub>2</sub>(t, Y<sub>10</sub>, Y<sub>20</sub>), empezando desde (Y<sub>10</sub>, Y<sub>20</sub>) en t = 0 satisface:</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:150pt;height:20.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984186">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>para</span></span><span lang=ES> toda t</span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup3;</span></span></span><span lang=ES> 0. </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>El punto singular es inestable si no es estable.</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Si despreciamos los t&eacute;rminos de orden mayor a los lineales en la ecuaci&oacute;n:</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:63pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="anaisislplanofase\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->

```

 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984187">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 </p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1050" type="#_x0000_t75" style='width:65.25pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984188">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 </p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>podemos construir:</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1051" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image045.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984189">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 </p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1052" type="#_x0000_t75" style='width:77.25pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image047.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984190">
 </o:OLEObject>

```

```

</xml><![endif]-->
 </p>
 <p
 class=MsoNormal
 style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p
 class=MsoNormal
 style='text-align:justify'>que</p>
lang=ES> ahora describe un sistema lineal en lugar del no lineal. Se asume que.</p>
 <p
 class=MsoNormal
 style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1053" type="#_x0000_t75" style='width:80.25pt;height:15pt o:ole="">
<v:imagedata src="anaisislplanofase_archivos/image049.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984191">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 </p>
 <p
 class=MsoNormal
 style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Una singularidad que
satisface esta ecuación se denomina una singularidad simple. Una singularidad simple
es una singularidad aislada.</p>
 <p
 class=MsoNormal
 style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El comportamiento cualitativo
consiste en dibujar trayectorias en el plano fase y la gráfica se llama gráfica del
plano fase. En algunos casos es posible deducir el comportamiento cualitativo de un sistema
no lineal, del comportamiento de un sistema lineal y bajo este punto de vista discutiremos los
sistemas lineales de segundo orden y derivaremos la condión bajo la cual un
comportamiento se da bajo un sistema no lineal.</p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.107 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE ANALISIS. SISTEMAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">

```



```

<link rel=File-List href="sistlinsegorden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sistlinsegorden_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sistlinsegorden_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:02:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T19:16:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>743</o:Words>
<o:Characters>4091</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>34</o:Lines>
<o:Paragraphs>9</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4825</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE

```

```

 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>SISTEMAS LINEALES DE SEGUNDO
ORDEN<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>El sistema lineal
de segundo orden:</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte
vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>

```

```

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;
height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlinsegorden_archivos/image092.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988600">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte
vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:83.25pt;height:15pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="sistlinsegorden_archivos/image093.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988601">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>se puede escribir
como:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte
vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:12pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="sistlinsegorden_archivos/image094.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988602">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>En notación
matricial, donde A es una matriz 2 <span lang=ES style='font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>'<span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>' 2 y su
determinantes cero. La solución del sistema está dada por:</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>

```

$$z = 0$$

donde  $z = 0$  es la condición inicial en  $t = 0$ . De esta forma el comportamiento cualitativo del sistema:

$$\dot{z} = -z$$

deducirse de los valores propios de la matriz  $A$ .

$$W = T^{-1} z$$

Donde  $T$  es una matriz singular de  $2 \times 2$ .

La ecuación diferencial para  $W$  está dada por:

$$\dot{W} = -W$$

Las formas canónicas y las soluciones a la anterior ecuación son:

1. Forma diagonal.

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \right)$$

y su solución:

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \right)$$

con

valores propios

1

y

2

Forma de

Jordan

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

con solución:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

3. Forma conjugada compleja.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

con solución:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



lang=ES>, </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES>, y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b</span></span><span lang=ES> son reales y  $W <sub>10</sub>$ ,  $W <sub>20</sub>$ , son condiciones iniciales.</span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Dependiendo de la magnitud y signo de los valores propios aparecen varias configuraciones como:</span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Nodo. </span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Sean </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><sub><span lang=ES>1</span></sub><span lang=ES> y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><sub><span lang=ES>2</span></sub></span><span lang=ES> negativas. El punto ( $W <sub>1</sub>$ (t),  $W <sub>2</sub>$ (t)) tiende al origen conforme t </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>@</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥</span></span><span lang=ES>, y la trayectoria que comienza en un punto cualquiera ( $W <sub>10</sub>$ ,  $W <sub>20</sub>$ ) se aproxima al origen, como se ve en la figura.</span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:168pt;height:160.5pt'><v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image033.png" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Esta configuración se llama nodo estable. </span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>En el caso en el cual </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><sub><span lang=ES>1</span></sub><span lang=ES> y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><sub><span lang=ES>2</span></sub></span><span lang=ES> son positivos, el punto ( $W <sub>1</sub>$ (t),  $W <sub>2</sub>$ (t)) tiende del origen hacia fuera conforme t </span><span lang=ES></span></p></div><div data-bbox=





Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥</span></span><span lang=ES>. El movimiento del punto (<span class=GramE>W<sub>1</sub></span>t), W<sub>2</sub>(t)) se dirige desde el origen a lo largo del eje x de W, y de nuevo del origen a lo largo del eje x de W<sub>2</sub>. La configuración se muestra en la figura:</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:165.75pt;height:165pt'>
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image037.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>En el caso de </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><sub><span lang=ES>2</span></sub><span lang=ES> &lt; 0 &lt; </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><sub><span lang=ES>1</span></sub><span lang=ES> aparece una configuración similar.</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Foco.</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Si los valores propios de A son complejos conjugados con los valores </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>±</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b</span></span><span lang=ES>, la TAT<sup>-1</sup> tiene la forma de la figura anterior. Esta configuración se estudia mejor en coordenadas polares. Sea:</span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:57.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image108.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988618">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><!--</span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image109.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988619">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>por lo tanto:</span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image110.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988620">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:24.75pt;height:17.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image111.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988621">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:17.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image112.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988622">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image113.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988623">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><sub><!--[if gte mso 9]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:17.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image114.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988624">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></p>

donde  $R_0$  y  $0$  son condiciones iniciales para  $R$  y  $0$  respectivamente. Dependiendo de  $f$  y  $a$  tenemos:

Caso 1.  $R(t)$

@

0 conforme t

@

0. Espiral estable

Spelle

Caso 2.  $R(t)$

@

conforme t

@

0. Espiral inestable.

Caso 3.

class=GramE>R(</span>t) = R<sub>0</sub> para toda t. </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> = 0</span><span lang=ES>. Centro.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>El centro es un caso degenerado de espiral. Las configuraciones se muestran en la figuras (a), (b), (c) respectivamente.</span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:106.5pt;height:108.75pt'>  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image051.png" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:109.5pt;height:117.75pt'>  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image053.png" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:133.5pt;height:112.5pt'>  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image055.png" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><span style='mso-spacerun:yes'>  
</span>(a)<span style='mso-spacerun:yes'>  
</span>(b)<span style='mso-spacerun:yes'>  
</span>(c)<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>En el plano fase existen líneas que tienen una importancia muy grande para ayudar a dibujar las gráficas en el plano fase. Las líneas a lo largo de:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:30.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image114.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988624">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image115.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988625">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language: ES-MX'>a lo largo de la línea:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:78pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image116.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988626">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language: ES-MX'>para<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image115.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988627">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language: ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>la</span></span><span style='mso-ansi-language: ES-MX'> trayectoria se mueve paralela al eje z<sub>1</sub></span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language: ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language: ES-MX'>Se puede ver que las ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:30.75pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image114.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988628">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language: ES-MX'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image115.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988629">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>no</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> pueden tomar este valor al mismo tiempo excepto en el origen y esto porque el origen es un punto aislado, una singularidad aislada. Esta situación se muestra en la figura.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:135pt;height:141pt'>  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image063.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>La dirección de las flechas se evalúa calculando la derivada diferente de cero.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Una línea a lo largo con:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:24pt;height:12.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image117.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988630">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Sea:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:51.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image118.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988631">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1063" type="#\_x0000\_t75" style='width:50.25pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image119.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988632">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>de<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:15pt'

o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image092.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988633">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt'

o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image120.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988634">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>tenemos que:</span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span

style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1066"

type="#\_x0000\_t75" style='width:219.75pt;height:17.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image121.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988635">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

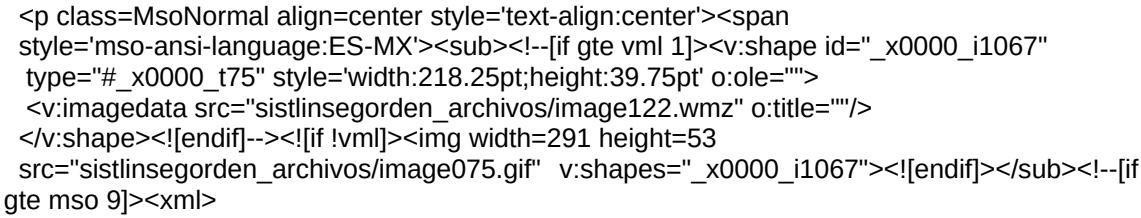
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Si </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> = </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><sub><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>0</span></sub><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> es una solución, luego </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> = </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span></span></p>

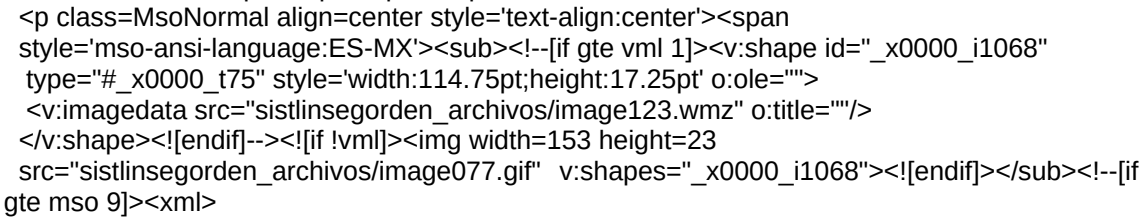


+

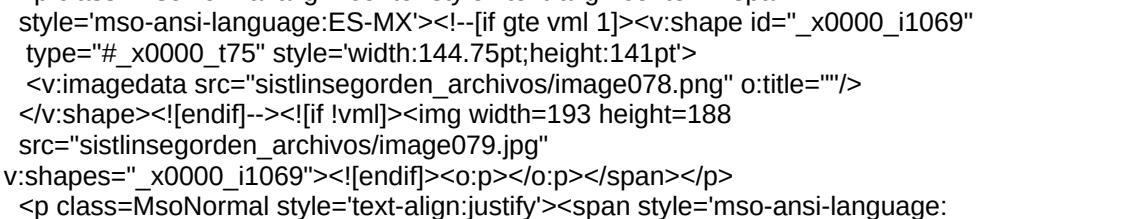
también será una solución, por lo que podemos rescribir la ecuación como:



donde:



las direcciones reales por las cuales  $r$  va de máximo a mínimo. La situación se muestra en la figura, en la cual la dirección de las flechas se determinan evaluando la derivada de



la línea a lo largo de:



style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1070" type="#\_x0000\_t75" style='width:26.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image124.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1070" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988638"></o:OLEObject></xml><![endif]></o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>De nuevo empleando</span></o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1071" type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image092.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1071" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988639"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1072" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image120.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1072" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988640"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>se convierte en:</span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1073" type="#\_x0000\_t75" style='width:215.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image125.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1073" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988641"></o:OLEObject></xml><![endif]></o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Los ceros de la derivada de </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> son:</span></o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1074"

type="#\_x0000\_t75" style='width:3in;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image126.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1074"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988642">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'>Si </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>q</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> = </span><span  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>q</span></span><sub><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'>0</span></sub><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'> es una solución, luego </span><span style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'> = </span><span style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'> + </span><span style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><sub><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'>0</span></sub><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'> también será una solución, por lo que podemos rescribir la ecuación  
como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1075"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:210pt;height:39.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image127.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1075"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988643">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'>si<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1076"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:114.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistlinsegorden\_archivos/image128.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1076"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988644">

```

</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>se tienen direcciones reales a lo largo de las cuales podemos
obtener:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1077"
type="#_x0000_t75" style='width:26.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistlinsegorden_archivos/image124.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if
gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1077"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988645">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>Esto se muestra en la figura.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1078"
type="#_x0000_t75" style='width:147pt;height:141pt'>
<v:imagedata src="sistlinsegorden_archivos/image090.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.108 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE ANALISIS. SISTEMAS NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">

```

```

<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sistnolinsegorden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sistnolinsegorden_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sistnolinsegorden_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS NO LINEALES DE SEGUNDO ORDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:04:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:07:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>210</o:Words>
<o:Characters>1157</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>9</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1365</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}

```

```

span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>SISTEMAS NO LINEALES DE
SEGUNDO ORDEN</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>SISTEMAS NO LINEALES DE
SEGUNDO ORDEN</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>El comportamiento del sistema lineal de segundo orden dado
por:</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>SISTEMAS NO LINEALES DE
SEGUNDO ORDEN</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 </sub>
 </p>
 </div>
 </td>
</tr>
</table>

```

```

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:75.75pt;
height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistnolinsegorden_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984536">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistnolinsegorden_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984537">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>está<span
style='mso-ansi-language:
ES-MX'> relacionado con el no lineal dado por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027"
type="#_x0000_t75" style='width:68.25pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="sistnolinsegorden_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984538">
</o:OLEObject>

```

</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984539">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>por</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> una variedad de resultados a los cuales llegamos dependiendo del tama&ntilde;o de las no linealidades.</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Teorema</span></b><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>. La estructura de las trayectorias en la vecindad de un punto singular en el origen para la ecuaci&oacute;n diferencial lineal:</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:12pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984540">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>y</span></span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'> la ecuaci&oacute;n diferencial no lineal:</span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>



  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984541">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'>son</span></span><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'> similares en el caso del nodo, la silla de montar, y la espiral.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:  
normal'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'>Prueba</span></b><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'>. Sea:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:168.75pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image013.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]>-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984542">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'>y</span></span><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'> en el origen para que el sistema lineal sea una espiral estable como </span><span  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'> &lt; 0, </span><span style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>b</span></span><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'> &gt; 0. <span class=GramE>en</span> este caso el sistema lineal se puede  
transformar a coordenadas polares, dando:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:  
ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image015.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]>-->  
<![if !vml]>

[illegible]

style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:81.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984545">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
 style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984546">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 style='mso-ansi-language:ES-MX'>donde</span></span><span style='mso-ansi-language:  
 ES-MX'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span  
 style='mso-ansi-language:ES-MX'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984547">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:60.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984548">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Podemos elegir  $R^*$  tal  
 que:</span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984549">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:84pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="sistnolinsegorden\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984551">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES>para</span></span><span  
 lang=ES>  $R'$  &lt;  $R^*$ .</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span  
 lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Si las condiciones iniciales  
 est&aacute;n dentro del c&iacute;rculo de radio  $R^*$ , se ve que  $R'$  </span><span  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span  
 style='mso-ansi-language:ES-MX'> 0 y </span><span style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span style='mso-ansi-language:  
 ES-MX'>(t) </span><span style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

```

Symbol'>® <span
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥ conforme t <span style='font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:
ES-MX;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>® <span style='font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥<span style='mso-ansi-
language:
ES-MX'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span style='mso-ansi-language:ES-
MX'><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.109 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE ANALISIS. ANALISIS GLOBAL DEL PLANO FASE

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="anlglobalplanofase_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="anlglobalplanofase_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="anlglobalplanofase_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ANALISIS GLOBAL DEL PLANO FASE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:07:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:08:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>295</o:Words>
<o:Characters>1626</o:Characters>

```

```

<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>13</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1918</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:937173852;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-2006033980 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;

```

```

text-indent:-18.0pt;}
@list l1
{mso-list-id:1800763312;
mso-list-type:hybrid;
mso-list-template-ids:-10056862 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l1:level1
{mso-level-tab-stop:18.0pt;
mso-level-number-position:left;
margin-left:18.0pt;
text-indent:-18.0pt;}
ol
{margin-bottom:0cm;}
ul
{margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

```

```

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

```

```

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

```

```

<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>ANALISIS GLOBAL DEL PLANO
FASE</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:
ES-MX'>ANALISIS GLOBAL DEL PLANO
FASE</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Para los sistemas lineales y
no lineales, es similar la estructura de las trayectorias bajo condiciones posibles de no
linealidad. Esto posibilita graficar las trayectorias del plano fase en la vecindad de un punto
singular. Si el sistema no lineal tiene varios puntos singulares, podemos graficar las
trayectorias en la vecindad de cada uno de estos puntos singulares, ya que la soluci&ocaron;
es única. Bajo ciertas condiciones es posible construir las trayectorias para todo el
plano fase, a partir de conocer las trayectorias en la vecindad de todos los puntos
singulares.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>ANALISIS GLOBAL DEL PLANO
FASE</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Vamos analizar la
ecuaci&ocaron; de movimiento del péndulo descrito por:</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>ANALISIS GLOBAL DEL PLANO
FASE</p>

```

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
 id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
 path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
 <v:stroke joinstyle="miter"/>
 <v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;
 height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="anlglobalplanofase\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984649">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 </span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sabemos que:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026"
 type="#\_x0000\_t75" style='width:26.25pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="anlglobalplanofase\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984650">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->



<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> lo que tenemos que las ecuaciones del sistema son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:26.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="anlglobalplanofase\_archivos/image005.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984651">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:53.25pt;height:12.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="anlglobalplanofase\_archivos/image006.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984652">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

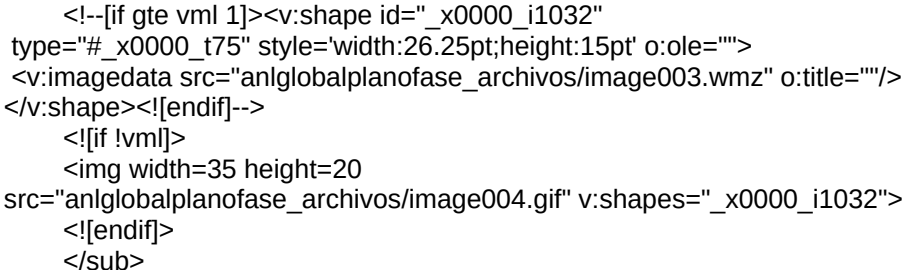
<o:p></o:p></span></p>

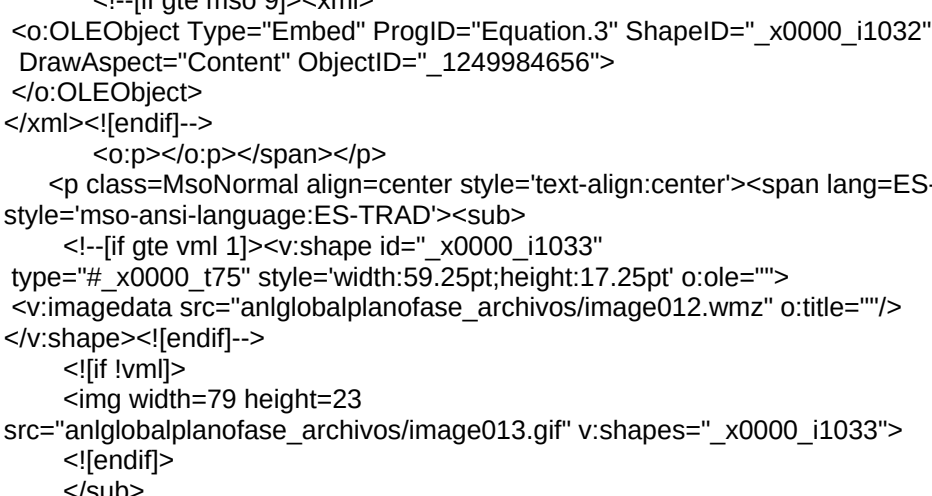
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

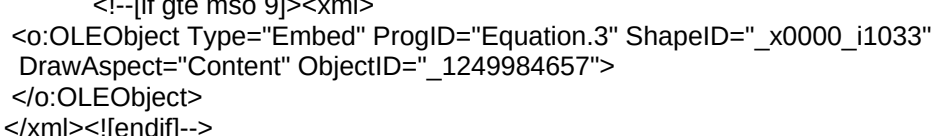
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El punto singular del sistema <span class=Spelle>est&ccedil;a</span> en (n</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>,o</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>) con n = </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&plusmn</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>1, </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:



En la vecindad del punto singular las ecuaciones son:







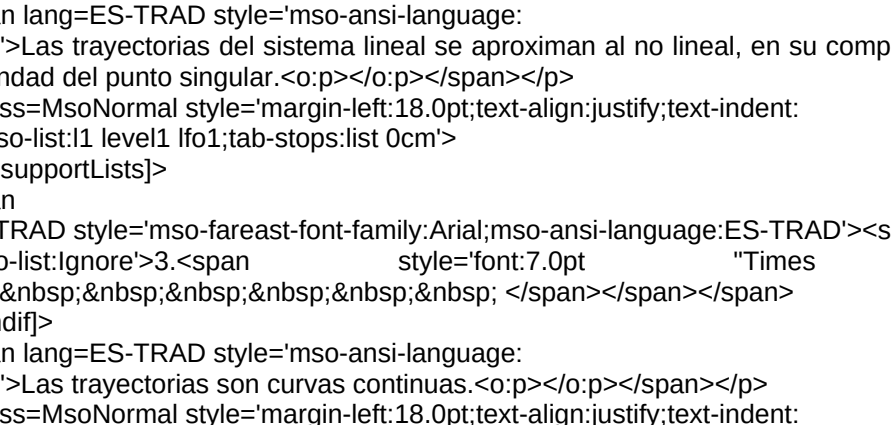
que da un punto de silla de montar si  $n$  es par o un centro si es impar.

Podemos ver que las trayectorias no se interceptan, a excepción del punto singular, porque la solución es única.

Las trayectorias del sistema lineal se aproximan al no lineal, en su comportamiento en la vecindad del punto singular.

Las trayectorias son curvas continuas.

Los centros no degeneran en espirales, se tiene el retrato de fase completo como se ve en la figura.



El procedimiento que seguimos fue:

[illegible]

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vm1"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="establocalsisnolin_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="establocalsisnolin_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="establocalsisnolin_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
```

```

<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:13:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:14:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>192</o:Words>
<o:Characters>1058</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>8</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1248</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";

```

```

 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:605042502;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:2047651992 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>ESTABILIDAD
LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>En el caso de sistemas de segundo orden se ha
encontrado que las estructuras de las trayectorias en la vecindad del punto de equilibrio para
los sistemas lineales y no lineales, están relacionados. Para sistemas de n-
ésimo orden es válido un resultado similar.<o:p></o:p></p>

```





[illegible]

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Prueba: Elegimos la transformaci&oacute;n T dada por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:42.75pt;height:14.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985029">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>el</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> sistema<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:12pt' o:ole="">

<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985030">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:14.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

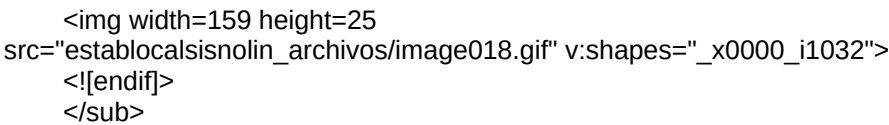
<!--[if gte mso 9]><xml>

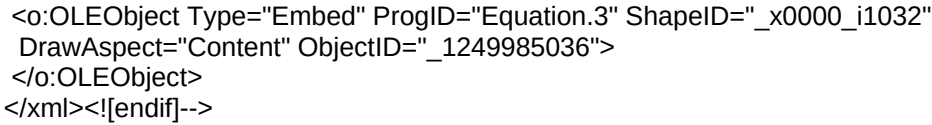
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985031">

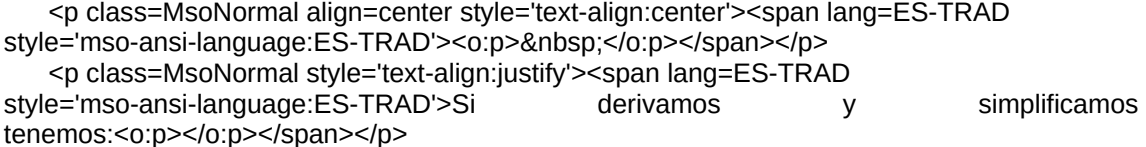
</o:OLEObject>

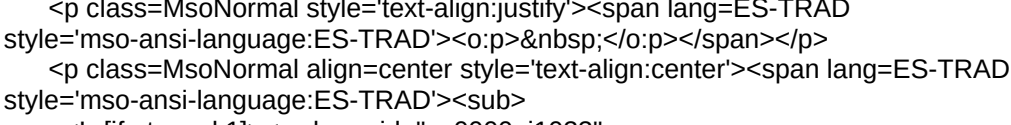
</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:63pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985032">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> las </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>'s son los valores propios del sistema y <span class=SpellE>b<sub>ij</sub></span> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, donde </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; 0 es un n&uacute;mero dado. Si aplicamos la transformaci&oacute;n al sistema no lineal<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>

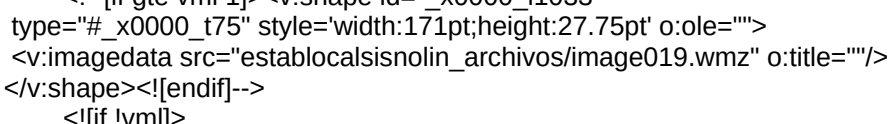
<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985033">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>obtenemos</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:183.75pt;height:32.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985034">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> f(&middot;) satisface las mismas  
 condiciones que f(&middot;).<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sea:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:30.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985035">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:18.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>

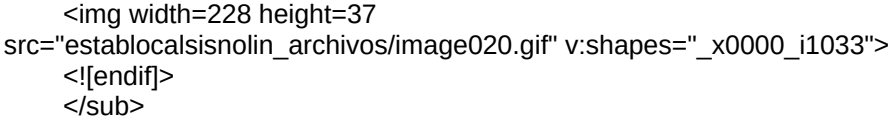


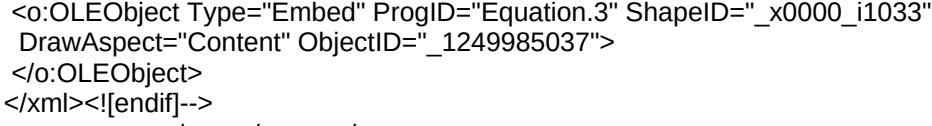


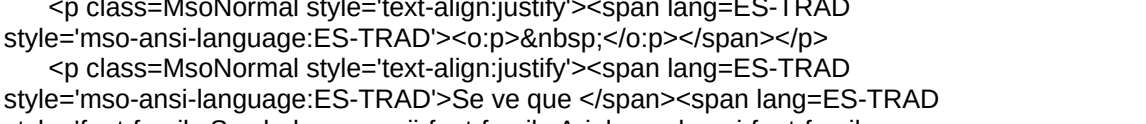


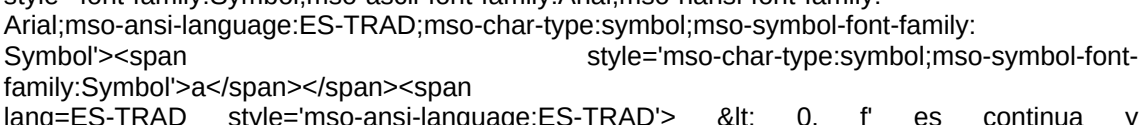


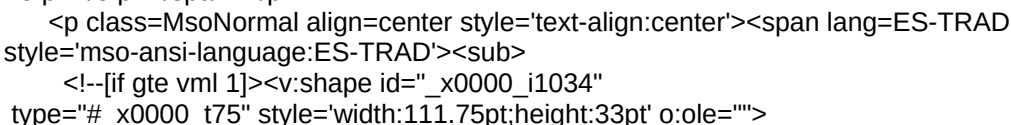


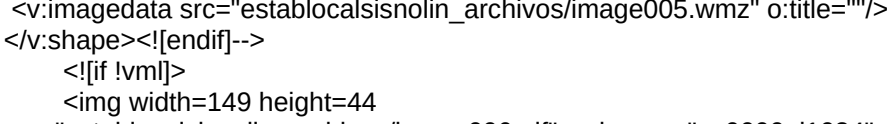


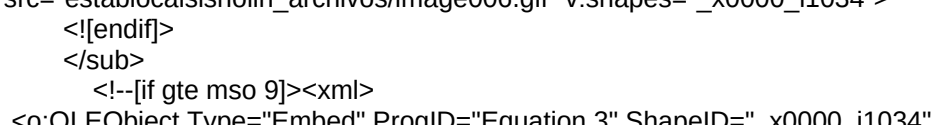


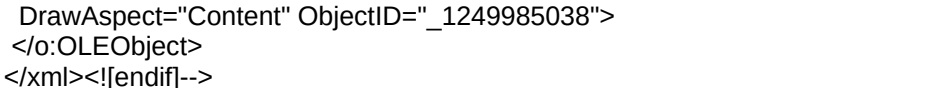












```

<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>se tiene que:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" _x0000_i1038"
type="# _x0000_t75" style='width:42pt;height:29.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="establocalsisnolin_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID=" _x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID=" _1249985039">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y el sistema es asintóticamente
estable.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.111 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}

```

```

}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style15 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #FFFFFF;
 font-weight: bold;
}
-->
</style></head>

<body>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="552">Curso de Control > Sistemas no Lineales >
Estabilidad </td>
<td width="234"><div align="right"> <a href=" ../sistnolineal.htm"
target="_parent"><< Regreso a la página de Sistema no Lineales
</div></td>
</tr>
</table>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
background=" ../Images/encabezado.gif">
<tr>
<td background=" ../Images/control2.gif"><div align="center">ESTABILIDAD</div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<div align="left"></div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.112 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}

```

```

.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.style17 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td><div align="center">INDICE</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Estabilidad de Sist no Lineal
</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Estabilidad de Sistema Lineal
</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Estabilidad Local Sis no
Lin</div></td>
</tr>
<tr>

```



```
 Método Directo de Liapunov </div></td> </tr> <tr> Método Frecuencia de Popov </div></td> </tr> </table> <p class="style1"> </p> </div> </body> </html> | |
```

### 3.113 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="estsislineales_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="estsislineales_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="estsislineales_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:11:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:12:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>251</o:Words>
<o:Characters>1383</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>11</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1631</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>

```

```

<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->

```

</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

| <b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES</span></b></p>  <span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sea el sistema caracterizado por:</span></span></span></p>  <span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  <!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">  <v:stroke joinstyle="miter"/>  <v:formulas>  <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>  <v:f eqn="sum @0 1 0"/>  <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>  <v:f eqn="prod @2 1 2"/>  <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>  <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>  <v:f eqn="sum @0 0 1"/>  <v:f eqn="prod @6 1 2"/>  <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>  <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>  <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>  <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>  </v:formulas>  <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>  <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>  </v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt; height:12pt' o:ole="">  <v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image001.wmz" o:title="">  </v:shape><![endif]-->  <![if !vml]>    <![endif]>  </sub>  <!--[if gte mso 9]><xml>  <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984913">  </o:OLEObject>  </xml><![endif]-->  <span></span></p>  <span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> z es un vector n y A es una matriz constante n</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'> |

mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&acute;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>n. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El punto de equilibrio del sistema<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>est&aacute; dado por la soluci&oacute;n de la ecuaci&oacute;n:  $AZ = 0$ , incluyendo la soluci&oacute;n trivial  $z = 0$ .<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si estamos interesados en la estabilidad del punto de equilibrio adem&aacute;s de del origen, una transformaci&oacute;n simple reduce el problema a estudiar. La soluci&oacute;n de:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:12pt' o:ole=""><v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image001.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984914">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>est&aacute;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> dada por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:69pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image003.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984915">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  $z <sub>0</sub>$  es la condici&oacute;n inicial en  $t = t <sub>0</sub>$ .<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a investigar la relaci&oacute;n entre la localizaci&oacute;n de los valores propios de la matriz A y la estabilidad del sistema</span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:12pt' o:ole="">

<v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<!--[if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984916">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para lograr esto consideremos la transformaci&oacute;n T,<span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'>w = <span class=Spelle>Tz</span><span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Donde T es una matriz n</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&acute;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>n no singular. La ecuaci&oacute;n diferencial para W est&aacute;a dada por:<span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:14.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<!--[if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984917">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>TAT<sup>-1</sup> se puede reducir a:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:63pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984918">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:128.25pt;height:63pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984919">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Los valores propios </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>,... </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>m0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> son de multiplicidad uno y los valores propios </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;"/>

mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>I</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>m0 + i</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es de multiplicidad m<sub>i</sub> &gt; 1, i = 1,..., m.<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span>Es f&aacute;cil ver que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:122.25pt;height:63pt' o:ole=""><v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984920"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:131.25pt;height:63pt' o:ole=""><v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984921"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:167.25pt;height:72.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="estsislineales\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249984922"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

Si la parte real de cada uno de los valores propios es menor que cero, todos los valores propios caen en la derecha del plano, luego cada  $\lambda$  tiende a cero como  $\lambda \rightarrow 0$ .

Esto muestra el hecho que:

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda = 0$

Si los valores propios de la matriz  $A$  están en el lado derecho del plano, luego los puntos de equilibrio en el origen para el sistema

$\dot{x} = Ax$



```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249984925">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>esasintóticamente
estable.</o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.114 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="establocalsisnolin_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="establocalsisnolin_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="establocalsisnolin_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ESTABILIDAD LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:13:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:14:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>192</o:Words>
<o:Characters>1058</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>8</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1248</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>

```

```

</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:605042502;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:2047651992 134873103 134873113 134873115 134873103
 134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->

```

```

</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>ESTABILIDAD
LOCAL DE SISTEMAS NO LINEALES</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>En el caso de sistemas de segundo orden se ha
encontrado que las estructuras de las trayectorias en la vecindad del punto de equilibrio para
los sistemas lineales y no lineales, están relacionados. Para sistemas de n-
éximo orden es válido un resultado similar.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'>Teorema. Si el sistema:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

```

[illegible]

New

style='mso-fareast-font-family: Arial; mso-ansi-language: ES-TRAD'><span style='mso-list: ignore'>2.<span style='font: 7.0pt "Times Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span><![endif]>  
<span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'>f(</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'>&middot;) es continua en la misma vecindad del origen.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='margin-left: 18.0pt; text-align: justify; text-indent: -18.0pt; mso-list: l0 level1 lfo1'>  
<![if !supportLists]>  
<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family: Arial; mso-ansi-language: ES-TRAD'><span style='mso-list: ignore'>3.<span style='font: 7.0pt "Times Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span><![endif]>  
<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width: 111.75pt; height: 33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985028">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'>Prueba: Elegimos la transformaci&ocaron T dada por:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align: center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width: 42.75pt; height: 14.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985029">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'>el</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'> sistema<o:p></o:p></span></p>

$$se \cdot reduce \cdot a$$

$$donde$$

$$a$$

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> las</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>'s son los valores propios del sistema y</span></span><span class=SpellE>b<sub>ij</sub></span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; 0 es un n&uacute;mero dado. Si aplicamos la transformaci&eacute;n al sistema no lineal</span></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985033">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</span></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>obtenemos</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>:</span></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:183.75pt;height:32.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985034">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> f(&middot;) satisface las mismas condiciones que f(&middot;).<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sea:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985035">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:18.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985036">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si derivamos y simplificamos tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:171pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image019.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<img width=228 height=37



src="establocalsisnolin\_archivos/image020.gif" v:shapes="\_x0000\_i1033">  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985037">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Se ve que </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>a</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &lt; 0, f es continua y  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:111.75pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985038">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> tiene que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:42pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="establocalsisnolin\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985039">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el sistema es asint&otilde;ticamente  
 estable.<o:p></o:p></span></p>

```

 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.115 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. METODO DIRECTO DE LIAPUNOV

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metdirecliapunov_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metdirecliapunov_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metdirecliapunov_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODO DIRECTO DE LIAPUNOV</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:14:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:16:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1112</o:Words>
<o:Characters>6118</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>50</o:Lines>
<o:Paragraphs>14</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>7216</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>

```

```

<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpanE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:759370849;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-2080105966 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:36.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1
 {mso-list-id:1543597810;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:639930666 1077029572 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:0cm;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:14.2pt;
 text-indent:-14.2pt;}
@list l2
 {mso-list-id:1844395246;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:2113705276 1077029572 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}

```

```

@list l2:level1
 {mso-level-tab-stop:0cm;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:14.2pt;
 text-indent:-14.2pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>METODO
DIRECTO DE LIAPUNOV</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La idea principal de Liapunov se deriva de las siguientes intuiciones. Consideremos un
sistema aislado y sea y(t, y₀, t₀) una solución del sistema.
Sea v(y(t, y₀, t₀)) la energía
asociada al sistema aislado. Si la derivada de v(y) respecto a t es
negativa para todo y(t, y₀, t₀) excepto en el punto de equilibrio, se
sigue que decrece la energía del sistema, conforme t se incrementa. Finalmente el
sistema debe alcanzar el punto de equilibrio.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Podemos ver con el ejemplo del circuito eléctrico
de la figura:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"

```

coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"

path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"

filled="f" stroked="f">

<v:stroke jointstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:2in; height:69pt'>

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image001.png" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las ecuaciones del circuito son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026"

type="#\_x0000\_t75" style='width:39pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985134">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027"

type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985135">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Denotaremos la soluci&oacute;n  
 por<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image007.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985136">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> i<sub>0</sub> y V<sub>0</sub> son la  
 corriente y el voltaje iniciales. La energ&iacute;a del sistema es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:140.25pt;height:27pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image009.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985137">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> la raz&oacute;n de cambio de la  
 energ&iacute;a es<o:p></o:p></span></p>

ES-TRAD  
 

ES-TRAD  
<sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:147pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image011.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985138">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--  
<o:p></o:p></span></p>

ES-TRAD  
<o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

ES-TRAD  
<o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

Si sustituimos para las derivadas de  $i$  y  $V$ , en las ecuaciones del circuito, tenemos:

ES-TRAD  
<o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

ES-TRAD  
<sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image013.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985139">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--  
<o:p></o:p></span></p>

ES-TRAD  
<o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

GramE  
<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
se debe a la energ&iacute;a disipada en  
el resistor R. Por este hecho de la disipaci&oacute;n de la energ&iacute;a podemos concluir  
que el sistema eventualmente alcanza el punto de equilibrio, en el cual  $i = 0$  y  $V = 0$ .  
<span class=GramE>podemos</span>  
analizar la superficie de la  
ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

ES-TRAD  
<o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

ES-TRAD  
<sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:27pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image015.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--

<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985140">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> cual se muestra en la figura.</span></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1034"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:183.75pt;height:171.75pt'>  
<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image017.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El lugar para  $V =$  <span class=Spelle>cte</span> son elipses en la superficie de la copa. Si el circuito empieza con las condiciones iniciales ( $i_{00}$ ,  $v_{00}$ ) y graficamos la trayectoria de forma que el punto ( $i(t)$ ,  $v(t)$ ) cruza el punto  $V(i, v) =$  <span class=Spelle>cte</span> y se mueve hacia el punto  $m$  alto de la copa, que es el punto de equilibrio.</span></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Es  $f$  asociar la funci $\acute{o}$ n de energ $\acute{i}$ a <span class=GramE> $V(i(t), v(t))$ </span> con el circuito y con sus ecuaciones. Dado un conjunto de ecuaciones que describen un sistema, no es obvio como asociar una funci $\acute{o}$ n de energ $\acute{i}$ a con las ecuaciones. En efecto, el concepto de energ $\acute{i}$ a no es natural a ciertos sistemas, como los sistemas de control. <span class=Spelle>Liapunov</span> formaliz $\acute{o}$  la idea de usar funciones escalares en lugar de funciones de energ $\acute{i}$ a asociadas con el sistema para investigar su estabilidad. Esta funci $\acute{o}$ n se conoce como la funci $\acute{o}$ n de <span class=Spelle>Liapunov</span> y el m $\acute{e}$ todo de investigar la estabilidad usando la funci $\acute{o}$ n de <span class=Spelle>Liapunov</span>, se conoce como el m $\acute{e}$ todo directo de <span class=Spelle>Liapunov</span>. La funci $\acute{o}$ n de <span class=Spelle>Liapunov</span> se emplea funci $\acute{o}$ n de prueba y se obtienen resultados tanto locales como globales.</span></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Decimos que una funci $\acute{o}$ n escalar <span class=GramE> $V(y)$ </span> es definida positiva en la vecindad del origen </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:





<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985141">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> establece si existe una funci&oacute;n  
 escalar positiva definida  $V(y)$  con derivadas parciales continuas tal que las derivadas de  $V(y)$  a  
 lo largo de la soluci&oacute;n del sistema, dada por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:30.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985142">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> negativa semidefinida en alguna  
 vecindad </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> del  
 origen.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La derivada de la funci&oacute;n escalar <span  
 class=GramE> $V(y)$  a lo largo de la soluci&oacute;n del sistema  
 diferencial<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036"

type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:12pt' o:ole=""><v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image023.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985144"></o:OLEObject></xml><![endif--><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>o</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image025.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985145"></o:OLEObject></xml><![endif--><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> denotar&acute; por <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:23.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image026.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985146"></o:OLEObject></xml><![endif-->. <o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Teorema de estabilidad asint&acute;tica.<o:p></o:p></span></b></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

El punto de equilibrio en el origen del sistema

$A(x) = b(x) = c(x) = 0$

<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops:list 18.0pt'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-list:ignore'>2.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>

<![endif]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>A(r), b(r) son no decrecientes y  $0 \leq a(|y|)$

</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>V(y)

</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>b(|y|), y

</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>o<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops:list 18.0pt'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-list:ignore'>3.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>

<![endif]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>C(r) es no decreciente y la derivada de V(y) a lo largo de la solución satisface

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:116.25pt;height:18pt o:ole=""><v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image029.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985147"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:-18.0pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops:list 18.0pt'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span





```

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1049" type="#_x0000_t75" style='width:101.25pt;height:17.25pt'>
<v:imagedata src="metdirecliapunov_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1053"
type="#_x0000_t75" style='width:98.25pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metdirecliapunov_archivos/image037.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985150">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1054"
type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:17.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metdirecliapunov_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

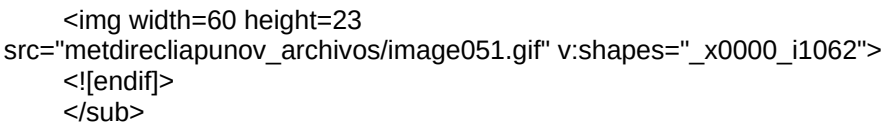
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985151">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>luego<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1055" type="#_x0000_t75" style='width:92.25pt;height:17.25pt'>
<v:imagedata src="metdirecliapunov_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 <img width=123 height=23

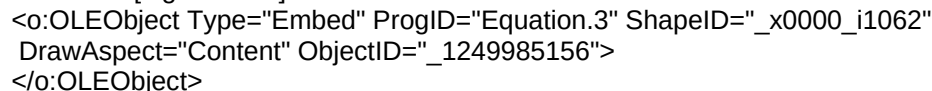
```

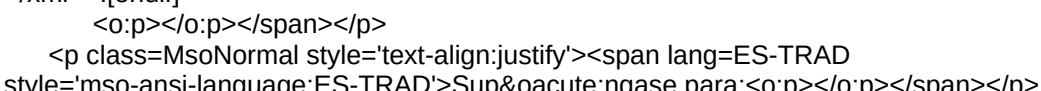


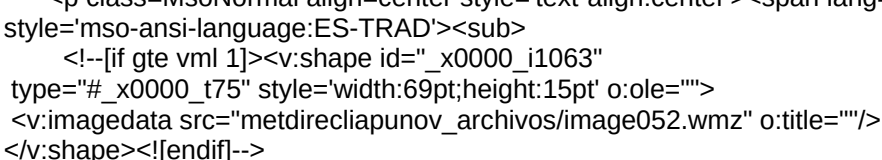
src="metdirecliapunov\_archivos/image040.gif" v:shapes="\_x0000\_i1055">  
<![endif]>  
</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> implica<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image042.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985152">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>ya</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que a(&middot;) es una funci&oacute;n  
no decreciente, por lo que el sistema es uniformemente estable.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para mostrar que el sistema uniforme  
asint&oacute;ticamente estable necesitamos encontrar </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> tal que ||y<sub>0</sub>|| &lt;  
</span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> y para todo </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>e</span></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; 0 debe existir <span  
class=GramE>T(</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>), tal que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

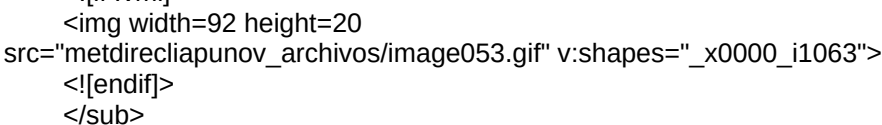
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:116.25pt;height:17.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image044.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985153">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 .<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sea r &gt; 0 y elijamos:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image046.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985154">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:29.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image048.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985155">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:17.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image050.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

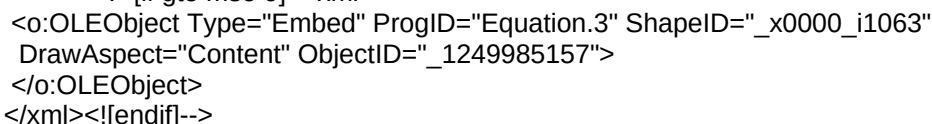


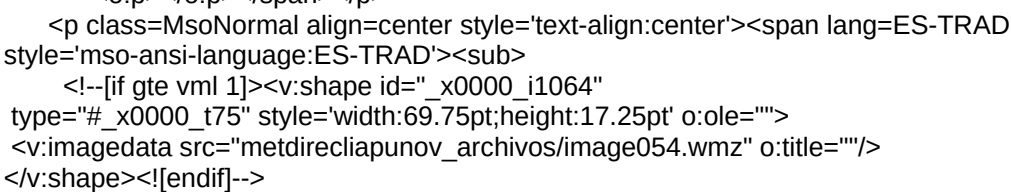


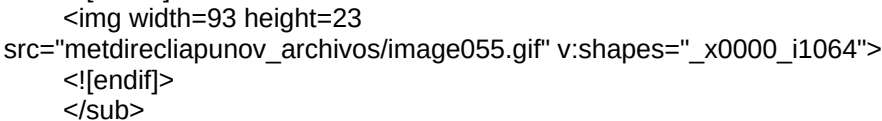


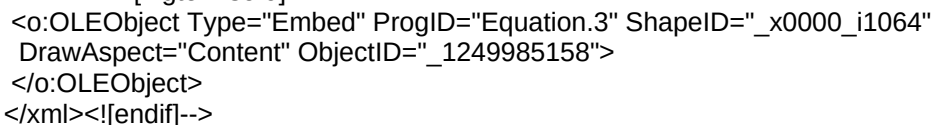


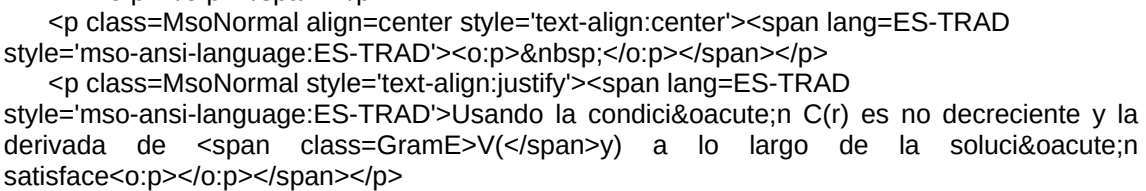


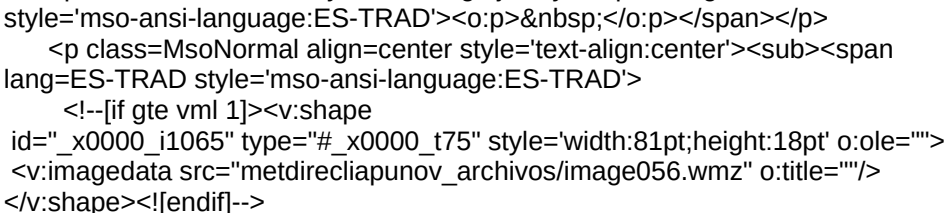












<![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985159">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>-->  
 <o:p></o:p></span></sub></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> obtiene:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:102.75pt;height:17.25pt'>  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image058.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </span></sub><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:111pt;height:18pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image060.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985160">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Integrando esta desigualdad de  $t < 0$  a  $t$  se  
 tiene:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:171pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image062.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985161">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:168pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image064.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985162">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>o</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:192.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image066.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985163">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es una contradicci&ocute;n, por lo que  
 debe existir t\* </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&Icirc;</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> (t<sub>0</sub>, t<sub>0</sub> + T\*), tal que: ||y(t, y(t\*,  
 y<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>),t\*)|| &lt; </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>(</span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:

Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>). Si elegimos <span class=GramE>T(</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>)= T\*, tenemos que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image068.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985164"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES>para</span></span><span lang=ES> t </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup3;</span></span></span><span lang=ES> t\*, por lo que el sistema es uniforme asint&acuteticamente estable. Si r se puede elegir arbitrariamente grande y a(r) </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span></span><span lang=ES> como r </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span></span><span lang=ES>, tenemos estabilidad uniforme asint&acuteticamente global.</span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES>Teorema de <span class=SpellE>LaSalle</span></span><o:p></o:p></span></b></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES>Sea <span

class=GramE>V(</span>y) una funci&oacute;n escalar con derivadas parciales continuas que satisface:</span><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent:-14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo2;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

<span

lang=ES style='mso-fareast-font-family:Arial'><span style='mso-list:ignore'>1.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>

<![endif]>

<span

lang=ES>V(y) &gt; 0 si y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span></span><span lang=ES> 0, y V(0) = 0</span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent:-14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo2;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

<span

lang=ES style='mso-fareast-font-family:Arial'><span style='mso-list:ignore'>2.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>

<![endif]>

<span

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:23.25pt;height:17.25pt'o:ole="">

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image026.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985165">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span><span

lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0</span><span lang=ES-TRAD>

</span><span

lang=ES>si y </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span></span><span

lang=ES> 0, y </span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:14.25pt'>

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image070.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</span></sub><span lang=ES>(0) = 0</span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent: -14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo2;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES style='mso-fareast-font-family:Arial'><span style='mso-list:ignore'>3.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>

<![endif]>

<span class=GramE><span lang=ES>V(</span></span><span lang=ES>y) </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES> como ||<span class=SpellE>y||</span> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES> </span><span lang=ES style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES>.</span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent: -14.2pt;mso-list:l2 level1 lfo2;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-list:ignore'>4.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>

<![endif]>

<sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:14.25pt'>

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image070.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>(<span class=GramE>y(</span>t, y<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>)) no es cero bajo ninguna soluci&ocute;n y(t, y<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>) que no sea la soluci&ocute;n trivial y = 0.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Luego el punto de equilibrio en el origen para el sistema<o:p></o:p></span></p>

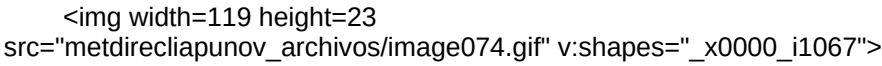
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:15pt' o:ole="">



<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image028.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985166">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> asint&oacute;ticamente estable  
 global.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La determinaci&oacute;n de la estabilidad por el  
 m&eacute;todo directo de <span class=SpellE>Liapunov</span>, se centra en la  
 elecci&oacute;n de una funci&oacute;n positiva definida, por lo que cuando esta  
 elecci&oacute;n es posible, tenemos la posibilidad de deducir la estabilidad del sistema. Pero la  
 verdad es que no existe un m&eacute;todo general para elegir la funci&oacute;n de <span  
 class=SpellE>Liapunov</span>. En efecto, este es el mayor inconveniente del m&eacute;todo.  
 Se han encontrado varias t&eacute;cnicas, pero resulta que cada una corresponde a una clase  
 particular de sistemas.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Algunas veces es posible mostrar que un sistema es  
 inestable por el m&eacute;todo de <span class=SpellE>Liapunov</span>. Un resultado obvio  
 es: si <span class=GramE>V(</span>&middot;) y <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1066" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:14.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image072.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985167">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 (&middot;) son positivas definidas, el origen es inestable. Esto se puede relacionar  
 con:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1067"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image073.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>



<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1067"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985168">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->

<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span></span><span  
 class=GramE><span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'>para</span></span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'> toda y</span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>|</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; 0 y w(&middot;) </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&sup3;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0 en la vecindad </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>h</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> del origen.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:  
 normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Teorema de inestabilidad  
 de <span class=SpellE>Cetaev</span><o:p></o:p></span></b></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El origen est&aacute; en un punto de equilibrio inestable  
 si existe una funci&oacute;n <span class=GramE>V(</span>y) con derivadas parciales  
 continuas en la vecindad </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
 Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
 ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> del origen y </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>h</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>\* </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&lgrave;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:

Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> tal que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent:-14.2pt;mso-list:l1 level1 lfo3;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-list:ignore'>1.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span></span>

<![endif]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El origen es un punto frontera de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>\* y <span class=GramE>V(</span>y) = 0 cuando y es un punto frontera de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>\*.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent:-14.2pt;mso-list:l1 level1 lfo3;tab-stops:list 0cm'>

<![if !supportLists]>

<span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-list:ignore'>2.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span></span>

<![endif]>

<span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>V(</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y) y <sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1068" type="#\_x0000\_t75" style='width:11.25pt;height:14.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metdirecliapunov\_archivos/image072.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1068" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985169">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><!-->

(y) </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup3;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0 si y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

```

Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>&lcirc; <span lang=ES-TRAD
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>h*.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.116 SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD. METODO DE FRECUENCIA DE POPOV

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metfrecuenpopov_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metfrecuenpopov_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metfrecuenpopov_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODO DE FRECUENCIA DE POPOV</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:16:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:17:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>595</o:Words>
<o:Characters>3276</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>27</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3864</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>

```

```

<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:2108227686;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-572784528 1077029572 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:0cm;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:14.2pt;
 text-indent:-14.2pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";

```

```

 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>METODO DE
FRECUENCIA DE POPOV</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El sistema descrito por:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke jointstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;
height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<!--[if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"

```

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985260">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1027"  
 type="# \_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:11.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID=" \_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985261">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> A es una matriz constante, b y c son vectores constantes y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>s</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>) es una funci&oacute;n continua de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>s</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las siguientes consideraciones ser&aacute;n v&aacute;lidas en nuestra discusi&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent:-14.2pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops:list 0cm'>  
 <![if !supportLists]>  
 <span lang=ES-TRAD style='mso-fareast-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-list:ignore'>1.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span></p>  
 <span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Los valores propios de la matriz constante A est&aacute;n en el lado izquierdo del plano<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='margin-left:14.2pt;text-align:justify;text-indent:







<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:11.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metfrecuenpopov\_archivos/image003.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985263">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> asint&oacute;ticamente estable en lo global para toda </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>(&middot;) tal que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:27.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metfrecuenpopov\_archivos/image007.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985264">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> dice que el origen es absolutamente estable en el sector (0, k].<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Dados los par&aacute;metros A, b, c, &iquest;el sistema es absolutamente estable? Y podemos tambi&eacute;n preguntarnos si dados los mismos par&aacute;metros, <span class=GramE>&iquest;</span>cu&aacute;l es el m&aacute;ximo k tal que el sistema sea absolutamente estable.<o:p></o:p></span></p>

$$A^T A = P$$

Responderemos las preguntas mediante el uso de las funciones de Liapunov.

$$\frac{d}{dt} V(x) = -\alpha V(x)$$

donde

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

es una matriz positiva definida y

$$P = P^T > 0$$

es una constante positiva. P satisface la ecuaci&acuten matricial:

$$A^T P + P A = -Q$$

PA + A'P = -Q

$$V(x) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x$$

Y es positiva definida. Luego,

$$V(x) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x$$

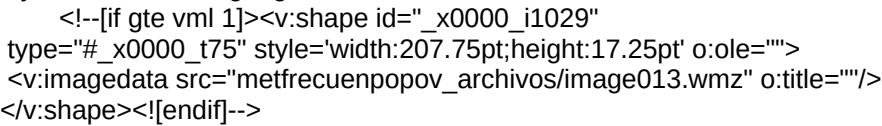
como  $|x|$

$$V(x) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x$$

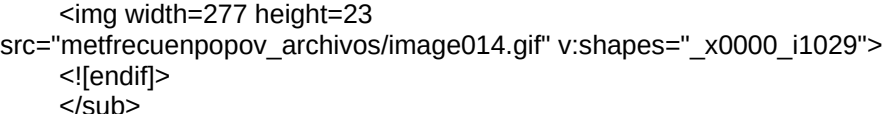
Ahora,

$$V(x) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x$$

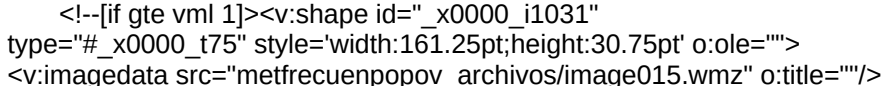
metfrecuenpopov\_archivos/image013.wmz



metfrecuenpopov\_archivos/image014.gif



metfrecuenpopov\_archivos/image015.wmz



```

</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985268">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032"
type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:30.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985269">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1035"
type="#_x0000_t75" style='width:80.25pt;height:27pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985270">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1036"
type="#_x0000_t75" style='width:57pt;height:27pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985271">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 .<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si <sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1037"
 type="#_x0000_t75" style='width:11.25pt;height:15.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image023.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]>-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985272">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 es positiva definida, luego <sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75"
 style='width:11.25pt;height:14.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image025.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]>-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985273">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 es negativa definida, y la condición
 para positiva definida de <sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1039"
 type="#_x0000_t75" style='width:11.25pt;height:15.75pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image023.wmz" o:title="">
 </v:shape><![endif]>-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985274">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>-->
 se reduce a la
 desigualdad:<o:p></o:p></p>

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 + 1 \right) = 2x$$

Teorema de Popov.

El sistema:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043"
type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:11.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985278">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>es absolutamente estable en el sector (0, k] si existe un número real q tal que la desigualdad:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045"
type="#_x0000_t75" style='width:135pt;height:27pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985279">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>vale para todo real w ³ 0 donde <span

lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>>h es un número pequeño arbitrario, y 0 < k < ¥. La ecuación anterior involucra verificar lo positivo de la función en el eje jw, conocido como el eje de la frecuencia. Esto nos lleva a llamarle el dominio de la frecuencia.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>Vamos a considerar el caso lineal:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985280">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1047" type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:11.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985281">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<span

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> vamos a aplicar el criterio de Nyquist.
Sea:<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1048"
type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985282">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1050"
type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985283">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

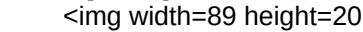
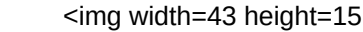
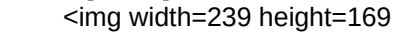
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1051"
type="#_x0000_t75" style='width:69pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image037.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985285">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Luego el sistema lineal<o:p></o:p></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1052"

type="#_x0000_t75" style='width:66.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>
 width=89 height=20
src="metfrecuenpopov_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1052">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985286">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1053"
type="#_x0000_t75" style='width:32.25pt;height:11.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>
 width=43 height=15
src="metfrecuenpopov_archivos/image004.gif" v:shapes="_x0000_i1053">
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1053"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985287">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es<span
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> estable si la gráfica de
W_N en el plano (X_N, Y_N) no encierra al punto (-1/h, 0)
como lo muestra la figura.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1054"
type="#_x0000_t75" style='width:179.25pt;height:126.75pt'>
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image039.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>
 width=239 height=169
src="metfrecuenpopov_archivos/image040.jpg" v:shapes="_x0000_i1054">
<![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La desigualdad de Popov tiene una interpretación
geométrica elegante, hagamos:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1055"
type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985288">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1056"
type="#_x0000_t75" style='width:66pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image043.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985289">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1057"
type="#_x0000_t75" style='width:69pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image045.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985290">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>entonces</span></span><span
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>:<o:p></o:p></span></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1058"
type="#_x0000_t75" style='width:135pt;height:27pt' o:ole="">
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>
  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985291">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>llega</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>a ser:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:27pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov\_archivos/image047.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985292">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si se satisface la  
 ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:27pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metfrecuenpopov\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985293">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>en</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>el plano (X<sub>P</sub>,  
 Y<sub>P</sub>) se debe encontrar una l&iacute;nea recta, llamada l&iacute;nea de Popov,  
 con pendiente 1/q que intercepte el eje X<sub>P</sub> en -1/k. Para la estabilidad la  
 gr&aacute;fica de W<sub>P</sub>, con </span><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Symbol;

```

mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> como parámetro cae estrictamente a la derecha
de la línea de Popov, en otras palabras, el plano cerrado a la izquierda de la
línea de Popov es una región
prohibida <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1049"
type="#_x0000_t75" style='width:372.75pt;height:304.5pt'>
<v:imagedata src="metfrecuenpopov_archivos/image051.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.117 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. INTRODUCCION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="circlimitefrontamp_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="circlimitefrontamp_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="circlimitefrontamp_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CIRCULOS LIMITE Y FRONTERAS DE AMPLITUD</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>

```

```

<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:17:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:19:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>299</o:Words>
<o:Characters>1645</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>13</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1941</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
{mso-list-id:422996714;
mso-list-type:hybrid;
mso-list-template-ids:-1457779074 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1

```

```

 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

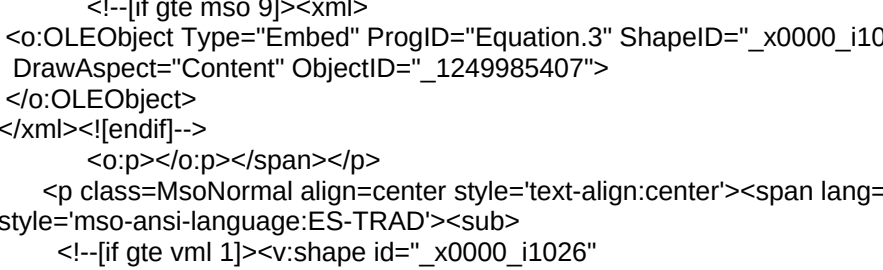
<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>CIRCULOS
LIMITE Y FRONTERAS DE AMPLITUD</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La ecuación diferencial:</p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

```



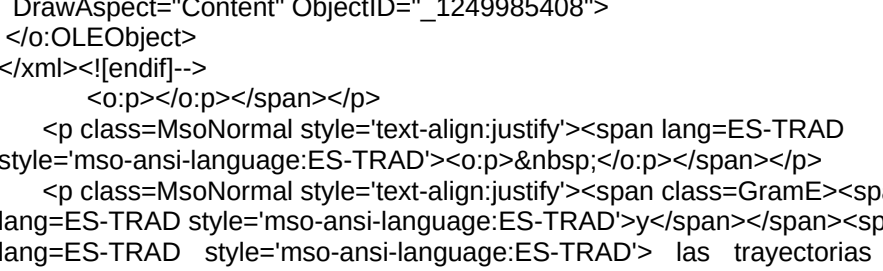








las trayectorias en el plano fase consisten de  $\gamma$  rculos cerrados como se muestra en la figura.



Cada  $\gamma$  rculo en el plano fase corresponde a una soluciín periídica y son las condiciones iniciales las que determinan el  $\gamma$  rculo. Podemos hacer las siguientes observaciones:

Cada  $\gamma$  rculo en el plano fase corresponde a una soluciín periídica y son las condiciones iniciales las que determinan el  $\gamma$  rculo. Podemos hacer las siguientes observaciones:

[illegible]

</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Podemos tambi&eacute;n expresar el sistema en coordenadas polares:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:41.25pt;height:14.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="circlimitefrontamp\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985411">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:30pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="circlimitefrontamp\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985412">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> soluci&oacute;n est&aacute; dada por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:65.25pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="circlimitefrontamp\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985413">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="circlimitefrontamp\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985414">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:84pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="circlimitefrontamp\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985415">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Cuando  $r <sub>0</sub> = 1$ , <span class=GramE> $r(t) = 1$  y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>q</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>(t) = </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>q</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> – t. Hay una sola soluci&ocute;n peri&ocute;dica que es la que corresponde a  $r <sub>0</sub> = 1$ , y todas las dem&aacute;s soluciones, con excepci&ocute;n de la trivial, se aproximan a una soluci&ocute;n peri&ocute;dica cuando t </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. La configuraci&ocirc;n de las soluciones se muestra en la figura.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:139.5pt;height:134.25pt'>  
<v:imagedata src="circlimitefrontamp\_archivos/image025.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La soluci&ocirc;n peri&ocirc;dica que se muestra en esta soluci&ocirc;n es llamada un ciclo l&iacute;mite. La propiedad b&aacute;sica que distingue esta soluci&ocirc;n de la del oscilador arm&ocirc;nico simple, es la naturaleza aislada de la trayectoria cerrada, lo que significa que no debe existir otra trayectoria en una vecindad suficientemente peque&ntilde;a del ciclo l&iacute;mite. Es simple pero importante hacer notar que en un sistema lineal no existen ciclos l&iacute;mite.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a dar una definici&ocirc;n de ciclo l&iacute;mite. Un ciclo l&iacute;mite es una trayectoria cerrada que no corresponde a una familia de trayectorias cerradas.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</div></td>  
</tr>  
</table>  
</body>  
</html>

### 3.118 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. INTRODUCCION. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
```

```

 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
 }
 a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
 }
 a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
 }
 a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
 }
 a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
 .style15 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
 }
 .style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #FFFFFF;
 font-weight: bold;
 }
-->
</style></head>

<body>
<table width="784" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="551">Curso de Control > Sistemas no Lineales >
Ciclos Límite </td>
<td width="235"><div align="right"> <a href="../sistnolineal.htm"
target="_parent"><< Regreso a la página de Sistemas No Lineales
</div></td>
</tr>
</table>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
background=" ../Images/control2.gif">
<tr>
<td background="Images/encabezado.gif"><div align="center">CICLOS LIMITE </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<div align="left"></div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.119 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. INTRODUCCION. MARCO 5

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.style17 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td><div align="center">INDICE</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Ciclo Límite </div></td>
</tr>
```



```

<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><a href="indice.htm"
target="mainFrame">Indice</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Existencia de Ciclos
Límite </div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Cotas de
Amplitud </div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Liapunov como
Acotamiento </div></td>
</tr>
</table>
<p class="style1"> </p>
</div>
</body>
</html>

```

### 3.120 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. INDICE

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="indice_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="indice_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="indice_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>INDICE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>1</o:Revision>
 <o:TotalTime>1</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-08-30T18:19:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-08-30T18:20:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>642</o:Words>

```

```

<o:Characters>3535</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>29</o:Lines>
<o:Paragraphs>8</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4169</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1464230336;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-1828953548 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;

```

```

 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span lang=ES-TRAD style='color:red;mso-ansi-language:ES-
TRAD'>INDICE</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Un concepto útil en la consideración de
sistemas de segundo orden es el de campo vectorial en un plano. Un campo vectorial F en el
plano (x_1 , x_2) está dado por la asociación con cada
punto (x_1 , x_2) en el plano (x_1 , x_2) una
pareja ordenada (F_1 , F_2). F_1 y F_2
dependen del punto (x_1 , x_2) y definen respectivamente los
componentes x_1 y x_2 del vector en el punto (x_1 ,
 x_2). </p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>De nuevo vamos a considerar el
sistema</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
 coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
 path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
 filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

```

```

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style="width:66.75pt;
height:15pt" o:ole="">
<v:imagedata src="indice_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985496">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026"
type="#_x0000_t75" style='width:69.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="indice_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249985497">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y definiremos el campo vectorial F en el
plano (x_1 , x_2) asociado con el sistema y sus ecuaciones
diferenciales. Sea la componente x_1 de este campo vectorial
 $X_1(x_1, x_2)$ y la componente x_2 del campo
vectorial $X_2(x_1, x_2)$. Luego el campo vectorial
est´ definido para cualquier punto en el plano.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

```





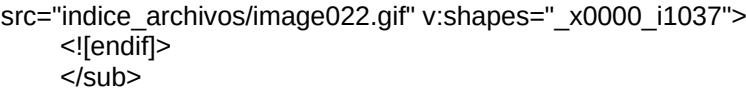
</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985501">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>podemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> evaluar el &acute;ndice de la singularidad aislada en el origen considerando<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>la <span class=SpellE>scroc</span> C como un c&iacute;rculo de radio r<sub>0</sub>. <span class=SpellE>Parametizamos</span> y tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985502">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985503">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>En este caso la expresi&ocute;n para el &iacute;ndice se reduce a.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:465pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985504">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Los valores propios est&aacute;n dados por la ecuaci&ocute;n caracter&iacute;stica:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:174pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985505">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El &iacute;ndice para una silla de montar es -1 y para un nodo o un centro, el &iacute;ndice es 1. Es claro que el &iacute;ndice par una <span class=Spelle>scroc</span> que no contiene puntos singulares es cero.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

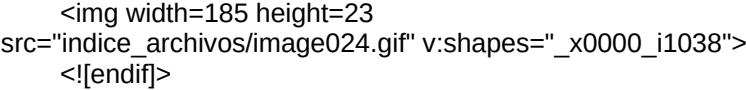


**Teorema**

El índice de singularidad en el origen para el sistema

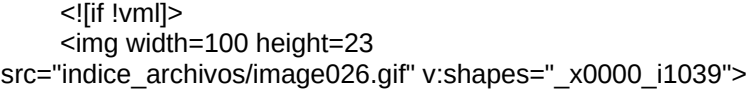


<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985506">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->



<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985507">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->

donde



<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985508">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:17.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="indice\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985509">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el &acute;ndice para la singularidad en el origen para el sistema:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="indice\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985510">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="indice\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985511">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el mismo que el provisto por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image029.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985512">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Prueba: Sean los sistemas lineales y no lineales definidos por los campos vectoriales  $F_L$  y  $F_N$  respectivamente, y consid&eacute;rese que el &acute;ndice de un c&acute;rculo de radio  $r_0$  relativo a estos campos vectoriales. Si el campo vectorial nunca est&aacute; opuesto en C, el <span class=Spelle>scroc</span> C tiene el mismo &acute;ndice relativo a estos dos campos. La componente de los dos campos vectoriales en el punto ( $z_1$ ,  $z_2$ ) del plano fase es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:255pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image031.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985513">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:146.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="indice\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985514">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> est&aacute;n en oposici&oacute;n  
 con:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:297pt;height:18.75pt' o:ole=""/>  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985515">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> alguna </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>h</span></span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; 0. Al convertir a coordenadas  
 polares, esta relaci&oacute;n en el <span class=Spelle>scroc</span> C se reduce  
 a:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:278.25pt;height:17.25pt' o:ole=""/>  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985516">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El lado derecho de esta ecuaci&oacute;n tiende a cero  
 conforme r<sub>0</sub> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0, independiente <span class=GramE>de  
 </span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>f</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, mientras el lado derecho sea una  
 funci&oacute;n continua de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>q</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, logra su m&iacute;nimo diferente de cero para  
 r<sub>0</sub> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-  
 family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>&sup1;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0,  
 en alg&uacute;n </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>q</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> =  
 </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>q</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>', tal que 0 </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&pound;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>q</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>' </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&pound;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 2</span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>p</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Por lo tanto<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:278.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="indice\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985517">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>no</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es v&aacute;lida para r<sub>0</sub> suficientemente peque&ntilde;os, as&iacute; que el campo vectorial nunca est&aacute;n en oposici&oacute;n, lo que demuestra el teorema.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El &iacute;ndice de una trayectoria cerrada relativa a su propio campo vectorial es unitario, independientemente del n&uacute;mero de puntos singulares encerrados por la trayectoria. Como el campo vectorial es tangencial a la <span class=Spelle>scroc</span>, esta observaci&oacute;n es clara.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div></td>  
 </tr>  
 </table>  
 </body>  
 </html>

### 3.121 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. EXISTENCIA DE CICLOS LIMITE

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="existciclolimite_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="existciclolimite_archivos/editdata.mso">
```

```

<link rel=OLE-Object-Data href="existciclolimite_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EXISTENCIA DE CICLOS LIMITE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:27:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:28:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>904</o:Words>
<o:Characters>4972</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>41</o:Lines>
<o:Paragraphs>11</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>5865</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}

```

```

span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:958872037;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-1319185308 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1
 {mso-list-id:1077898192;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-1719262886 201981967 201981977 201981979 201981967
201981977 201981979 201981967 201981977 201981979;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

```



<tr>  
 <td><div class=Section1>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight: normal'><span lang=ES-TRAD style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>EXISTENCIA DE CICLOS <span class=GramE>LIMITE</span><o:p></o:p></span></b></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Existen dos resultados importantes en los ciclos l&iacute;mite para sistemas no lineales de segundo orden. El primero es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight: normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Teorema de <span class=SpellE>Bendixson</span></span></b><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language: ES-TRAD'>: Una regi&oacute;n simple conectada R en el plano fase, donde la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75"  
 coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"  
 path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"  
 filled="f" stroked="f">  
 <v:stroke jointstyle="miter"/>  
 <v:formulas>  
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>  
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>  
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>  
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>  
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>  
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>  
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>  
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>  
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>  
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>  
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>  
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>  
 </v:formulas>  
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>  
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>  
 </v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:71.25pt; height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image001.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985984">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

$\nabla \cdot \vec{F}$

cambia de signo, no contiene trayectorias cerradas.

**Prueba**: Sea el campo vectorial denotado por:

$\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + yz^2\vec{j} - xy^2z\vec{k}$

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Consideremos un  $C$ ; por el teorema de la divergencia en dos dimensiones:

$\int_R (\nabla \cdot \vec{F}) dA$

$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2) r dr d\theta$

n es el vector unitario normal al elemento  $dS$  es el elemento de área.

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La siguiente figura muestra varias de estas cantidades.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:171.75pt;height:167.25pt'>

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image007.png" o:title="EEINTL&#58652;&#18;">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Supongamos que el <span class=Spelle>scroc</span> C es una trayectoria cerrada correspondiente a una soluci&oacute;n peri&oacute;dica. El campo vectorial, por lo tanto, es tangente a la curva C y  $x' \cdot n' = 0$  a lo largo de la curva C, por lo que la integral:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:123.75pt;height:33pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image009.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985987">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> esto s&oacute;lo es posible si:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:51.75pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image011.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985988">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>cambia</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> de signo en el interior de la curva C. Luego una condici&oacute;n necesaria pero no suficiente para la existencia de una trayectoria cerrada en una regi&oacute;n simplemente conectada R es que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:51.75pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image011.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985989">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>cambie</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> de signo en R.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Conjunto L&iacute;mite de una Trayectoria.<o:p></o:p></span></b></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>P(</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>t) denota el punto soluci&oacute;n de<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:152.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image013.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

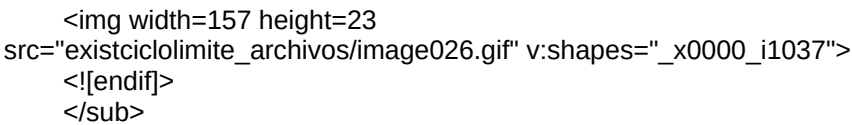
<!--[if gte mso 9]><xml>

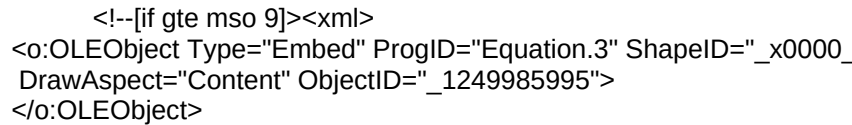
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"

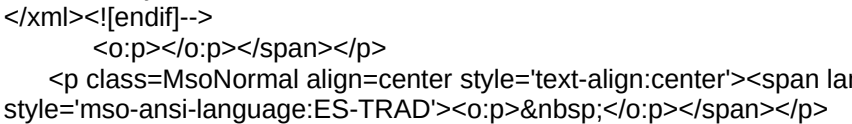
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985990">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>en</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el tiempo  $t$  a lo largo de la trayectoria que pasa por ( $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ) en el tiempo  $t_0$ .  $L^*$  denota la porción de la trayectoria para  $t$  </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  $t$  </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, llamada la media trayectoria. Un punto  $Q$  es llamado un punto límite de la media trayectoria  $L^*$ , si existe una secuencia  $\{t_n\}$  tal que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:51pt;height:18.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image015.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985991">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:123pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image017.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985992">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El conjunto de puntos l&iacute;mite de  $L^*$  se denota por  
 $L \subseteq \cdot$ .</span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Teorema de <span  
 class=SpellE>Poincar&eacute;</span>-<span  
 class=SpellE>Bendixson</span></b><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:  
 ES-TRAD'>. Si <span class=SpellE> $L$ <sup>+</sup></span> est&aacute; contenido en una  
 regi&oacute;n cerrada acotada  $R$  y  $R$  no contiene puntos singulares, luego o <span  
 class=SpellE> $L$ <sup>+</sup></span> es una soluci&oacute;n peri&oacute;dica o <span  
 class=SpellE> $L$ <sub> $e$ </sub><sup>+</sup></span> lo es.</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Los  
 requerimientos del teorema se muestran en la figura.</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:183.75pt;height:182.25pt'>  
 <v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image019.png" o:title="&#18;"/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> $R$  es  
 una regi&oacute;n anular, cerrada y acotada que no contiene puntos singulares. Si asumimos  
 que las trayectorias cruzan hacia la regi&oacute;n anular en cualquier punto de la frontera,  
 luego una trayectoria que cruce hacia la regi&oacute;n anular nunca debe dejar la  
 regi&oacute;n  $R$ . Las condiciones del teorema de <span  
 class=SpellE>Poincar&eacute;</span>-<span  
 class=SpellE>Bendixson</span> son v&aacute;lidas y la regi&oacute;n  $R$  tiene una  
 soluci&oacute;n peri&oacute;dica.</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Existe  
 una dificultad en este teorema. Veamos el caso de la ecuaci&oacute;n de van <span  
 class=SpellE>der</span> <span class=SpellE>Pol</span>'s,</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image021.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985993"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:137.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image023.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985994"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sabemos que existe una soluci&ocute;n peri&ocute;nica que no difiere mucho de un c&iacute;rculo de radio  $r = 2$ . Si intentamos construir una regi&ocute;n  $R$  con c&iacute;rculos de radio  $r = 2 + n_{<sub>1</sub>}$  y  $2 - n_{<sub>2</sub>}$ ,  $n_{<sub>1</sub>}$ ,  $n_{<sub>2</sub>}$  > 0 y  $n_{<sub>2</sub>}$  < 2, podemos f&acute;cilmente encontrar que la regi&ocute;n  $R$  no contiene las trayectorias de la forma requerida por el teorema. La forma de la regi&ocute;n es muy importante, y en muchos casos de inter&eacute;s pr&acute;ctico, encontrar la regi&ocute;n  $R$  es una tarea dif&iacute;cil.</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Limitantes y &uacute;ltimos limitantes</span></b><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Las ecuaciones de van <span class=SpellE>der</span> <span class=SpellE>Pol</span>'s forzadas y no forzadas son muy estudiadas.</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:117.75pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image025.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]>







Este sistema es rico en fenómenos periódicos, en particular subarmónicos, ya que si el periodo de la función,  $p$ , es un entero positivo, es un subarmónico de orden  $n$ . Los armónicos son soluciones periódicas con periodo  $n$ , donde  $n$  es un entero positivo mayor o igual a dos.

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Si hay un  $t_0$  y un  $y_0$ ,

Si



type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="existciclolimite\_archivos/image030.gif" v:shapes="\_x0000\_i1040">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985997">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> un tiempo finito T, tal que T  
</span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>&sup3;</span></span></span>  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> T<sub>0</sub>, de forma tal que  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="existciclolimite\_archivos/image032.gif" v:shapes="\_x0000\_i1041">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985998">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>decimos</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que la soluci&oacute;n tiene un tiempo  
de escape finito.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El estado <span class=GramE>y(</span>t,  
y<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>) del sistema<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249985999">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> dice que est&aacute; acotado para la  
 condici&oacute;n inicial (y<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>), si existe una constante b tal  
 que<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:153pt;height:17.25pt' o:ole=""/>  
 <v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image034.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986000">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>si</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> la soluci&oacute;n y(t, y<sub>0</sub>,  
 t<sub>0</sub>) del sistema:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole=""/>  
 <v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986001">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>est&aacute;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> acotada para todo (y<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>), luego el sistema es Lagrange estable. Si b es independiente de t<sub>0</sub>, luego se dice que el sistema es uniformemente Lagrange estable.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a decir que el sistema <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image033.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986002">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span><span class=GramE>&uacute;ltimamente</span> acotado si existe una constante b &gt; 0, tal que correspondiendo a cada condici&oacute;n inicial y<sub>0</sub> en t = t<sub>0</sub>, debe existir al tiempo t<sub>0b</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup3;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> t<sub>0</sub>, tal que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:156pt;height:17.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="existciclolimite\_archivos/image036.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986003">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->









### 3.122 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. COTAS DE AMPLITUD PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="cotasamplsissegundorden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="cotasamplsissegundorden_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="cotasamplsissegundorden_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>COTAS DE AMPLITUD PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>6</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:22:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:29:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>681</o:Words>
<o:Characters>3746</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>31</o:Lines>
<o:Paragraphs>8</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4419</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
```



```

</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:958872037;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-1319185308 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1
 {mso-list-id:1077898192;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-1719262886 201981967 201981977 201981979 201981967
201981977 201981979 201981967 201981977 201981979;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";

```

```

mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>COTAS DE
AMPLITUD PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>En los sistemas de segundo orden las trayectorias se
mueven en el espacio tridimensional (y_1 , y_2 , t). Bajo ciertas
condiciones las trayectorias, eventualmente, pueden estar confinadas en un cilindro de longitud
infinita. La región
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>G tiene la propiedad de confinar las
trayectorias del punto (y_1 , y_2 , t , y_{10} , y_{20} , t_{00}) que es la proyección

del punto en el plano fase. Para la región
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>S se tiene una interpretación
similar.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Determinar las regiones
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>G y
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>S nos permite concentrarnos en un
subconjunto del plano fase. También, trayectorias periódicas, si existen, caen
dentro de
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

```

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> y fuera <span class=GramE>de </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>S</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Este hecho nos da el m&eacute;todo para encontrar las cotas de amplitud de soluciones peri&oacute;dicas. En el caso de funciones peri&oacute;dicas forzadas, de la existencia de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> se puede deducir la existencia de una soluci&oacute;n con el mismo periodo que el de la funci&oacute;n <span class=Spelle>forzante</span>. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a ver la ecuaci&oacute;n de van <span class=Spelle>der</span> <span class=Spelle>Pol</span>'s generalizada. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:104.25pt; height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986080">

</o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986081">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> G(x<sub>1</sub>) &gt; 0, x<sub>1</sub> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> 0, <span class=SpellE>x<sub>1</sub>F</span>(x<sub>1</sub>) &gt; 0, |x<sub>1</sub>| &gt; que alg&uacute;n x<sub>1</sub>'.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Podemos reducir la ecuaci&uacute;n forzada de van <span class=SpellE>der</span> <span class=SpellE>Pol</span>'s<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:117.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986082">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> puede reducir a la generalizada por medio de las siguientes sustituciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986083">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:33.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986084">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:33pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986085">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Bajo ciertas condiciones existen las regiones  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> y  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>S</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> para la ecuaci&oacute;n general de van  
 <span class=Spelle>der</span> <span class=Spelle>Pol</span>'s.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Ahora vamos a ver un m&eacute;todo geom&eacute;trico para determinar las cotas de amplitud. Sea el sistema:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986086">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1069" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1069" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986087">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> > 0, p(&middot;) es <span class=Spelle>continuqa</span> y |p(t)| </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> P pata toda t, y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:69.75pt;height:30pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986088">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Se requieren dos etapas para construir una regi&ocute;n de &uacute;ltime confinamiento. La primera etapa del proceso consiste en simplificar el sistema de tal manera que<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>las direcciones de las trayectorias para un sistema dado<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>est&eacute;n acotadas por las direcciones de las trayectorias para el sistema simplificado. La segunda etapa consiste en que para el sistema simplificado se deben encontrar los contornos que confinan las trayectorias del sistema original. As&iacute; la direcci&ocute;n de las trayectorias del sistema<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986089">
 </o:OLEObject>

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986090">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>en</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> cada punto est&aacute;n acotadas por las direcciones de las trayectorias del sistema:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986091">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986092">  
</o:OLEObject>



</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> x<sub>1</sub> &gt;  
 0<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image022.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986093">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image024.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986095">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> x<sub>1</sub> &lt; 0, y para x<sub>1</sub> = 0, la direcci&oacute;n de la trayectoria es horizontal.  
 Sea:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:110.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986096">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1043"
type="#_x0000_t75" style='width:116.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

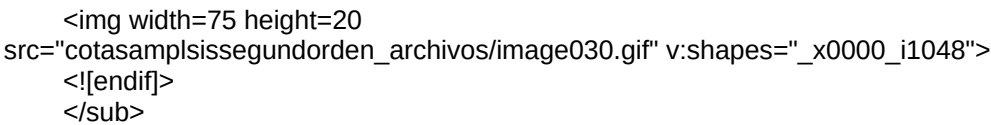
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1043"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986097">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las direcciones de las trayectorias del
sistema:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1044"
type="#_x0000_t75" style='width:84.75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

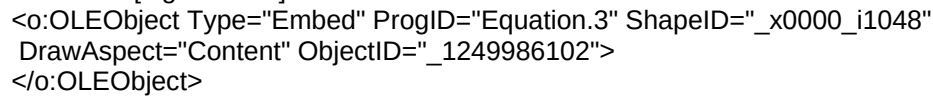
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1044"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986098">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1045"
type="#_x0000_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden_archivos/image021.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

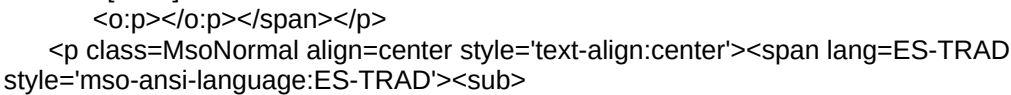
<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"

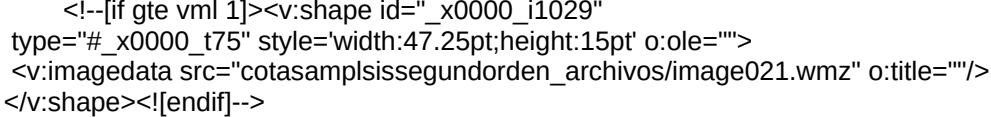
```

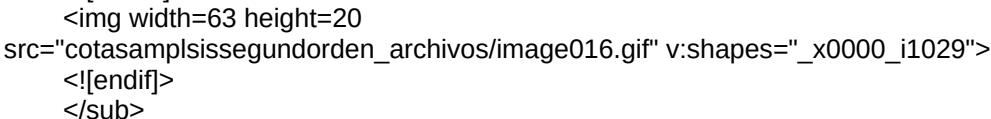
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986099">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> x<sub>1</sub> &gt;  
 0<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image022.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986100">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image024.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986101">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> x<sub>1</sub> &lt;  
 0.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Est&acute;n acotadas por las trayectorias del sistema:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>

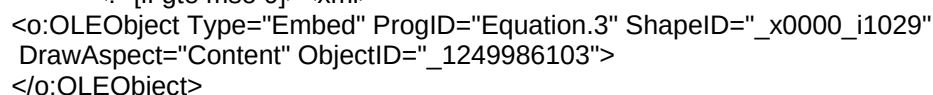


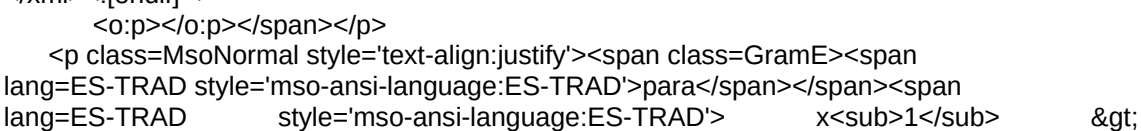


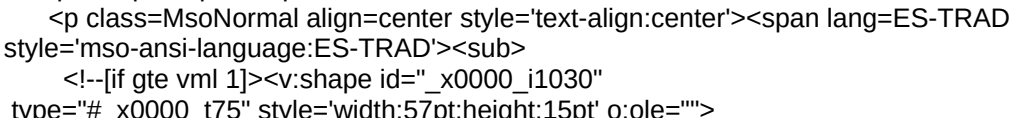


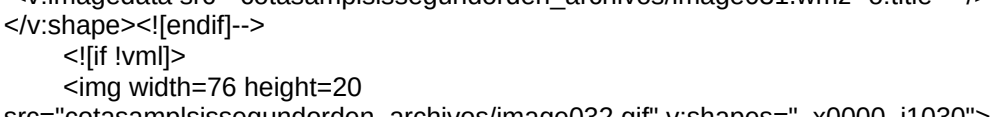


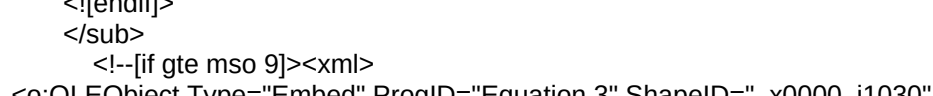


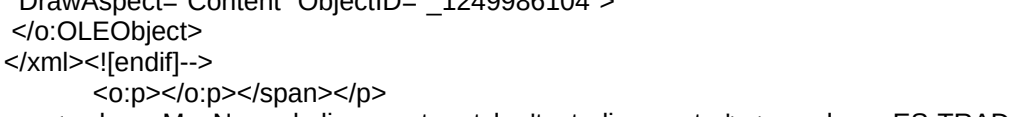


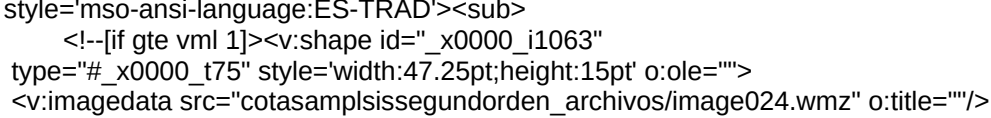


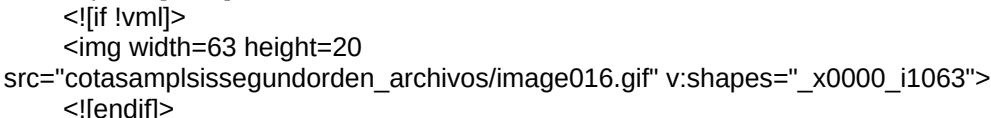














<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986105">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  $x^{1}$  &lt; 0, donde

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:48pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986106">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:48.75pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986107">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es el sistema simplificado. Consideremos el contorno:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:120.75pt;height:29.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986108">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> la curva<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt;height:15pt'>  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </span></sub><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El contorno se obtuvo de  
 integrar:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986109">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> se obtuvo del sistema simplificado para  
 x<sub>1</sub> &gt; 0. Para </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>h</span></span></span></p>

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> suficientemente grandes, el contorno pasa a trav&eacute;s de (0<span class=GramE>, </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>) y (0, -</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>) y es <span class=Spelle>monot&oacute;nico</span> fuera de la regi&oacute;n |x<sub>2</sub>|</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> alg&uacute;n </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. En la figura se muestra un conjunto de estos contornos.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:187.5pt;height:258pt'><v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image043.png" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La curva<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt;height:15pt'><v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image039.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> muestra en la figura<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:185.25pt'><v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image045.png" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es alg&uacute;n n&uacute;mero positivo. El cuadrado </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> contiene el m&aacute;ximo y el m&iacute;nimo de la curva y la funci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986110"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> monot&oacute;nica en x<sub>1</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. La curva intercepta el contorno a trav&eacute;s de (0<span class=GramE>, </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;



mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>) en (</span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>e</span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>1</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>h</span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>1</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>), y el contorno intercepta a trav&eacute;s  
de (0, -</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>) la  
l&iacute;nea x<sub>1</sub> = </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><sub><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> como se ve en la figura.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:3in;height:237pt'>  
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image049.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las coordenadas de los puntos p<sub>1</sub> y  
p<sub>2</sub> est&aacute;n dadas por las ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1066"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image051.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986111">

</o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1067"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image053.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1067"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986112">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1068"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image055.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1068"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986113">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>ya</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que F es un polinomio de grado 3.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:24pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image057.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986114">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:32.25pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986115">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:39pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986116">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Luego debe existir </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>\* tal que para todo </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>\* <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="cotasamplsissegundorden\_archivos/image063.wmz" o:title=""/>

```

</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986117">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" _x0000_i1054"
type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="cotasampsissegundorden_archivos/image065.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1054"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986118">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Por simple geometría se puede mostrar que las
trayectorias del sistema<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" _x0000_i1055"
type="#_x0000_t75" style='width:95.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="cotasampsissegundorden_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1055"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986119">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" _x0000_i1038"
type="#_x0000_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">

```

```

<v:imagedata src="cotasamplsissegundorden_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986120">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>cruzan dentro de todos los contornos
construidos como antes con <span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h<span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> > <span lang=ES-TRAD
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>h*. Se puede encontrar un contorno similar
para x₁ < 0 y las trayectorias se mueven horizontalmente en x₁ =
0; por lo que debe existir una región <span
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>G tal que las trayectorias son finalmente
acotadas en <span lang=ES-TRAD
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>G.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.123 SISTEMAS NO LINEALES. CICLO LIMITE. LIAPUNOV COMO METODO DE ACOTAMIENTO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```

```

<head>

```

```

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="liapunovmetdeacota_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="liapunovmetdeacota_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="liapunovmetdeacota_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LIAPUNOV COMO METODO DE ACOTAMIENTO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>0</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:30:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:30:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>287</o:Words>
<o:Characters>1579</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>13</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1863</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";

```

```

 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1305742127;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:1788629386 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>LIAPUNOV
COMO METODO DE ACOTAMIENTO<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

```







</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986196">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> Lagrange estable. Para el sistema  
 tenemos que <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1027"  
 type="# \_x0000\_t75" style='width:8.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986197">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1028" type="# \_x0000\_t75"  
 style='width:126.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986198">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> V tiene derivadas parciales continuas  
 tales que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1029"  
 type="# \_x0000\_t75" style='width:87pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986199">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:  
 normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Teorema de  
 Lur'e</span></b><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Consideremos el sistema de Lur'e con  
 entrada como se muestra en la figura.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:213.75pt;height:54pt'>  
 <v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image011.png" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El sistema est&aacute; descrito por la  
 ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:65.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986200">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:48.75pt;height:12.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986201">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> (&middot;)b cae en el sector (0, k] y los valores propios de la matriz A caen en el lado izquierdo del plano. Supongamos que existe una funci&ocirc;n de Liapunov de la forma:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986202">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el sistema no forzado.<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Teorema del confinamiento &uacute;ltimo</span></b><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Sea </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una regi&ocirc;n acotada que contiene al origen y sea </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><sup><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>c</span></sup><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> la regi&oacute;n fuera <span class=GramE>de </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Debe existir una funci&oacute;n escalar <span class=GramE>V(</span>y) con derivadas parciales continuas y funciones continuas a(r), b(r), y c(r), tal que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>1. <span class=GramE>a</span>(&middot;), b(&middot;), no son decrecientes y o &lt; a(|y|) </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> V(y) </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> b(|y|) en </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><sup><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>c</span></sup><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>2. <span class=GramE>c</span>(&middot;) no es decreciente y a lo largo de la soluci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:113.25pt;height:18pt' o:ole="">

<v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986203">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>3. a(r) </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:

Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> como r </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>luego</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el sistema<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="liapunovmetdeacota\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986204">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>tiene</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una regi&oacute;n de confinamiento &uacute;ltime.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>No es trivial la aplicaci&oacute;n de este teorema a sistemas de orden mayor por la imposibilidad de encontrar una <span class=GramE>V(</span>y).<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</div></td>  
</tr>  
</table>  
</body>  
</html>

### 3.124 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. INTRODUCCION

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metdeaproximacion_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metdeaproximacion_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metdeaproximacion_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODOS DE APROXIMACION</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>0</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:30:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:31:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>280</o:Words>
<o:Characters>1546</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>12</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1823</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
```

```

<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1305742127;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:1788629386 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1
 {mso-list-id:1737702513;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:56369762 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l2
 {mso-list-id:1829007288;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:1630587112 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l2:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>

```



```

<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>METODOS DE
APROXIMACION</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a estudiar los métodos cualitativos y
cuantitativos que dependen de la presencia de pequeños parámetros en las
ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Los métodos cuantitativos requieren
la solución del sistema como una expresión explícita aproximada. La
presencia de los pequeños parámetros nos permiten determinar el comportamiento de los sistemas no lineales en
téminos de sistemas mácules simples. Vamos a discutir dos clases de
métodos de aproximación:</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:
-18.0pt;mso-list:l1 level1 lfo2;tab-stops:list 18.0pt'>
<![if !supportLists]
1.<span style='font:7.0pt "Times New
Roman"'>
<![endif]
<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:
ES-TRAD'>Métodos de pequeños parámetros</p>
<p class=MsoNormal style='margin-left:18.0pt;text-align:justify;text-indent:
-18.0pt;mso-list:l1 level1 lfo2;tab-stops:list 18.0pt'>
<![if !supportLists]
2.<span style='font:7.0pt "Times New
Roman"'>
<![endif]
<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:
ES-TRAD'>Métodos de perturbaciones singulares.</p>

```

par&acute;metros

Los m&eacute;todos de peque&ntilde;os se aplican a sistemas de la forma:

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{a_{ij}}{b_{ij}}$$

donde  $x$  es un vector de  $n$  dimensiones y  $y$  es un par&acute;metro peque&ntilde;o y el lado derecho de la ecuaci&oacute;n es continuamente diferenciable en todos sus argumentos. El objetivo del m&eacute;todo de par&acute;metros peque&ntilde;os es determinar el comportamiento del sistema a partir del comportamiento del sistema:

$$\text{con } i = 1, 2, \dots, n,$$

Una subclase importante de estos sistemas son los sistemas cuasilineales de la forma:

$$\text{con } i = 1, 2, \dots, n,$$

$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \mathbf{v}$

donde

es un parámetrometro pequeño;  $\mathbf{A}$  es una matriz constante,

$\mathbf{w}$

$\mathbf{v}$

$\mathbf{r}$  y  $\mathbf{x}$  es un vector  $\mathbf{n}$ . El término cuasilineal se debe a:

1. Times New Roman

El sistema es lineal cuando

$\mathbf{r} = 0$

2. Times New Roman

El comportamiento de los sistemas no lineales para

suficientemente pequeños, es similar al de los sistemas lineales cuando

$\mathbf{r} = 0$

style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El m&eacute;todo de perturbaciones singulares se aplica a sistemas de la forma:</p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="metdeaproximacion\_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986254"></o:OLEObject></xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="metdeaproximacion\_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986255"></o:OLEObject></xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> x e y son vectores, </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es un par&aacute;metro peque&ntilde;o y f y g son continuamente diferenciables en todos sus argumentos.</p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El inter&eacute;s cae en determinar el comportamiento del sistema del comportamiento del sistema <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">

```

<v:imagedata src="metdeaproximacion_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986256">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1032"
type="#_x0000_t75" style='width:60.75pt;height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metdeaproximacion_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986257">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
 </tr>
 </table>
</body>

</html>

```

### 3.125 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. INTRODUCCION. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;

```

```

}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
}
.style15 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #FFFFFF;
 font-weight: bold;
}
-->
</style></head>

<body>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="552">Curso de Control > Sistemas no Lineales >
Métodos de Aproximación </td>
<td width="234"><div align="right"> <a href=" ../sistnolineal.htm"
target="_parent"><< Regreso a la página de Sistema no Lineales
</div></td>
</tr>
</table>
<table width="786" height="15" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
background=" ../Images/control2.gif">
<tr>
<td background="Images/encabezado.gif"><div align="center">METODOS DE APROXIMACION </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<div align="left"></div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.126 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. INTRODUCCION. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">

```

```

<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.style17 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td><div align="center">INDICE</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Métodos de Aproximación
</div></td>
</tr>
<tr>
<td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"><a
href="existsolperiodica.htm"
target="mainFrame">Soluciones
Periódicas</div></td>
</tr>
<tr>

```



```
 Sistemas Cuasilineales </div></td> </tr> Linealización Equivalente </div></td> </tr> Perturbación Singular </div></td> </tr> </table> <p class="style1"> </p> </div> </body> </html> |
```

### 3.127 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="existsolperiodica_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="existsolperiodica_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="existsolperiodica_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:32:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T19:07:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>516</o:Words>
<o:Characters>2841</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>23</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>

```

```

<o:CharactersWithSpaces>3351</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1316644204;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:966562600 -1793951186 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level2
 {mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level3

```

```

 {mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level4
 {mso-level-tab-stop:144.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level5
 {mso-level-tab-stop:180.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level6
 {mso-level-tab-stop:216.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level7
 {mso-level-tab-stop:252.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level8
 {mso-level-tab-stop:288.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level9
 {mso-level-tab-stop:324.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1
 {mso-list-id:2007709504;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:-1706546740 134873103 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level2
 {mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level3
 {mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level4
 {mso-level-tab-stop:144.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level5
 {mso-level-tab-stop:180.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level6
 {mso-level-tab-stop:216.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level7
 {mso-level-tab-stop:252.0pt;
 mso-level-number-position:left;

```

```

 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level8
 {mso-level-tab-stop:288.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level9
 {mso-level-tab-stop:324.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>EXISTENCIA
DE SOLUCIONES PERIODICAS<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sea $x'(t)$ una solución de <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>

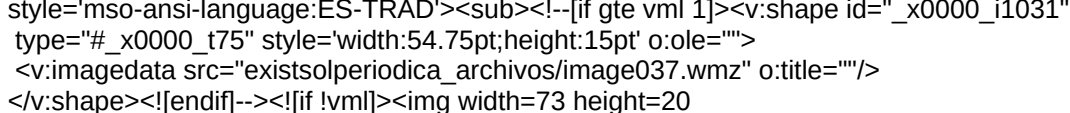
```

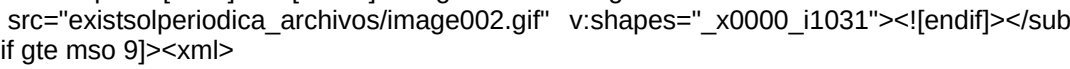
```

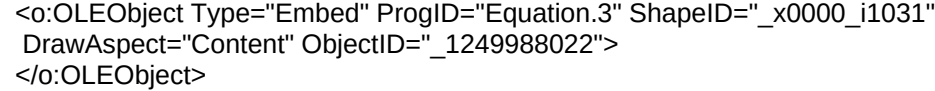
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:54.75pt;
height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="existsolperiodica_archivos/image037.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988016">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La estabilidad de la trayectoria x'(t) se
analiza si definimos una nueva variable y(t),<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1026"
type="#_x0000_t75" style='width:75pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="existsolperiodica_archivos/image038.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988017">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y consideramos la estabilidad de la
solución trivial de:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1027"
type="#_x0000_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="existsolperiodica_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1027"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249988018">

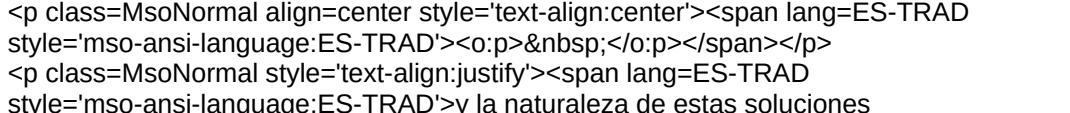
```

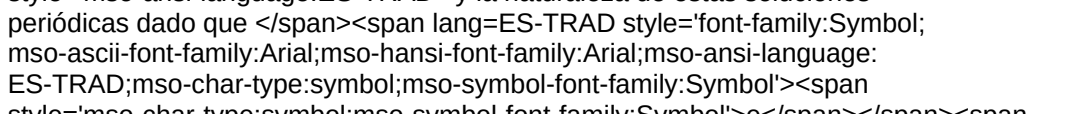
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> Y(y, t) se determina expandiendo  $X(y(t) + x'(t), t, o)$  alrededor de  $X(x'(t), t, o)$ . Si despreciamos los términos de orden mayor en y, podemos expresar la ecuación como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image040.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988019">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:102.75pt;height:95.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image041.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988020">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y la ecuación se llama la ecuación de la primera variación de<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:54pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image042.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988021">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las condiciones para la existencia de una solución periódica para el sistema <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

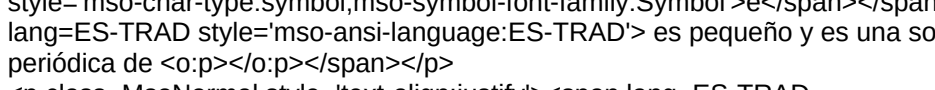


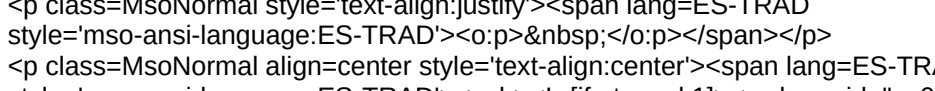


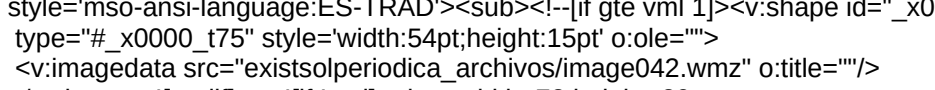


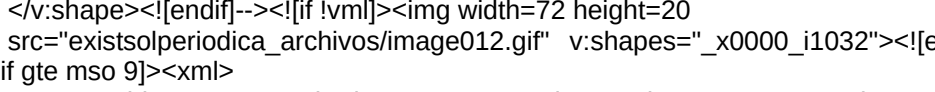


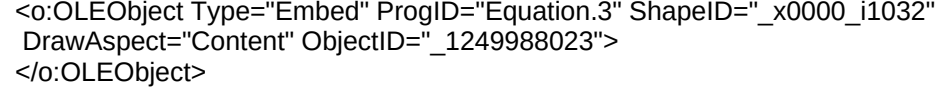


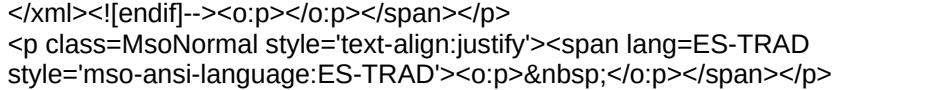


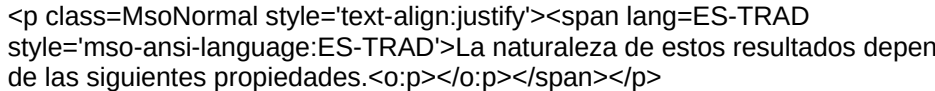


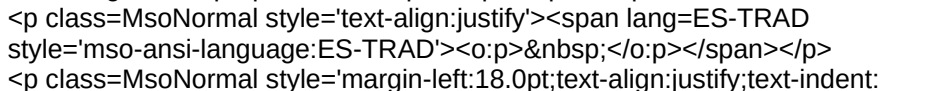


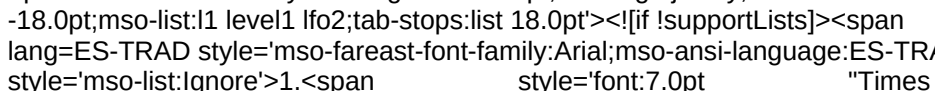


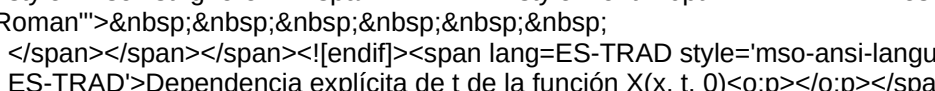


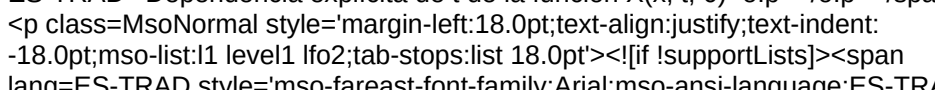


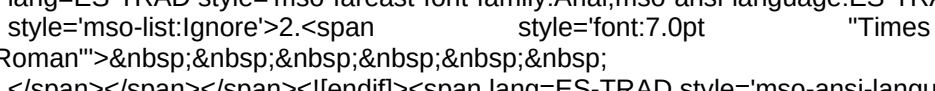


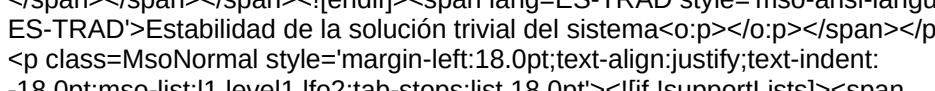


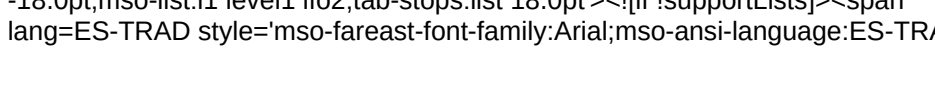
















style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:117.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image044.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988025"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image045.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988026"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La última ecuación tiene solución trivial  $x=0$  para el caso de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> = 0. esto corresponde a la solución trivial de<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:12pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image046.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988027"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es periódica con periodo T. El objetivo del teorema es probar que<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image045.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--  
[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988028">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>tiene</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una solución denotada por  
 $x<sub>0</sub>$ </span></span>  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>)  
para </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>| </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>£</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>e</span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, donde </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>e</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
TRAD'>0</span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es un número positivo  
suficientemente pequeño.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a asumir que el Jacobiano con  
respecto a  $x<sub>0</sub>$ , del lado izquierdo de la ecuación es no singular en  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> = 0. Si aplicamos el teorema de la función  
implícita nos muestra que debe existir una única función continuamente  
diferenciable  $x<sub>0</sub>$ </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>), definida para </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>|  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:

Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol"><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>£</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> donde </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es un número positivo suficientemente pequeño, tal que, <o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:48.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image047.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988029"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es la solución de<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image045.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988030"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Luego la existencia de una solución periódica para <o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image043.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988031"></o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>depende de la no singularidad del jacobiano<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:33.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image048.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988032">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para determinar la no singularidad del jacobiano consideremos la matriz:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:105.75pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image049.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988033">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El jacobiano es no singular ya que<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="existsolperiodica\_archivos/image050.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988034">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si derivamos<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:30pt' o:ole="">

$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{-2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)(-2x)}{(x^2 - 1)^2}$

y evaluamos para  $x = 0$

$= \frac{2}{1}$

= 2

La condición inicial para  $X'(t)$  se obtiene al ver que  $x(0, x) = 0$ , de lo cual tenemos que  $X'(0, 0, 0) = I$ . La solución para la derivada es:

$X'(0, 0, 0) = I$

por lo que la condición para la singularidad de jacobiano se reduce a:

$X'(0, 0, 0) = I$



### 3.128 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. SISTEMAS CUASILINEALES. METODOS DE APROXIMACION

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="siscuasilinmetaprox_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="siscuasilinmetaprox_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="siscuasilinmetaprox_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS CUASILINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:33:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T19:15:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1006</o:Words>
<o:Characters>5535</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>46</o:Lines>
<o:Paragraphs>13</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>6528</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
```

```

</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:80302042;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:1580253180 201981967 201981977 201981979 201981967
201981977 201981979 201981967 201981977 201981979;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:18.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:18.0pt;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level2
 {mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level3
 {mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level4
 {mso-level-tab-stop:144.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level5
 {mso-level-tab-stop:180.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level6
 {mso-level-tab-stop:216.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level7

```



```

 {mso-level-tab-stop:252.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level8
 {mso-level-tab-stop:288.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l0:level9
 {mso-level-tab-stop:324.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1
 {mso-list-id:537474335;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:1518119306 201981967 201981977 201981979 201981967
201981977 201981979 201981967 201981977 201981979;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:36.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level2
 {mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level3
 {mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level4
 {mso-level-tab-stop:144.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level5
 {mso-level-tab-stop:180.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level6
 {mso-level-tab-stop:216.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level7
 {mso-level-tab-stop:252.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level8
 {mso-level-tab-stop:288.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level9
 {mso-level-tab-stop:324.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>

```

```

/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>SISTEMAS
CUASILINEALES. METODOS DE APROXIMACION</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Veremos tres métodos de aproximación. El
énfasis está puesto en discutir la técnica en lugar que en las pruebas de
convergencia de series aproximadas o en la justificación matemática del
método. Vamos a poner atención a los sistemas de segundo orden dados
por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

```





<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988574">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si se igualan los coeficientes con igual potencia de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> a ambos lados de la ecuación anterior obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:54pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image130.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988575">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image131.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988576">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:8.25pt;height:15pt'>

<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image132.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:138.75pt;height:35.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image133.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988577">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Tomemos ahora la ecuación de <span class=SpellE>Rayleigh</span>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image134.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988578"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> > 0 es lo que usaremos.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si sustituimos la solución de la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'>x(t) = x<sub>0</sub>(t) + </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><sup><span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'>2</span></sup><span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'>x<sub>2</sub>(t) + ...,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>en<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image134.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988579"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y expandimos el lado derecho por series de Taylor e igualamos los coeficientes de la misma potencia de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, obtenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 1$$

Estas son ecuaciones diferenciales lineales y se pueden resolver sucesivamente para obtener  $x_0$ ,  $x_1$ , ...

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 1$$

Sea la condición inicial para

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>la siguiente<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image137.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988584"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>luego un conjunto de condiciones iniciales para  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,... son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image137.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988585"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

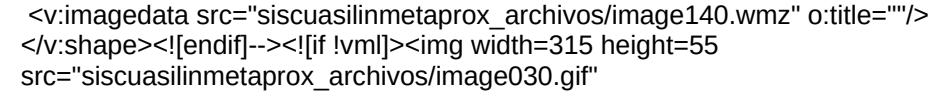
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:93pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image138.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988586"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

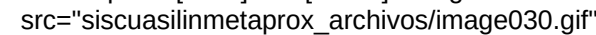
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si resolvemos las ecuaciones tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image139.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988587"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

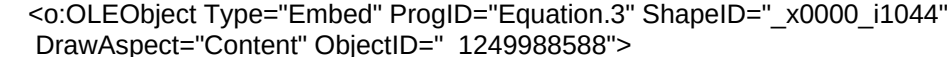
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:236.25pt;height:41.25pt' o:ole="">



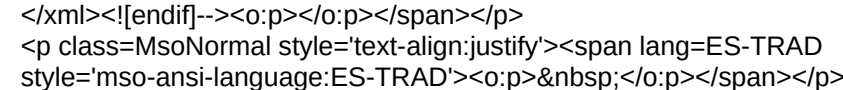


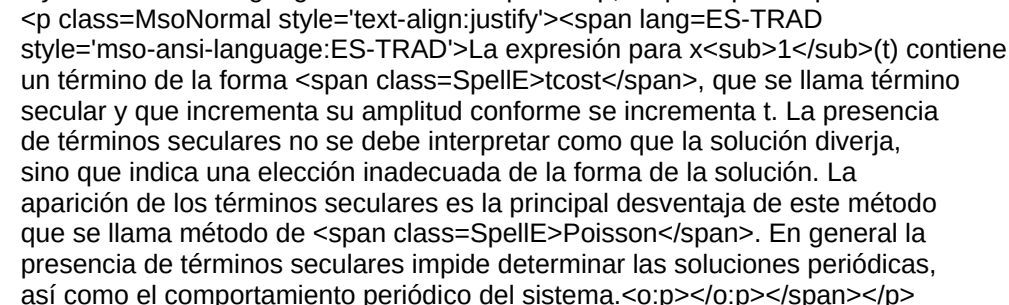


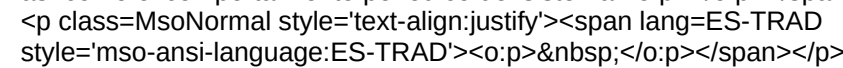


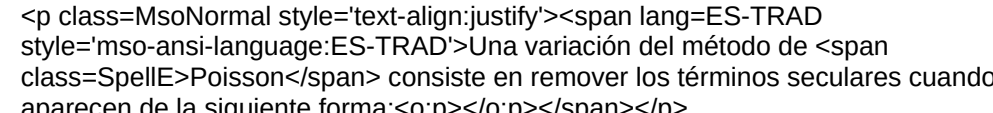


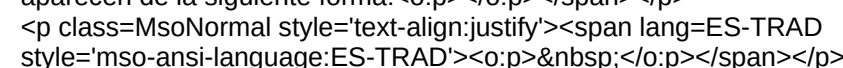


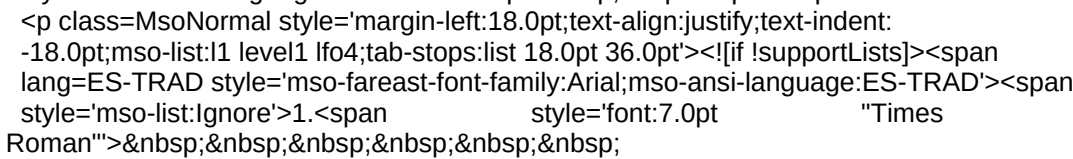


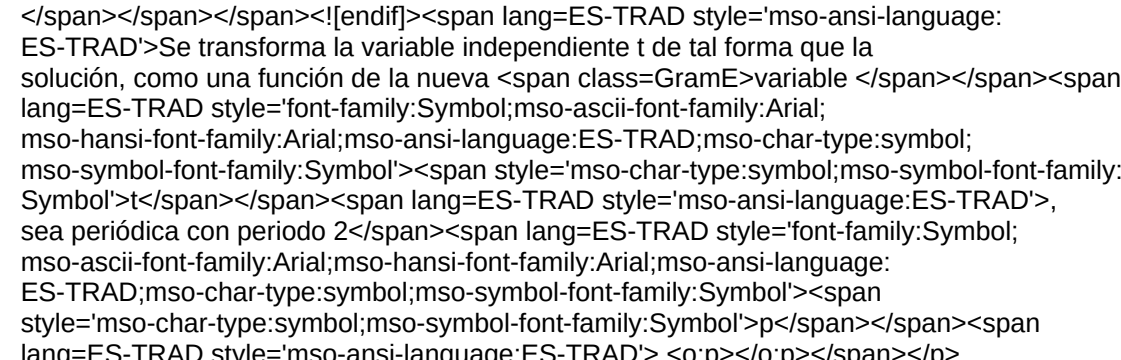


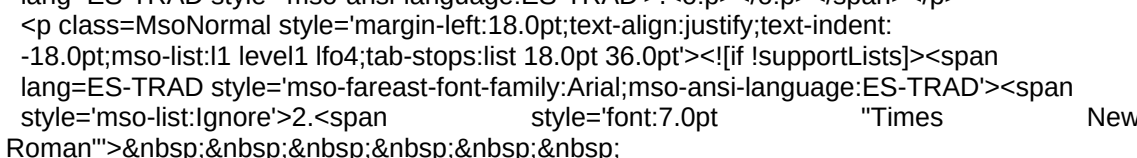


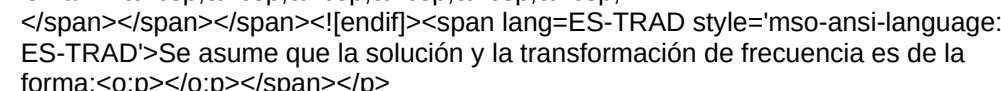


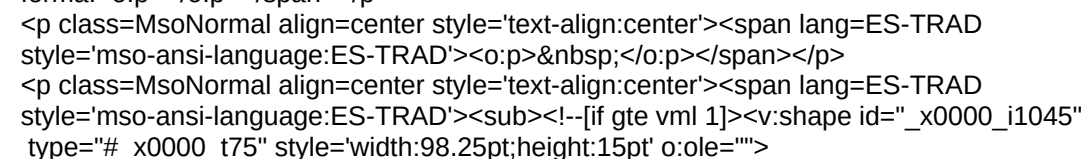


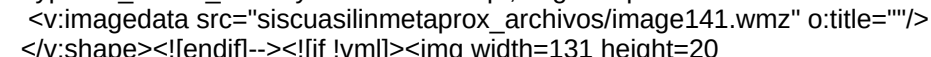














<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:312pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image144.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988593"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>el lado derecho lo podemos expandir de la forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:270pt;height:35.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image145.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988594"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si igualamos los coeficientes de la misma potencia de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image146.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988595"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:116.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image147.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988596"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></o:p></span></p>

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:306.75pt;height:35.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image148.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988597">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Tomemos de nuevo la ecuación de <span class=Spelle>Rayleigh</span> y apliquemos el método anterior. Si seguimos los pasos tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image146.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988598">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:177pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image149.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988599">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:392.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image150.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988600">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si resolvemos las ecuaciones diferenciales para  $x > 0$  con:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

[illegible]

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

La sustitución para  $x < 0$

$$\frac{1}{x} = -x^{-1}$$

Para eliminar la presencia de términos seculares en  $x > 1$ , debemos tener:

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{B_0} + \frac{1}{B_1}$$

lo que nos da:

$$B = \frac{B_0 B_1}{B_0 + B_1}$$

cuya solución es:

$$B = \frac{B_0 B_1}{B_0 + B_1}$$

La constante  $B_1$  se puede evaluar si asumimos que

$$B_1 = \frac{1}{B_0}$$

y en este caso

$$B = \frac{B_0 \cdot \frac{1}{B_0}}{B_0 + \frac{1}{B_0}} = \frac{1}{B_0 + 1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

donde los coeficientes de  $\sin$  y  $\cos$  son llevados a cero para excluir los términos seculares. Este proceso puede continuar y se pueden determinar los términos en las series para  $x$  y  $t$ . La condición inicial para la solución es:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

La aproximación de primer orden

$$x(t) \approx x_0 + v_0 t$$





$\sqrt{a^2 + b^2}$

donde  $a$  y el ángulo de fase  $\phi$  la amplitud  $a$  y el ángulo de fase  $\phi$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales. El método de promedio se basa en la consideración de que para pequeños  $\epsilon$  la forma de la solución no cambia, porque  $a$  y  $\phi$  son parámetros de variación lenta. El procedimiento consiste en asumir que:

$\sqrt{a^2 + b^2}$

$\sqrt{a^2 + b^2}$

$\sqrt{a^2 + b^2}$



lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>de<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1083" type="#\_x0000\_t75" style='width:194.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image170.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1083" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988627"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1084" type="#\_x0000\_t75" style='width:371.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image172.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1084" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988628"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1085" type="#\_x0000\_t75" style='width:147.75pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image173.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1085" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988629"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1086" type="#\_x0000\_t75" style='width:153pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image174.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1086" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988631"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1087" type="#\_x0000\_t75" style='width:57.75pt;height:15pt' o:ole="">

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Bajo las condiciones convenientes la función en el lado derecho de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

se puede expandir en series de Fourier de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image103.gif"

v:shapes="\_x0000\_i1091"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1091"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988636">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1092"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:201.75pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image178.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1092"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988637">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1093"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:201pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image179.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1093"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988638">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1094"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:203.25pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image180.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1094"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988639">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1095"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:198.75pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image181.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1095"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988640">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Los términos constantes en la expansión de  
 Fourier se pueden usar para obtener la primer aproximación, luego las  
 expresiones para las derivadas de a(t) y </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:



src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image121.gif"

v:shapes="\_x0000\_i1100"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1100"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988645">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>si procedemos de una forma similar  
 obtenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1101"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:252pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image187.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1101"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988646">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1102"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:246.75pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="siscuasilinmetaprox\_archivos/image188.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1102"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249988647">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>en</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> este paso, se expande el lado  
 derecho en series de Fourier y se procede como en el caso anterior.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </td>  
 </tr>  
 </table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";  
 color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>



### 3.129 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. METODO DE LINEARIZACION EQUIVALENTE

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metlinalizaequival_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metlinalizaequival_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metlinalizaequival_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODO DE LINEARIZACION EQUIVALENTE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:35:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:36:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>218</o:Words>
<o:Characters>1203</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>10</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1419</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
```

```

<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]>
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>METODO DE
LINEARIZACION EQUIVALENTE<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos de nuevo a usar la ecuación de <span

```

class=Spelle>Rayleigh</span>, pero ahora en forma de un sistema de gasa cerrada como el de la figura.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:340.5pt; height:73.5pt'>

<v:imagedata src="metlinalizaequival\_archivos/image001.png" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026"

type="#\_x0000\_t75" style='width:87pt; height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metlinalizaequival\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986643">

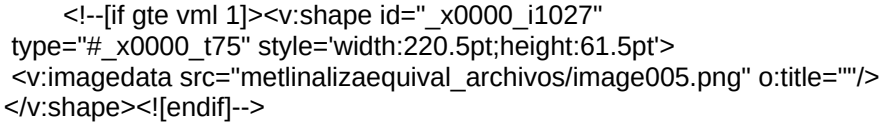
</o:OLEObject>

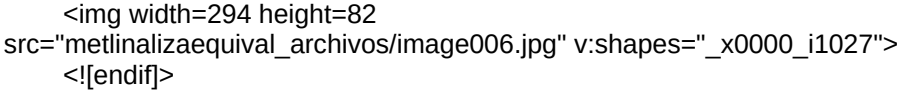
</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

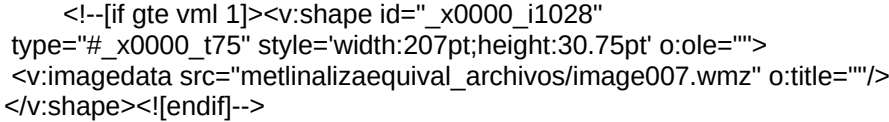
Se puede ver que G(s), que es la parte lineal del sistema es inestable. Si consideramos el comportamiento de la no linealidad a una entrada senoidal, como se ve en la figura





entrada ser&acute; a sen

t y la salida ser&acute;

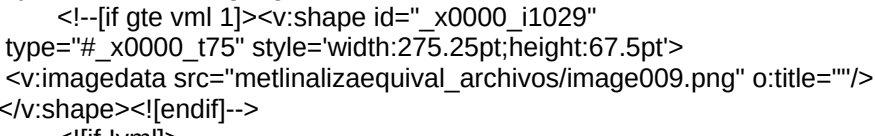


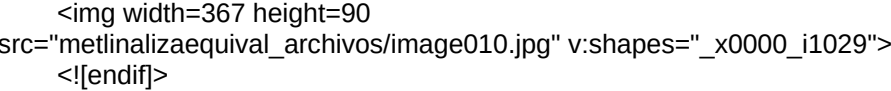


que

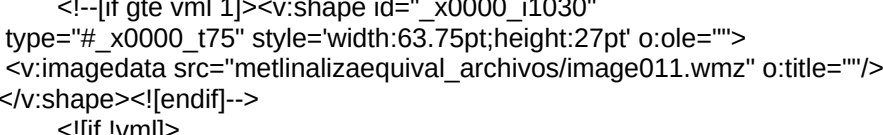
contiene un tercer arm&acute;nico en el t&acute;rmino 3

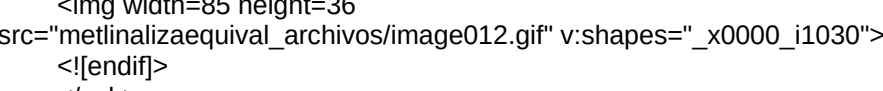
t. Para eliminar el tercer arm&acute;nico usamos un filtro como el que se muestra en la figura

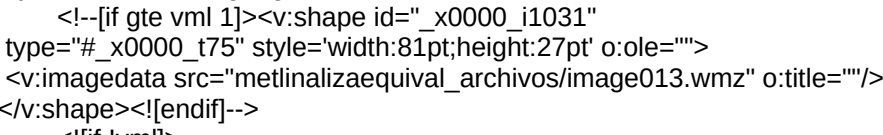


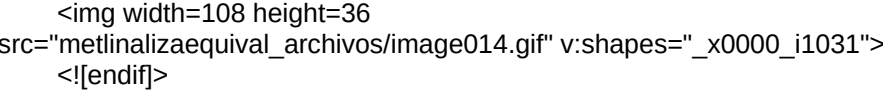


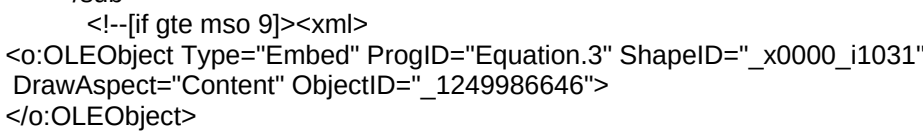
La salida de la no linealidad junto con la del filtro



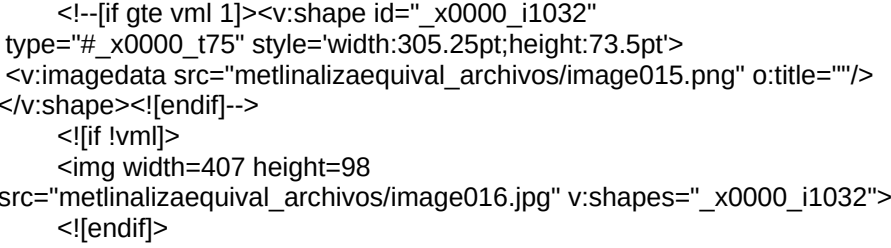








Vamos a ver el sistema de la figura

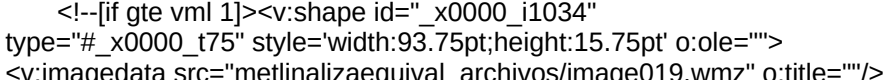


donde la no linealidad es remplazada por la no linealidad modificada. Los valores propios del sistema modificado están dados por las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 + \lambda + K_c = 0$$

El sistema modificado sostendrá la oscilación a la frecuencia

y amplitud a si:



```

</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1249986648">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Bajo las condiciones convenientes el comportamiento
oscilatorio del sistema modificado con la no linealidad modificada predice el comportamiento
oscilatorio del sistema original. En el caso del oscilador de Rayleigh, el sistema predice correctamente el comportamiento
oscilatorio. El procedimiento se puede generalizar y se llama el método de
linealización equivalente.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.130 SISTEMAS NO LINEALES. METODOS DE APROXIMACION. METODO DE PERTURBACION SINGULAR

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metpertursingular_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metpertursingular_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metpertursingular_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif-->
<title>METODO DE PERTURBACION SINGULAR</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>

```

```

<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>1</o:TotalTime>
<o:Created>2007-08-30T18:36:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-08-30T18:37:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>674</o:Words>
<o:Characters>3713</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>30</o:Lines>
<o:Paragraphs>8</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4379</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable

```



```

 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
 </style>
 <![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
 <tr>
 <td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'>METODO DE
PERTURBACION SINGULAR</p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Sea el sistema</p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
 coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
 path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
 filled="f" stroked="f">
 <v:stroke jointstyle="miter"/>
 <v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
 </v:formulas>
 <v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
 <o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
 </v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1068" type="#_x0000_t75" style='width:60pt;
 height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="metpertursingular_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <!--[if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1068" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986735">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1069" type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1069" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986736">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> x, y son vectores n y m, f y g son funciones continuamente diferenciables en cada uno de sus argumentos y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &lt;&lt; 1. Para </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> = 0, el sistema se reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1070" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1070" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986738">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

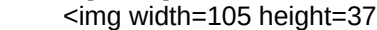
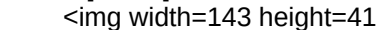
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1071"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:65.25pt;height:15pt o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1071"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986739">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El m&eacute;todo que nos da el comportamiento del  
 sistema<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1072"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:60pt;height:15pt o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1072"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986740">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1073"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:66pt;height:15pt o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1073"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986741">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>del</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>comportamiento del  
 sistema<o:p></o:p></span></p>





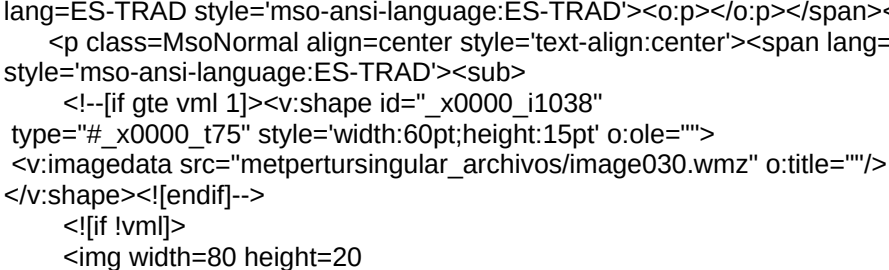
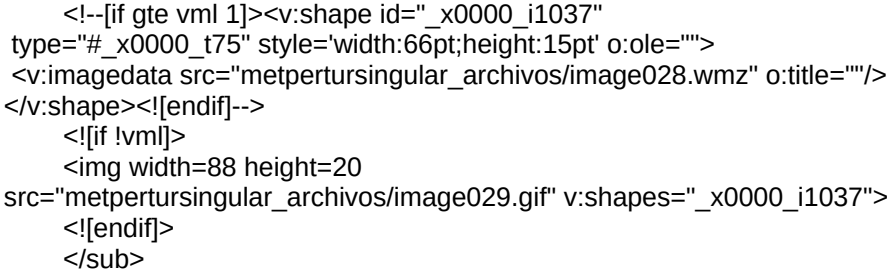
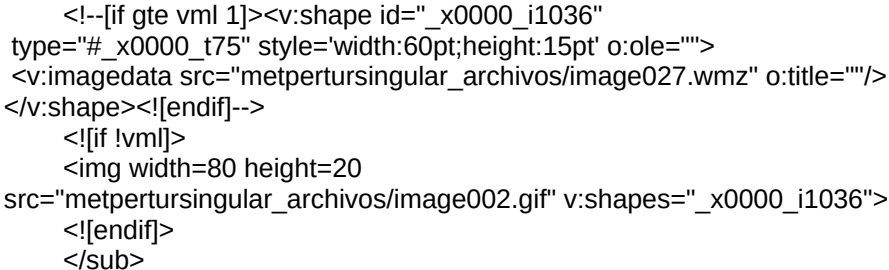
<![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986744">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image017.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986745">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si dibujamos la recta de carga como se ve en la figura, se  
 ve que tenemos tres posibles puntos de operaci&ocute;n. Para nuestro caso vamos a emplear  
 el punto de operaci&ocute;n 2. Al linealizar las caracter&iacute;sticas del diodo en la vecindad  
 del punto de operaci&ocute;n 2, obtenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image015.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986746">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image019.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]>

<![if !vml]>  
 width=105 height=37  
src="metpertursingular\_archivos/image020.gif" v:shapes="\_x0000\_i1031">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986747">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> g<sub>0</sub> e l<sub>0</sub> son  
constantes. Si consideramos que g<sub>0</sub> > 1, el polinomio característico par  
el sistema es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image021.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
 width=143 height=41  
src="metpertursingular\_archivos/image022.gif" v:shapes="\_x0000\_i1032">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986748">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> para </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>e</span></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> suficientemente peque&ntilde;o el punto  
de operaci&oacute;n es inestable.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Las ecuaciones para el circuito sin la capacitancia  
par&aacute;sita son:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:66pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image015.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]>

</v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986749">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:50.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986750">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>De nuevo si linealizamos alrededor del punto de  
 operaci&ocirc;n 2, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:111.75pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986751">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>lo</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que nos muestra que el punto de  
 operaci&ocirc;n es estable si g<sub>0</sub> &gt; 1.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD



En general el modelo sin los elementos par&acute;sitos, no nos lleva a resultados correctos. Vamos a investigar las condiciones bajo las cuales los sistemas



<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:60.75pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986755">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>son</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> similares. Consideremos el sistema lineal<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986756">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986757">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

$$y = 0$$

el sistema para

$$= 0$$

$$y = 0$$

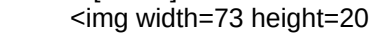
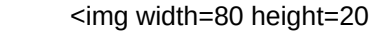
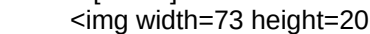
donde

A y D son matrices cuadradas y B y C son matrices compatibles. El comportamiento del punto singular en el origen del sistema

$$y = 0$$

<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986760">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image040.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986761">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> puede deducir del  
 sistema<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986762">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image038.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986763">



type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 width=73 height=20  
src="metpertursingular\_archivos/image034.gif" v:shapes="\_x0000\_i1049">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986765">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 width=80 height=20  
src="metpertursingular\_archivos/image036.gif" v:shapes="\_x0000\_i1050">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986766">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>asint&oacute;ticamente  
estable.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:  
normal'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Prueba</span></b><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Podemos ver que el sistema  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 width=73 height=20  
src="metpertursingular\_archivos/image034.gif" v:shapes="\_x0000\_i1051">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986767">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:56.25pt;height:15pt" o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image038.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986768">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> reduce a:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:102.75pt;height:17.25pt" o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image044.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986769">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>ya</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:54pt;height:17.25pt" o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image046.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986770">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Consideremos la matriz<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055"

type="#\_x0000\_t75" style='width:60.75pt;height:39pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image048.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986771">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si los valores propios de F</span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>e</span></span></sub><span  
lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> est&aacute;n en el lado izquierdo del  
plano, el sistema <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986772">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986773">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>



<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> asint&ocute;ticamente estable. Sea</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> &gt; 0, </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es un valor propio de F</span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> y <o:p></o:p></span></p>

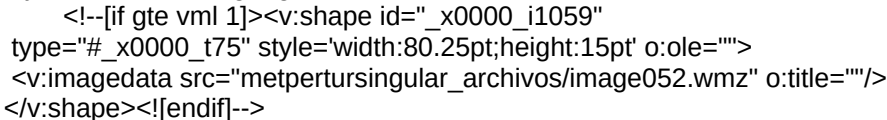
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

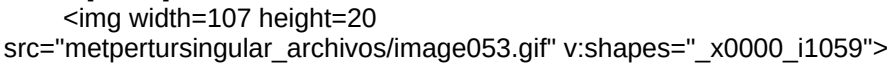
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:23.25pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image050.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986774"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el vector propio correspondiente a</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>. Luego,<o:p></o:p></span></p>

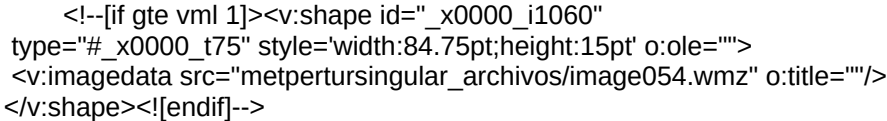
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

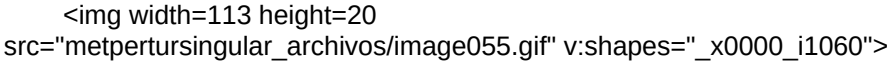
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD





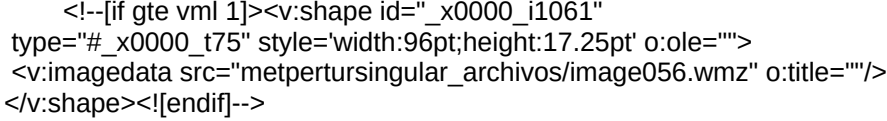
$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$





$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

luego:





<![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986777">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>de</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> lo cual se puede  
 definir<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:164.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image058.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986778">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>|</span></span><sub><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>e</span></span></sub><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> es un valor propio  
 de<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1063"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image060.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986780">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una funci&oacute;n acotada <span class=GramE>de </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, luego |</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>| es una funci&oacute;n acotada de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> como veremos. Para |</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>| suficientemente grande, existe la inversa de la matriz A - </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></sub><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>I as&iacute;</span></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:92.25pt;height:17.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image062.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986781">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Tambi&eacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image064.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986782">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>o</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1066" type="#\_x0000\_t75" style='width:336pt;height:21pt' o:ole="">

<v:imagedata src="metpertursingular\_archivos/image066.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1249986783">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>









```

lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>e<span
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>&lcirc;(0, <span lang=ES-TRAD
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>e<sub>0</sub>).<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.131 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. INTRODUCCION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="introidensis_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="introidensis_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="introidensis_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>INTRODUCCIÓN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>16</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-26T23:23:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-26T23:39:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>

```

```

<o:Words>439</o:Words>
<o:Characters>2415</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>20</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2849</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1661694118;
 mso-list-type:hybrid;
 mso-list-template-ids:380389230 -138400124 134873113 134873115 134873103
134873113 134873115 134873103 134873113 134873115;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:14.2pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:14.2pt;

```

```

 text-indent:-14.2pt;}
@list l1
 {mso-list-id:2037844930;
 mso-list-template-ids:-1098761190;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:36.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level2
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level3
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}
@list l1:level4
 {mso-level-tab-stop:144.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level5
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:180.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level6
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:216.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}
@list l1:level7
 {mso-level-tab-stop:252.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level8
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:288.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level9
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:324.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;

```

mso-style-parent: "";

mso-padding-alt: 0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;

mso-para-margin: 0cm;

mso-para-margin-bottom: .0001pt;

mso-pagination: widow-orphan;

font-size: 10.0pt;

font-family: "Times New Roman";

</style>

<![endif]>

</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval: 35.4pt'>

<div class=Section1>

<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight: normal'><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: red'>INTRODUCCIÓN</span></b></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'>Muchos problemas en Ingeniería de sistemas, particularmente aquellos relacionados con sistemas de control, se pueden subdividir en cuatro partes interrelacionadas.</span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left: 14.2pt; text-indent: -14.2pt; mso-list: l0 level1 lfo1; tab-stops: list 14.2pt'><![if !supportLists]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; mso-fareast-font-family: Arial; color: blue'><span style='mso-list: ignore'>1.<span style='font: 7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span><![endif]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'>Identificación de la meta.</span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left: 14.2pt; text-indent: -14.2pt; mso-list: l0 level1 lfo1; tab-stops: list 14.2pt'><![if !supportLists]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; mso-fareast-font-family: Arial; color: blue'><span style='mso-list: ignore'>2.<span style='font: 7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span><![endif]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'>Determinación de la posición con respecto a la meta.</span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left: 14.2pt; text-indent: -14.2pt; mso-list: l0 level1 lfo1; tab-stops: list 14.2pt'><![if !supportLists]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; mso-fareast-font-family: Arial; color: blue'><span style='mso-list: ignore'>3.<span style='font: 7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span><![endif]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'>Determinación de los factores externos que afectan el pasado, el presente, el futuro y el subsiguiente establecimiento del sistema.</span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left: 14.2pt; text-indent: -14.2pt; mso-list: l0 level1 lfo1; tab-stops: list 14.2pt'><![if !supportLists]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; mso-fareast-font-family: Arial; color: blue'><span style='mso-list: ignore'>4.<span style='font: 7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span><![endif]><span lang=ES style='font-size: 10.0pt; font-family: Arial; color: blue'>Determinación de una política de acuerdo con la

definición de la meta (1), conocimiento del estado actual (2) y modelo del sistema y sus alrededores.

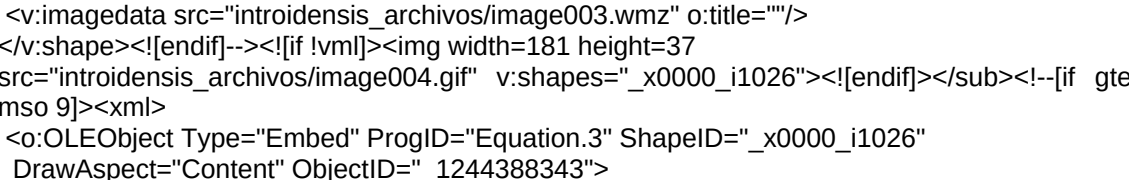
A menudo la política en el paso (4) está determinada por una acción óptima, en cuyo caso aparece el sujeto del control óptimo de un sistema.

En general nuestro problema es como sigue: Observamos la versión modificada de un vector de estado  $x$  de un sistema modificado por el ruido, una señal de entrada  $U(t)$  y un disturbio de entrada  $W(t)$ .

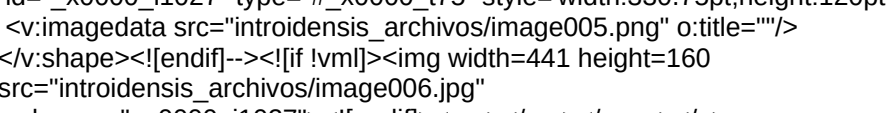
$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

En este modelo observado  $p$  representa

parámetros desconocidos del sistema y  $V(t)$  representa el ruido observado. El vector de estado  $X(t)$  asume la forma de una ecuación diferencial estocástica.



En general se desconoce el orden de la ecuación diferencial, pero para la mayoría de los esquemas de identificación que presentaremos tomamos modelos de orden conocido. El problema general de identificación lo presentamos en la figura 1.



La solución del problema de identificación de sistemas consistirá en determinar la estimación del vector del parámetro desconocido  $p$  y del orden de  $f$  si se desconoce.

El vector parámetro  $p(t)$  puede consistir de los coeficientes de la ecuación diferencial del sistema así como los coeficientes de variación del ruido del sistema  $W(t)$  y el ruido de observación  $V(t)$ .

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Se pueden notar varias subclases del problema general de identificación de sistemas y son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Identificación libre de ruido en la cual no están <span class=GramE>W(</span>t) y V(t).<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>El sistema y el modelo de observación son lineales.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>La observación del ruido de entrada <span class=GramE>W(</span>t) no es posible.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En general no es posible determinar todas las características de un proceso para el cual se desea un sistema modelo. Las características que debemos conocer son determinadas por las metas que hemos elegido del sistema, el posible grado de complejidad del sistema completo y sus requerimientos computacionales asociados.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En muchos sistemas de identificación en línea o recursiva, es decir hacer una adaptación óptima a la meta posible del sistema en cara de la incertidumbre de los alrededores y cambio de las condiciones de estos, por lo que hay que desarrollar métodos de identificación de sistemas para ambos dentro y fuera de línea. Podemos dividirlo en tres métodos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>El método clásico de identificación de sistemas<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Funciones de costo para identificación de sistemas<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Técnicas computacionales para identificación de sistemas.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.132 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. INTRODUCCION. MARCO 4

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">Página Principal >
Curso de Control > Identificación de Sistemas </td>
```



```

 <td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
 </tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="789" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">IDENTIFICACION DE SISTEMAS </div></td>
 </tr>
 </table>
 <p> </p>
 <p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.133 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. INTRODUCCION. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Fundamentos Matem´ticos</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
}

```

```

 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 }
 .style16 {color: #FFFFFF; font-size: 10px; font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td align="center">INDICE GENERAL </td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Introducciôn</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Métodos Clésicos</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Identifi. de Modelos Lineales</div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"> Modelos que Aprenden </div></td>
</tr>
<tr>
<td align="center" bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Teoría de Weiner </div></td>
</tr>
</table>
<p class="style1"> </p>
</div>
</body>
</html>

```

### 3.134 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. METODOS CLASICOS DE IDENTIFICACION DE SISTEMAS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="metclasidensis_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="metclasidensis_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="metclasidensis_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>

```

```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>METODOS CLASICOS DE IDENTIFICACION DE SISTEMAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>39</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-26T23:43:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-27T00:30:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1108</o:Words>
<o:Characters>6099</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>50</o:Lines>
<o:Paragraphs>14</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>7193</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";

```

```

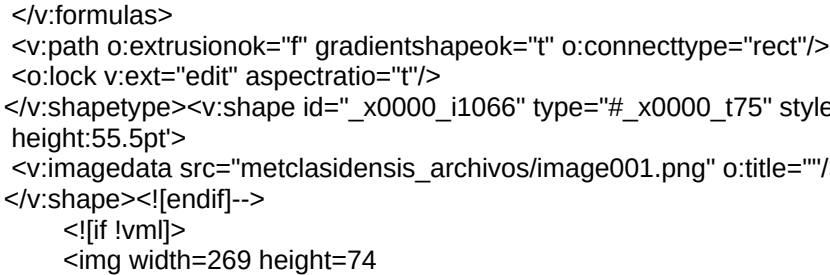
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:36.0pt;
 mso-footer-margin:36.0pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

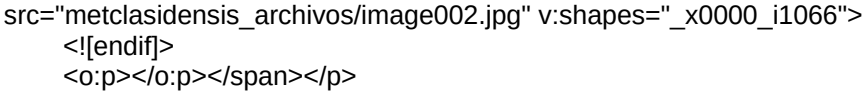
<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>METODOS CLASICOS DE IDENTIFICACION
DE SISTEMAS</p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'> </p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>1.1) Métodos de Deconvolución para la
identificación de la respuesta impulso.</p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'> </p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Por simplicidad nos restringiremos a un sistema de entrada y salida simple como el
que se representa en la figura.</p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'> </p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

```

$$\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{21600} \text{pixelWidth}_i \prod_{k=1}^{21600} \text{pixelHeight}_j \sum_{l=0}^1 \prod_{m=1}^6 \prod_{n=1}^{21600} \text{pixelWidth}_n \sum_{o=0}^8 \prod_{p=1}^{21600} \text{pixelHeight}_p \sum_{q=10}^{21600} 0$$





Por la observación de las entradas y salidas de un sistema lineal invariante en el tiempo para un proceso finito 0

T deseamos obtener la respuesta impulso del sistema

El problema que se plantea es ambicioso y se ve que es necesario simplificar el problema para hacerlo matemáticamente tratable. Se puede observar la entrada y la salida de nuestro periodo de N veces, digamosle

segundos aparte en el intervalo

donde N

symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> = T. Con base en estos datos podemos m&acute;s o menos determinar la respuesta impulso en el intervalo </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>0<span class=GramE>,T</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La salida del sistema debida a una entrada <span class=GramE>W(</span>t) y condiciones iniciales cero est&acute; dada por la integral de convoluci&acute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391463">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Aqu&iacute; se considera que la entrada <span class=GramE>W(</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>)</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> &lt; 0 o sea que W(0) </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1,</span></span><span lang=ES style='font-size:



<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>tambi&eacute;n</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> podemos hacer<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>W(t) = 0.5 </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>[</span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; mso-ansi-language:DE'>W(n</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>) + W(n + 1)</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:DE'>para <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>n</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial'>t &lt; (<span class=SpellE>n+1</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En estos t&eacute;rminos de aproximaci&oacute;n para <span class=GramE>W(</span>t) y h(t) la integral de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>

<img width=132 height=44



src="metclasidensis\_archivos/image004.gif" v:shapes="\_x0000\_i1054">  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391466">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>si</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> evaluamos para  $t = n$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'> $D$ </span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> ser&aacute;</o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:146.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391467">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si definimos el vector de observaci&oacute;n de salida como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:123pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391468">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>si</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> definimos el vector de respuesta impulso como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:165pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image013.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391469">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>entonces</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:146.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image009.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391470">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>T) = </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> <span class=SpellE>Wh</span></span><span style='color:fuchsia'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES



font-family:Arial;color:blue'>como</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:black'>h = W<sup>-1</sup></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Dada la forma triangular de W la soluci&acute;n para h se puede f&acute;cilmente escribir en forma recurrente:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:149.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391472">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:126.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391473">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>2.- Identificaci&acute;n de sistemas usando t&eacute;cnicas de correlaci&acute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'>El problema b&aacute;sico de identificaci&oacute;n que debemos considerar se presenta en la figura.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1067" type="#\_x0000\_t75" style='width:303.75pt;height:100.5pt'><v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image021.png" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Con base en reconocer los componentes de alta frecuencia de <span class=GramE>h(</span>t) es necesario que W(t) sea una se&ntilde;al de gran ancho de banda y para identificar h(t) sin error, es necesario que W(t) tenga un ancho de banda infinito. En la pr&aacute;ctica es posible tener una se&ntilde;al prueba con un ancho de banda mucho mayor que el ancho de banda del sistema.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Este m&eacute;todo consiste en emplear una se&ntilde;al de prueba (ruido blanco) y t&eacute;cnicas de correlaci&oacute;n y se deben de considerar los errores debidos a la entrada de ruido blanco. En lugar de observar la se&ntilde;al de salida <span class=GramE>y(</span>t) se observa la versi&oacute;n de y(t) modificada por el ruido que se denot&oacute; por z(t). En la figura (4) se muestra un diagrama de bloques de la estructura de identificaci&oacute;n por correlaci&oacute;n cruzada.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1068" type="#\_x0000\_t75" style='width:340.5pt;height:135pt'><v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image023.png" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><i style='mso-bidi-font-style:normal'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></i></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si consideramos que el sistema ha estado en operaci&oacute;n por un periodo suficientemente grande de tiempo como para que las condiciones de estado estacionario se hallan logrado, entonces los t&eacute;rminos de ruido <span class=GramE>W(</span>t) se pueden considerar <span class=SpellE>Erg&oacute;dicos</span> y <span class=SpellE>Gaussianos</span> con media cero. Como se llega a ver, el medio en cero es una consideraci&oacute;n muy cr&iacute;tica y se debe de tener un gran cuidado para asegurar que el promedio del ruido es cero. La salida del promedio del <span class=SpellE>correlador</span> es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:78.75pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391474">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la relaciones:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1035" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1035"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391475">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1036" type="#_x0000_t75" style='width:71.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1036"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391476">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1037" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">

```

```

<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

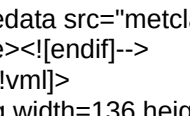
 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391477">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>directamente<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> de<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1056" type="#_x0000_t75" style='width:78.75pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

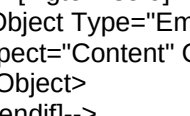
 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1056"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391478">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1057" type="#_x0000_t75" style='width:78pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image027.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1057"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391479">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

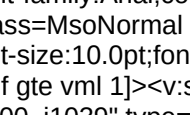
```

El valor esperado de la salida del correlador con la consideraci&ocute;n erg&ocute;dica y la definici&ocute;n:





donde vemos de las ecuaciones





```

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1058"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391482">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1059" type="#_x0000_t75" style='width:71.25pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image029.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1059"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391483">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1060" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1060"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244391484">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1061" type="#_x0000_t75" style='width:167.25pt;height:33pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="metclasidensis_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391485">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la consideraci&ocute;n del cero medio en v(t) que con:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Rw</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>)</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> = </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>)</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>w(t)w(t-</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>da</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:162.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image037.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391486">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si tomamos la transformada de Fourier tenemos las relaciones de densidad espectral:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>Rwz</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(s) = h(s) <span class=SpellE>Rw</span><(s)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si el ancho de banda de <span class=SpellE>Rw</span><(s) es mucho mayor que el de h(s) entonces:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span lang=EN-GB style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'>Rwz</span></span><span lang=EN-GB style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'>(s) = <span class=SpellE>kh</span><(s)<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span><span class=SpellE><span class=GramE>Rwz</span></span><span class=GramE></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=EN-GB style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'> <span class=SpellE>kh</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=EN-GB style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=EN-GB style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:EN-GB'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Esta relaci&acute;n es exacta si <span class=GramE>w</span>t es blanco tal que </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>D es la Delta de <span class=SpellE>Dirac</span><o:p></o:p></span></p>

[illegible]



class=Spelle>gaussiana</span> <span class=Spelle>estoc&acute;sticamente</span> variable. Esto establece que si  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , y  $a_4$  son <span class=Spelle>gaussianas</span>: <math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:318pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image041.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]></p>

<!--[if !vml]><![endif]></sub></p>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391488"></o:OLEObject></xml><![endif]></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Usaremos esta relaci&acute;n en la ecuaci&acute;n: <math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:396.75pt;height:96.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image043.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]></p>

<!--[if !vml]><![endif]></sub></p>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1065" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391489"></o:OLEObject></xml><![endif]></p>

</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se obtiene: <math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>a\_1, a\_2, a\_3, a\_4</math></span></p>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:266.25pt;height:48.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image045.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]></p>

<!--[if !vml]></p>

<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391490">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:  
Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>parte</span></span><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> de la anterior expresi&acute;n se puede  
reconocer como la se&ntilde;al:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:162.75pt;height:33pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image047.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391491">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> los otros t&eacute;rminos representan un error en la  
medida.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Emplearemos la consideraci&acute;n de ruido blanco<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span  
class=GramE><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-  
family:Arial'>R<sub>w</sub></span></span></span><span  
class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>g</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>) =  
R<sub>w</sub></span><sup>2</sup></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;  
mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>D</span></span><span lang=ES





src="metclasidensis\_archivos/image051.gif" v:shapes="\_x0000\_i1046">  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391494">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:312pt;height:33pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image052.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391495">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>Esta es la funci&acute;n de correlaci&acute;n del t&eacute;rmino de ruido en  
 <span  
 class=GramE>x(</span>t). El primer t&eacute;rmino resulta del ruido externo <span  
 class=GramE>v(</span>t) y los otros dos t&eacute;rminos son solamente resultado del sistema  
 a ser identificado y la se&ntilde;al de prueba.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>Se puede mostrar que si se elige la funci&acute;n pseudo azarosa apropiadamente  
 en la se&ntilde;al de prueba es posible de la ecuaci&acute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1063" type="#\_x0000\_t75" style='width:312pt;height:33pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image052.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391496">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>eliminar</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> los efectos de los dos &uacute;ltimos t&eacute;rminos. Este es el caso en muchas identificaciones pr&aacute;cticas de problemas en los cuales el ruido observado tiene variaciones considerablemente grandes en comparaci&oacute;n con la se&ntilde;al de prueba. Bajo estas condiciones la correlaci&oacute;n de t&eacute;rmino de ruido es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:135pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image054.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391497">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es la varianza de  $x(t)$  bajo la consideraci&oacute;n de que los &uacute;ltimos dos t&eacute;rminos de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:312pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image052.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391498">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>son</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> despreciables. El problema al que nos enfrentamos con esto es justamente la estimaci&ocute;n de una se&ntilde;al constante:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image056.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391499">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>embebida</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> en una <span class=SpellE>gaussiana</span> de ruido blanco con media cero y<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span>varianza:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:99.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image058.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391500">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El estimador &ocute;ptimo bajo estas condiciones es justamente:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES

<sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:33pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image060.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391501">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>El valor esperado para el filtro de salida es: <span class=Spelle><span  
class=GramE>R<sub>w</sub>h</span></span><span class=GramE></span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'></span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Si el filtro promediador de salida se  
divide <span class=Spelle>po</span> <span  
class=Spelle>R<sub>w</sub></span>, el filtro promediador de salida es <span  
class=GramE>h(</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:  
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, la respuesta impulso que dese&aacute;bamos  
identificar.<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span>La varianza del error  
es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:156.75pt;height:33pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image062.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391502">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>para</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> un valor especificado de varianza, el m&iacute;nimo tiempo de identificaci&oacute;n es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:102.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="metclasidensis\_archivos/image064.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244391503">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family: Arial'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div></td>  
 </tr>  
 </table>  
 </body>  
 </html>

### 3.135 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. IDENTIFICACION DE PROCESOS LINEALES VARIANTES EN EL TIEMPO POR MEDICION DE LA RESPUESTA SENOIDAL

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"  
 xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"  
 xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"  
 xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">  
 <head>  
 <meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">  
 <meta name=ProgId content=Word.Document>  
 <meta name=Generator content="Microsoft Word 10">  
 <meta name=Originator content="Microsoft Word 10">  
 <link rel=File-List href="idenproclininv\_archivos/filelist.xml">  
 <link rel=Edit-Time-Data href="idenproclininv\_archivos/editdata.mso">  
 <link rel=OLE-Object-Data href="idenproclininv\_archivos/oledata.mso">  
 <!--[if !mso]>  
 <style>  
 v\:.\* {behavior:url(#default#VML);}

```

o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>IDENTIFICACION DE PROCESOS LINEALES VARIANTES EN EL TIEMPO POR
MEDICION
DE LA RESPUESTA SENOIDAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>39</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-27T00:31:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-27T01:10:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1705</o:Words>
<o:Characters>9378</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>78</o:Lines>
<o:Paragraphs>22</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>11061</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE

```

```

 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:36.0pt;
 mso-footer-margin:36.0pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>IDENTIFICACION DE PROCESOS LINEALES
VARIANTES EN EL TIEMPO POR MEDICION DE LA RESPUESTA
SENOIDAL<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Si se excita por una entrada de la forma Asin(<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t) un sistema lineal invariante en el tiempo con
función de transferencia H(s), la salida estacionaria
será;<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>

```

```

<v:formulas>
 <v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
 <v:f eqn="sum @0 1 0"/>
 <v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
 <v:f eqn="prod @2 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @0 0 1"/>
 <v:f eqn="prod @6 1 2"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
 <v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
 <v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
 <v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:87.75pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="idenproclinv_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244393823">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Aquí; R<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>w<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>) es la razón de la magnitud del componente senoidal
de la salida a la entrada y <span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>f<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>(<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'>w<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>)<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> ser la diferencia de fase entre la entrada y la salida.
Es fácil mostrar que R<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;

```



mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>(</span></span><span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>w</span></span><span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>(</span></span><span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y </span><span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>f</span></span><span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>(</span></span><span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
 family:Symbol'>w</span></span><span
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
 mso-symbol-font-family:Symbol'>(</span></span><span lang=ES style='font-size:
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se relacionan con H(s) por medio
 de:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393824">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]>
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:18pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]>
 <![if !vml]>
 

```

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244393825">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Luego por medición de la respuesta senoidal entenderemos:
R<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>w<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y <span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>f<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>w<span
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'><span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> par un número de valores de <span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:
Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w, tal que nos permita crear una
gráfica de amplitud contra fase (Bode).<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>El método de respuesta senoidal se puede extender a sistemas lineales
variantes en el tiempo. Para desarrollar un algoritmo discutiremos un método de
transformación. La transformada de Laplace para un sistema lineal de coeficientes
constantes es:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:161.25pt;height:33pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393826">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Una característica fundamental de los sistemas lineales constantes es que  
su matriz de respuesta impulso se s&eacute;lo dependiente de la "edad variable" (t-  
</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Esta propiedad no la tienen los sistemas no estacionarios y  
la matriz de impulso respuesta puede permanecer en la forma general </span><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>F</span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t</span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Se puede por analog&iacute;a definir una  
transformaci&oacute;n de la expresi&oacute;n anterior como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:33pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>

  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393827">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>El &iacute;mite superior s puede remplazar por t si:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenproclinv\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393828">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Es conveniente definir el vector<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>r(</span></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>t) =B(t) U(t)<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>para</span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> el sistema:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:105.75pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenproclinv\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393829">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

Es posible mostrar que la expresi&acute;n v&acute;lida para el vector de estado de salida est&acute;dada por:



que

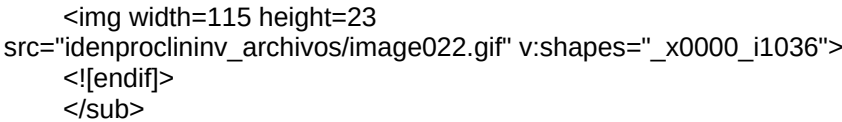
es s&acute;lo una generalizaci&acute;n de la matriz de transformaci&acute;n ara sistemas estacionarios.

Una propiedad importante de

$f$ 
 $t, j$ 
 $w$

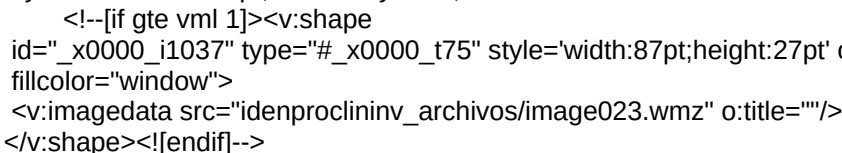
es que satisface las ecuaciones diferenciales lineales que son m&acute;s simples de resolver que la ecuaci&acute;n de transformaci&acute;n para la funci&acute;n de transferencia. Es posible mostrar que la funci&acute;n de transferencia fundamental debe satisfacer para su matriz la ecuaci&acute;n diferencial lineal:

id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenprocllininv\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393831">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es un par&aacute;metro fijo. Esta &uacute;ltime ecuaci&oacute;n es una interpretaci&oacute;n en variable de estado de la ecuaci&oacute;n de  
<span class=SpellE>Zadeh</span> para transformaciones de tiempo variable. Si el sistema es estacionario:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenprocllininv\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393832">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:86.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenprocllininv\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>



se estableci

formular el problema en tminos matemticos, el sistema lineal de entrada simple est descrito por:



En esta ecuacin  $x$  es el vector de estado de  $n$  dimensiones y  $Z$  es el vector salida definido en tminos de las matrices conocidas  $C$  y  $D$ .

Consideremos que al final el primer componente  $x_1$  de  $x$  se puede obtener instantneamente de  $Z$ .  $U$  es el vector de entrada de  $m$  dimensiones que relaciona un simple escaln de entrada  $U$  de acuerdo a la ecuacin:

$$U^m T = [u, \dots, u - 1] u - 1$$

mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:

Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> p indica d</span class=Spelle>dt</span>. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Las matrices <span class=GramE>A(</span>t) y B(t) no son completamente conocidas pero se consideran de la siguiente forma:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>A(</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>t) = [<span class=Spelle>a<sub>ik</sub></span>(t)</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'> =<span style='color:blue'> </span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:153pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image025.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393836">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>B(</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>t) = [<span class=Spelle>b<sub>ik</sub></span>(t)</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'> =</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:153pt;height:77.25pt' o:ole="" fillcolor="window">





lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>t)<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp; </span>k = 1, 2, ..., n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'>de</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'> las matrices A(t) y B(t). </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En el caso general algunas de las n + m funciones se pueden conocer a priori.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La transformaci&oacute;n de tiempo variable a frecuencia <span class=GramE>h(</span>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t) est&aacute; definida como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>, t) = T(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>) X(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>, t)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>T(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>) = [t<sub>ik</sub>(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>)]</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>



</o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>(</span></span><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>)</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es la respuesta de las variables de estado cuando la entrada es un impulso unitario que ocurre al tiempo  $t =$  </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> . Podemos verificar que la definici&acute;n de la ecuaci&acute;n <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'>h</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'>j</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'>,  $t = T(j$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>)</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'> )  $X(j$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>)</span></span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-MX'>,  $t$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>nos</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> da las siguientes propiedades para los elementos de  $h(j$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,  $t$ </span><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>h<sub>i</sub></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial', t) = <span class=SpellE>ph<sub>i</sub></span><sub>-1</sub>h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial', t)<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>i = 1, 2,..., N<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue', t) est&aacute; definida en t&eacute;rminos de la respuesta impulso a una excitaci&oacute;n senoidal. En efecto una definici&oacute;n alterna de <span class=GramE>h</span>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue', t) es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image033.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393841">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span><span lang=ES style='font-size:

10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> (j</span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t) es la respuesta del sistema  $U =$  <span class=SpellE>e<sup>j</sup></span></span><sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></sup><sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t. </span></sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El esquema de identificaci&oacute;n que desarrollamos emplea la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:107.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393842">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>como</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> un medio para determinar  $h(j)$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t).<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Los elementos de <span class=GramE>h</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t) son complejos y considerando </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> como un par&aacute;metro fijo se puede mostrar que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:173.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image035.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393843">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la matriz  $n \times n$   $E(j$ </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t) es la forma general de  $A(t)$  con elementos {<span class=SpellE>C<sub>nr</sub></span>(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t)} relacionado a los elementos {<span class=SpellE>a<sub>ni</sub></span>(t)} de  $A(t)$  por la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image037.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393844">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>los</span></span><span lang=ES style='font-size:

10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> elementos adicionales <span class=SpellE>a<sub>n</sub></span><sub>, n-1</sub>(t) son -1. El n-vector <span class=GramE>k(</span>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, t) se relaciona con la matriz B(t)

por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:47.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393845">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si h y <span class=SpellE>ph</span> se pueden sustituir en la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:173.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393846">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>nos</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> da con la ayuda de las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">



<v:imagedata src="idenprocllininv\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393847">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1063" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:47.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenprocllininv\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393848">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'>ecuaciones algebraicas en las funciones <span  
 class=SpellE>a<sub>ni</sub></span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span class=SpellE>b<sub>ni</sub></span></span><span  
 class=SpellE>(t) y <span class=SpellE>b<sub>ni</sub></span></span><span class=SpellE>(t).  
 Mediciones de h en frecuencias </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;  
 mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>1</span></span></sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, </span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><sub><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>2</span></sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>, ..., </span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><sub><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>q</span></sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> nos dan 2q ecuaciones de tales  
 soluciones. Considerando que s de la n + m funciones <span

class=SpellE><span class=GramE>a<sub>ni</sub></span></span><span class=GramE></span>t) y <span class=SpellE>b<sub>ni</sub></span></span>(t) se conocen <span class=SpellE>apriori</span>, se sigue que las matrices A(t) y B(t) se pueden identificar si:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:141pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393849">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>dependiendo</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> de que expresiones resultan en un entero.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:DE'>Luego si definimos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>I</span></span></span><sup><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>T</span></sup><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>(t) = </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'>a<sub>n1</sub></span>(t), a<sub>n2</sub></span>(t), ..., a<sub>nm</sub></span>(t), b<sub>n1</sub></span>(t), ..., b<sub>nm</sub></span>(t)</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span></span><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:DE'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=DE style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:DE'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>el</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> problema de identificaci&ocirc;n se puede establecer conscientemente como el determinar </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;

mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(t). <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Para desarrollar una expresi&oacuten para </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es conveniente definir:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>f(</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, t) = (p + j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol; mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>) h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, t)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>mostraremos</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que esta cantidad se puede medir directamente bajo ciertas condiciones. Sustituyendo la ecuaci&oacuten<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>f(</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, t) = (p + j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol; mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>) h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, t)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>en</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la ecuaci&oacuten<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:173.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenprocliniinv\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393850">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>obtenemos</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> una ecuaci&oacute;n vectorial cuyas <span class=Spelle>n<sup>s</sup></span> columnas se pueden escribir:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub>n</sub></span></span></span><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>j</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial', t) = <span class=Spelle>a<sub>n</sub></span><sup>T</sup></span>(t) h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial', t) +<span class=Spelle>b<sub>n</sub></span><sup>T</sup></span>(t) </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span class=Spelle>f<sub>n</sub></span> es el <span class=Spelle>n&acute;s</span> elemento de f y <span class=Spelle>a<sub>n</sub></span><sup>T</sup></span> y <span class=Spelle>b<sub>n</sub></span><sup>T</sup></span> son los <span class=Spelle>n<sup>s</sup></span> renglones de A(t) y B(t) respectivamente. La ecuaci&oacute;n anterior es equivalente a:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub>n</sub></span></span></span><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>j</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;

mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, t) =</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><span class=SpellE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>h<sup>T</sup></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>, t)</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>T</span></sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(t)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>porque</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span class=SpellE>f<sub>n</sub></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son complejos y las mediciones involucrian n\u00f3meros reales, es bueno separar esta relaci\u00f3n en su parte real e imaginaria.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Rescribiremos la \u00e9ltima ecuaci\u00f3n de la forma:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image043.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393851">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si llamamos a un índice colocado al lado derecho de la cantidad, designaci&ocute;n del par&aacute;metro de frecuencia por ejemplo: <span class=SpellE><sup>i</sup><sub>n</sub></span> = <span class=SpellE><sub>n</sub></span> la ecuaci&ocute;n anterior se puede extender:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id='\_x0000\_i1048' type='#\_x0000\_t75' style='width:96pt;height:78.75pt' o:ole=''' fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image045.wmz" o:title='''/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393852">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Llamando al vector del lado izquierdo por </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y a la matriz del lado derecho por G, es evidente que G ser&aacute; cuadrada si </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> est&aacute; dando la dimensi&ocute;n <span class=GramE>de </span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>I</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Esto se satisface si el &uacute;ltimo elemento de </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>I</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span class=GramE><sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>q</span></sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub>l</sub></span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'> (q = n + m/2) para (n + m) par o <span class=SpellE><sup>q</sup><sub>R</sub></span> (q = n + m /2) impar.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En general G ser&aacute; no singular y la soluci&oacute;n de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:96pt;height:78.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image045.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393853">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>se</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>l</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>(t = G<sup>1</sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span class=SpellE><sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>i</span></sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>t</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue">Si la &uacute;ltima ecuaci&oacute;n se emplea para identificar el sistema, se puede emplear para determinar  $h$  ES  
i = 1, 2, 3, \dots, q. En esencia el m&eacute;todo empleado es perturbar el sistema con una se&ntilde;al de prueba y extraer la informaci&oacute;n necesaria de la respuesta del sistema. Para elegir que tipo de se&ntilde;al de prueba emplear se sugiere por la ecuaci&oacute;n<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>

<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>

<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>

<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>

<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>

<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>

<math display="block">h = \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} = \frac{1}{t} = \frac{1}{N} \frac{f\_n(j)}{f\_n(i)} \quad (1)</math>



font-family:Arial'>t</span></sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial'>. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si lo anterior no es realizable f&iacute;sicamente se selecciona la entrada U<sub>1</sub> = cos</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t. Si llamamos </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t) a la respuesta a esta entrada y notamos que el sistema real s&oacute;lo tiene coeficientes de valor real, se tiene:

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:222pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image047.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393854">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>empleando</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>este resultado y la definici&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=GramE><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>f</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; mso-ansi-language:FR'>, t) = (p + j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;

mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>) h(j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>, t)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'>se</span></span><span lang=FR style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:FR'><span class=Spelle>ve</span> que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:174.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393855">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>estas</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> dos relaciones nos muestran que el problema de medida es <span class=Spelle>demodular</span> </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y p</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Afortunadamente no es necesario considerar estas dos ecuaciones por separado, se pueden combinar en una sola. Para hacer esto definimos la transformaci&oacute;n vectorial de (n + 1) dimensiones </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>(</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>>j</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,t) se define como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:164.25pt;height:21.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image051.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393856">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Notamos que </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> consiste de cantidades medibles. Si hacemos </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>&acute;(</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>j</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,t) la respuesta del vector de estado  $U^{1}$  =  $\cos$  </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

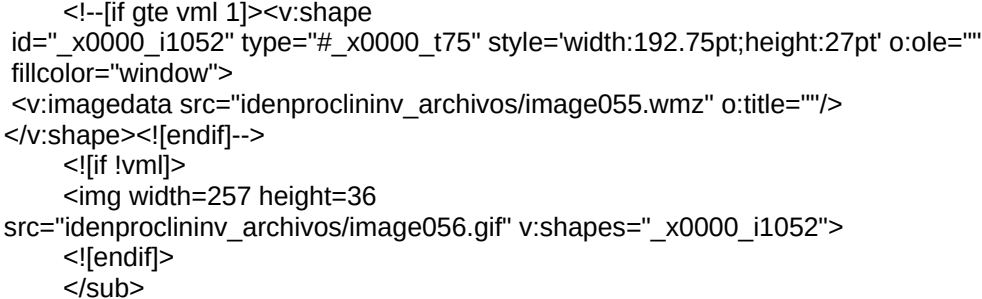
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:174pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image053.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393857">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>El problema es s&oacute;lo <span class=SpellE>demodular</span> la  
 funci&oacute;n simple:</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span  
 class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-  
 family:Arial;color:blue'>&acute;(</span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>j</span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>,t).<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>El primer paso es determinar </span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>g</span></span><sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>R</span></sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y para esto se multiplica por  
 </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>cos</span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t. Este hecho y el vector producto de correlaci&oacute;n de  
 (n + 1) dimensiones lo llamaremos </span><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(j</span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>w</span></span><span  
 class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-  
 family:Arial;color:blue'>,t</span></span><span>

lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue') De la ecuación anterior se tiene:



$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Si se desea un análisis de

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

en el dominio de la frecuencia, es conveniente asignar el símbolo

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

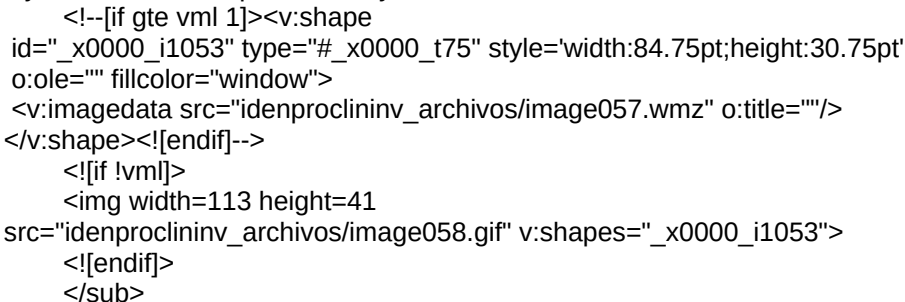
para designar su transformada de Fourier, donde

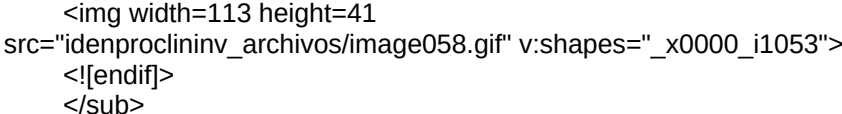
es el parámetro de frecuencia de la transformada.

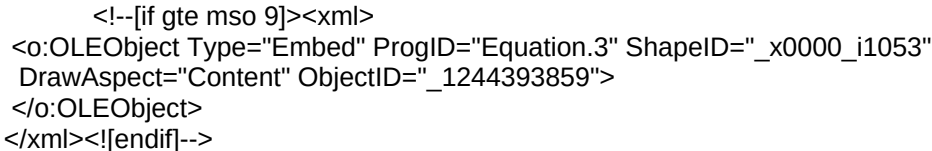


el símbolo (<sup>+</sup>) denota una transpuesta hermitiana.

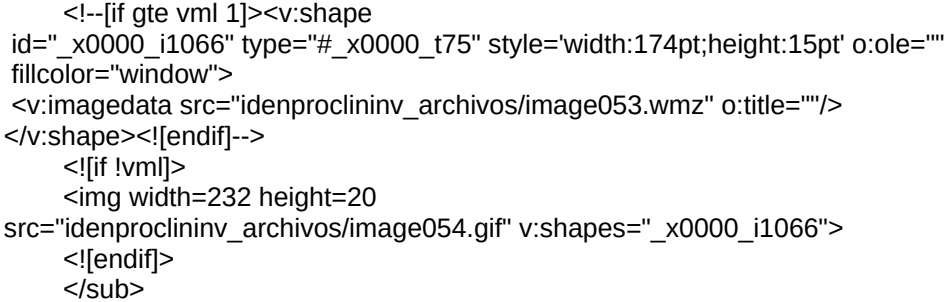
Para el caso de multifrecuencia, la señal de prueba se elige como la suma de senoidales.

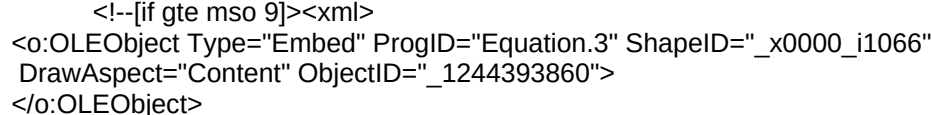












</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la superposici&ocute;n:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:210.75pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393861">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>pensando</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que el espectro de la  
 <sup>i</sup></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> tiene un ancho de banda limitado y los </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>w</span></span><sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> son espaciados suficientemente, el espectro de </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>&acute; consiste en un <span class=Spelle>subespectro</span> no sobrepuesto. Con el <span class=Spelle>subespectro</span> bien separado este se puede recuperar individualmente empleando filtros pasa banda. Las salidas de este filtro se pueden <span class=Spelle>demodular</span> con los m&eacute;todos anteriormente discutidos para obtener <sup>i</sup></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>R</span></sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> y la <sup>i</sup></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;



mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>l</span></sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>.</span></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>\vec{v}</math></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Es posible derivar un criterio que especifique las circunstancias bajo las cuales la medici&oacute;n del vector transformado se realiza considerando filtros ideales y de ruido despreciable. Escribiremos la ecuaci&oacute;n</span></p></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>\vec{v}</math></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1067" type="#\_x0000\_t75" style='width:210.75pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1067"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393862">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>en</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> notaci&oacute;n compleja:</span></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:141.75pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393863">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 </span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>\vec{v}</math></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Tomando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuaci&oacute;n:</span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><math>\vec{v}</math></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:213.75pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image063.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393864">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>G</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> representa la transformada de Fourier de </span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>g</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Si el <span class=SpellE>subespectro</span> no se  
 traslapa, el t&eacute;rmino dentro de la sumatoria no es par lo que implica que el producto  
 interno:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:150pt;height:17.25pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="idenproclininv\_archivos/image065.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244393865">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'>para</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> i = 1, 2, ..., q. Se puede verificar que cuando esta  
 situaci&oacute;n se satisface no s&oacute;lo se puede separar una frecuencia de las otras por  
 un filtro pasa banda, sino que cada salida de los pasabanda se puede <span  
 class=SpellE>demodular</span> para darnos <sup>i</sup></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;



</body>

</html>

### 3.136 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. MODELOS QUE APRENDEN

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="modaprenden_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="modaprenden_archivos/editdata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>MODELOS QUE APRENDEN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>11</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-27T01:10:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-27T01:21:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>517</o:Words>
<o:Characters>2845</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>23</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3356</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
```

```

</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Font Definitions */
@font-face
 {font-family:Wingdings;
 panose-1:5 0 0 0 0 0 0 0 0;
 mso-font-charset:2;
 mso-generic-font-family:auto;
 mso-font-pitch:variable;
 mso-font-signature:0 268435456 0 0 -2147483648 0;}
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:36.0pt;
 mso-footer-margin:36.0pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:390732129;
 mso-list-template-ids:-990081890;}
@list l0:level1
 {mso-level-number-format:bullet;
 mso-level-text:\F0B7;
 mso-level-tab-stop:14.15pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;
 font-family:Symbol;}
@list l1
 {mso-list-id:1597399524;
 mso-list-template-ids:496780646;}
@list l1:level1
 {mso-level-number-format:bullet;
 mso-level-text:\F0B7;
 mso-level-tab-stop:14.2pt;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:0cm;
 text-indent:0cm;

```

```

 font-family:Symbol;}
@list l1:level2
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level3
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}
@list l1:level4
 {mso-level-tab-stop:144.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level5
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:180.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level6
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:216.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}
@list l1:level7
 {mso-level-tab-stop:252.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level8
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:288.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l1:level9
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:324.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}
@list l2
 {mso-list-id:1892886646;
 mso-list-template-ids:1558057792;}
@list l2:level1
 {mso-level-number-format:bullet;
 mso-level-text:\F0B7;
 mso-level-tab-stop:1.0cm;
 mso-level-number-position:left;
 margin-left:1.0cm;
 text-indent:-14.15pt;
 font-family:Symbol;}
@list l2:level2
 {mso-level-number-format:alpha-lower;
 mso-level-tab-stop:72.0pt;
 mso-level-number-position:left;
 text-indent:-18.0pt;}
@list l2:level3
 {mso-level-number-format:roman-lower;
 mso-level-tab-stop:108.0pt;
 mso-level-number-position:right;
 text-indent:-9.0pt;}

```

```

@list l2:level4
{mso-level-tab-stop:144.0pt;
mso-level-number-position:left;
text-indent:-18.0pt;}
@list l2:level5
{mso-level-number-format:alpha-lower;
mso-level-tab-stop:180.0pt;
mso-level-number-position:left;
text-indent:-18.0pt;}
@list l2:level6
{mso-level-number-format:roman-lower;
mso-level-tab-stop:216.0pt;
mso-level-number-position:right;
text-indent:-9.0pt;}
@list l2:level7
{mso-level-tab-stop:252.0pt;
mso-level-number-position:left;
text-indent:-18.0pt;}
@list l2:level8
{mso-level-number-format:alpha-lower;
mso-level-tab-stop:288.0pt;
mso-level-number-position:left;
text-indent:-18.0pt;}
@list l2:level9
{mso-level-number-format:roman-lower;
mso-level-tab-stop:324.0pt;
mso-level-number-position:right;
text-indent:-9.0pt;}

ol
{margin-bottom:0cm;}
ul
{margin-bottom:0cm;}

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES

```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>MODELOS  
APRENDEN<o:p></o:p></span></b></p>

QUE

<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></b></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Uno de los m&aacute;s simples y a la vez m&aacute;s flexibles sistemas de  
identificaci&oacute;n, es el de los sistemas que aprenden o modelos de referencia. La idea  
b&aacute;sica de esto se representa en la figura.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype  
id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"  
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">  
<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:223.5pt;  
height:164.25pt'>

<v:imagedata src="modaprenden\_archivos/image001.png" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><i style='mso-bidi-font-style:normal'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></i></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Se aplica una entrada conocida a un sistema desconocido y a un modelo que nos  
sirve para simular el sistema. Se toma la diferencia entre las dos salidas y con ella se ajusta el  
modelo y se repite este procedimiento. La forma del modelo normalmente se fija y s&oacute;lo  
se ajustan un n&uacute;mero finito de par&aacute;metros.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Este procedimiento puede ser empleado en l&iacute;nea dividiendo la se&ntilde;al  
de entrada en eventos finitos en el tiempo y <span class=Spelle>y</span> despu&eacute;s se  
realiza la identificaci&oacute;n de cada uno de los eventos. Al aplicar este procedimiento se  
deben de considerar varios problemas pr&aacute;cticos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>1. C&oacute;mo elegir la estructura del modelo<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;



color:blue'>2. Posibilidades de escalar en el tiempo<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>3. Criterios de error<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>4. Condiciones iniciales<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>5. Estrategia de ajuste.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Discutiremos cada uno de estos con m&aacute;s detalle:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>El problema de la selecci&oacute;n del modelo es una parte integral de la mayor&iacute;a de los m&eacute;todos de identificaci&oacute;n. En muchos problemas conocemos los procesos f&iacute;sicos que son representados en el sistema desconocido y s&oacute;lo tenemos que especificar los valores de los par&aacute;metros. Si no conocemos la estructura del sistema escogemos varias estructuras de modelos y observar cual de ellos se aproxima m&aacute;s al sistema desconocido.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Existen situaciones donde se introduce a prop&oacute;sito introduce un modelo que se sabe es diferente que la descripci&oacute;n actual del sistema. Este ser&aacute; el caso si estamos buscando el mejor modelo lineal para algunos sistemas que sabemos que tienen caracter&iacute;sticas no lineales.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En algunos usos memorizar los resultados entrada salida sirve para incrementar la escala de tiempo del modelo de tal forma que la selecci&oacute;n del modelo en sus par&aacute;metros sea r&aacute;pida.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>El modelo de referencia para el procedimiento de identificaci&oacute;n se sit&uacute;a en una computadora h&iacute;brida de tal forma que la escala de tiempo sea de f&aacute;cil realizaci&oacute;n. Por supuesto en simulaci&oacute;n digital escalar en tiempo es dif&iacute;cil dado que normalmente no hay relojes de tiempo real asociados con esta aproximaci&oacute;n.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si el modelo &oacute;ptimo de aprendizaje siempre se hace por un proceso de desarrollo opuesto a la t&eacute;cnica anal&iacute;tica, existen una gran variedad de criterios de error que se pueden emplear sin un cambio significativo en complejidad. Las posibilidades incluyen integral de error cuadr&aacute;tico, integral de error absoluto. Se puede emplear el criterio de error <span class=SpellE>max</span>-<span class=SpellE>min</span>, donde es deseable seleccionar par&aacute;metros que minimicen el m&aacute;ximo error.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>La t&eacute;cnica de ajuste de par&aacute;metros es probablemente la m&aacute;s dif&iacute;cil de la t&eacute;cnica del modelo de <span class=GramE>referencia .</span> Las posibles fuentes de dificultades son:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='margin-left:14.15pt;text-indent:-14.15pt;mso-list:l0 level1 lfo1;tab-stops: list 14.15pt'>

<![if !supportLists]>

[illegible]

<span style="font-size: 10pt; font-family: Arial; color: blue;">B&amp;uacute;squeda</span>     <span style="font-size: 10pt; font-family: Arial; color: blue;">T&amp;eacute;cnicas de Gradiente.</span>     <span style="font-size: 10pt; font-family: Arial; color: blue;">La primera t&amp;eacute;cnica es muy efectiva para encontrar y descartar m&amp;iacute;nimos locales y para obtener soluciones en base al error de superficie. Las t&amp;eacute;cnicas de gradiente son relativamente f&amp;acute;ciles de programar y son algunas veces efectivas para localizar s&amp;oacute;lo m&amp;iacute;nimos locales.</span>	<span style="font-size: 10pt; font-family: Arial; color: blue;">B&amp;uacute;squeda</span>     <span style="font-size: 10pt; font-family: Arial; color: blue;">T&amp;eacute;cnicas de Gradiente.</span>     <span style="font-size: 10pt; font-family: Arial; color: blue;">La primera t&amp;eacute;cnica es muy efectiva para encontrar y descartar m&amp;iacute;nimos locales y para obtener soluciones en base al error de superficie. Las t&amp;eacute;cnicas de gradiente son relativamente f&amp;acute;ciles de programar y son algunas veces efectivas para localizar s&amp;oacute;lo m&amp;iacute;nimos locales.</span>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### 3.137 IDENTIFICACION DE SISTEMAS. TEORIA DE WEINER DE SISTEMAS NO LINEALES

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vmml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="teorweiner_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="teorweiner_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="teorweiner_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>

<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>

<![endif]-->
<title>TEORIA DE WEINER DE SISTEMAS NO LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
```

```

<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>24</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-27T01:21:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-27T01:46:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>342</o:Words>
<o:Characters>1883</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>15</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2221</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 3.0cm 70.9pt 3.0cm;
mso-header-margin:36.0pt;
mso-footer-margin:36.0pt;
mso-page-numbers:48;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->

```

```

</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>TEORIA DE WEINER DE SISTEMAS NO
LINEALES</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Es una técnica experimental en la cual los parámetros del sistema
desconocido se determinan como coeficientes de un operador expandido en funciones de un
espacio de Hilbert. La entrada al sistema se expande en series de
Laquerre. Estas funciones se derivan de los polinomios de Laquerre por la inclusión de la raíz cuadrada de las
funciones de Laquerre como tal. Para los polinomios de Laquerre:</p></td>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

```

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:197.25pt; height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorweiner\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244395980">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=right style='text-align:right'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>La en&eacute;sima funci&oacute;n de <span class=SpellE>Laquerre</span>  
 est&aacute; dada por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:41.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorweiner\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244395981">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>Las funciones <span class=SpellE><span  
 class=GramE>g<sub>n</sub></span></span><span  
 class=GramE>( </span>t) son ortonormales para toda t </span><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>&lcirc;</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>0</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>,</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&yen;</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Podemos expandir el pasado de la entrada como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:96pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorweiner\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244395982">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Luego es posible obtener el coeficiente deseado de <span class=SpellE>Laquerre</span> empleando <span class=GramE>x(</span>t) como la entrada a una cadena de filtros lineales. Consid&eacute;rese la generaci&oacute;n de los coeficientes de <span class=SpellE>Laquerre</span> para el sistema lineal que resulta de la transformada de Laplace de la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:197.25pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorweiner\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

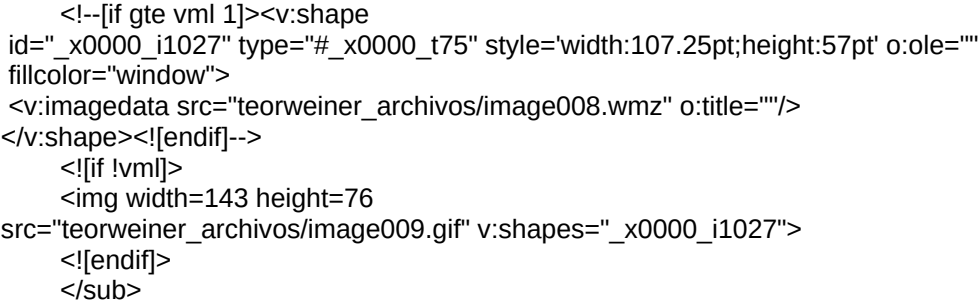
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244395983">

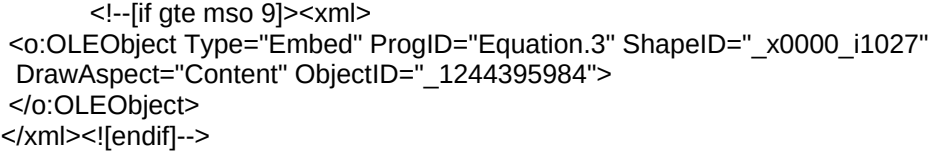
</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

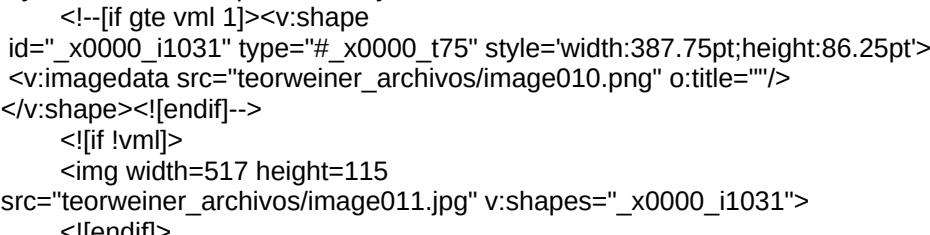
tenemos





este

resultado se muestra en la figura.



En virtud a explotar totalmente los beneficios de la expansión de las funciones de Laquerre de una señal de entrada, la teoría de Weiner insiste que la entrada usada para excitar el sistema en su respuesta debe de ser un ruido blanco Gaussiano. Con esta elección se puede ver que las funciones de Laquerre no están correlacionadas y son procesos estocásticos gaussianos.

Si los polinomios de Hermite son ortonormales

t



symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>&lcirc;</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>[</span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>-</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&yen;</span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>, </span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>&yen;</span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es razonable expandir el operador del sistema en funciones  
 de <span class=SpellE>Hermite</span>. Si </span><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><sub><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>n</span></sub><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>(u) es el en&eacute;simo polinomio  
 de <span class=SpellE>Hermite</span>, <span class=SpellE>Weiner</span> define el <span  
 class=GramE>( n</span> + 1)-&eacute;simo polinomio de <span  
 class=SpellE>Hermite</span> como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:77.25pt;height:26.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorweiner\_archivos/image012.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244395985">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=SpellE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;



lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>. Porque al elegir una se&ntilde;al de entrada y una expansi&oacute;n, el promedio requerido se puede encontrar por una simple correlaci&oacute;n cruzada de la salida del sistema con los polinomios de <span class=SpellE>Hermite</span>, por ejemplo:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:273.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorweiner\_archivos/image016.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244395987">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

### 3.138 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

<meta name=ProgId content=Word.Document>

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">

<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">

<link rel=File-List href="introcontopt\_archivos/filelist.xml">

<title>INTRODUCCION</title>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:DocumentProperties>

<o:Author>HHMM</o:Author>

<o:Template>Normal</o:Template>

<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>

<o:Revision>2</o:Revision>

<o:TotalTime>27</o:TotalTime>

<o:Created>2007-06-28T01:26:00Z</o:Created>

<o:LastSaved>2007-06-28T18:39:00Z</o:LastSaved>

<o:Pages>1</o:Pages>

<o:Words>208</o:Words>

<o:Characters>1149</o:Characters>

<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>

```

<o:Lines>9</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1355</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;

```

```

 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>INTRODUCCION<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a centrar nuestra atención en el
problema de control de mínimo tiempo y desarrollaremos varias técnicas para
el control de tiempo óptimo de sistemas continuos y discretos.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El estudio del control óptimo en su forma
más general lo vamos a estudiar por técnicas que incluyen el método del
cálculo de variaciones, el principio del máximo de Pontryagin
y la programación dinámica de Bellman.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Podemos afirmar que la optimización es el
más importante de los problemas en automatización, que podemos definir como
la rama de la técnica relacionada con el desarrollo de dispositivos y
sistemas que operan sin intervención humana y asume la responsabilidad de
acercarse a ciertos tipos del trabajo mental humano.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El principio del máximo de Pontryagin es un método elegante para obtener una
solución óptima para procesos dinámicos generales y trata de
el problema de optimización de maximizar o minimizar una funcional
sujeta a ciertas constricciones.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La programación dinámica de Bellman es un concepto simple pero muy útil para resolver
problemas de decisión de múltiples etapas. La idea básica que subyace bajo la
programación dinámica es el principio del embebimiento invariante, que nos
dice que un problema que no se puede, o es muy difícil resolver, se puede
embeber en una clase de problema simple de resolver para obtener una
solución.<o:p></o:p></p>
</td>
</tr>

```

</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman"; color:windowtext'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.139 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 1

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 background-image: url();
 margin-left: 0px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style2 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
a:link {
 color: #FFFFFF;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 color: #FFFFFF;
 text-decoration: none;
}
a:hover {
 color: #FF0000;
 text-decoration: none;
}
a:active {
 color: #FFFFFF;
 text-decoration: none;
}
.style3 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif}
.style4 {color: #FFFFFF}
-->
</style></head>

<body>
<table width="996" height="149" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
background="../figuras/control.gif">
<tr>
<td width="1013" height="20" align="left" valign="top"> </td>
```

```

</tr>
</table>
</body>
</html>

```

### 3.140 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 2

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #999999;
}
-->
</style></head>

<body>
</body>
</html>

```

### 3.141 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 3

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 margin-left: 20px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 10px;
 margin-bottom: 0px;
}
-->
</style></head>

<body>
</body>
</html>

```

### 3.142 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 4

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">

```

```

<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimo </td>
<td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="789" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO · INTRODUCCION </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>

```



```

<p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.143 CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION. MARCO 5

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Fundamentos Matemáticas</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.style18 {color: #990033; font-size: 9pt; font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
 <table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">

```

```

<tr>
 <td><div align="center">INDICE GENERAL </div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Introducción</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Cálculo de Variaciones
</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Integral Mínima de
Control</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Ecuaciones de Diferencias
</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Sistema y Variable de Estado
</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Contro Optimo </div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Problema Básico
Mínimo</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"> Principio de Pontryagin </div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Control de Procesos Lineales
</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Programación Dinámica
</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center">Control de Mínima
Integral</div></td>
</tr>
<tr>
 <td bgcolor="#F0F0F0"><div align="center"> Control Optimo Realimentado
</div></td>
</tr>

```

```

</table>
<p class="style1"> </p>
</div>
</body>
</html>
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Fundamentos Matem´ticos</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #F0F0F0;
}
.style1 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
 font-weight: bold;
 color: #0000CC;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
a {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 12px;
}
.style14 {
 color: #FFFFFF;
 font-size: 10pt;
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
}
.style18 {color: #990033; font-size: 9pt; font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; }
-->
</style>
</head>

<body>
<div align="center">
<table width="169" height="20" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bgcolor="#6699CC">
<tr>
<td><div align="center">INDICE GENERAL </div></td>
</tr>
<tr>

```

<a href="controloptin.htm" target="_parent">Introducción</a>
<a href="calcvariaciones.htm" target="_parent">Cálculo de Variaciones</a>
<a href="integralminima.htm" target="_parent">Integral Mínima</a>
<a href="ecuaciondiferencias.htm" target="_parent">Ecuaciones de Diferencias</a>
<a href="sistyvarestad.htm" target="_parent">Sistema y Variable de Estado</a>
<a href="controptimo.htm" target="_parent">Control Óptimo</a>
<a href="probbasminimizacion.htm" target="_parent">Problema B&amp;acute;sico Mínimo</a>
<a href="principontryagin.htm" target="_parent">Principio de Pontryagin</a>
<a href="Controlprocln.htm" target="_parent">Control de Procesos Lineales</a>
<a href="Progradinamica.htm" target="_parent">Programación Dinámica</a>
<a href="controlminimaintegral.htm" target="_parent">Control de Integral Mínima</a>
<a href="controptimorealimen.htm" target="_parent">Control Óptimo Realimentado</a>

</html>

### 3.144 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. INTRODUCCION. MARCO 4a

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
```

```

 <td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimol </td>
 <td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
 </tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO· TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE
VARIACIONES </div></td>
 </tr>
 </table>
 <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
 <tr bgcolor="#FFE6FF">
 <td width="164" valign="top"><div align="center">Teorema Fundamental
</div></td>
 <td width="128" height="18" valign="top"><div align="center">Prob Variacional </div></td>
 <td width="76" valign="top"><div align="center">x(tf) Libre </div></td>
 <td width="139" valign="top"><div align="center">Tiempo Final Libre </div></td>
 <td width="95" valign="top"><div align="center">tf y xf libres </div></td>
 <td width="187" valign="top"><div align="center">Funcional varias Funciones
</div></td>
 </tr>
 </table>
 <p> </p>
 <p> </p>
 <p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.145 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="teorfundcalcvaria_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="teorfundcalcvaria_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="teorfundcalcvaria_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>

```

```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T22:43:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-21T22:47:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>322</o:Words>
<o:Characters>1775</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>14</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2093</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h1
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;

```

```

margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:1;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:14.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-font-kerning:14.0pt;
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->

```



</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

<tr>

<td><div class=Section1>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:red'>EL TEOREMA<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:red'>A FUNDAMENTAL DEL <span class=GramE>CALCULO</span> DE VARIACIONES<o:p></o:p></span></b><o:p></o:p></span></b></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El teorema fundamental usado en encontrar valores extremos de funciones es la condici&oacute;n necesaria de que la diferencial sea cero en el punto extremo, en el problema variacional el teorema an&aacute;logo es que la variaci&oacute;n debe de ser cero en la curva extremal, considerando que no se han impuesto fronteras en las curvas. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Estableceremos y probaremos el teorema fundamental: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sea  $x$  una funci&oacute;n de  $t$  en la clase </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> y  $J(x)$  una funcional diferenciable de  $x$ . Considerando que la funci&oacute;n en </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> no esta restringida por ninguna frontera, el teorema fundamental del c&aacute;lculo de variaciones es: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>TEOREMA: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si  $x^*$  es un extremal, la variaci&oacute;n de  $J$  debe de ser cero en  $x^*$ , esto es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;



Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0. Mostraremos que esto implica que el incremento </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J puede cambiar de signo en una vecindad arbitraria peque&ntilde;a de  $x^*$ . <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El incremento es: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:236.25pt; height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image001.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953188">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

,<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> <sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953189">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 como <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:39pt;height:17.25pt" o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953190">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Escogeremos una  
 variaci&oacute;n <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x = </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub></sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>, <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> &gt; 0 y<sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:35.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953191"></o:OLEObject></xml><![endif]-->. Supongamos que: <o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953192"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J es una funcional lineal de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x, el principio de homogeneidad da:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:140.25pt;height:15.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953193">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Los signos de </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>D</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J y </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J son los mismos para <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:35.25pt;height:17.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953194">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 , luego: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:15.75pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image014.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953195">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Ahora consideremos la homogeneidad: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x = -</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub></sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>claramente</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:18.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="teorfundcalcvaria\_archivos/image016.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243953196"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> lo que el signo de: </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J(x\* - </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span></span></p>

lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>(1)</sub></span> es el mismo que </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J(x\* - </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>(1)</sub></span> <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Usando el principio de homogeneidad tenemos: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub></sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J(x\*, <span class=SpellE>dx</span><sub>(1)</sub></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> lo tanto si: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:



Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J(x\* - </span><span lang=ES-TRAD style='font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>( </sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>) &lt; 0 , </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J(x\* - </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>(1</sub>) &gt; 0<o:p></o:p></span></p> <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span><span class=GramE>y</span> esto: <o:p></o:p></span></p> <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J(x\* - </span><span lang=ES-TRAD style='font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>( </sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>) &gt; 0<o:p></o:p></span></p> <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>o</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> sea que: <o:p></o:p></span></p> <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J(x\* , </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:

Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup1;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>en</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> una peque&ntilde;a vecindad arbitraria de  $x^*$  <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>J( $x^*$ ,</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>x<sub>(1)</sub></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>J( $x^*$ ,</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>x<sub></sub></span></span><sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>1</span></sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>> &gt; 0<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es una contradicci&oacute;n a que  $x^*$  sea un extremal, por lo tanto si  $x^*$  es un extremal es necesario que: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

text-align:center"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J(x<span class=GramE>,<span class=SpellE>dx</span></span>) = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> una </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol; mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x arbitraria. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La consideraci&oacute;n de que las funciones de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> no est&aacute;n acotadas garantiza que </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>(1)</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>(1)</sub> son ambas variaciones admisibles. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

### 3.146 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. PROBLEMA VARIACIONAL SIMPLE

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="probvariasimple_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="probvariasimple_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="probvariasimple_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PROBLEMA VARIACIONAL SIMPLE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>11</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T22:47:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-21T23:01:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>394</o:Words>
<o:Characters>2169</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2558</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
```

```

<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

```

```

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:red'>PROBLEMA VARIACIONAL
SIMPLE</p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>En esta parte usaremos el
teorema fundamental para determinar los extremales de funcionales dependiendo de una
simple función.<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Sea x una función
escalar en la clase de funciones con primeras derivadas continuas. Se desea encontrar la
función x* para la cual la funcional: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:99pt;
height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="probvariasimple_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<!--[if !vml]>

<![endif]-->
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243954095">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->

```

<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>tiene</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> un extremo relativo. </p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La notaci&oacute;n J(x) significa que J es una funcional de la funci&oacute;n x; <span class=GramE>g</span>x(t), x(t), t]. </p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Consideremos que el integrando g, tiene primera y segunda derivadas continuas con respecto a todo su argumento; t<sub>0</sub> y <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span> son fijos, y los puntos finales de la curva son x<sub>0</sub> y <span class=SpellE>x<sub>f</sub></span>. Las curvas de la clase </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> que tambi&eacute;n satisfacen las condiciones se llaman admisibles. </p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Deseamos encontrar las curvas que extremasen J(x). Comenzaremos por encontrar las curvas que satisfagan el teorema fundamental. Sea x cualquier curva <span class=GramE>en </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>W</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, y determinaremos la variaci&oacute;n </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J(x) del incremento: <p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><p>&nbsp;</p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:326.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954096">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>combinando</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> tenemos: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:243.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954097">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>N&oacute;tese que la dependencia<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>en <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954098">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>y, <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:14.25pt;height:18.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>



<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954099">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>no esta indicada en el argumento de  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue'>J, ya que <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:18.75pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954100">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>y </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<span style='color:blue'>, </span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<span style='color:blue'> y<sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:14.25pt;height:20.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954101">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 , no son <span class=GramE>independientes</span>: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:27.75pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954102">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span class=GramE><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:27.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954103">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:  
 Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Eventualmente </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>D</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>J se expresara en t&eacute;rminos de  
 x<span class=GramE>, <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954104">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,</span> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x. Expandiendo la integral en series de  
 Taylor alrededor del punto: </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial'>x(t)<span style='color:blue'>, </span><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954105">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
(t)<span style='color:blue'> da: <o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:300pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image022.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954106">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>+<span style='color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:242.25pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image024.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954107">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:168pt;height:38.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image026.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954108">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Extraeremos los  
 t&eacute;minos en </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-  
 family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue'>J que sean lineales en </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>t</span><span style='color:blue'> y </span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image028.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954109">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!-->  
 (t)<span style='color:blue'> para obtener la variaci&oacute;n:  
 <o:p></o:p></span></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:249.75pt;height:39pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954110">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x</span></span><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>t</span></span><span style='color:blue'> y </span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image031.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954111">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 (t)<span style='color:blue'> se relacionan por: <o:p></o:p></span></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:105.75pt;height:35.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image032.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954112">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>luego</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> seleccionando </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span

style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x(t)<span style='color:blue'> queda determinado</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image034.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954113"></o:OLEObject></xml><![endif]-->(t)<span style='color:blue'>. Para expresar la ecuaci&oacute;n anterior en t&eacute;rminos continentes de </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x integramos por partes los t&eacute;rminos que involucren a </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x para obtener: <o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:333pt;height:42.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probvariasimple\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243954114"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p><p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si <span class=GramE>x(</span>t<sub>0</sub>) y x(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) son espec&iacute;ficos, todas las curvas admisibles deben de pasar a trav&eacute;s de estos puntos, por lo que:<o:p></o:p></span></p>



$f$  que sea continua el intervalo  $[0, h]$ ,  $h$  debe de ser cero en el intervalo  $[0, f]$ .

Aplicando este lema a la ecuación

y es:

,

donde



```

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>para<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'> toda t e [t₀,t_f].
<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>La ecuación
anterior es la ecuación de Euler. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.147 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. SE ESPECIFICA EL TIEMPO FINAL PERO $x(t_f)$ ES LIBRE

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="tiempofinalfijo_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="tiempofinalfijo_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="tiempofinalfijo_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SE ESPECIFICA EL TIEMPO FINAL PERO $x(t_f)$ ES LIBRE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>8</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T23:02:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:52:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>237</o:Words>

```

```

<o:Characters>1304</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>10</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1538</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h2
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:2;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-bidi-font-weight:normal;
 font-style:italic;
 mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText

```

```

 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:14.15pt;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>

```

```

<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>SE ESPECIFICA EL TIEMPO
FINAL PERO x(t_f) ES LIBRE<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Todas
las curvas admisibles comienzan en el mismo punto, y terminan en una línea
vertical como se muestra en la figura. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:222pt;
height:166.5pt'>
 <v:imagedata src="tiempofinalfijo_archivos/image001.png" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Para
emplrear el teorema fundamental, primero encontramos la variación como en el

```

caso anterior. Después de integrar por partes tenemos:  $\int_0^x x(t) dt = 0$

En este caso  $\int_0^x x(t) dt = 0$

$x(t)$  es arbitraria.

$\int_0^x x(t) dt = 0$

Para un extremal  $x^*$ , sabemos que  $J(x^*)$  es el valor de  $x^*$  que minimiza  $J(x)$ . Ahora consideremos un problema de un punto final fijo, con la misma funcional, los mismos tiempos iniciales y finales  $x(0) = 0$  y  $x(t_f) = x_f$  iguales a  $x^*(0) = 0$  y  $x^*(t_f) = x_f$  que es el mismo que para el extremal  $x^*$  en el problema de extremo libre, por lo que  $x^*$  debe de ser una solución de la ecuación de Euler, y los términos de la integral

deben de ser cero en el extremal. En otras palabras un extremal para un problema de punto final libre, es también un extremal para un problema de punto final fijo, y la misma funcional, por lo anterior la ecuación de Euler se debe de satisfacer.

Si:

&nbsp;

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

tenemos

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

es arbitraria, por lo tanto es necesario que:

&nbsp;

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La ecuación de <span class=SpellE>Euler</span> es de segundo orden, necesitamos dos condiciones de frontera, una es:<span style='mso-spacerun:yes'></span> $x(\text{t}^0) = x^0$  y la otra condición la da la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:110.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="tiempofinalfijo\_archivos/image014.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244479085"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Esta se llama condición natural de frontera.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</td>

</tr>

</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.148 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. TIEMPO FINAL LIBRE

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml" xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

<meta name=ProgId content=Word.Document>

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">

<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">

<link rel=File-List href="tiempofinalibre\_archivos/filelist.xml">

<link rel=Edit-Time-Data href="tiempofinalibre\_archivos/editdata.mso">

<link rel=OLE-Object-Data href="tiempofinalibre\_archivos/oledata.mso">

<!--[if mso]>

<style>

```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>TIEMPO FINAL LIBRE</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>19</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T23:09:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-21T23:31:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>348</o:Words>
<o:Characters>1918</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>15</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2262</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h3
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;

```



```

margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:3;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
font-weight:normal;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
{mso-list-id:212546520;
mso-list-type:simple;
mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l0:level1
{mso-level-tab-stop:none;

```



<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>La variaci&oacute;n resultante de la diferencia de los puntos finales de las curvas.  
<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm; margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt; mso-list:l0 level1 lfo1'>  
<![if !supportLists]>  
<span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial;mso-fareast-font-family:Arial;color:blue'><span  
style='mso-list:ignore'>2.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>  
<![endif]>  
<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>La variaci&oacute;n resultante de la diferencia de los puntos finales </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x(t) en el intervalo [t<sub>0</sub>, <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>] <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm; margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt; mso-list:l0 level1 lfo1'>  
<![if !supportLists]>  
<span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial;mso-fareast-font-family:Arial;color:blue'><span  
style='mso-list:ignore'>3.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span></span>  
<![endif]>  
<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>La suma de estas dos variaciones es la variaci&oacute;n general.  
<o:p></o:p></span></p>

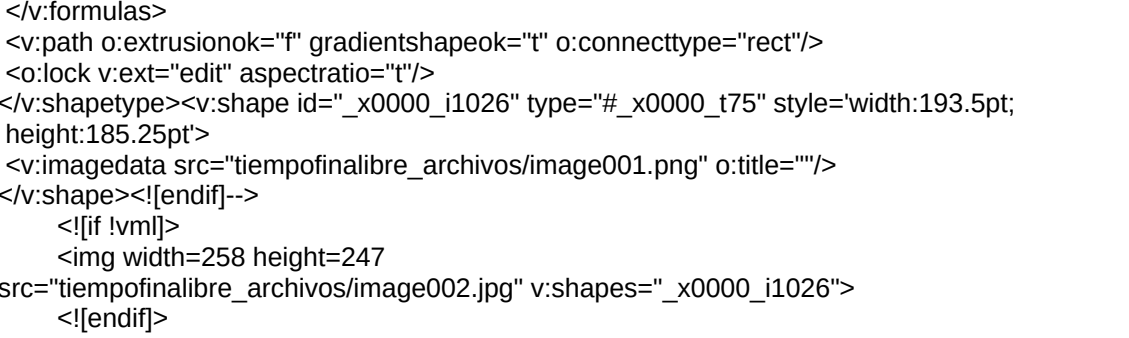
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Consideremos el caso donde <span class=GramE>x</span><span class=SpellE>t<sub>f</sub></span> es dado, como se ve en la figura.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype  
id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"  
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">  
<v:stroke joinstyle="miter"/>  
<v:formulas>  
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>  
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>  
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>  
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>  
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>  
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>  
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>  
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>  
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>  
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>  
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

$$\sum_{i=1}^{10} 21600 \cdot 0$$



Las curvas admisibles comienzan en el punto  $(0,0)$ , y terminan en la recta  $x = f$ . Dado que el tiempo final es libre debemos modificar el desarrollo del problema 2. La figura (1.3) nos muestra una curva extremo  $x^*$  con puntos  $(x, f)$ , y una curva  $x$  cercana con final en el punto  $(x, f)$ .

De la
 
$$x(t) - x^*(t) = [x(t) - x^*(t)]$$
 es aparente que:

esto tiene sentido si  $x^*$  no est&aacute; definida para  $t$

[
 
$$x(t) - x^*(t) = [x(t) - x^*(t)]$$
 ]

class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub></sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>] .<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:198.75pt;height:163.5pt'><v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image003.png" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Primero formamos el incremento: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:324pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image005.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955947">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>o</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:177.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955948">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El primer integrando se puede  
 expandir alrededor de  $x^*(t)$ , <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:18.75pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955950">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 (t), en series de Taylor, y tenemos: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:287.25pt;height:41.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955951">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La segunda integral se puede  
 escribir como: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:171.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955952">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Agrupando, los  
t&eacute;rminos que tengan </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol; mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955953">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
(t)<span style='color:blue'>, y sustituyendo: <o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:218.25pt;height:87pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</span></sub><sup><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955954">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></sup></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:

justify"><sup><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></sup></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Emplearemos el hecho de que</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>t<sub>0</sub></span></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Ahora expresamos <span class=GramE>g[</span>x(<span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>), <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt; height:18pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image019.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955955"></o:OLEObject></xml><![endif]-->(<span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>), <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>]</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> <span style='color:blue'>por expansi&oacute;n: <o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:4in;height:69pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image020.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955956"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo en la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;



text-align:center"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:171.75pt;height:35.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955957">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:225pt;height:69.75pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image022.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</span></sub><sup><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955958">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sup></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>De la figura  
tenemos<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:198.75pt;height:163.5pt'>  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image003.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:



<![endif]>  
 </span></sup><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955959">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:215.25pt;height:41.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955960">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></sup></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>N&oacute;tese que el termino  
 integral representa la variaci&oacute;n parcial de J causada por </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'>x(</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>), t </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>e</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> [t<sub>0</sub>,<span  
 class=Spelle>t<sub>f</sub></span>], y el t&eacute;rmino envolviendo </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'>t<sub>f</sub></span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, es la variaci&oacute;n parcial de J causada  
 por la diferencia de puntos finales. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Como siempre suponemos que  
 el extremo es fijo, y la ecuaci&oacute;n de <span class=Spelle>Euler</span> es:  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:

justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:158.25pt;height:39pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image029.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955961">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Se debe satisfacer, y la integral ser cero. </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>f</sub></span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es arbitraria, as&iacute; que el coeficiente debe de ser cero, y la condici&oacute;n de frontera requerida es: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:149.25pt;height:39pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempofinalibre\_archivos/image031.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243955962">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</div></td>  
</tr>  
</table>  
</body>  
</html>

### 3.149 CONTROL OPTIMO. CALCULO DE VARIACIONES. tf y xf LIBRES

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="tiempfinalyposfinallibres_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="tiempfinalyposfinallibres_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="tiempfinalyposfinallibres_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>tf y xf LIBRES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>10</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-21T23:49:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-21T23:49:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>229</o:Words>
<o:Characters>1261</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>10</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1488</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
```

```

/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h3
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:3;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
font-weight:normal;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}

span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}

@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}

div.Section1
{page:Section1;}

/* List Definitions */
@list l0
{mso-list-id:1413702375;

```

```

 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:55451312;}
@list l0:level1
 {mso-level-start-at:2;
 mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
@list l1
 {mso-list-id:1950965096;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><b style='mso-bidi-font-weight:
normal'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:red'>t_f<b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:red'>
 y
 x_f<sub>
</sub>LIBRES<o:p></o:p></p>

```





class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es la diferencia de ordenadas de los puntos finales de las curvas. En general </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x</span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>t<sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>). <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El uso del teorema fundamental implica primero determinar la variaci&oacute;n formando el incremento:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:230.25pt;height:75.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</span></sub><sup><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243957065">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sup></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Relacionamos </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:



<v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243957067">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 \*(<span class=SpellE>tf</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
 family:Symbol'>d</span></span><span  
 class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>tf</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo en la  
 ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:230.25pt;height:75.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </span></sub><sup><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243957068">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></sup><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> juntando t&eacute;rminos: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:300pt;height:130.5pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres\_archivos/image008.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </span></sub><sup><span  
 lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243957069">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 </span></sup><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Como siempre la ecuaci&oacute;n de <span class=Spelle>Euler</span> se debe de satisfacer, por lo tanto la integral es cero. Hay una variedad de condiciones de punto final en la pr&aacute;ctica. Consideraremos las dos importantes para los objetivos del curso: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm; margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt; mso-list:l1 level1 lfo1'>  
 <![if !supportLists]>  
 <span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;mso-fareast-font-family:Arial;color:blue'><span style='mso-list:ignore'>1.<span style='font:7.0pt "Times New Roman"'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span></span></span>  
 <![endif]>  
 <span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> y <span class=GramE>x</span><span class=Spelle><sub>f</sub></span>) no est&aacute;n relacionados. En este caso </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span>  
 class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span>  
 class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span>  
 class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm; margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt; mso-list:skip'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='margin-left:14.15pt;text-align:center; text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:110.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="tiempfinalyposfinalibres\_archivos/image010.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
 <img width=147 height=44



$$x = \frac{f}{t}$$

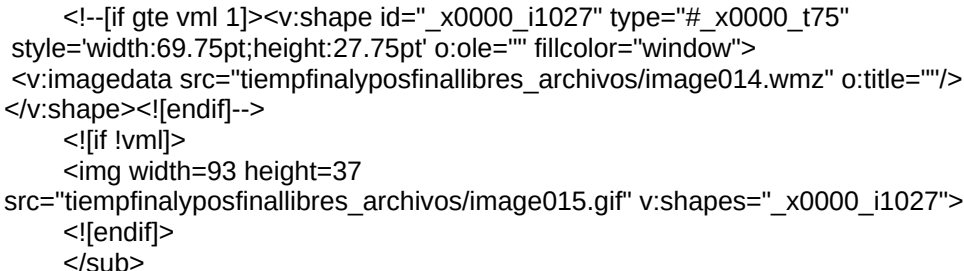
En este caso la diferencia en puntos finales

$$x = \frac{f}{t}$$

esta relacionada a

por:

$$x = \frac{f}{t}$$



$$x = \frac{f}{t}$$

mso-list:skip'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo la ecuaci&oacute;n</span></p></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:center;text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:110.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres\_archivos/image010.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243957073">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</p></p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>en</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> la ecuaci&oacute;n </span></p></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:center;text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:258pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres\_archivos/image012.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243957074">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</p></p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> juntando t&eacute;rminos: </span></p></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><math>\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}</math></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:center;text-indent:-14.15pt;mso-list:skip'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:320.25pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">

```

<v:imagedata src="tiempfinalyposfinallibres_archivos/image016.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243957075">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;
margin-left:14.15pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify;text-indent:-14.15pt;
mso-list:skip'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>ya<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'> que <span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d<span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:blue'>t_f es arbitraria. Esta ecuación es la
ecuación de transversatilidad. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.150 CONTROL OPTIMO. FUNCIONALES DE VARIAS FUNCIONES INDEPENDIENTES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="funcionalvariasvariab_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="funcionalvariasvariab_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="funcionalvariasvariab_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>

```



```

<![endif]-->
<title>FUNCIONALES DE VARIAS FUNCIONES INDEPENDIENTES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>1</o:Revision>
 <o:TotalTime>18</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-21T23:49:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-22T00:07:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>304</o:Words>
 <o:Characters>1678</o:Characters>
 <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
 <o:Lines>13</o:Lines>
 <o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>1979</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h4
 {mso-style-next:Normal;
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:4;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;

```

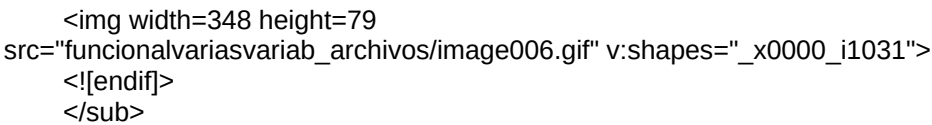
```

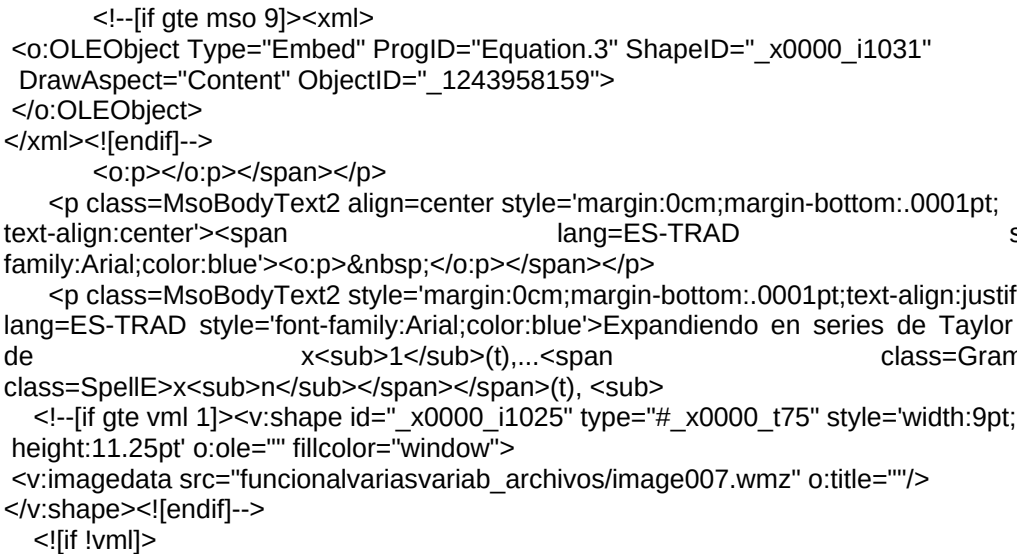
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
color:red;
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;

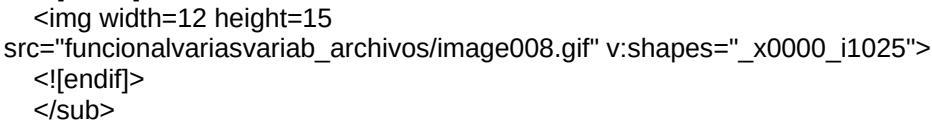
```

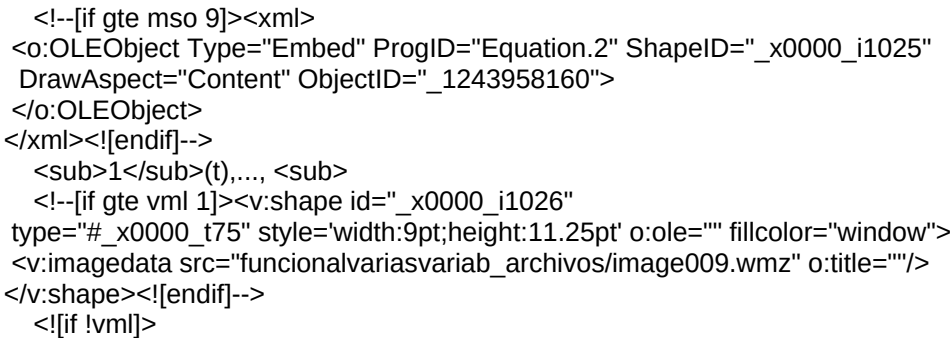


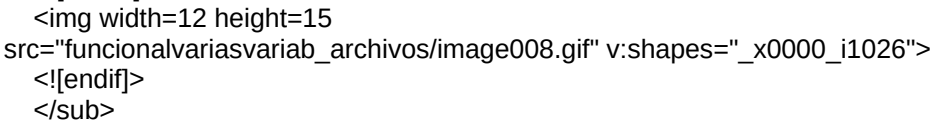


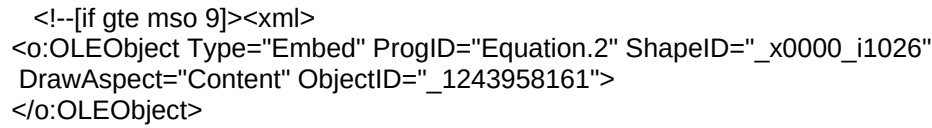




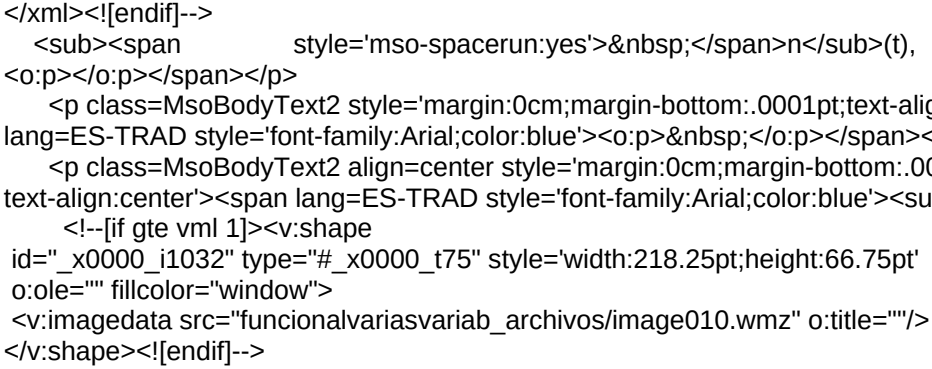








&nbsp;tenemos:





<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958162">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La variaci&oacute;n </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J<span style='color:blue'> esta determinada por los  
t&eacute;rminos lineales en </span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span><span  
class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial'>x<sub>i</sub></span></span><sub><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> </span></sub><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial;color:blue'>y </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image012.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958163">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<sub>i</sub><span style='color:blue'>. Para eliminar la dependencia de  
</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>J<span style='color:blue'> en </span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span><span  
class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial'>x<sub>i</sub></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, integramos por partes los t&eacute;rminos  
que contienen </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:

Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image014.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958165"></o:OLEObject></xml><![endif]--><sub></sub><span style='color:blue'> para obtener: <o:p></o:p></span></span></p><p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958166"></o:OLEObject></xml><![endif]--><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:213.75pt;height:103.5pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958167"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Pero </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>1</sub> puede tener valores arbitrarios tan grandes como cero en los puntos finales t<sub>0</sub> y <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>, por lo que al aplicar el lema fundamental nos da que los coeficientes deben de ser cero en el intervalo [t<sub>0</sub>, <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>]. Repitiendo esto para cada </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>x<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, tenemos: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:220.5pt;height:57.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958168">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> por lo tanto tenemos n ecuaciones de <span class=Spelle>Euler</span>. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Para simplificar nuestro problema podemos expresar lo anterior en forma de vectores. Sea: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  




```

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1037"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958169">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>con<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'> condiciones a la frontera: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1038" type="#_x0000_t75" style='width:152.25pt;height:71.25pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab_archivos/image023.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1038"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958170">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'>La expresión para el incremento es:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1039" type="#_x0000_t75" style='width:210.75pt;height:36pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab_archivos/image025.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1039"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958171">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'>Después de la expansión:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span

```

lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:258.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958172">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:225.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958173">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> una matriz de n x 1 columnas, y de la misma forma para <sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:15.75pt;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958174">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 . <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Eliminando t&eacute;rminos no lineales en  
 <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:24.75pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958175">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>y<sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:24pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958176">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 , e integrando por partes:<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>  
 </span><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:282pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="funcionalvariasvariab\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958177">  
 </o:OLEObject>

```

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1045" type="#_x0000_t75" style='width:213pt;height:36pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1045"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958178">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'>Lo que aplicando el lema fundamental da:
<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1046" type="#_x0000_t75" style='width:209.25pt;height:30.75pt'
o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="funcionalvariasvariab_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958179">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
 <p
 class=MsoNormal><span
 lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
 </tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.151 CONTROL OPTIMO. INTEGRAL MINIMA DE CONTROL

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"

```

xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"  
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```
<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="integmincontrol_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="integmincontrol_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="integmincontrol_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>INTEGRAL MINIMA DE CONTROL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>11</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:07:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T00:18:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>600</o:Words>
<o:Characters>3300</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>27</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3893</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
```

```

margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h2
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:2;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;
font-style:italic;
mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoList, li.MsoList, div.MsoList
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:0cm;
margin-left:14.15pt;
margin-bottom:.0001pt;
text-indent:-14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoListContinue, li.MsoListContinue, div.MsoListContinue
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;

```

```

margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">

```

<tr>  
 <div class=Section1>            <!--[if gte vml 1]><v:shapetype id='\_x0000\_t75' coordsize='21600,21600' o:spt='75' o:preferrelative='t' path='m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe' filled='f' stroked='f'>  <v:stroke joinstyle='miter'>  <v:formulas>  <v:f eqn='if lineDrawn pixelLineWidth 0'>  <v:f eqn='sum @0 1 0'>  <v:f eqn='sum 0 0 @1'>  <v:f eqn='prod @2 1 2'>  <v:f eqn='prod @3 21600 pixelWidth'>  <v:f eqn='prod @3 21600 pixelHeight'>  <v:f eqn='sum @0 0 1'>  <v:f eqn='prod @6 1 2'>  <v:f eqn='prod @7 21600 pixelWidth'>  <v:f eqn='sum @8 21600 0'>  <v:f eqn='prod @7 21600 pixelHeight'>  <v:f eqn='sum @10 21600 0'>  </v:formulas>  <v:path o:extrusionok='f' gradientshapeok='t' o:connecttype='rect'>  <o:lock v:ext='edit' aspectratio='t'>  </v:shapetype><v:shape id='\_x0000\_i1027' type='#\_x0000\_t75' style='width:59.25pt; height:15pt' o:ole='&quot;' fillcolor='window'>  <v:imagedata src='integmincontrol\_archivos/image001.wmz' o:title='&quot;'>  </v:shape><![endif]><!-->  <![if !vml]>    src='integmincontrol\_archivos/image002.gif' v:shapes='\_x0000\_i1027'>  <![endif]>  </sub>  <!--[if gte mso 9]><xml>  <o:OLEObject Type='Embed' ProgID='Equation.3' ShapeID='\_x0000\_i1027' DrawAspect='Content' ObjectID='\_1243958903'>  </o:OLEObject>  </xml><![endif]><!-->  <o:p></o:p></span></p> |



$$x = x$$

Hay que determinar la se&ntilde;al de control optimo  $m(t)$  que minimice la integral de la funci&oacute;n de criterio:

$$J = \int_0^T L(x, m, \dot{x}) dt + \phi(x(T))$$

donde  $L(x, m, \dot{x})$  describe la desviaci&oacute;n del estado deseado, el consumo de combustible, y el costo de control del sistema. La funci&oacute;n por ejemplo puede expresar el flujo de combustible en un cohete, como funci&oacute;n de una se&ntilde;al de control  $m(t)$ . El problema de control &oacute;ptimo, es determinar la trayectoria tal que el consumo total de combustible durante el intervalo de vuelo ( $t \in [0, T]$ ), sea un m&iacute;nimo.

Sean  $x$  y  $m$ , un par de funciones que dan el m&iacute;nimo de la ecuaci&oacute;n

$$\dot{x} = f(x, m)$$

$$x(0) = x_0$$

```

fillcolor="window">
<v:imagedata src="integmincontrol_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1050"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958905">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>las<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'> funciones vecinas <sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1062"
type="#_x0000_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="integmincontrol_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1062"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958906">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
 y <sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1061" type="#_x0000_t75" style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="integmincontrol_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1061"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958907">
</o:OLEObject>
</xml><![endif-->
, se pueden expresar como: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:53.25pt;height:30pt' o:ole=""
fillcolor="window">

```

<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958908">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue'> y </span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
 Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> son ciertas funciones de t, definidas para  
 t<sub>0</sub></span><span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>, y t es un par&aacute;metro  
 peque&ntilde;o. Reemplazando x y m en la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:62.25pt;height:36pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958909">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1063" type="#\_x0000\_t75"

style='width:9.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="integmincontrol\_archivos/image012.gif" v:shapes="\_x0000\_i1063">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1063"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958910">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>y <sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="integmincontrol\_archivos/image008.gif" v:shapes="\_x0000\_i1064">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958911">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>respectivamente, obtenemos el valor  
de la integral para funciones vecinas como: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span  
lang=ES-TRAD  
style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:111.75pt;height:36pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image014.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="integmincontrol\_archivos/image015.gif" v:shapes="\_x0000\_i1030">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958912">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span  
lang=ES-TRAD  
style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Expandiendo en series de Taylor la  
ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:62.25pt;height:36pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958913">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
 class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>podemos</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> escribirla como: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:183pt;height:36pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image016.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958914">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:38.25pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image018.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958915">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> condici&oacute;n necesaria para que l sea un extremo es: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image020.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958916">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo x y m por<sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:9.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image022.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958917">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 y <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image024.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958919">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
respectivamente en la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958920">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958921">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Expandiendo en series de Taylor la &uacute;ltima ecuaci&oacute;n se tiene: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:174.75pt;height:30.75pt'

o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958922">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>como</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0, los t&eacute;rminos de orden mayor  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial;color:blue'> 0 y: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:51.75pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958923">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:69.75pt;height:27.75pt'  
o:ole="" fillcolor="window">



<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958924">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> ecuaci&oacute;n anterior</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
 Arial;color:fuchsia'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>esta sujeta a la condici&oacute;n inicial que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial'> (t<sub>0</sub>) = 0<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Resolviendo para  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-family:Arial;color:blue'> de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:69.75pt;height:27.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958925">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;

color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image033.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958926"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sustituyendo el valor de</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>x</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> en la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image020.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958927"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoList align=center style='margin-left:0cm;text-align:center;text-indent:0cm'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:156.75pt;height:63.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958928">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoListContinue style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Integrando por partes  
 tenemos: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoListContinue style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:234pt;height:59.25pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958929">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si <span class=GramE>x(</span><sub>0</sub>)</span> = x<sub>0</sub>, un valor fijo </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>(t<sub>0</sub>) = 0<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:57pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958930">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Combinando las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958931">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:156.75pt;height:63.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958932">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>llegamos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> a la siguiente ecuaci&oacute;n: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoList align=center style='margin-left:0cm;text-align:center;text-indent:0cm'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:168pt;height:57pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958933">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoList style='margin-left:0cm;text-align:justify;text-indent:0cm'><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si la ecuaci&oacute;n debe de  
 valer para toda h, la ecuaci&oacute;n de <span class=SpellE>Euler</span> para este problema  
 de control &oacute;ptimo es: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span  
 lang=ES-TRAD  
 style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:147pt;height:57pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958934">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span  
 lang=ES-TRAD  
 style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La soluci&oacute;n de esta  
 ecuaci&oacute;n sujeta a las condiciones de frontera especificadas en las  
 ecuaciones<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span  
 lang=ES-TRAD  
 style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:69.75pt;height:27.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958935">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:57pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958936">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>dan</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> el control optimo m(t)</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> <span style='color:blue'>para el proceso. Este es un problema cl&aacute;sico de c&aacute;culo variacional de dos valores de frontera, si las dos condiciones de frontera est&aacute;n dadas en ambos extremos de la trayectoria. <o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Cuando<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin-top:0cm;margin-right:0cm;margin-bottom:0cm;margin-left:18.0pt;margin-bottom:.0001pt;text-align:center;tab-stops:list 36.0pt'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:11.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image045.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958937">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
&nbsp;&nbsp; </span>= g(x, m) = m
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image047.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="integmincontrol\_archivos/image048.gif" v:shapes="\_x0000\_i1060">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958938">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
&nbsp;</span><span class=GramE><span style='color:blue'>la</span></span><span style='color:blue'> integral de criterio es:  
<o:p></o:p></span></span></p>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:36pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image049.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="integmincontrol\_archivos/image050.gif" v:shapes="\_x0000\_i1045">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958939">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image051.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="integmincontrol\_archivos/image052.gif" v:shapes="\_x0000\_i1046">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046">

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958940">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> ecuaci&oacute;n de <span class=Spelle>Euler</span> se reduce a:  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoList align=center style='margin-left:0cm;text-align:center;text-indent:0cm'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:78pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image053.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958941">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>&oacute;</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image055.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243958942">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>con</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> condiciones a frontera: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="integmincontrol\_archivos/image057.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>



```


<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1049"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1243958943">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Generalmente la
solución analítica para un problema de dos puntos de valor de frontera es
posible solo en casos especiales. Consecuentemente cuando no se pueden obtener soluciones
en forma cerrada, se emplean en la práctica las técnicas de prueba y error. Esta
técnica consiste en tomar un valor de la condición inicial. por ejemplo un valor de $x(t_0) = x_0$, e integrar
la ecuación de Euler y la ecuación de
restricción. El valor dado de $x(t_0) = x_0$, y el valor esperado de $x(t_0)$, se emplean para la
integración. Se determina la diferencia entre el resultado final y la condición
especificada y si esta es diferente de cero, el proceso de prueba y error se repite varias veces
hasta que el valor de la condición final obtenido, se acerque lo suficiente al valor
especificado en la condición final. <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.152 CONTROL OPTIMO. INTEGRAL MINIMA DE CONTROL. ECUACIONES FUNCIONALES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuafuncionales_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuafuncionales_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuafuncionales_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>

```

```

<![endif]-->
<title>ECUACIONES FUNCIONALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>3</o:Revision>
 <o:TotalTime>4</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-22T00:18:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-28T00:10:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>362</o:Words>
 <o:Characters>1994</o:Characters>
 <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
 <o:Lines>16</o:Lines>
 <o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>2352</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h1
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:1;

```

```

 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:14.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-font-kerning:14.0pt;
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-bidi-font-weight:normal;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>

```

```

</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ECUACIONES
FUNCIONALES</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>En
el estudio de las matemáticas y en sus principales aplicaciones a la Ciencia,
la primera ecuación que uno toma es la ecuación algebraica. Aprendemos
progresivamente algoritmos para la solución de ecuaciones lineales generales
de la forma: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial'>ax<span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial'> + b = c,<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>para
la solución de sistemas lineales: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600"
o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f"
stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:51pt;
height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="ecuafuncionales_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--
[if gte mso 9]><xml>

```

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244476580">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y luego para soluciones numéricas de ecuaciones mas complicadas tales como:  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sup>5</sup> + <span class=SpellE>ax</span> + b = 0<span style='color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'> </span><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>o,<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x + <span class=SpellE>e<sup>sinx</sup></span> = c<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En todos estos casos el problema es determinar valores particulares de una función conocida o funciones, si trabajamos con ecuaciones simultáneas. En cálculo elemental encontramos por primera <span class=GramE>ves</span> el problema de determinar una función desconocida. El problema básico del cálculo integral es el obtener la función f(x) que derivada es la función g(x), este es el tipo simple de ecuación diferencial: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuafuncionales\_archivos/image010.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244476581">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En los cursos de mecánica y física general aparecen clases más complicadas, como por ejemplo una investigación de la ley de <span class=SpellE>Hooke</span> para las características de un resorte bajo pequeñas deflexiones del punto de equilibrio, nos da la ecuación: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:60pt;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuafuncionales\_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244476582"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El movimiento del péndulo introduce la ecuación: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:29.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="ecuafuncionales\_archivos/image012.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244476583"></o:OLEObject></xml><![endif]><!--<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Otro tipo de ecuaciones que expresan propiedades de funciones desconocidas juegan papeles importantes. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Supongamos que la reacción a un estímulo en psicología, esta siendo estudiada por medio de una combinación de técnicas teóricas y experimentales. Si el estímulo es de naturaleza física podemos atacar varios parámetros. Por simplicidad supóngase que hay sólo un parámetro x, y una reacción medida por f(x). Supongamos que para esta situación, la respuesta a un incremento del estímulo es aditiva: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>f(x + y) = f(x) = f(y)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Esta es una ecuación de una función desconocida  $f(x)$  simple, pero muy importante ejemplo de una ecuación funcional. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La función:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> $f(x)$  = <span class=SpellE>kx</span><span style='color:blue'>, <o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> cualquier constante k, satisface esta ecuación, y es por lo tanto una solución. Como se ve, ecuaciones simples de este tipo, algunas veces caracterizan funciones y otras no. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El término ecuación funcional, funcionalmente se puede ver como todas las ecuaciones que envuelven funciones desconocidas, y que escapan de las áreas convencionales de las ecuaciones diferenciales, además de las integrales, y constituyen el dominio de las ecuaciones funcionales. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</td>  
</tr>  
</table>  
<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</div>  
</body>  
</html>

### 3.153 CONTROL OPTIMO. INTEGRAL MINIMA DE CONTROL. MARCO 4b

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
```

```

 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
 }
 .style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
 }
 a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
 }
 a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
 }
 a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
 }
 a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
 .style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
 }
 .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
 }
 .style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
 <tr>
 <td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
 <td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
 </tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO · INTEGRAL MINIMA DE CONTROL
</div></td>
 </tr>
 </table>
 <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
 <tr bgcolor="#FFE6FF">

```



<a href="integmincontrol.htm" target="mainFrame">Integral M&amp;iacute;nima de Control</a>	<a href="ecuafuncionales.htm" target="mainFrame">Ecuaciones Funcionales</a>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------

<td width="396" height="18" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a href="integmincontrol.htm" target="mainFrame">Integral M&iacute;nima de Control  
</a></span></div></td>  
 <td width="393" valign="top"><div align="center"><span class="style4"><a href="ecuafuncionales.htm" target="mainFrame">Ecuaciones Funcionales  
</a></span></div></td>  
 </tr>  
 </table>  
 <p>&nbsp;</p>  
 <p>&nbsp;</p>  
 <p>&nbsp;</p>  
 </div>  
 <p>&nbsp;</p>  
 </body>  
 </html>

### 3.154 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. INTRODUCCION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuadiferencias_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuadiferencias_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuadiferencias_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACIONES DE DIFERENCIAS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:21:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:08:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>276</o:Words>
<o:Characters>1522</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>12</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1795</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>

```

```

<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h1
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:1;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:14.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-font-kerning:14.0pt;
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-bidi-font-weight:normal;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";

```

```

 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText3, li.MsoBodyText3, div.MsoBodyText3
{mso-style-parent:"Texto independiente 2";
margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>

```

```

<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ECUACIONES DE
DIFERENCIAS<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>En
los estudios de los procesos físicos, se involucra la introducción de un
número de variables de estado $x_1, \dots$, , x_n , donde cada una mide una diferente
propiedad del sistema. Usualmente estas propiedades cambian con el tiempo, y
podemos escribirlas como: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:
.0001pt;text-align:center'> $x_1(t), \dots,$
 $x_n(t)$ <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Para
poder predecir el futuro del sistema, hacemos varias consideraciones
relativas a las características globales y locales de la función x_i (t).
Una de las más simples, y por lo tanto más importantes, es obtenida
considerando que el futuro inmediato sólo depende del futuro y no del pasado.
Para derivar una consecuencia analítica de esta hipótesis, procederemos como
sigue: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Considérese
que el tiempo varía de una manera discreta, así que t sólo toma los valores 0, 1, 2, ..., n. La suposición de que los valores x_1 ($t+1$), x_2 ($t+1$), ..., x_n ($t+1$) (el estado
del sistema en el futuro inmediato), depende sólo de los valores presentes
 $x_1(t), \dots,$
 $x_n(t)$, es equivalente al conjunto de
ecuaciones: <o:p></o:p></p>

```

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m g_{ij}(x)$$

donde las  $g_i$ , son las funciones libres de determinar.

Un caso particular de interés, es aquel para el cual  $g_1$  son funciones lineales de su argumento:

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j$$

donde  $a_{1j}$  son los coeficientes de la función lineal.

En este caso, la función  $g_1$  se puede escribir como:

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j$$

donde  $a_{1j}$  son los coeficientes de la función lineal.

En este caso, la función  $g_1$  se puede escribir como:

$$g_1(x) = \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j$$

donde  $a_{1j}$  son los coeficientes de la función lineal.

$\text{La introducción de una notación vectorial simplifica la forma de la expresión:}$

$\text{Podemos escribir la ecuación}$

$$x^{(t+1)} = g(x^{(t)})$$

para  $t = 0, 1, 2, \dots, n$

como:

$$x^{(t+1)} = g(x^{(t)})$$

Si  $A$  denota la matriz  $N \times N$   $a_{ij}$   $i, j = 1, 2, \dots, n$ , la relación lineal de la ecuación, se puede escribir como:

$$x^{(t+1)} = Ax^{(t)}$$

Las ecuaciones del tipo

$$x^{(t+1)} = Ax^{(t)}$$

text-align:center"><span class=GramE><span lang=FR style='font-family:Arial; mso-ansi-language:FR'>x<sub>i</sub></span></span><span lang=FR style='font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'>t+1) = g<sub>i </sub>[x<sub>1</sub>(t), x<sub>2</sub>(t),..., <span class=SpellE>x<sub>n</sub></span>(t)] i = 1,2,...,n<span style='mso-spacerun:yes'> </span>para t = 0,1, 2,..., n<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=FR style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language: FR'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=FR style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language: FR'>y<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>X(<span class=SpellE>t+1</span>) = g[x(t)]<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> llaman ecuaciones de diferencias o ecuaciones recurrentes.</span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family: Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
</td>  
</tr>  
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size: 12.0pt;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.155 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. MARCO 4c

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}

```

```

a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">Página Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
<td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la Página Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO· ECUACIONES DE DIFERENCIAS
</div></td>
</tr>
</table>
<table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
<tr bgcolor="#FFE6FF">
<td width="245" height="18" valign="top"><div align="center">Ecuación de Diferencias
</div></td>
<td width="256" valign="top"><div align="center">Iteracción</div></td>

```



```
 <div align="center">Ecuación de Abel- Schroder</div></td> </tr> </table> <p> </p> <p> </p> <p> </p> </div> <p> </p> </body> </html> |
```

### 3.156 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. ITERACION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="iteracion_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="iteracion_archivos/editdata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ITERACION</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>11</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:25:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T00:36:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>203</o:Words>
<o:Characters>1119</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>9</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1320</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>

```

```

<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h2
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:2;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-bidi-font-weight:normal;
 font-style:italic;
 mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
 {margin-top:0cm;

```

```

margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>ITERACION</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Supongamos que comenzamos con la ecuación de diferencias:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>

```





<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Obs&eacute;rvese que la ecuaci&oacute;n</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:center'><span class=SpellE><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub>m+</sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>n</span></sub></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family: Arial'>(c) = <span class=SpellE><sub>m</sub></span><span class=SpellE><sub>n</sub></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(c)</span></sub></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> v&aacute;lida s&oacute;lo para valores discretos de m, y n. m, n = 0,1, 2,..., n. Es ahora cuando tiene significado preguntarse cuando o no podemos encontrar una funci&oacute;n de dos variables g(c, t) definida </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&quot;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>c y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&quot;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>t &gt; 0, con la propiedad que: </span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family: Arial'>g</span></span><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-family: Arial'>c,n</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>)= <span class=SpellE><sub>n</sub></span><sub></sub>(c) para n = 0,1,2,...,n</span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=FR style='font-family:Arial;color:blue; mso-ansi-language:FR'>y</span></span><span lang=FR style='font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:FR'>que: </span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:center'><span class=GramE><span lang=FR style='font-family:Arial; mso-ansi-language:FR'>g</span></span><span lang=FR style='font-family:Arial; mso-ansi-language:FR'>c, t+s = g[g(c, t),s]</span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>todo t y s positivo. </span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

### 3.157 CONTROL OPTIMO. ECUACIONES DE DIFERENCIAS. LA ECUACION DE ABEL-SCHRODER

```
<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuaabelschroder_archivos/filelist.xml">
<title>LA ECUACION DE ABEL-SCHRODER</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>5</o:Revision>
<o:TotalTime>6</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:37:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:07:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>146</o:Words>
<o:Characters>806</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>6</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>951</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
```

```

text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h2
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:2;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;
font-style:italic;
mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}

span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}

@page Section1

```



```

 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>LA ECUACION DE
ABEL-SCHRODER<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Un
problema aparentemente no relacionado con el problema de iteraci3n es: Dada
la funci3n f(c), podemos encontrar una funci3n g(c), y una constante k, tal
que: <o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:
.0001pt;text-align:center'>g[f(c)]
=
kg(c)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=right style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:right'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>En
efecto g linealiza a f. Alternativamente podemos
considerar a g como un invariante relativo de la transformaci3n f(c). La
ecuaci3n<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

```

$$g[f(c)] = kg(c)$$

una es una ecuación muy conocida en análisis, y es la ecuación de Abel-Schroder.

$$g[f(c)] = k g[f(c)] = k \sup{2} g(c)$$

por inducción:

$$g[\sup{n} (c)] = \sup{n} g(c)$$

donde  $n$  es un entero positivo, luego:

$$(c) = g[\sup{-1} (k \sup{n} g(c))] = g[\sup{-1} (k \sup{n} g(c))] = g[\sup{-1} (k \sup{n} g(c))]$$

Se introduce la función:

$$G(c, t) = g[\sup{-1} (k \sup{t} g(c))]$$

para  $t \geq 0$ .

De esto se sigue que:

$$G(c, t + s) = G[G(c, t), s]$$

Esta es la

respuesta al problema de interpolación de la ecuación

<math display="block">m+n = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{c}</math>	<math display="block">(c) = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{c}</math>
---------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------

### 3.158 CONTROL OPTIMO. SISTEMAS Y VARIABLES DE ESTADO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="sisvarestado_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="sisvarestado_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="sisvarestado_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS Y VARIABLES DE ESTADO </title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-28T19:13:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T19:15:00Z</o:LastSaved>

```

```

<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>419</o:Words>
<o:Characters>2309</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>19</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2723</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-language:EN-US;}

h2
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:2;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:EN-US;
 mso-bidi-font-weight:normal;
 font-style:italic;
 mso-bidi-font-style:normal;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;

```

```

margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-fareast-language:EN-US;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:595.3pt 841.9pt;
margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>SISTEMAS Y VARIABLES DE ESTADO
</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span style='font-family:Arial;
color:blue'>Se emplea la palabra sistema
de una manera precisa que describe una combinación de vectores de estado

```

class=GramE>x(</span>t), y una regla para determinar las caracter&iacute;sticas de este vector bajo el tiempo. Las dos m&aacute;s simples, y por lo tanto m&aacute;s comunes predicciones de caracter&iacute;sticas futuras, son expresadas anal&iacute;ticamente en t&eacute;rminos de ecuaciones de diferencias: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=SpellE><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>n+</sub></span></span><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>1</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> = g(<span class=SpellE>x<sub>n</sub></span>),<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp;&nbsp;&nbsp;</span>x<sub>0</sub></span> = <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>o</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> en t&eacute;rminos de ecuaciones diferenciales:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:81.75pt; height:27pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="sisvarestado\_archivos/image001.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

<![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244545279"></o:OLEObject></xml><![endif]>>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En el primer caso, la variable que se considere represente al tiempo, es discreta,  $t = 0, 1, 2, \dots, n$ , en el segundo caso el tiempo es continuo. En ambas formulaciones hacemos la consideraci&oslash;n b&aacute;sica de que el futuro depende solo del valor presente y no del pasado. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Las ecuaciones descriptivas mostradas nos preparan a predecir las caracter&iacute;sticas futuras de un sistema dado, bajo un conocimiento de su estado actual. En base a los c&aacute;lculos de esta naturaleza, y ocasionalmente simplificados en base a la observaci&oslash;n, podemos concluir que muchos sistemas no se caracterizan de una manera aceptable. Puede haber muchas razones para esto: los componentes del sistema pueden empezar a funcionar mal, la entrada del sistema, determinada por el ambiente, puede cambiar en cantidad y calidad en funci&oslash;n del tiempo, y finalmente, puede haber cambios significativos en nuestras propias evaluaciones de las caracter&iacute;sticas. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El primer pensamiento en la investigaci&oslash;n, para que un sistema tenga mejores caracter&iacute;sticas en el tiempo, es introducir un nuevo sistema, o rehacer el viejo sistema. La primera alternativa no es pr&aacute;ctica, por ejemplo en la esfera biom&eacute;dica no es factible pensar en un cuerpo totalmente diferente corriendo con la mente vieja, ya que lo que queremos es considerar un sistema id&eacute;ntico. Es posible por lo tanto emplear transplantes de &oslash;rganos para aliviar ciertas condiciones m&eacute;dicas. El campo de las pr&oslash;tesis es una de las nuevas &aacute;reas de la teor&iacute;a del control. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si ahora cambiamos nuestra atenci&oslash;n a otro campo diferente, el concepto del uso de efectos adicionales y compensadores puede modificar o remover fen&oslash;menos indeseables. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si en forma primaria nos interesamos en presentar un tratamiento introductorio de las muchas &aacute;reas matem&aacute;ticas de la teor&iacute;a del control, supondremos que el resultado neto de las varias actividades del control alrededor de los sistemas f&iacute;sicos, es la aparici&oslash;n de otra funci&oslash;n a las ya mencionadas con anterioridad. Luego en el caso discreto, las ecuaciones toman la forma: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>n+1</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>= g(<span class=SpellE>x<sub>n</sub></span>, <span class=SpellE>y<sub>x</sub></span></span><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp;</span></p>

$x(0) = c$

de

igual forma en el caso continuo tenemos:

$x(0) = c$

Llamaremos a esta nueva funci<sup>o</sup>n “y” que aparece al lado derecho de las ecuaciones, el Vector de Control, o Variable de Control.

### 3.159 CONTROL OPTIMO. SISTEMAS Y VARIABLES DE ESTADO. FUNCION DE CRITERIO

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="funcriterio_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="funcriterio_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="funcriterio_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>FUNCION DE CRITERIO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
```



```

<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-28T19:13:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T19:18:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>365</o:Words>
<o:Characters>2010</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>16</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2371</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-language:EN-US;}

h2
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:2;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";

```

mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-fareast-language:EN-US;  
 mso-bidi-font-weight:normal;  
 font-style:italic;  
 mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoList2, li.MsoList2, div.MsoList2  
 {margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:0cm;  
 margin-left:28.3pt;  
 margin-bottom:.0001pt;  
 text-indent:-14.15pt;  
 mso-pagination:none;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:10.0pt;  
 font-family:"Times New Roman";  
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-fareast-language:EN-US;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText  
 {margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:6.0pt;  
 margin-left:0cm;  
 mso-pagination:none;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:10.0pt;  
 font-family:"Times New Roman";  
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-fareast-language:EN-US;}

p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2  
 {margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:6.0pt;  
 margin-left:14.15pt;  
 mso-pagination:none;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:10.0pt;  
 font-family:"Times New Roman";  
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-fareast-language:EN-US;}

p.MsoBodyText3, li.MsoBodyText3, div.MsoBodyText3  
 {mso-style-parent:"Texto independiente 2";  
 margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:6.0pt;  
 margin-left:14.15pt;  
 mso-pagination:none;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:10.0pt;

```

 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:EN-US;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="786" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>FUNCION DE CRITERIO</p>
 <p
 class=MsoNormal><span
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Inmediatamente de lo anterior
aparece la pregunta acerca de la determinación, o la forma efectiva, de elegir la
variable de control. En general existen varias limitaciones en la libertad de escoger. Estas
limitaciones o constricciones aparecen de la naturaleza del sistema físico en síc;
mismo, y del tipo de elementos que son elegidos para establecer el control. El reconocer estas
fronteras realistas en las características usualmente introduce muy serias dificultades
analíticas, ya que algunas veces presentan grandes dificultades en la solución
numérica, y otras veces la facilitan. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

```

Aquí, supondremos que el elegir el control está dictado por consideraciones de costo.

Distinguiremos dos tipos de costos:

a.) El costo de ejercer el control.

b.) El costo de las características indeseables del sistema.

Estos pueden determinarse por las características en el tiempo del sistema, los estados y los vectores de control. En la práctica ningún tipo de costo es fácil de evaluar.

Para iniciar la discusión matemática, nos abocaremos a medir el costo de ambos tipos por funciones escalares relativamente simples  $x$ ,  $y$ . Luego para el proceso discreto, tomaremos el costo del sistema a ser de la forma:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^k \left( x^T Q x + u^T R u \right) + \lambda^N x^T P x$$

donde  $\lambda$  es el factor de descuento,  $Q$  y  $R$  son matrices positivas definitas,  $P$  es una matriz positiva semidefinida.

<v:imagedata src="funcriterio\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244545463">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText3 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La funci&oacute;n <span  
 class=SpellE><span class=GramE>h<sub>n</sub></span></span><span  
 class=GramE>(</span><span class=SpellE>x<sub>n</sub></span>) puede interpretarse como costo asociado con las n  
 etapas, y la funci&oacute;n k(x) un costo asociado con el estado terminal. En casos particulares  
 se puede tomar como cero. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Similarmente podemos tomar  
 el costo del control de la forma: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:32.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="funcriterio\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244545464">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Tomaremos ahora la  
 consideraci&oacute;n fundamental que estas dos clases de costos son medibles. Esta  
 consideraci&oacute;n nos lleva a obtener un costo total con solo sumar las dos expresiones de  
 las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>



<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>esta</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> funci&oacute;n de los estados y del control se le llama Funci&oacute;n de Criterio.</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>An&aacute;logamente en un examen de procesos continuos estamos listos a considerar una funcional de criterio de la forma: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:150.75pt;height:35.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="funcriterio\_archivos/image010.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244545468">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>De esta manera podemos definir un proceso de control, como la determinaci&oacute;n de un vector de control que minimice la funci&oacute;n o funcional de criterio, sujeto a las condiciones de que los vectores de estado y control se relacionen como se ha planteado. El problema matem&aacute;tico esta ahora bien definido, como se ve, podemos emplear el c&aacute;lculo de variaciones para estudiarlo. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

### 3.160 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. INTRODUCCION

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"  
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office">

xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"  
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```
<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="controloptimo_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="controloptimo_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="controloptimo_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL OPTIMO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:41:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T00:43:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>735</o:Words>
<o:Characters>4044</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>33</o:Lines>
<o:Paragraphs>9</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>4770</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
```



```

margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h1
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:1;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:14.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-font-kerning:14.0pt;
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;}

p.MsoList2, li.MsoList2, div.MsoList2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:0cm;
margin-left:28.3pt;
margin-bottom:.0001pt;
text-indent:-14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;

```

```

 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:1504514579;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
@list l1
 {mso-list-id:1600285543;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l1:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
@list l2
 {mso-list-id:2042002773;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l2:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
ol

```



2.

Variables dependientes, que se emplean para medir y describir el estado del proceso respecto de cualquier parámetro.

Variables producto, que se usan para medir e indicar la calidad de la operación y conducta del sistema de control.

Disturbios, que son las variables incontrolables del ambiente.

El problema general del control óptimo, consiste en la forma en la cual, las variables producto se mantienen en sus óptimos valores en presencia de fluctuaciones causadas por los disturbios o la variación de los parámetros del sistema. Como dijimos, si las variables producto se emplean para describir la conducta del sistema, luego entonces, el problema del control óptimo involucra la maximización o minimización de los indicadores de la conducta del sistema.

Un sistema físico de n-ésimo orden usualmente se describe en cualquier parámetro, por ejemplo, el tiempo  $t$  por un número finito de cantidades:  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ . Estas cantidades son las variables de estado del sistema, y constituyen las componentes de un vector  $x(t)$ , llamado el vector de estado del sistema. La idea de estado como un concepto físico en la representación de sistemas fue introducido en 1936 por Turing, después este concepto lo emplea Shannon en su trabajo físico de Teoría de Información. La introducción de este concepto de estado en el control óptimo se le debe a Bellman.

justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Para considerar la relaci&ocute;n de los cambios en el tiempo del sistema, al estado del sistema, se hace la consideraci&ocute;n de que la derivada del vector de estado <span class=Spelle>dx</span><span class=Spelle>dt</span> depende solamente del estado presente del sistema y no de su historial pasado. Esta consideraci&ocute;n nos lleva a la caracterizaci&ocute;n matem&aacute;tica de un sistema por medio de la ecuaci&ocute;n diferencial: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:114.75pt; height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="controloptimo\_archivos/image001.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>>

<!--[if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960469"></o:OLEObject></xml><![endif]>>

<o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>con</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> la condici&ocute;n inicial  $x(0) = x_0$ . En la ecuaci&ocute;n anterior <sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt; height:12pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="controloptimo\_archivos/image003.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]>><!--[if !vml]>  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960470">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 (t) denota el vector de control y <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:8.25pt;height:14.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="controloptimo\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960472">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>es una funci&acute;n vectorial de las  
 variables de estado, la se&ntilde;al de control, y un par&aacute;metro, y en algunos casos las  
 variables del ambiente y los disturbios. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En cada momento, el vector de control <sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="controloptimo\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960473">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 debe de satisfacer la condici&acute;n: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
 Arial'>g</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(<sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole=""  
 fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="controloptimo\_archivos/image008.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
 

<![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960474">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>-->  
 ) = 0<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> refleja las constricciones impuestas al sistema de control. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Así; el problema de control óptimo se puede establecer rigurosamente de la siguiente manera:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Dado un sistema a controlar, hay que determinar la ley de control tal que un cierto conjunto de características de conducta del sistema sean maximizadas o minimizadas. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Las variables de estado de un sistema algunas veces son posibles de observar y medir, para sistemas lineales que tengan esta característica es posible determinar su ley óptima de control como una función de las variables de estado, aunque se esté; en presencia de ruido. Hay veces en que se tienen sistemas a los cuales no se les puede medir sus variables de estado, y en estos casos, la ley de control óptimo será; como una función de la mejor estimación de las variables de estado obtenida de las mediciones de la señal de salida del sistema, por lo que estos sistemas involucran tanto una estimación óptima como un control óptimo. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En su formulación general el control óptimo se ve como si fuese un problema variacional. Hay muchos posibles métodos variacionales para maximizar o minimizar una funcional sobre una función espacial, el intervalo de posibilidades va desde los métodos clásicos del cálculo de variaciones, a aproximaciones numéricas y sucesivas de sistemas experimentales o modelos. <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Los métodos comúnmente empleados en teoría de control son: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263</





```

 text-decoration: none;
 }
 a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
 }
 a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
 }
 a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">Página Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
<td width="172"><a href="..cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la Página Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="788" background="..figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO</div></td>
</tr>
</table>
<table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
<tr bgcolor="#FFE6FF">
<td width="102" valign="top"><div align="center">Control Optimo </div></td>
<td width="261" height="18" valign="top"><div align="center">Formulación en Cálculo de
Variaciones </div></td>
<td width="158" valign="top"><div align="center">Problema de Lagrange </div></td>
<td width="133" valign="top"><div align="center">Problema de Mayer </div></td>

```

```
 <div align="center">Problema de Boltza </div></td> </tr> </table> <p> </p> <p> </p> <p> </p> </div> <p> </p> </body> </html> |
```

### 3.162 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. FORMULACION DEL PROBLEMA EN EL CALCULO DE VARIACIONES

```

<html xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="forprobbolza_archivos/filelist.xml">
<title>FORMULACION DEL PROBLEMA EN EL CALCULO DE VARIACIONES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:43:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T00:45:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>79</o:Words>
<o:Characters>439</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>3</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>517</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>

```

```

</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h1
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:1;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:14.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-font-kerning:14.0pt;
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-bidi-font-weight:normal;}

p.MsoList2, li.MsoList2, div.MsoList2
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:0cm;
 margin-left:28.3pt;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-indent:-14.15pt;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoList3, li.MsoList3, div.MsoList3
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:0cm;
 margin-left:42.45pt;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-indent:-14.15pt;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;

```

```

font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoListContinue3, li.MsoListContinue3, div.MsoListContinue3
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:42.45pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
{mso-list-id:1011562188;

```

```

 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>FORMULACION DEL PROBLEMA EN EL
CALCULO DE VARIACIONES<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>El calculo variacional es la
parte del calculo relacionada con los problemas de optimizaci&ocaron, situados estos en
condiciones mas generales que las consideradas en la teor&iacuta de m&aacuta;ximos y
m&iacuta;nimos del calculo. <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'>Los tres problemas fundamentales en el
c&aacuta;lculo de variaciones son: <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoList2 style='margin-left:14.15pt;text-align:justify;mso-list:l0 level1 lfo1'>
 <![if !supportLists]>

```



```

w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EL PROBLEMA DE LAGRANGE </title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T00:45:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T00:47:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>118</o:Words>
<o:Characters>649</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>5</o:Lines>
<o:Paragraphs>1</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>766</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h2
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;

```



page-break-after:avoid;  
 mso-outline-level:2;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:12.0pt;  
 mso-bidi-font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;  
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES-TRAD;  
 mso-bidi-font-weight:normal;  
 font-style:italic;  
 mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoList, li.MsoList, div.MsoList  
 {margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:0cm;  
 margin-left:14.15pt;  
 margin-bottom:.0001pt;  
 text-indent:-14.15pt;  
 mso-pagination:none;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:10.0pt;  
 font-family:"Times New Roman";  
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText  
 {margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:6.0pt;  
 margin-left:0cm;  
 mso-pagination:none;  
 mso-layout-grid-align:none;  
 punctuation-wrap:simple;  
 text-autospace:none;  
 font-size:10.0pt;  
 font-family:"Times New Roman";  
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2  
 {margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:6.0pt;  
 margin-left:0cm;  
 text-align:justify;  
 line-height:200%;  
 mso-pagination:widow-orphan;  
 font-size:12.0pt;  
 mso-bidi-font-size:10.0pt;  
 font-family:"Times New Roman";  
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";  
 mso-ansi-language:ES;}

p.MsoBodyText3, li.MsoBodyText3, div.MsoBodyText3  
 {mso-style-parent:"Texto independiente 2";  
 margin-top:0cm;  
 margin-right:0cm;  
 margin-bottom:6.0pt;  
 margin-left:14.15pt;

```

 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>EL PROBLEMA DE LAGRANGE
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>El problema de Lagrange en
una variable independiente se relaciona con el hecho de determinar una función m(t) que minimiza la integral de una función dada. El problema lo
podemos establecer de la forma siguiente: Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales:
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:

```

justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText3 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt; height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="problagrange\_archivos/image001.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960725">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>o</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> en forma mas general: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:57pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="problagrange\_archivos/image003.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960726">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoList style='margin-left:0cm;text-align:justify;text-indent:0cm'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> x es un vector de  $n \times 1$ , y m es un vector de  $r \times 1$ , y un conjunto de condiciones iniciales: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoList style='margin-left:0cm;text-align:justify;text-indent:0cm'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=Spelle><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>i</sub></span></span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>t<sub>0</sub></span>) = <span class=Spelle>a<sub>i</sub></span> <span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp;</span>i = 1, 2,..., n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> una funci&oacute;n de criterio: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="problagrangr\_archivos/image005.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960727">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>F<span style='color:blue'>(<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="problagrangr\_archivos/image007.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960728">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
, <sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="problagrangrarchivos/image009.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960729">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
, t) es una funci&acute;n continua de sus argumentos. Hay que determinar la  
funci&acute;n <sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:12.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="problagrangrarchivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960730">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span>(t)<span style='color:blue'> sujeta a las condiciones dadas en las  
ecuaciones<o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="problagrangrarchivos/image001.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243960731">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

```

text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:1in;height:36pt' o:ole=""
 fillcolor="window">
 <v:imagedata src="problagrangrarchivos/image005.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <!--[if !vml]>

 <![endif]>
</sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1243960732">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.164 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA DE MAYER

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="probmayerarchivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="probmayerarchivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="probmayerarchivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EL PROBLEMA DE MAYER</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>2</o:Revision>
 <o:TotalTime>12</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-22T00:47:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-28T00:47:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>165</o:Words>
 <o:Characters>908</o:Characters>

```

```

<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>7</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1071</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h2
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:2;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-bidi-font-weight:normal;
 font-style:italic;
 mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;

```

```

 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
 <tr>
 <td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>EL PROBLEMA DE
MAYER<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```



color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Este problema est&aacute;n relacionado con el hecho de determinar una funci&aacute;n <span class=GramE>m(</span>t) que minimiza una funci&aacute;n dada evaluada en los puntos finales, conteniendo algunas variables cuyos valores finales no est&aacute;n especificados. Este problema lo podemos establecer de la siguiente forma: Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales como las de la ecuaci&aacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt; height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probmayer\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478779">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>un</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> conjunto de condiciones iniciales como el de la ecuaci&aacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'>

text-align:center"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:36pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probmayer\_archivos/image010.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478780">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'> un conjunto de condiciones finales: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span class=Spelle><span class=GramE><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial'>xi</span></span></span><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(</span></span><span class=Spelle><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>t<sub>f</sub></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>)</span> = <span  
class=Spelle>b<sub>j</sub></span><sub><o:p></o:p></sub></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'> j pertenece a alg&uacute;n subconjunto de los enteros, y <span  
class=Spelle>t<sub>f</sub></span></span> no se especifica, y una funci&oacute;n de criterio:  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:21pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probmayer\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478781">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

text-align:center"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Hay que determinar la funci&oacute;n <span class=GramE>m(</span>t) que minimice l sobre todas las funciones m(t) sujetas a las condiciones dadas en las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:59.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probmayer\_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478782"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probmayer\_archivos/image010.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478783"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=SpellE><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>xi</span></span></span><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'></span></span><span class=SpellE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>t<sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>)<span class=SpellE>b<sub>j</sub></span><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>cuando</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> la funci&oacute;n de criterio es: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:99.75pt;height:21.75pt'
 o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="probmayer\_archivos/image012.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478784">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>el</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> problema se reduce a transformar ciertos estados iniciales en los estados finales deseados en un tiempo m&iacute;nimo. Este es el problema del control &acute;ptimo del tiempo. <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span
 lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 </div></td>
 </tr>
 </table>
 </body>
 </html>

### 3.165 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA DE BOLZA

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
 xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
 xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
 xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">
 <head>
 <meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
 <meta name=ProgId content=Word.Document>
 <meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
 <meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
 <link rel=File-List href="probbolza\_archivos/filelist.xml">
 <link rel=Edit-Time-Data href="probbolza\_archivos/editdata.mso">
 <link rel=OLE-Object-Data href="probbolza\_archivos/oledata.mso">
 <!--[if !mso]>
 <style>
 v\:.\* {behavior:url(#default#VML);}
 o\:.\* {behavior:url(#default#VML);}
 w\:.\* {behavior:url(#default#VML);}
 .shape {behavior:url(#default#VML);}
 </style>
 <![endif]-->

```

<title>EL PROBLEMA DE BOLZA</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>HHMM</o:Author>
 <o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
 <o:Revision>2</o:Revision>
 <o:TotalTime>4</o:TotalTime>
 <o:Created>2007-06-22T01:00:00Z</o:Created>
 <o:LastSaved>2007-06-28T00:44:00Z</o:LastSaved>
 <o:Pages>1</o:Pages>
 <o:Words>204</o:Words>
 <o:Characters>1123</o:Characters>
 <o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
 <o:Lines>9</o:Lines>
 <o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
 <o:CharactersWithSpaces>1325</o:CharactersWithSpaces>
 <o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:Zoom>91</w:Zoom>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}

h2
 {mso-style-next:Normal;
 margin-top:12.0pt;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:3.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 page-break-after:avoid;
 mso-outline-level:2;
 mso-layout-grid-align:none;

```

```

punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;
font-style:italic;
mso-bidi-font-style:normal;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>

```

</o:shapelayout></xml><![endif]-->  
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

&lt;table class=MsoNormalTable border=0 cellpadding=0 width=785 style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'&gt;  <tr> <td &gt;<="" style="padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt" td=""> <td>  &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;b style='mso-bidi-font-weight:normal'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'&gt;EL PROBLEMA DE BOLZA&lt;/span&gt;&lt;/b&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Este problema se relaciona con el hecho de determinar una función &lt;span class=GramE&gt;m&lt;/span&gt;(t) que minimice la integral de una función más una función evaluada en los puntos finales, conteniendo algunas variables que no tienen especificados sus valores finales. El problema lo podemos establecer de la siguiente forma: &lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales como las de la ecuación&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;sub&gt;&lt;!--[if gte vml 1]&gt;&lt;v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"&gt;&lt;v:stroke joinstyle="miter"/&gt;&lt;v:formulas&gt;&lt;v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 1 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum 0 0 @1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @2 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 0 1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @6 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @8 21600 0"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @10 21600 0"/&gt;&lt;/v:formulas&gt;&lt;v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/&gt;&lt;o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/&gt;&lt;/v:shapetype&gt;&lt;v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt; height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"&gt;&lt;v:imagedata src="probbolza_archivos/image007.wmz" o:title=""&gt;&lt;/v:shape&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;![if !vml]&gt;&lt;img width=99 height=23 src="probbolza_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025"&gt;&lt;![endif]&gt;&lt;/sub&gt;&lt;!--[if gte mso 9]&gt;&lt;xml&gt;&lt;o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244478652"&gt;&lt;/o:OLEObject&gt;&lt;/xml&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;  </td> </td></tr>	<td>  &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;b style='mso-bidi-font-weight:normal'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'&gt;EL PROBLEMA DE BOLZA&lt;/span&gt;&lt;/b&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Este problema se relaciona con el hecho de determinar una función &lt;span class=GramE&gt;m&lt;/span&gt;(t) que minimice la integral de una función más una función evaluada en los puntos finales, conteniendo algunas variables que no tienen especificados sus valores finales. El problema lo podemos establecer de la siguiente forma: &lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales como las de la ecuación&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;sub&gt;&lt;!--[if gte vml 1]&gt;&lt;v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"&gt;&lt;v:stroke joinstyle="miter"/&gt;&lt;v:formulas&gt;&lt;v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 1 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum 0 0 @1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @2 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 0 1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @6 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @8 21600 0"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @10 21600 0"/&gt;&lt;/v:formulas&gt;&lt;v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/&gt;&lt;o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/&gt;&lt;/v:shapetype&gt;&lt;v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt; height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"&gt;&lt;v:imagedata src="probbolza_archivos/image007.wmz" o:title=""&gt;&lt;/v:shape&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;![if !vml]&gt;&lt;img width=99 height=23 src="probbolza_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025"&gt;&lt;![endif]&gt;&lt;/sub&gt;&lt;!--[if gte mso 9]&gt;&lt;xml&gt;&lt;o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244478652"&gt;&lt;/o:OLEObject&gt;&lt;/xml&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;  </td>	&lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;b style='mso-bidi-font-weight:normal'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'&gt;EL PROBLEMA DE BOLZA&lt;/span&gt;&lt;/b&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Este problema se relaciona con el hecho de determinar una función &lt;span class=GramE&gt;m&lt;/span&gt;(t) que minimice la integral de una función más una función evaluada en los puntos finales, conteniendo algunas variables que no tienen especificados sus valores finales. El problema lo podemos establecer de la siguiente forma: &lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales como las de la ecuación&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;sub&gt;&lt;!--[if gte vml 1]&gt;&lt;v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"&gt;&lt;v:stroke joinstyle="miter"/&gt;&lt;v:formulas&gt;&lt;v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 1 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum 0 0 @1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @2 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 0 1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @6 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @8 21600 0"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @10 21600 0"/&gt;&lt;/v:formulas&gt;&lt;v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/&gt;&lt;o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/&gt;&lt;/v:shapetype&gt;&lt;v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt; height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"&gt;&lt;v:imagedata src="probbolza_archivos/image007.wmz" o:title=""&gt;&lt;/v:shape&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;![if !vml]&gt;&lt;img width=99 height=23 src="probbolza_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025"&gt;&lt;![endif]&gt;&lt;/sub&gt;&lt;!--[if gte mso 9]&gt;&lt;xml&gt;&lt;o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244478652"&gt;&lt;/o:OLEObject&gt;&lt;/xml&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;
<td>  &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;b style='mso-bidi-font-weight:normal'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'&gt;EL PROBLEMA DE BOLZA&lt;/span&gt;&lt;/b&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Este problema se relaciona con el hecho de determinar una función &lt;span class=GramE&gt;m&lt;/span&gt;(t) que minimice la integral de una función más una función evaluada en los puntos finales, conteniendo algunas variables que no tienen especificados sus valores finales. El problema lo podemos establecer de la siguiente forma: &lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales como las de la ecuación&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;sub&gt;&lt;!--[if gte vml 1]&gt;&lt;v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"&gt;&lt;v:stroke joinstyle="miter"/&gt;&lt;v:formulas&gt;&lt;v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 1 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum 0 0 @1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @2 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 0 1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @6 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @8 21600 0"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @10 21600 0"/&gt;&lt;/v:formulas&gt;&lt;v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/&gt;&lt;o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/&gt;&lt;/v:shapetype&gt;&lt;v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt; height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"&gt;&lt;v:imagedata src="probbolza_archivos/image007.wmz" o:title=""&gt;&lt;/v:shape&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;![if !vml]&gt;&lt;img width=99 height=23 src="probbolza_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025"&gt;&lt;![endif]&gt;&lt;/sub&gt;&lt;!--[if gte mso 9]&gt;&lt;xml&gt;&lt;o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244478652"&gt;&lt;/o:OLEObject&gt;&lt;/xml&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;  </td>	&lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;b style='mso-bidi-font-weight:normal'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'&gt;EL PROBLEMA DE BOLZA&lt;/span&gt;&lt;/b&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Este problema se relaciona con el hecho de determinar una función &lt;span class=GramE&gt;m&lt;/span&gt;(t) que minimice la integral de una función más una función evaluada en los puntos finales, conteniendo algunas variables que no tienen especificados sus valores finales. El problema lo podemos establecer de la siguiente forma: &lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;Dado un conjunto de ecuaciones diferenciales como las de la ecuación&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;   &lt;p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'&gt;&lt;span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'&gt;&lt;sub&gt;&lt;!--[if gte vml 1]&gt;&lt;v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"&gt;&lt;v:stroke joinstyle="miter"/&gt;&lt;v:formulas&gt;&lt;v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 1 0"/&gt;&lt;v:f eqn="sum 0 0 @1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @2 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @0 0 1"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @6 1 2"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @8 21600 0"/&gt;&lt;v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/&gt;&lt;v:f eqn="sum @10 21600 0"/&gt;&lt;/v:formulas&gt;&lt;v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/&gt;&lt;o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/&gt;&lt;/v:shapetype&gt;&lt;v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:74.25pt; height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"&gt;&lt;v:imagedata src="probbolza_archivos/image007.wmz" o:title=""&gt;&lt;/v:shape&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;![if !vml]&gt;&lt;img width=99 height=23 src="probbolza_archivos/image002.gif" v:shapes="_x0000_i1025"&gt;&lt;![endif]&gt;&lt;/sub&gt;&lt;!--[if gte mso 9]&gt;&lt;xml&gt;&lt;o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="_1244478652"&gt;&lt;/o:OLEObject&gt;&lt;/xml&gt;&lt;![endif]--&gt;&lt;o:p&gt;&lt;/o:p&gt;&lt;/span&gt;&lt;/p&gt;	

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>un conjunto de condiciones iniciales como las de la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbolza\_archivos/image008.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478653"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>y un conjunto de condiciones finales como el de la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=SpellE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>xi</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(<span class=SpellE>t<sub>f</sub></span></span> = <span class=SpellE>b<sub>j</sub></span></span><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>y una función de criterio: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:150.75pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbolza\_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478654"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>hay que determinar la función m(t) que minimice a I sobre todas las funciones m(t) sujetas a las condiciones de las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbolza\_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>



<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478655">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:83.25pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probbolza\_archivos/image008.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478656">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>xi</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'>(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>)= <span class=Spelle>b<sub>j</sub></span><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Cuando x se define como el vector de estados de un sistema, y m como el vector de control, la integral mínima de control se puede formular como un problema de Lagrange, de forma similar el problema terminal de control y el problema de control mínimo de tiempo, se pueden formular como un problema de <span class=Spelle>Mayer</span>. El problema de <span class=Spelle>Bolza</span> se puede formular para describir un control de mínima integral, sujeto a restricciones terminales, o un control de n terminales de mínimo tiempo sujeto a una restricción integral. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</td>

</tr>

</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div>

</body>

</html>

### 3.166 CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION. INTRODUCCION

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml" xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

<meta name=ProgId content=Word.Document>

```

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="probbasicminimiza_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="probbasicminimiza_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="probbasicminimiza_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>27</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T01:04:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:32:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>908</o:Words>
<o:Characters>4995</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>41</o:Lines>
<o:Paragraphs>11</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>5892</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;

```

```

font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}

h2
{mso-style-next:Normal;
margin-top:12.0pt;
margin-right:0cm;
margin-bottom:3.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
page-break-after:avoid;
mso-outline-level:2;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-bidi-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;
mso-bidi-font-weight:normal;
font-style:italic;
mso-bidi-font-style:normal;}

p.MsoList, li.MsoList, div.MsoList
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:0cm;
margin-left:14.15pt;
margin-bottom:.0001pt;
text-indent:-14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}

p.MsoBodyText2, li.MsoBodyText2, div.MsoBodyText2
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:14.15pt;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;

```

```

 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
 {mso-list-id:90468744;
 mso-list-type:simple;
 mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l0:level1
 {mso-level-tab-stop:none;
 mso-level-number-position:left;
 mso-level-legacy:yes;
 mso-level-legacy-indent:14.15pt;
 mso-level-legacy-space:0cm;
 margin-left:14.15pt;
 text-indent:-14.15pt;}
ol
 {margin-bottom:0cm;}
ul
 {margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

```

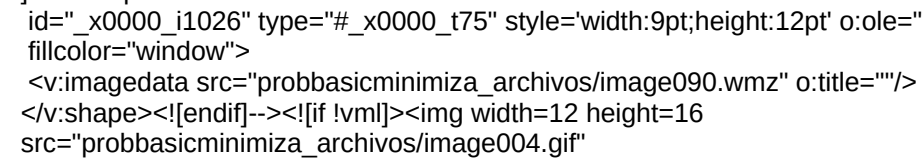
<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785 style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>  
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>  
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>  
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION</span></b></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Consideraremos el problema de minimizar la integral:</span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f"><v:stroke joinstyle="miter"/><v:formulas><v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/><v:f eqn="sum @0 1 0"/><v:f eqn="sum 0 0 @1"/><v:f eqn="prod @2 1 2"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @0 0 1"/><v:f eqn="prod @6 1 2"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/><v:f eqn="sum @8 21600 0"/><v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/><v:f eqn="sum @10 21600 0"/></v:formulas><v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/><o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/></v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt; height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image089.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477929"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> x = x(t) es totalmente diferenciable, y satisface las condiciones x(t<sub>0</sub>) = x<sub>0</sub> y x(<span class=SpellE>t<sub>f</sub></span></p>  
= <span class=SpellE>x<sub>f</sub></span>, y F es una funci3n continua de sus

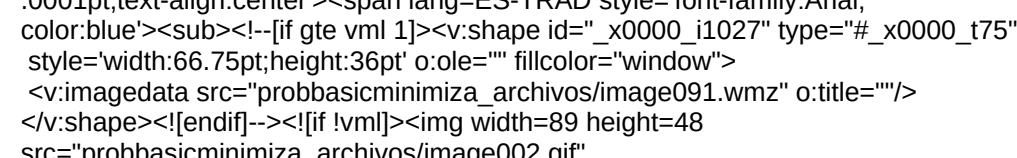
argumentos. Hay que determinar la función  $x(t)$  que minimice la integral de la ecuación.

La interpretación geométrica del problema es la de determinar la curva  $x(t)$  que une los puntos  $(x_0, t_0)$  y  $(x_1, t_1)$ , tal que la integral a lo largo de la curva de alguna función dada  $F(x, t)$



sea mínima.

En terminología de control, si  $x$  es la salida de un sistema de control, luego la integral de la ecuación



una medida del sobrepaso del sistema. El criterio de su conducta es el que la integral sea minimizada.

Sea  $x(t)$  la

función minimizada, y

$$y = \begin{cases} \text{probbasicminimiza\_archivos/image092.wmz} & \text{if } x \geq 0 \\ \text{probbasicminimiza\_archivos/image007.gif} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

será una función en la vecindad de  $x(t)$ , luego  $x(t)$  y

$$y = \begin{cases} \text{probbasicminimiza\_archivos/image092.wmz} & \text{if } x \geq 0 \\ \text{probbasicminimiza\_archivos/image007.gif} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

estarán relacionadas por las ecuaciones:

$$x(t) = \begin{cases} \text{probbasicminimiza\_archivos/image093.wmz} & \text{if } x \geq 0 \\ \text{probbasicminimiza\_archivos/image009.gif} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

donde

$$x(t) = \begin{cases} \text{probbasicminimiza\_archivos/image094.wmz} & \text{if } x \geq 0 \\ \text{probbasicminimiza\_archivos/image011.gif} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

es un parámetro pequeño y

$$y = \begin{cases} \text{probbasicminimiza\_archivos/image094.wmz} & \text{if } x \geq 0 \\ \text{probbasicminimiza\_archivos/image011.gif} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>(t) es una cierta función diferenciable para la cual: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(t<sub>0</sub>) = </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>( <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) = 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si consideramos los puntos finales fijos, como se ve el la figura.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:161.25pt;height:135.75pt'><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image012.png" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La condición dada en la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(t<sub>0</sub>) = </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>( <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) = x<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>)</span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>asegura que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) = x(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>)</span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>



color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>esto</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es que todas las funciones vecinas poseen los valores finales requeridos de las funciones con respecto a las cuales se minimiza el punto final. Escogiendo </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>(t) y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, es posible representar cualquier función diferenciable que tenga los valores finales requeridos por una expresión de la forma dada en la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image095.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477936"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La desviación vertical de cualquier curva </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:9.75pt;height:12pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image096.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477937"></o:OLEObject></xml><!--[endif]>(t)<span style='color:blue'> de la curva minimizada está dada por </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>(t) como se ilustra en la figura. No importa que </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;

mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>(t) se elija, la función minimizada <span class=GramE>x(</span>t), es un miembro de una familia generada por el valor del parámetro </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> = 0. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Reemplazando y <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:11.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image097.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477938"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><span style='mso-spacerun:yes'> </span>en la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:75pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image098.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477939"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>por <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:24.75pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image099.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477940"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><span style='mso-spacerun:yes'> </span>respectivamente, se tiene: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:116.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image100.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p>

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477941">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Expandiendo en series de Taylor el integrando de la ecuación anterior</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:fuchsia'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>se tiene: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:207.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image101.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477942">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego la ecuación de criterio se puede escribir como: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:171.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image102.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477943">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La condición necesaria para que I sea un mínimo o un máximo es: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image103.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477944">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Esto nos  
 lleva a la condición de que: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml  
 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:36pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image104.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477945">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 align=center style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Integrando  
 por partes el segundo término de la ecuación anterior se tiene: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
 .0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:150.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image105.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477946">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>en  
 vista de la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
 .0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(t<sub>0</sub>) = </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
 mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;  
 mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
 Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>( <span  
 class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) = 0<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>se tiene: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image106.wmz" o:title="">

</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477947">

</o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image107.wmz" o:title="">

</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477948">

</o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>se reduce a: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image108.wmz" o:title="">

</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477949">

</o:OLEObject>

</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si la ecuación anterior vale para toda </span><span lang=ES-TRAD style='font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, <span style='mso-spacerun:yes'> </span>la condición necesaria para que I sea un extremal es: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:





disturbios externos los consideraremos constantes. Al final del transitorio el proceso de control alcanza el nivel final de  $x$ .

&nbsp;

Sea  $x(t)$  la función que minimiza la integral de criterio de la ecuación

&nbsp;

Sea

&nbsp;

El punto final de la trayectoria cae en la curva  $x = c$ , como lo muestra la figura.

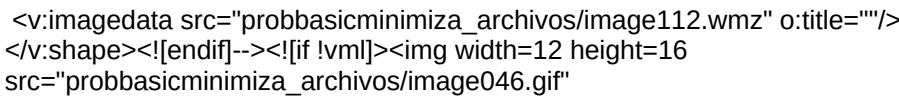
&nbsp;

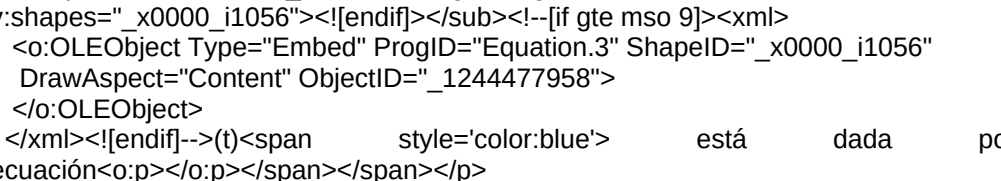
El

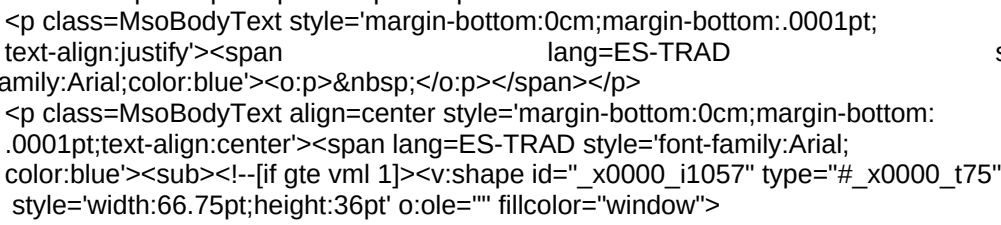
&nbsp;

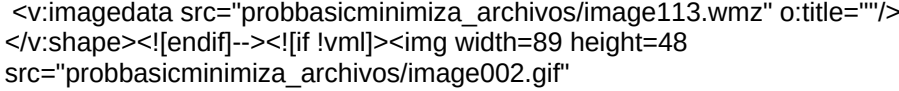
Considerando a  $x(t)$  la relación entre  $x(t)$  y  $y$

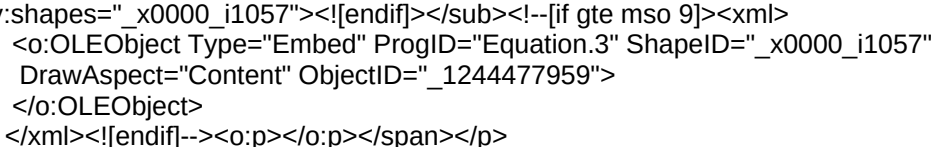


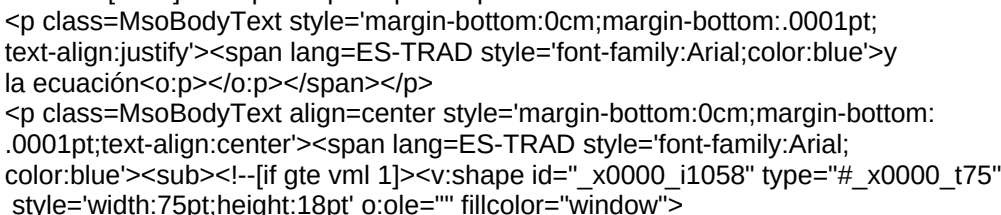

  
 está dada por la ecuación

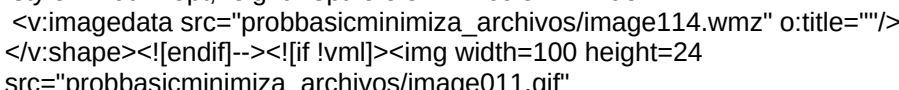


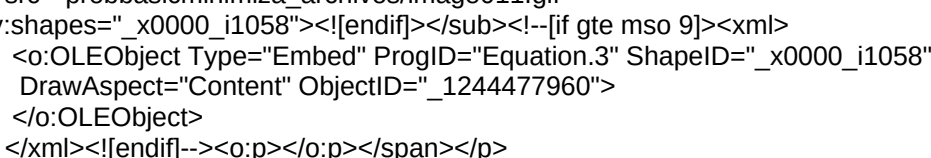


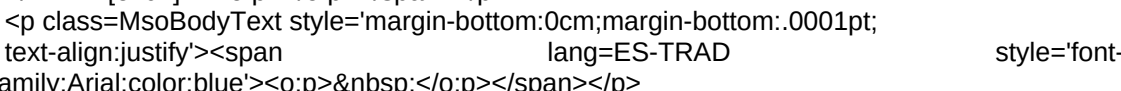




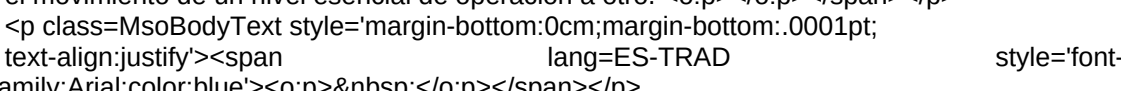


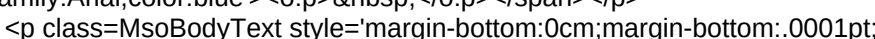












text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Reemplazando  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<span style='color:blue'>  
y <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:9pt;height:11.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image115.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1059"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477961">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><span style='mso-spacerun:yes'> </span>en la  
ecuación<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:75pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image116.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477962">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>por  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<span style='color:blue'>  
y <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:9pt;height:14.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image117.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477963">  
</o:OLEObject>  
</xml><!--[endif]>, y el limite superior de integración por <span  
class=Spelle><sub>f</sub></span><sub> </sub>+ </span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;  
mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>d</span></span><span  
class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'>t<sub>f</sub></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, se forma la integral:  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75"

<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image118.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477964">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La  
variación </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span class=SpellE><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>t<sub>f</sub></span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> ocurre porque el punto  
final de la trayectoria no esta fijo, sino que cae en la curva  $x =$  <span  
class=GramE>c(</span>t).<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1063"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:167.25pt;height:130.5pt'>  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image043.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></span><span  
lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText2 style='margin:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Siguiendo  
el mismo argumento que en el caso anterior, se puede mostrar que la condición  
necesaria para que I sea un extremal es: <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1064" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:134.25pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image119.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1064"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477965">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Integrando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = m v \frac{dv}{dt} = m v a$$

Un análisis de las condiciones finales muestran que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v a$$

se relacionan por:

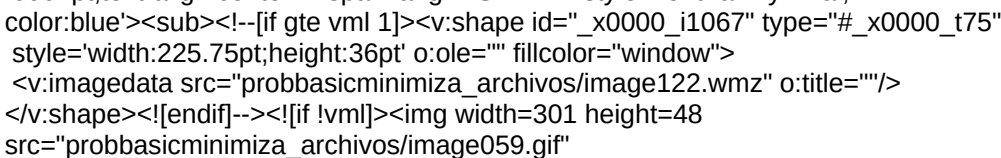
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v a$$

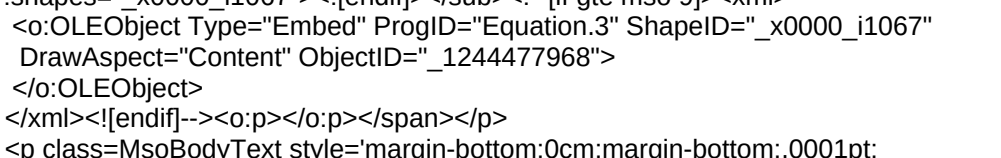
Eliminando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m v a$$

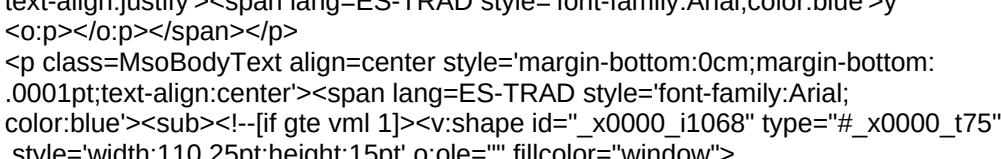
entre las

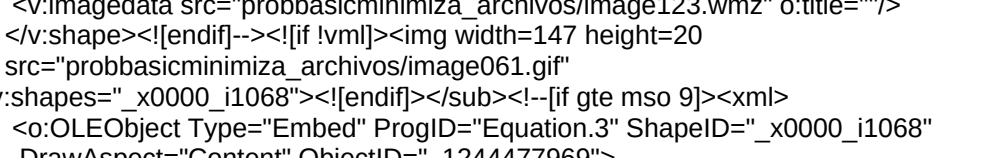
&nbsp;



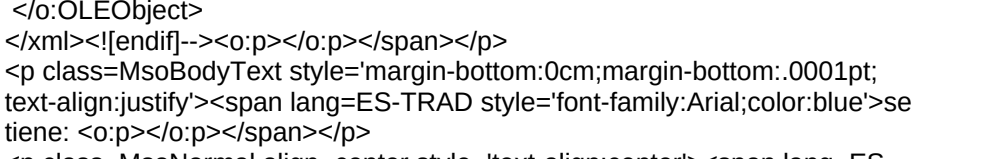


se tiene:

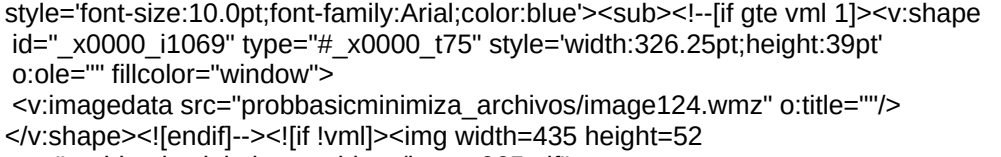




si



es arbitraria la ecuación anterior será:



<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image125.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1070"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477971">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y:  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
 .0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1071" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:240pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image126.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1071"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477973">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=right style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:right'><span  
 lang=ES-TRAD  
 style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>como  
 la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
 .0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1072" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:96.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image127.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1072"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477974">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span  
 lang=ES-TRAD  
 style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>debe  
 de valer para toda </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>h</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, la ecuación de <span  
 class=Spelle>Euler</span>-Lagrange es: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span  
 lang=ES-TRAD  
 style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1073" type="#\_x0000\_t75" style='width:78pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image128.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1073"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477975">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>pero  
 en el caso del punto final libre, la última ecuación<span  
 style='mso-spacerun:yes'> </span>deberá de satisfacer la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
 .0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1074" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:240pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image129.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1074"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477976">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si  
 <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1075" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:17.25pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image130.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1075"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477977">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>es finita en</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
 Arial'> <span style='color:blue'>t = t<sub>0</sub>, la  
 ecuación<o:p></o:p></span></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
 family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
 .0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1076" type="#\_x0000\_t75"  
 style='width:240pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image131.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1076"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477978">  
 </o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>se reduce a: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1077" type="#\_x0000\_t75" style='width:108.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image132.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1077" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477979"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si la curva final  $x = c(t)$ </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>es una recta y <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1078" type="#\_x0000\_t75" style='width:36pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image133.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1078" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477980"></o:OLEObject></xml><![endif]--><span style='mso-spacerun:yes'> </span>la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1079" type="#\_x0000\_t75" style='width:240pt;height:39pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image134.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1079" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477981"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>llega a ser:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1080" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image135.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1080"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>



DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477982">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La primera integral de la ecuación de <span class=SpELE>Euler</span> que satisface la condición a frontera de la ecuación<span style='mso-spacerun:yes'> </span>es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1081" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image136.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1081" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477983"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=right style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:right'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1082" type="#\_x0000\_t75" style='width:60.75pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image137.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1082" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477984"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Derivando los dos lados de la ecuación anterior respecto del tiempo se tiene:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1083" type="#\_x0000\_t75" style='width:92.25pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="probbasicminimiza\_archivos/image138.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1083"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></p>

```

 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244477985">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p> </o:p></p>
 </td>
 </tr>
</table>

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size:
12.0pt;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.167 CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION. INTRODUCCION. MARCO 4f

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
}

```

```

 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
 }
 .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
 }
 .style19 {font-size: 10px}
 -->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
 <tr>
 <td width="617">P´gina Principal >
 Curso de Control > Control Optimo</td>
 <td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
 target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
 </tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO · PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION
 </div></td>
 </tr>
 </table>
 <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
 bordercolor="#FFD7FF">
 <tr bgcolor="#FFE6FF">
 <td width="396" height="18" valign="top"><div align="center">Problema B´sico de
 Minimizaçn </div></td>
 <td width="393" height="18" valign="top"><div align="center">Multiplicadores de Lagrange
 </div></td>
 </tr>
 </table>
 <p> </p>
 <p> </p>
 <p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.168 CONTROL OPTIMO. EL PROBLEMA BASICO DE MINIMIZACION. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Y CONSTRICCIONES

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>

```

```

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="multilagrance_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="multilagrance_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="multilagrance_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\.* {behavior:url(#default#VML);}
o\.* {behavior:url(#default#VML);}
w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Y CONSTRICCIONES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T01:33:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T01:35:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>317</o:Words>
<o:Characters>1746</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>14</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2059</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";

```

```

 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.0pt 792.0pt;
margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
mso-header-margin:36.0pt;
mso-footer-margin:36.0pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red;mso-ansi-language:ES-
TRAD'>MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Y
CONSTRICCIONES<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```



color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> funcin que se va a maximizar o minimizar sujeta a las constricciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:122.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="multilagrange\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963784">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> :<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:39.75pt;height:63pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="multilagrange\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963785">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> una matriz constante. La condicin de la ecuacin:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

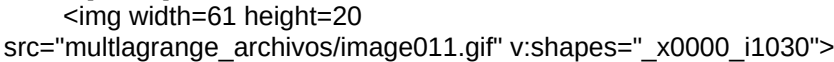
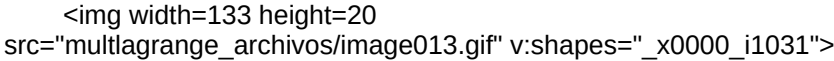
<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:122.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="multilagrange\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="multilagrange\_archivos/image004.gif" v:shapes="\_x0000\_i1028">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963786">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>puede</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language: ES-TRAD'> describir la condici&ocute;n de que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:35.25pt;height:17.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="multilagrange\_archivos/image008.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  

src="multilagrange\_archivos/image009.gif" v:shapes="\_x0000\_i1029">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963787">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language: ES-TRAD'> significa que los cuadrados de la se&ntilde;al de control est&aacute;n acotados.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>La ecuaci&ocute;n (1) puede describir la condici&ocute;n de que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:45.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="multilagrange\_archivos/image010.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->



<![if !vml]>  
 src="multilagrance\_archivos/image011.gif" v:shapes="\_x0000\_i1030">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963788">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>lo</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> que nos da que algunas se&ntilde;ales de control est&aacute;n acotadas.</span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>De acuerdo con Lagrange, el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> que optimice la funci&oacute;n <span class=GramE>P(</span>m) se puede obtener optimizando la funci&oacute;n:</p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:99.75pt;height:15pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="multilagrance\_archivos/image012.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 src="multilagrance\_archivos/image013.gif" v:shapes="\_x0000\_i1031">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963789">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>|</span></span></b><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'> es el vector de multiplicadores de Lagrange. Al optimizar la funci&oacute;n <span class=GramE>G(</span>m) obtenemos al vector <b style='mso-bidi-font-weight:

normal'>m</b> como una funci&oacute;n del vector de los multiplicadores de Lagrange.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si sustituimos el vector:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:96pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="multlagrange\_archivos/image014.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]><![endif]>

</sub><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1243963790">

</o:OLEObject></xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue;mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>en</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> la ecuaci&oacute;n de constricci&oacute;n, ecuaci&oacute;n (1), obtenemos r ecuaciones de las cuales se puede determinar el vector de los multiplicadores de Lagrange.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div></td></tr>

</table></body>

</html>

### 3.169 CONTROL OPTIMO. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN. INTRODUCCION

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml" xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office" xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word" xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

<meta name=ProgId content=Word.Document>

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">

<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">

<link rel=File-List href="princpontryagin\_archivos/filelist.xml">

<link rel=Edit-Time-Data href="princpontryagin\_archivos/editdata.mso">

<link rel=OLE-Object-Data href="princpontryagin\_archivos/oledata.mso">

<!--[if !mso]>

<style>

```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>5</o:Revision>
<o:TotalTime>21</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T01:36:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:29:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>1941</o:Words>
<o:Characters>10680</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>89</o:Lines>
<o:Paragraphs>25</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>12596</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;

```

```

margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
/* List Definitions */
@list l0
{mso-list-id:2003310181;
mso-list-type:simple;
mso-list-template-ids:1007182702;}
@list l0:level1
{mso-level-tab-stop:none;
mso-level-number-position:left;
mso-level-legacy:yes;
mso-level-legacy-indent:14.15pt;
mso-level-legacy-space:0cm;
margin-left:14.15pt;
text-indent:-14.15pt;}
ol
{margin-bottom:0cm;}
ul
{margin-bottom:0cm;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>

```

```

</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE
PONTYAGIN<span
lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:red'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'> A pesar de la enorme cantidad de tipos de
problemas que existen, hay tres tipos de fundamental importancia: El problema
de control de tiempo mínimo, el problema terminal de control y el problema de
control de la mínima integral.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>En
el estudio del cálculo de variaciones el problema del tiempo se resuelve por
un problema del tipo de Mayer. En este capítulo el
problema de mínimo tiempo se resolverá empleando el principio del máximo de Pontryagin.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Consideremos
un proceso de control de n-ésimo orden caracterizado por:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600"
o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f"
stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

```



Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family: Arial;color:blue'> refleje las restricciones impuestas bajo el sistema de control. Por ejemplo cuando las señales de control son acotadas por saturación, la ecuación llega a ser:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=Spelle><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>a<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><sup>3</sup></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> m<sub>i</sub> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><sup>3</sup></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> -<span class=Spelle>b<sub>i</sub></span><span style='mso-spacerun:yes'> </span>1 = 1, 2,..., n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El vector de control que satisface las condiciones de constricción es un vector admisible de control.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El problema de control de mínimo tiempo se puede establecer como la determinación de un valor m admisible de control tal que el proceso está tomado desde un estado específico  $x_{<sub>0</sub>}$  a un estado final  $x_{<sub>f</sub>}$  en el menor tiempo posible.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El problema terminal de control se puede establecer como la determinación de un vector admisible de control  $m_{<sub>0</sub>}$ , tal que en un intervalo de tiempo T, el sistema está tomado de un estado inicial  $x_{<sub>0</sub>}$ , dentro de un estado en el cual una de las combinaciones de las variables de estado ( $x_{<sub>i</sub>}$ ) es tan grande como sea posible o tan pequeña como sea posible y las otras variables de estado tienen valores fijos dentro de los límites físicos. En otras palabras el vector admisible de control maximiza o minimiza la funcional:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:93.75pt;height:21pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image006.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477893"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue">o<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:116.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image008.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477894"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>más</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> generalmente una funcional de variable de estado en la terminación de la trayectoria.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El problema de la integral mínima de control envuelve la optimización de un sistema respecto de una integral. Se puede establecer como la determinación de un vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> admisible de control tal que la integral de criterio:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:69.75pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image010.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477895"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>sea</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> mínima en el intervalo de movimiento t<sub>0</sub> - <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Los tres modos de control óptimo se pueden transformar a una optimización con respecto a coordenadas de variables de estado que se denomina modo generalizado de control óptimo.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La transformación se lleva a cabo empleando el embebimiento invariante que consiste en incrementar la dimensión del vector de estado sumándole una nueva variable de estado.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;



color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Veremos como reducir cada problema al modo generalizado por embebimiento invariante. Consideremos el proceso de control de orden n caracterizado por la ecuación:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image013.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477896"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En términos de las componentes del vector de estado la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:18pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image002.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477897"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477898"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El problema implica la minimización del tiempo requerido para mover el proceso de un estado inicial a un estado final deseado:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:36.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477899"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Introducimos una nueva variable de estado <span class=Spelle>x<sub>n+1</sub></span>(t) tal que:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:120pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image020.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477900"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El problema óptimo se reduce a determinar un vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> admisible tal que <span class=Spelle>x<sub>n+1</sub></span> se minimice.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Consideremos el proceso de control caracterizado por la ecuación: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image022.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477901">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La descripción más general del problema es: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:140.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image024.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477902">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>con valor inicial dado por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:138.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image026.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477903">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>en notación vectorial:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:75.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image028.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477904"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:78pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image030.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477905"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>derivando<span class=SpellE>x<sub>n+1</sub></span>(t) respecto de T:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image032.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477907"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:186pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image034.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477908"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>de la ecuación :<o:p></o:p></span></p>

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}$$

problema se reduce a un problema de optimización con respecto a una nueva coordenada  $x_{n+1}$  en el momento final del tiempo.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}$$

Consideremos un problema dependiente de  $k$  cantidades numéricas  $d_1, \dots, d_k$  y que tenga por solución  $m$  cantidades  $s_1, \dots, s_m$ . A menudo la solución directa de un problema de estos es difícil. Emplearemos un método indirecto el cual aparentemente incrementa la complejidad del problema. Este procedimiento se puede desarrollar en tres pasos.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}$$

Los datos  $d_1, \dots, d_k$  los consideramos como parámetros y la solución del problema es válida para valores generales de los parámetros. Si existe una solución los valores  $s_1, \dots, s_m$  son funciones de los datos.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n^2} \frac{dn}{dt}$$



$$\frac{z}{v} = \frac{H}{v^2}$$

Los tres pasos de la solución son:

$$z = \frac{H}{v^2}$$

La condición inicial  $z$  se toma arbitraria. La diferencia de alturas  $z$  es función sólo de la velocidad inicial  $v$ , si la altura  $z$  no entra dentro de la ecuación de movimiento. Sea  $z = \frac{H}{v^2}$  -  $z$  una función de la velocidad inicial  $H(v)$  el incremento en la altura correspondiente a alguna velocidad inicial  $v$ . Luego  $H(v)$  es lo que se debe de encontrar. La solución del problema es:

$$z = \frac{H}{v^2}$$

$$z + H(v) = \frac{H}{v^2}$$

$$z = \frac{H}{v^2} - H(v)$$

Para encontrar una relación implícita que envuelva  $H(v)$  consideremos dos problemas con condiciones iniciales ( $z_1, v_1$ ) y ( $z_2, v_2$ ). Si suponemos que  $z_1$  y  $z_2$  son muy cercanos a la ecuación es:

$$z = \frac{H}{v^2}$$

$$z = \frac{H}{v^2}$$

$$H(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} \right)$$

donde

es el tiempo requerido para pasar de  $t_1$  a  $t_2$ . La relación que debe satisfacer  $H(v)$  es:

$$H(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} \right)$$

usando las ecuaciones

$$H(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} \right)$$



<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=FR style='font-family:Arial;color:blue; mso-ansi-language:FR'>se <span class=Spelle>tiene</span>: <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=FR style='font-family:Arial;color:blue; mso-ansi-language:FR'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=GramE><span lang=FR style='font-family: Arial;mso-ansi-language:FR'>H</span></span><span lang=FR style='font-family: Arial;mso-ansi-language:FR'>v<sub>1</sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>@</span></span></span><span lang=FR style='font-family:Arial;mso-ansi-language:FR'> v<sub>1</sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>D</span></span><span lang=FR style='font-family:Arial;mso-ansi-language: FR'>t + H[v<sub>1</sub>-(g + kv<sub>1</sub><sup>2</sup>)</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'>D</span></span><span lang=FR style='font-family:Arial;mso-ansi-language: FR'>t<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:174pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window"> <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image042.wmz" o:title=""/> </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml> <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477912"> </o:OLEObject> </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la cual en </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family: Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue; mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>t </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>@</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0 es:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window"> <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image044.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477913">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Resolviendo  
la ecuación</span><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:174pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image042.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477914">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'>tenemos<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:156.75pt;height:33pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image046.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477915">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Resolviendo  
la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:72.75pt;height:30pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image044.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477916">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'>tenemos<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:156pt;height:33pt' o:ole="">

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

Como se ha visto de lo anterior los problemas de control óptimo se pueden transformar en problemas de optimización con respecto a una combinación de variables de estado. Esto se hace con la introducción de una nueva variable  $x_{n+1}$  que convierte el problema de control óptimo en una optimización de esta nueva coordenada.

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

En general un problema de control óptimo se puede transformar en un problema de minimizar o maximizar una función:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

La estrategia de control que maximiza o minimiza esta función es una estrategia de control óptimo.

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En la ecuación<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:96pt;height:17.25pt' o:ole="" fillcolor="window"><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image052.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477919"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole=""><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image055.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477920"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'> </span><span class=GramE>es</span> un vector de estado del<span style='mso-spacerun:yes'> </span>sistema bajo consideración y <sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054" type="#\_x0000\_t75" style='width:9.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image057.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477921"></o:OLEObject></xml><![endif]></sub><span style='mso-spacerun:yes'> </span>es un vector columna que depende de las coordenadas a ser maximizadas o minimizadas.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En términos de las componentes del vector de estado <sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055" type="#\_x0000\_t75" style='width:9pt;height:12pt' o:ole=""><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image058.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477922"></o:OLEObject></xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></sub><span style='mso-spacerun:yes'> </span>la función de <span class=Spelle>Pontryagin</span> se puede expresar como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:62.25pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477923">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Se puede dar una interpretación geométrica simple del principio del máximo que es: Se elige el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> de tal forma que el vector de estado <span class=GramE>x</span><span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>  
se mueva lo más rápido en la dirección de -b y luego la función de <span class=Spelle>Pontryagin</span> toma un valor mínimo.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Supongamos que el proceso de control bajo consideración está caracterizado por la ecuación:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477924">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Lo que se desea es determinar una estrategia de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> tal que la función de <span class=Spelle>Pontryagin</span> de

la ecuación

&nbsp;



$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x)$$

se minimice o maximice.

&nbsp;

Intuitivamente la función de Pontryagin puede maximizarse o minimizarse, maximizando o minimizando la energía del sistema. Esta intuición física nos lleva a la especulación de que debe de existir una función de energía tal que su maximización implique la minimización de la función de Pontryagin.

Para esto introduciremos el concepto físico de Hamiltoniana y la podemos definir como la suma de la energía cinética y la energía potencial del sistema y se expresa como el producto interno de los vectores de momento y coordenadas del sistema. La simplicidad de la función de Hamilton nos lleva a pensar que la maximización de ella puede implicar la minimización de la función de Pontryagin y que el empleo de la Hamiltoniana nos lleva a método simple y elegante de resolver problemas de optimización.

&nbsp;

El principio del máximo establece que si el vector de control  $m$  es óptimo, es decir optimiza la función de Pontryagin

, la Hamiltoniana  $H(x, m, t)$  se optimiza con respecto a  $m$  bajo el intervalo de control.

$$La\ Hamiltoniana\ está\ definida\ como:$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

donde  $x$  es el vector de estado,  $p$  es el vector de momento y el vector función está definido por la ecuación

$$p = -i\hbar \nabla$$

anterior establece que máxima  $H$

$$H_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m} + V(x_{max})$$

y mínima  $H$

$$H_{min} = \frac{p_{min}^2}{2m} + V(x_{min})$$

$\frac{1}{m} \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{F}$

Para aplicar el principio del máximo en la solución del problema de control óptimo comenzamos con la minimización de  $H$  con respecto a  $\mathbf{u}$ . Esto resulta en un vector óptimo de control como una función del vector de momento  $\mathbf{p}$ . El vector óptimo de control se sustituye en las ecuaciones canónicas de Hamilton y el problema de valor de frontera se resuelve para la trayectoria óptima.

El vector óptimo de control como función del vector de momento  $\mathbf{p}$  está definido como la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales:

donde:



<sub>i</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family: Arial'>(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) = -<span class=Spelle>b<sub>i</sub></span><sub><o:p></o:p></sub></span></p>

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Usando estas dos ecuaciones reducimos las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1065" type="#\_x0000\_t75" style='width:54.75pt;height:17.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image061.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1065" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477932">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><!--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1066" type="#\_x0000\_t75" style='width:126pt;height:32.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image067.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1066" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477933">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><!--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>a la forma canónica de Hamilton:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1067" type="#\_x0000\_t75" style='width:38.25pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image073.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1067" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477934">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]><!--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1068" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image075.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1068"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477935">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Estas ecuaciones canónicas están sujetas a la condición de frontera en <span class=SpellE>x<sub>i</sub></span>( <span class=SpellE>t<sub>o</sub></span>) y <span class=SpellE>p<sub>i</sub></span>( <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>), esto es:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1069" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image077.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1069"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477936">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><span style='color:fuchsia'><o:p></o:p></span></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1070" type="#\_x0000\_t75" style='width:105.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image079.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1070"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477937">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><span style='color:fuchsia'><o:p></o:p></span></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La interpretación física del principio del máximo se puede dar como sigue: la Hamiltoniana H es el producto interno de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b> y <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f</b> o de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b> y <sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1071" type="#\_x0000\_t75" style='width:9.75pt;height:12pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image081.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.2" ShapeID="\_x0000\_i1071"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477938">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></sub><span style='mso-spacerun:yes'> </span>que representa la energía cuando <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b> se identifica como un momento. <span class=GramE>luego</span> para minimizar </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> se maximiza la potencia y cuando </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es un mínimo H es un máximo. El proceso es maximizar H con respecto a m, sustituir el vector óptimo de control <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b><sup>o</sup></span>(p) en las ecuaciones canónicas y resolver el problema de frontera para la trayectoria óptima <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t) y el vector de momentos <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b>(t) sujeto a las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1072" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image077.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1072" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477939">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1073" type="#\_x0000\_t75" style='width:104.25pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image083.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1073" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477940">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Con la trayectoria óptima <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b></span>(t)

y el vector de momento  $\vec{p}$  conocidos, se puede establecer la estrategia de control  $\vec{u}$ .

La función de Pontryagin dada en la ecuación

$$H(\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}) = -\frac{1}{2} \vec{u}^T \vec{u} + \vec{p}^T \vec{f}(\vec{x}, \vec{u})$$

la condición de frontera dada en la ecuación

$$\vec{p}(t_f) = \vec{\lambda}(t_f)$$

es válida para el proceso de control con estado final libre.

Cuando el estado final del proceso está restringido por:

$$\vec{x}(t_f) = \vec{x}_f$$

R

Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>[</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>]</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> = 0<span style='mso-spacerun:yes'></span>k = 1, 2,..., n<o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la función de <span class=Spelle>Pontyagin</span> toma la forma:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=EN-GB style='font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'> = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>b</b>' <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(<span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) + </span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></b><span lang=EN-GB style='font-family:Arial;mso-ansi-language:EN-GB'>' <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>R</b></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=EN-GB style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:EN-GB'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=Grame><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>m</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es un multiplicador de Lagrange.<o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Las ecuaciones canónicas están sujetas a las condiciones de frontera:<o:p></o:p></span></p><p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1075" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image085.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1075" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477942"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1076" type="#\_x0000\_t75" style='width:129pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image087.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1076" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477943"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>con el estado final <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><span class=Spelle>t<sub>f</sub></span> restringido por la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1077" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="princpontryagin\_archivos/image085.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1077" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477944"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En general el principio del máximo nos da una condición necesaria para la

optimización de sistemas, si el proceso de control es lineal y sujeto a una función de control aditiva. Cuando el proceso está caracterizado por:

&nbsp;

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde  $K_p$  es la ganancia de control,  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la frecuencia natural.

El control óptimo se obtiene al minimizar la función de costo:

&nbsp;

El principio de optimización de sistemas se basa en la condición suficiente y necesaria para el control óptimo.

&nbsp;



### 3.170 CONTROL OPTIMO. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN. INTRODUCCION. MARCO 4g

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">Página Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
<td width="172"><a href=" ../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la Página Principal </td>
```

```

</tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="788" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO & middot; PRINCIPIO DE PONTRYAGIN
</div></td>
 </tr>
 </table>
 <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
 <tr bgcolor="#FFE6FF">
 <td width="396" height="18" valign="top"><div align="center">Pincipio Optimal de Pontryagin
</div></td>
 <td width="393" valign="top"><div align="center">Prueba del Principio de Pontryagin
</div></td>
 </tr>
 </table>
 <p> </p>
 <p> </p>
 <p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.171 CONTROL OPTIMO. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD DE PONTRYAGIN. PRUEBA DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="pruebprincpontryagin_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="pruebprincpontryagin_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="pruebprincpontryagin_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PRUEBA DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
 <o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
 <o:Template>Normal</o:Template>
 <o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>

```

```

<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>8</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:36:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T15:44:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>500</o:Words>
<o:Characters>2756</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>22</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3250</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;
text-autospace:none;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE

```

```

 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:36.0pt;
 mso-footer-margin:36.0pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:red'>PRUEBA DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>El principio del m´ximo
se puede probar de varias formas. Veremos una prueba relativamente simple del principio de
Pontryagin. La prueba comenzar´ con determinar la
variaci´n de la funci´n de Pontryagin
<span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;
mso-symbol-font-family:Symbol'>d<span lang=ES-TRAD
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:
Symbol'><span
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-
family:Symbol'>r debida a la variaci´n de la variable
de estado <span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span

```

d

y a un cambio en la se&ntilde;al de control de n-&eacute;simo orden caracterizado por:

&nbsp;

donde

es el vector de estado de  $nx1$  y  $bx1$  es el vector de control de  $rx1$ .

justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Como es usual la funci&oacute;n de <span class=SpellE>Pontryagin</span> se escribe como:</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:32.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image003.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014344">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> la Hamiltoniana para el sistema es:</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:105.75pt;height:32.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image005.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]>

<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014345">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La variaci&oacute;n

</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> como una funci&oacute;n de </span><span







justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego la variaci&oacute;n de la funci&oacute;n de <span class=SpellE>Pontryagin</span> debida a los cambios en <span class=SpellE>x</span><sub>i</sub></span> y <b style='mso-bidi-font-weight: normal'>m</b> es:</span></p></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:260.25pt;height:38.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image015.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]><![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014350"></o:OLEObject></xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La expansi&oacute;n en serie de Taylor con respecto a x nos da:</span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:249pt;height:66.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image017.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<!--[if !vml]><![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014351"></o:OLEObject></xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

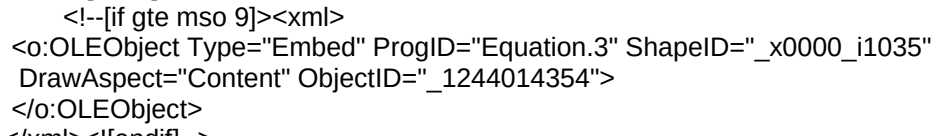
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align: justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Empleando la relaci&oacute;n:</span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:153.75pt;height:32.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014352">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'> de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:260.25pt;height:38.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014353">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>convertimos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> a:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:243pt;height:104.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>

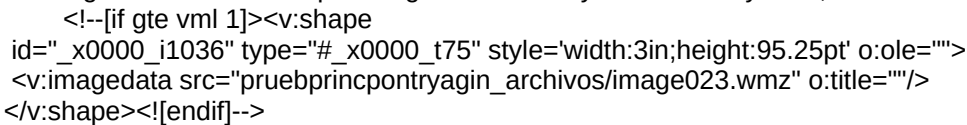


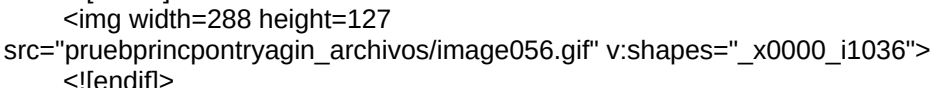


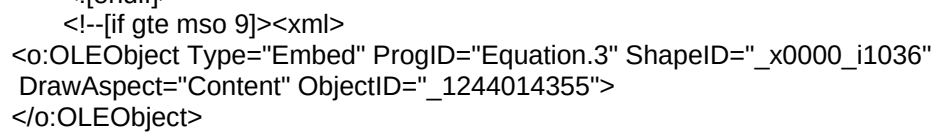
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Reagrupando:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>





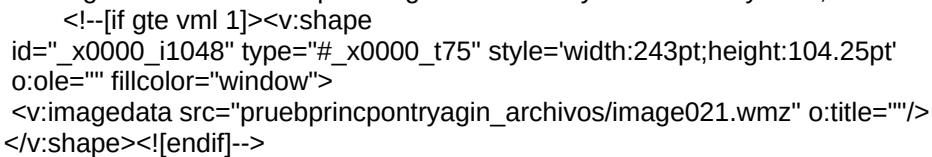


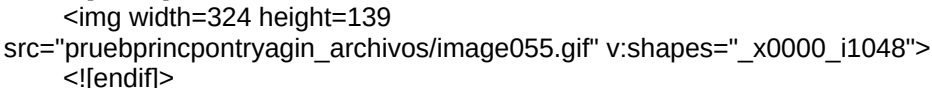
<o:p></o:p></span></sub></p>

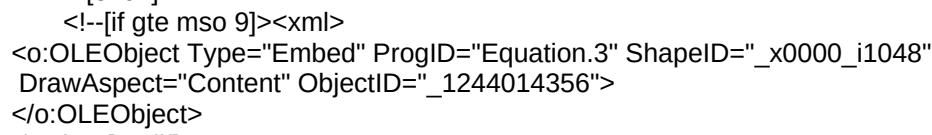
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En vista de la ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>







</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> definiendo q como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>



id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:3in;height:65.25pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="pruebprincpontryagin\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014357">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> <span class=GramE>se</span> puede expresar como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:188.25pt;height:27pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="pruebprincpontryagin\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014358">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Para probar que el principio de m&acute;ximo nos provee de una condici&acute;n suficiente y necesaria para que el vector <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> minimice la funci&acute;n de <span class=Spelle>Pontryagin</span>, se necesita mostrar que al final se puede encontrar un vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> tal que si la Hamiltoniana no es un m&acute;ximo se viola la condici&acute;n de m&iacute;nimo <span class=GramE>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>. Es de notar que la condici&acute;n de la funci&acute;n de <span class=Spelle>Pontryagin</span> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:

Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> sea un m&iacute;nimo para cualquier cambio peque&ntilde;o </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>m</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> del vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup3;</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> 0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si asumimos que la condici&oacute;n de m&aacute;ximo para H no se satisface durante un peque&ntilde;o intervalo (<span class=SpellE>t<sub>a</sub></span>, <span class=SpellE>t<sub>b</sub></span>) que cae dentro del intervalo (t<sub>0</sub>, <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>). <span class=GramE>luego</span> para cualquier peque&ntilde;a variaci&oacute;n </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>m</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> el vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:138.75pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="pruebprincpontryagin\_archivos/image029.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014359"></o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'> t cae dentro del intervalo (<span class=SpellE>t<sub>a</sub></span>, <span class=SpellE>t<sub>b</sub></span>) y </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>a</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> = <span class=SpellE>cte</span> &gt; 0.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Escogemos un vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> con estas propiedades. Durante el intervalo (<span class=SpellE>t<sub>a</sub></span>, <span class=SpellE>t<sub>b</sub></span>) <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> puede variarse en una peque&ntilde;a cantidad </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'>m</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> y fuera de este intervalo <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> permanece constante. Con este vector de control la variaci&acute;n </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> dada en la ecuaci&acute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:188.25pt;height:27pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="pruebprincpontryagin\_archivos/image027.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014360">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:284.25pt;height:38.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014361">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si ambas </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'>d</span></span></span><b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>m y </span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span></span><b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>x</span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> son  
peque&ntilde;as el segundo t&eacute;rmino del lado derecho de la ecuaci&oacute;n se  
desprecia y q es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:204pt;height:47.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image033.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014362">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;

color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La expansi&oacute;n en series de Taylor de <span class=SpELE><sub>i</sub></span> (<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> + </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>m</span></b></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> da:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:210pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014363"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>si</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>m es muy peque&ntilde;o la ecuaci&oacute;n anterior es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:192.75pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image037.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]-->



<![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014364">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!-->  
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego q est&aacute; dada  
 por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:164.25pt;height:38.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image039.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014365">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!-->  
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En vista de la ecuaci&oacute;n  
 anterior y las propiedades de este vector de control:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:128.25pt;height:38.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014366">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!-->  
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>combinando</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> las ecuaciones<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:284.25pt;height:38.25pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014367">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
 color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
 text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:128.25pt;height:38.25pt'
 o:ole="">
 <v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image041.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014368">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
 color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
 text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
 id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:192pt;height:38.25pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="pruebprinpontryagin\_archivos/image043.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014369">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;

color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es &lt; 0 si el primer t&eacute;rmino es &gt; 0 y el valor del segundo t&eacute;rmino es menor que el primero.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Esto implica que para este vector particular </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> no es m&iacute;nimo para </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>d</span></span><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>m </span></b><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0. Si la condici&oacute;n m&aacute;xima H no se satisface y por lo tanto es condici&oacute;n necesaria.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 </div></td>  
 </tr>  
 </table>  
 </body>  
 </html>

### 3.172 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES. INTRODUCCION

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="contoptproclin_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="contoptproclin_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="contoptproclin_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
```

```

w\.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>5</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:26:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-07-01T20:42:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>230</o:Words>
<o:Characters>1268</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>10</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1496</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
{margin-top:0cm;
margin-right:0cm;
margin-bottom:6.0pt;
margin-left:0cm;
mso-pagination:none;
mso-layout-grid-align:none;
punctuation-wrap:simple;

```

```

 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>CONTROL OPTIMO DE PROCESOS
LINEALES<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p> </o:p></p>

```

Consideremos un simple proceso linealcaracterizado por:

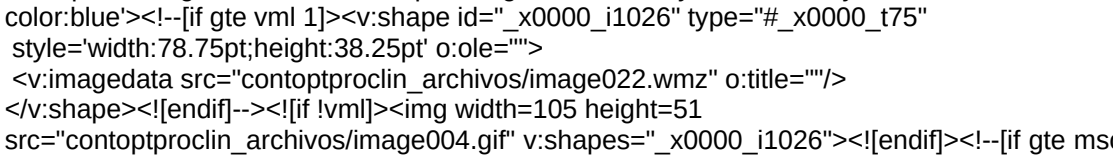
$$y = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

donde  $x$  a  $y$  son constantes positivas.

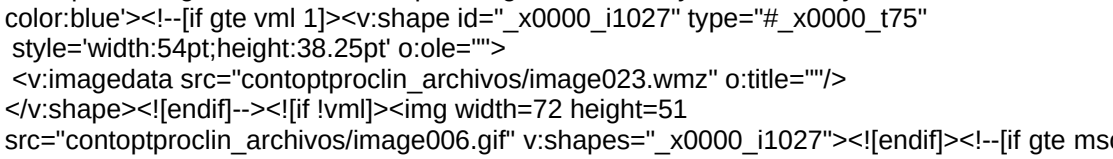
El estado inicial del proceso es:  $x(0) = 0$  y la señal de control está restringida por  $|x(k)| \leq 1$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$

m

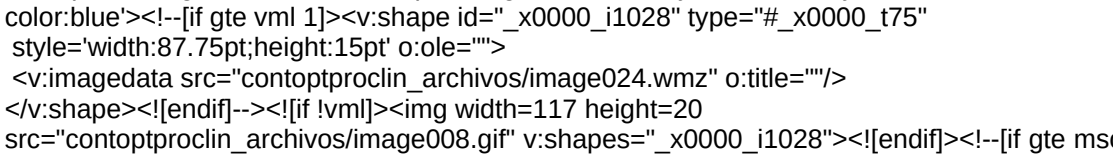
M. Determinar la señal de control m que minimice:



Sea  $x^2 + y^2 = 1$  la nueva coordenada  $x$  sea:



La función de Pontryagin:



donde

$$b = 0 \text{ y } b = 1.$$

text-align:justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El problema de control óptimo se redujo a determinar una señal m tal que la función </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>r</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> sea mínima. La Hamiltoniana:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:159pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contoptproclin\_archivos/image025.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809695">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>para</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> aplicar el principio del mínimo la Hamiltoniana del sistema se maximiza con respecto a m. Se sigue que la H es un máximo si el signo de control m es el mismo que el de p<sub>1</sub> y su magnitud es el valor máximo posible de M, así que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:black'>m = M <span class=SpellE>sgn</span> p<sub><o:p></o:p></sub></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde <span class=SpellE>sgn</span> es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:89.25pt;height:47.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contoptproclin\_archivos/image026.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809696">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Las





<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Sustituyendo la condición de máxima Hamiltoniana en las ecuaciones canónicas tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><sub><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:122.25pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="contoptproclin\_archivos/image030.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809700"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></sub><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Las ecuaciones de frontera conocidas por estas dos ecuaciones son:  $x^{1(t_0)} = x^{10}$  y  $\langle \text{span class=SpellE} \langle \text{span class=GramE} p \langle \text{sub} \rangle i \langle \text{sub} \rangle \langle \text{span} \rangle \langle \text{span} \rangle \langle \text{span class=GramE} \langle \text{span class=SpellE} \langle \text{sub} \rangle f \langle \text{sub} \rangle \langle \text{span} \rangle \rangle = 0$ . Este es un problema doblemente valuado en la frontera con dos condiciones de frontera. Resolvemos las últimas ecuaciones para x y p con las condiciones de frontera y encontramos m.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------

<p class=MsoNormal align=left style='text-align:left'><span style='mso-bidi-font-size:12.0pt'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

### 3.173 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES. INTRODUCCION. MARCO 4h

```
<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
```

```

 margin-bottom: 0px;
 }
 .style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
 }
 a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
 }
 a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
 }
 a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
 }
 a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
 .style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
 }
 .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
 }
 .style19 {font-size: 10px}
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
 <tr>
 <td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
 <td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
 </tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="788" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO · CONTROL OPTIMO DE PROCESOS
LINEALES </div></td>
 </tr>
 </table>
 <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
 <tr bgcolor="#FFE6FF">
 <td width="396" height="18" valign="top"><div align="center">Control Optimo de Procesos Lineales
</div></td>

```

```
 <div align="center">Principio del Máximo en Sistemas Discretos </div></td> </tr> </table> <p> </p> <p> </p> <p> </p> </div> <p> </p> </body> </html> |
```

### 3.174 CONTROL OPTIMO. CONTROL OPTIMO DE PROCESOS LINEALES. PRINCIPIO DEL MAXIMO PARA SISTEMAS DISCRETOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="princmaxsisdiscret_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="princmaxsisdiscret_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="princmaxsisdiscret_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PRINCIPIO DEL MAXIMO PARA SISTEMAS DISCRETOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>4</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:31:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T15:35:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>190</o:Words>
<o:Characters>1045</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>8</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1233</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>

```

```

<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;

```

mso-tstyle-colband-size:0;  
mso-style-noshow:yes;  
mso-style-parent:"";  
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;  
mso-para-margin:0cm;  
mso-para-margin-bottom:.0001pt;  
mso-pagination:widow-orphan;  
font-size:10.0pt;  
font-family:"Times New Roman";}

</style>  
<![endif]-->  
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">  
| <b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:red'>PRINCIPIO DEL MAXIMO PARA SISTEMAS DISCRETOS</span></b></p> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span></span></b></p> <span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El principio del m&aacute;ximo puede aplicarse a sistema discretos de control &oacute;ptimo que se caracterizan por la ecuaci&oacute;n:</span></p> <span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span></span></p> |

src="princmaxsisdiscret\_archivos/image002.gif" v:shapes="\_x0000\_i1025">  
 <![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013740">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=right style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:right'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>con</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> i = 1, 2, ..., n, donde T es el periodo de muestreo y: <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><span class=GramE><span lang=EN-GB style='font-family:Arial;  
 color:black;mso-ansi-language:EN-GB'>x<sub>i</sub></span></span><span  
 lang=EN-GB style='font-family:Arial;color:black;mso-ansi-language:EN-GB'>k) =  
 x<sub>i</sub></span></span><span class=Spelle>kT</span></span><span class=Spelle>a<sub>ij</sub></span></span><span class=Spelle>a<sub>ij</sub></span></span><span class=Spelle>kT</span></span><span class=Spelle>m<sub>r</sub></span></span><span class=Spelle>m<sub>r</sub></span></span><span class=Spelle>kT</span></span><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=EN-GB style='font-family:Arial;color:blue;mso-ansi-language:  
 EN-GB'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Se notar&aacute; que la  
 ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
 text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:261pt;height:36.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="princmaxsisdiscret\_archivos/image001.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013741">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>  
 </span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
 justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
 color:blue'> una versi&oacute;n discreta de la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;

text-align:center"><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:201.75pt;height:32.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="princmaxsisdiscret\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013742">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'> ecuaci&oacute;n de diferencias que define el vector de momentos <b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b> es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:243.75pt;height:33.75pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="princmaxsisdiscret\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013743">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:fuchsia'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Tomando la derivada parcial  
de <span class=SpellE>f<sub>i</sub></span>(<b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b>, t) con  
respecto a <span class=SpellE>x<sub>j</sub></span>:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:50.25pt;height:30.75pt'



o:ole="">  
<v:imagedata src="prncmaxsisdiscret\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013744">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego la  
ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:243.75pt;height:33.75pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="prncmaxsisdiscret\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013745">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:  
justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'> reduce a:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:144.75pt;height:33.75pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="prncmaxsisdiscret\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244013746">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>





$$y = 1, 2, \dots, n$$

```

 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
 </div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.177 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. INTRODUCCION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="progdinbellman_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="progdinbellman_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="progdinbellman_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:44:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T15:47:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>222</o:Words>
<o:Characters>1223</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>10</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1443</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>

```

```

<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>

```

```

<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:red'>PROGRAMACION DINAMICA DE
BELLMAN<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Para introducirmos al tema
plantearemos el problema de la optimización de la producción de una industria.
Supongamos una industria con un capital de x pesos, que se equipa para producir n diferentes
productos en varias cantidades. El costo para producir una cantidad q<sub>j
</sub>es:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:188.25pt;
height:33pt' o:ole="">
<v:imagedata src="progdinbellman_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<!--[if !vml]>

<![endif]>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244014549">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->

```





justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> q<sub>j</sub></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&sup3;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0 y x es el capital inicial. La producci&oacute;n por unidad del producto j es p<sub>j</sub>. El problema es escoger q<sub>j</sub></span> tal que maximice la producci&oacute;n total:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:33pt;height:33.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="progdinbellman\_archivos/image005.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014551">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Por simplicidad supondremos que tenemos m&aacute;quinas y materiales sin l&iacute;mite para cualquier q<sub>j</sub></span>.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sea f<sub>n</sub>(x) la m&aacute;xima producci&oacute;n total, luego:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:21pt' o:ole=""><v:imagedata src="progdinbellman\_archivos/image007.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014552">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si producimos s&oacute;lo un producto:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:71.25pt;height:21pt' o:ole=""><v:imagedata src="progdinbellman\_archivos/image009.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014553">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

</span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;&nbsp; </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>j = 1<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x = (a<sub>1</sub> + b<sub>1</sub> + c<sub>1</sub><span class=GramE>)q<sub>1</sub></span> + k<sub>1</sub><o:p></o:p></sub></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="progdinbellman\_archivos/image011.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014554">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Si el capital inicial es mayor que el costo fijo, la m&aacute;xima producci&oacute;n ser&aacute;a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1031" type="#_x0000_t75" style='width:84pt;height:30pt' o:ole="">
<v:imagedata src="progdinbellman_archivos/image013.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244014555">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Si la fábrica
manufactura dos productos la producción máxima
será:</o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:369.75pt;height:36pt' o:ole="">
<v:imagedata src="progdinbellman_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244014556">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
</sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>si<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:126.75pt;height:30pt' o:ole="">
<v:imagedata src="progdinbellman_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244014557">
</o:OLEObject>

```

```

</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></sub></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>así<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'> que por inducción para n se tiene:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:144.75pt;height:26.25pt'
o:ole="">
 <v:imagedata src="progdinbellman_archivos/image019.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1034"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244014558">
 </o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 </sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
 lang=ES-TRAD
 style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'>que<span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'> se emplea para tener la política ópima de
producción.<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.176 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. INTRODUCCION. MARCO 4i

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {

```

```

 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
 }
 a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
 }
 a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
 }
 a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
 }
 a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
 }
 .style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
 }
 .style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
 }
 .style19 {font-size: 10px}
 .style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight: bold; }
 -->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
 <tr>
 <td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
 <td width="172"><a href=" ../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
 </tr>
</table>
<div align="left">
 <table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
 <tr>
 <td width="788" background=" ../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO · PROGRAMACION DINAMICA
</div></td>
 </tr>
 </table>
 <table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
 <tr bgcolor="#FFE6FF">
 <td width="174" height="18" valign="top"><div align="center">Programación Dinámica
</div></td>

```

<a href="princptimalidad.htm" target="mainFrame">Principio de Optimalidad</a>	<a href="ecuahamiltonjacobi.htm" target="mainFrame">Ecuaci&amp;oacute;n de Hamilton-Jacobi</a>	<a href="probbasoptimizacion.htm" target="mainFrame">Problema B&amp;aacute;sico de Optimizaci&amp;oacute;n</a>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

&nbsp;

&nbsp;

&nbsp;

### 3.177 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="princptimalidad_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="princptimalidad_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="princptimalidad_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>3</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:47:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-22T15:50:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>413</o:Words>
<o:Characters>2272</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>18</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>

```

```

<o:CharactersWithSpaces>2680</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
 <w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
 <w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
 <w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
 <w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
 <w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
 <w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
 </w:Compatibility>
 <w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>

```

```

<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]>
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial;color:red'>PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Introduciremos el principio de
optimalidad. Como vimos en el caso anterior la ecuación funcional que describe un
proceso de decisión multietapas se puede derivar invocando el principio de optimalidad.
Para comenzar consideremos una decisión de un simple estado. Sea <b style='mso-
bidi-font-weight:normal'>x el vector de control que caracteriza a un sistema físico en
cualquier tiempo. Consideremos que el vector de estados <b style='mso-bidi-font-
weight:normal'>x es un vector columna de k dimensiones. Si el estado del sistema
físico es transformado de x₁ a x₂ por la
transformación:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:
Arial'>x₂ =
g(x₁, m₁)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:
justify'>Esta operación nos
lleva a una salida o retorno:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><span
lang=ES-TRAD
style='font-family:Arial'>R₁=
r(x₁, m₁)<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:center'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>

```



El problema es escoger una decisi<sup>o</sup>n m<sup>1</sup> tal que maximice el retorno. El retorno m<sup>a</sup>ximo est<sup>a</sup> dado por:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \prod_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \prod_{r=1}^m \sum_{s=1}^n \prod_{t=1}^m \sum_{u=1}^n \prod_{v=1}^m \sum_{w=1}^n \prod_{x=1}^m \sum_{y=1}^n \prod_{z=1}^m \sum_{\substack{1 \\ 2}}^n$$

La decisi<sup>o</sup>n que nos lleva al m<sup>a</sup>ximo valor de retorno es una decisi<sup>o</sup>n &acute;p<sup>t</sup>ima.

En un proceso de decisi<sup>o</sup>n de dos etapas si el estado del sistema f<sup>i</sup>sico es primero transformado de x<sup>1</sup> a x<sup>2</sup> por la transformaci<sup>o</sup>n de la ecuaci<sup>o</sup>n:

justify"><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>2</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> = g(x<sub>1</sub>, m<sub>1</sub>)<span style='color:blue'><o:p></o:p></span></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> luego es transformado<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>de x<sub>2</sub>a x<sub>3</sub> por la transformaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>x<sub>3</sub></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> = g(x<sub>2</sub>, m<sub>2</sub>)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> secuencia de operaci&oacute;n resulta en un retorno total:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>R<sub>2</sub> = r(x<sub>1</sub>, m<sub>1</sub>) + r(x<sub>2</sub>, m<sub>2</sub>)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>luego</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> el problema de dise&ntilde;o &oacute;ptimo es elegir una secuencia de posibles decisiones m<sub>1</sub> y m<sub>2</sub> tal que<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>maximicen el retorno total. Este es un proceso de decisi&oacute;n donde r(x<sub>1</sub>, m<sub>1</sub>) es el retorno para el cual se elige una decisi&oacute;n y r(x<sub>2</sub>, m<sub>2</sub>) es el retorno para la segunda decisi&oacute;n.<o:p></o:p></span></p>

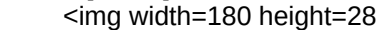
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Esta secuencia de decisiones m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub> se refiere a tener una pol&iacute;tica de dos estados. El retorno m&aacute;ximo est&aacute; dado por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:135pt;height:21pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="princptimalidad\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 width=180 height=28  
src="princptimalidad\_archivos/image004.gif" v:shapes="\_x0000\_i1026">  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014745">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El retorno total se maximiza bajo la pol&iacute;tica ( $m_1$ ,  $m_2$ ). <span class=GramE>la</span> pol&iacute;tica que maximiza  $R_2$  es una pol&iacute;tica &oacute;ptima.</span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En general para un proceso de decisi&oacute;n de n estados el problema fundamental es escoger una pol&iacute;tica de n etapas { $m_1$ ,  $m_2$ ,..., <span class=SpellE> $m_n$ </span>} que maximice el retorno total:</span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:72.75pt;height:33.75pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="princptimalidad\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 width=97 height=45  
src="princptimalidad\_archivos/image006.gif" v:shapes="\_x0000\_i1027">  
<![endif]>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244014746">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>El estado del sistema es transformado del  $x_1$  a  $x_2$  por la transformaci&oacute;n:</span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> $x_2$ </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'> =  $g(x_1, m_1)$ </span></p>





### 3.178 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. ECUACION DE HAMILTON-JACOBI

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuahamiltonjacobi_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuahamiltonjacobi_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuahamiltonjacobi_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>ECUACION DE HAMILTON-JACOBI</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:50:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:21:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>252</o:Words>
<o:Characters>1386</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>11</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1635</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
```

```

</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>

```

```

<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
 <td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>ECUACION DE HAMILTON-
JACOBI<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Aplicando
el principio de optimalidad el problema de control óptimo se puede reducir a
una solución de la ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>Como
se vio en la parte de Mecánica Clásica se usa <sub><!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:36.75pt;
height:15pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi_archivos/image027.wmz" o:title="">
</v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--><!--[if
gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"

```



$$S(q, t) = \int_{q_0}^q \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt$$

De acuerdo con el principio de Hamilton el sistema se mueve del estado inicial  $q_0$  a un estado  $q$  en el tiempo  $t$ , de tal forma que se minimice la integral de la Lagrangiana:

$$S(q, t) = \int_{q_0}^q \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt$$

Sea el valor mínimo de la integral anterior denotado por:  $S(q, t)$ , luego:

$$S(q, t) = \int_{q_0}^q \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt$$

Aplicando el principio de optimalidad al punto inicial  $(q_0, t_0)$  tenemos:

$$S(q, t) = \int_{q_0}^q \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) dt$$

style='width:3in;height:60.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image030.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477238">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Expandiendo  
en series de Taylor tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>&nbsp;</span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:195pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477239">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]><o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>si  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:  
Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:  
Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-  
family:Symbol'>@</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0 tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75"  
style='width:116.25pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image032.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]><![if !vml]><![endif]><!--[if  
gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477240">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:

.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego la condición para que la integral sea un mínimo es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:59.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image033.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477241">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b><sub>0</sub> se define como el vector momento en  $t = t_0$ .<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego aplicando el principio de optimalidad a cualquier punto ( $q$ ,  $t$ ) en la trayectoria se deriva:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:207.75pt;height:60.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image034.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477242">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol; mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:

Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es un pequeño intervalo de tiempo<span style='mso-spacerun:yes'> </span>y el proceso de minimización se lleva en dos etapas. Siguiendo el procedimiento anterior reducimos lo anterior a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:167.25pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image035.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477243"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>en el límite cuando </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>@</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0 se tiene:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:102.75pt;height:33pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image036.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477244"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>que nos lleva a las siguientes dos ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:80.25pt;height:59.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image037.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477245"></o:OLEObject>

</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Por definición del vector momento:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:33.75pt;height:29.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image038.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477246">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y la función de Hamilton:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial'>H(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>p</b>,<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>q</b>, t) = <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>pq</b></span>

- L<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y la ecuación se puede escribir como:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:87.75pt;height:33pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonjacobi\_archivos/image039.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244477247">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es la ecuación diferencial de Hamilton.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</td>

</tr>

</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman"; mso-ansi-language:ES-MX'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

</div>

</body>

</html>

```

### 3.179 CONTROL OPTIMO. PROGRAMACION DINAMICA DE BELLMAN. EL PROBLEMA BASICO DE OPTIMIZACION

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="probbasoptimizacion_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="probbasoptimizacion_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="probbasoptimizacion_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>EL PROBLEMA BASICO DE OPTIMIZACION</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez Silva</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>4</o:Revision>
<o:TotalTime>38</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-22T15:53:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-28T00:43:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>470</o:Words>
<o:Characters>2587</o:Characters>
<o:Company>CCADET UNAM</o:Company>
<o:Lines>21</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3051</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:Zoom>91</w:Zoom>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>9,35 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>

```

```

<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
p.MsoBodyText, li.MsoBodyText, div.MsoBodyText
 {margin-top:0cm;
 margin-right:0cm;
 margin-bottom:6.0pt;
 margin-left:0cm;
 mso-pagination:none;
 mso-layout-grid-align:none;
 punctuation-wrap:simple;
 text-autospace:none;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:595.3pt 841.9pt;
 margin:70.85pt 70.9pt 70.85pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;

```

```

 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="2050"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
 <o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>EL PROBLEMA BASICO DE
OPTIMIZACION</p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'>El
problema es escoger x(t) tal que el
valor de la integral de criterio:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify'><span
lang=ES-TRAD
style='font-
family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:
.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;
color:blue'><!--[if gte vml
1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:66pt;
height:36pt' o:ole="">
<v:imagedata src="probbasoptimizacion_archivos/image037.wmz" o:title="">

```



</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478716">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
Arial;color:blue'>sea</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:  
Arial;color:blue'> mínima.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En  
esta ecuación F es una función continua y x es diferenciable y satisface la  
condición<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial'>x(</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-family:Arial'>t<sub>0</sub></span> = x<sub>0</sub> y x(<span  
class=Spelle>t<sub>f</sub></span>) = <span  
class=Spelle>x<sub>f</sub></span><sub>. <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Geoméricamente  
el problema es determinar la trayectoria <span class=GramE>x(</span>t) que  
conecta los puntos (x<sub>0</sub>, t<sub>0</sub>) y (x<sub>f</sub>, t<sub>f</sub>), tal que la integral a lo largo de  
la curva de alguna función dada F sea mínima.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Sea  
f(x, t) el mínimo de Y respecto a x. Con los límites inferiores de  
integración reemplazados por la variable independiente t. luego:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;  
text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-  
family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:  
.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;  
color:blue'><span style='position:relative;top:14.0pt;mso-text-raise:-14.0pt'><!--[if gte vml  
1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:33.75pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image039.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478717">

</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>donde el mínimo se toma bajo todas las x en  $t = t_{\text{sub}0}$ </sub><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:5.0pt;mso-text-raise:-5.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:47.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image041.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478718"></o:OLEObject></xml><![endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La ecuación () resulta del embebecimiento invariante. Consideramos que la función  $f(x, t)$  posee primera y segunda derivadas continuas. La minimización se hará respecto a la derivada de x ya que si la integral es mínima respecto a ella, lo será respecto de x. Luego la función mínima  $f(x, t)$  se puede determinar de:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:14.0pt;mso-text-raise:-14.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:33.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image043.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478719"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></sub></p>  
<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

[illegible]

&nbsp;

invocando al principio de optimalidad llegamos a la ecuación funcional:

&nbsp;

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

donde:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

&nbsp;

En el lado derecho de la ecuación el primer término representa el valor de la integral durante el intervalo  $D$  y el segundo término denota el valor mínimo de la integral durante el intervalo  $(t$

lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>, <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span>).

Si </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>®</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> 0 la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:15.0pt;mso-text-raise:-15.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:185.25pt;height:35.25pt;o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image051.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478723"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>se reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:8.0pt;mso-text-raise:-8.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:195.75pt;height:18pt;o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image052.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><!--[endif]--></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478724"></o:OLEObject></xml><!--[endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

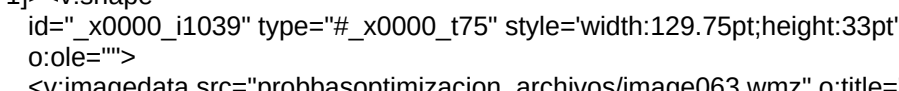
<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:15.0pt;mso-text-raise:-15.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:152.25pt;height:35.25pt;o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image054.wmz" o:title=""></v:shape><!--[endif]--><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478725">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></sub></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la  
 integral de t a t + </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='mso-spacerun:yes'> </span>se sustituye por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:5.0pt;mso-text-raise:-5.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:44.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image055.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478726">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>con</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> un error del orden de </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>e</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>). La expansión en series de Taylor da:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:13.0pt;mso-text-raise:-13.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:177pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image057.wmz" o:title="">  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478727">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></sub></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Luego el mínimo de Y está dado por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><span style='position:relative;top:14.0pt;mso-text-raise:-14.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:233.25pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image059.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478728">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></sub></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>La cual se reduce a:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><span style='position:relative;top:14.0pt;mso-text-raise:-14.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:161.25pt;height:33pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image061.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478729">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></p></o:p></span></sub></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></sub></p>  
 <p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>En el límite cuando </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span

D

0 la ecuación

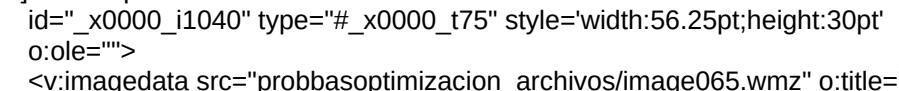
&nbsp;



&nbsp;

Ahora el problema de minimización se puede determinar aplicando cálculo. Tomando las parciales de las funciones entre corchetes de la ecuación con respecto a la derivada nos dan la condición para un mínimo:

&nbsp;



&nbsp;

Diferenciando la ecuación respecto de t:

&nbsp;





</xml><![endif]><o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>la ecuación<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:13.0pt;mso-text-raise:-13.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:117.75pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image001.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478735"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>se reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:13.0pt;mso-text-raise:-13.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image073.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478736"></o:OLEObject></xml><![endif]><o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:fuchsia'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>Combinando las ecuaciones <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><span style='position:relative;top:13.0pt;mso-text-raise:-13.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:56.25pt;height:30pt' o:ole=""><v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image075.wmz" o:title=""></v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478737">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--></span></sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>y

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><span style='position:relative;top:13.0pt;mso-text-raise:-13.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:105pt;height:30.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image002.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478738">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>llegamos</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> a la condición necesaria para que la integral Y sea un mínimo.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><sub><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><span style='position:relative;top:13.0pt;mso-text-raise:-13.0pt'><!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:68.25pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="probbasoptimizacion\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></span><!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244478739">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></sub></p>

<p class=MsoBodyText align=center style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt;text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoBodyText style='margin-bottom:0cm;margin-bottom:.0001pt; text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Arial;color:blue'> es la ecuación de <span class=SpellE>Euler</span>-Lagrange.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</td>

```

</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.180 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. INTRODUCCION.

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="contminimaint_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="contminimaint_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="contminimaint_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL DE MINIMA INTEGRAL</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>10</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-28T23:58:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-29T00:08:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>322</o:Words>
<o:Characters>1777</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>14</o:Lines>
<o:Paragraphs>4</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2095</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>

```

```

<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
 <w:BreakWrappedTables/>
 <w:SnapToGridInCell/>
 <w:WrapTextWithPunct/>
 <w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 text-align:justify;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 mso-bidi-font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpelliE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

```

```

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>CONTROL DE MINIMA
INTEGRAL</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Consideremos el sistema caracterizado por la ecuación
diferencial:</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:57.75pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="contminimaint_archivos/image001.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<!--[if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244562894">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> la variable de estado x y la señal de
control m son funciones escalares de t y en t = t₀ se
tiene:</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

```

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562896">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Nuestro problema es determinar la se&ntilde;al de control m que minimice la funci&oacute;n integral de criterio:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:81pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562897">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>en</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> donde la funci&oacute;n  $F(m, x, t)$  es diferenciable con respecto a sus argumentos.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Para aplicar las t&eacute;cnicas de las ecuaciones funcionales de la Programaci&oacute;n Din&aacute;mica, embeberemos el problema dentro del problema de minimizar la integral:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1028" type="#_x0000_t75" style='width:48pt;height:33.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="contminimaint_archivos/image007.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1028"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244562898">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'> Sujeta<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> a las relaciones:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1029" type="#_x0000_t75" style='width:57.75pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="contminimaint_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1029"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244562899">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1030" type="#_x0000_t75" style='width:45pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="contminimaint_archivos/image010.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1030"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244562900">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>

```



<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>sobre</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> el intervalo (t<sub>0</sub>, <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span>). Sea el m&iacutenimo dado por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562901">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:101.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562902">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>El m&iacutenimo se toma sobre toda m.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>El proceso de optimizaci&ocaron; se puede llevar a cabo en dos etapas. La primera de t a t +</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family: Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family: Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span>

$y$  la segunda de  $t$

Para el primero de los pasos la condici&ocute;n inicial es  $x(t)$ , con la se&ntilde;al de control inicial  $m(t)$ . Para el segundo paso la condici&ocute;n inicial  $x(t)$  sera  $x(t)$

Luego la funci&ocute;n  $f(x, t)$  es:

$$f(x, t) = \dots$$

Si aplicamos el principio de optimalidad obtenemos la ecuaci&ocute;n funcional:

$$f(x, t) = \dots$$

src="contminimaint\_archivos/image018.gif" v:shapes="\_x0000\_i1034">  
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562904">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
 font-family:Arial;color:blue'>que</span></span><span lang=ES style='font-size:  
 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> se reduce por integraci&oacute;n y expansi&oacute;n en  
 series de Taylor a:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:233.25pt;height:35.25pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562905">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>Simplificando:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:134.25pt;height:30.75pt'  
 o:ole="" fillcolor="window">  
 <v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562906">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
 color:blue'>Por c&aacute;culo elemental se pueden obtener las siguientes  
 ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562907">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:119.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562908">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Resolviendo para </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>d</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type: symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>x y </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;

mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>f</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span>de las dos ecuaciones anteriores tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:90.75pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562909">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:159pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562910">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Tomando las derivadas parciales de la ecuaci&acute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:90.75pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562911">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>con</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> respecto a t, tenemos:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:27.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image032.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562912">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Tomando las derivadas parciales de la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:159pt;height:53.25pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image034.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562913">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>tenemos</span></span><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:90pt;height:27.75pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562914">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>lo</span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que nos lleva a la ecuaci&oacute;n diferencial parcial de  
primer orden para m:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:243.75pt;height:27pt' o:ole=""  
fillcolor="window">  
<v:imagedata src="contminimaint\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244562915">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>La soluci&oacute;n de esta ecuaci&oacute;n determina la se&ntilde;al de control  
&oacute;ptimo m.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-  
family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

```

 </div></td>
 </tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.181 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. INTRODUCCION. MARCO 4j

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->

```



```

</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
<td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO · CONTROL DE MINIMA INTEGRAL
</div></td>
</tr>
</table>
<table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
<tr bgcolor="#FFE6FF">
<td width="174" height="18" valign="top"><div align="center">Control Mínima Integral
</div></td>
<td width="249" valign="top"><div align="center">Procesos Dependientes del Tiempo
</div></td>
<td width="199" valign="top"><div align="center">Sistemas Miltidimensionales
</div></td>
<td width="167" valign="top"><div align="center">Hamilton-Jacobi-
Bellman</div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<p> </p>
<p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.182 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. PROCESOS DE CONTROL DEPENDIENTES DEL TIEMPO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="proccontrdeptiempo_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="proccontrdeptiempo_archivos/editdata.mso">

```

```

<link rel=OLE-Object-Data href="procontrdeptiempo_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>PROCESOS DE CONTROL DEPENDIENTES DEL TIEMPO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-29T00:09:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-29T00:11:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>255</o:Words>
<o:Characters>1406</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>11</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1658</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}

```

```

@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>PROCESOS DE CONTROL DEPENDIENTES
DEL TIEMPO<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Consideremos el sistema descrito por la ecuación:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

```

```

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:63.75pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563112">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> las variables x y m son funciones escalares
de t, y t = t₀</o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:45pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563113">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>El problema es determinar la señal óptima de control m tal que la
integral de criterio:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1027" type="#_x0000_t75" style='width:81pt;height:36pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo_archivos/image005.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->

```

<![if !vml]>  
 src="proccontrdeptiempo\_archivos/image006.gif" v:shapes="\_x0000\_i1027">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563114">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>sea</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> minimizada.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si aplicamos el principio del embebimiento invariante transformamos el problema en un problema de minimizar la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:54pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 src="proccontrdeptiempo\_archivos/image008.gif" v:shapes="\_x0000\_i1028">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563115">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>sujeta</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> a las relaciones dadas en las ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
 src="proccontrdeptiempo\_archivos/image002.gif" v:shapes="\_x0000\_i1029">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563116">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:45pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="procontrdeptiempo\_archivos/image010.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563117">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> t corre en el intervalo (t<sub>0</sub>, t<sub>f</sub>). <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El m&iacute;nimo estar&aacute; dado por:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:104.25pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="procontrdeptiempo\_archivos/image011.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563118">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si aplicamos el principio de optimalidad obtenemos la ecuaci&oacute;n funcional:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;

color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:180pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image013.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563119">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> es un peque&ntilde;o intervalo de tiempo.</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si llevamos a cabo el procedimiento de caso anterior y simplificamos obtenemos</o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:177.75pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image015.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563120">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En el l&iacute;mite cuando </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;

mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> 0 la ecuaci&oacute;n se reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:146.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image017.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563121">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Por c&aacute;culo elemental se pueden obtener las siguientes ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image019.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563122">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape



id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:131.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563123">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Resolviendo para </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>d</span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>x y </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>f</span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family: Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family: Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'></span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial; mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol; mso-symbol-font-family:Symbol'>&para;</span></span></span><span lang=ES style='font-size: 10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t<span style='mso-spacerun:yes'>&nbsp;</span></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:53.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  


<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563124">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:176.25pt;height:53.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="proctrdeptiempo\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563125">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'>Tomando las derivadas parciales de la ecuaci&ocirc;n:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;  
color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:96.75pt;height:53.25pt'  
o:ole="" fillcolor="window">  
<v:imagedata src="proctrdeptiempo\_archivos/image027.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563126">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;  
font-family:Arial;color:blue'>con</span></span><span lang=ES style='font-size:  
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> respecto a t, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

```

<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1040" type="#_x0000_t75" style='width:126pt;height:27.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo_archivos/image028.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1040"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563127">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Tomando las derivadas parciales de la ecuación:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1041" type="#_x0000_t75" style='width:159pt;height:53.25pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo_archivos/image030.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1041"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563128">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>tenemos<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1042" type="#_x0000_t75" style='width:90pt;height:27.75pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="proccontrdeptiempo_archivos/image032.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]>
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1042"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563129">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]>

```

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>lo</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> que nos lleva a la ecuaci&oacute;n diferencial parcial de primer orden para m:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:327pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="proccontrdeptiempo\_archivos/image034.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563130">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La soluci&oacute;n de esta ecuaci&oacute;n determina la se&ntilde;al de control &oacute;ptimo m.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

### 3.183 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. SISTEMAS DE MULTIPLES DIMENSIONES

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"

xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"

xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"

xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>

<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">

<meta name=ProgId content=Word.Document>

<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">

<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">

<link rel=File-List href="sismultdimension\_archivos/filelist.xml">

<link rel=Edit-Time-Data href="sismultdimension\_archivos/editdata.mso">

<link rel=OLE-Object-Data href="sismultdimension\_archivos/oledata.mso">

<!--[if !mso]>

<style>

```

v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>SISTEMAS DE MULTIPLES DIMENSIONES</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>1</o:Revision>
<o:TotalTime>2</o:TotalTime>
<o:Created>2007-06-29T00:11:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-06-29T00:13:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>192</o:Words>
<o:Characters>1060</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>8</o:Lines>
<o:Paragraphs>2</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1250</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
text-align:justify;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:12.0pt;
mso-bidi-font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
mso-ansi-language:ES;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.0pt 792.0pt;
margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;

```

```

 mso-header-margin:36.0pt;
 mso-footer-margin:36.0pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>SISTEMAS DE MULTIPLES
DIMENSIONES</p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Podemos extender el an´lisis anterior para problemas de múltiples
variables. Consideremos el sistema de orden n que est´ descrito por la siguiente
ecuaci´n diferencial vectorial:</p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

```

```

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:60pt;
height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
<v:imagedata src="sismultdimension_archivos/image001.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1025"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563259">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>donde<span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x es el vector de estados,
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m es el vector de control
y<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>g es un vector diferenciable de sus
argumentos.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'>Las condiciones iniciales del sistema están dadas por el vector de estados
iniciales:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1026" type="#_x0000_t75" style='width:45.75pt;height:15pt' o:ole=""
fillcolor="window">
<v:imagedata src="sismultdimension_archivos/image003.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1026"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563260">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->

```

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El problema es determinar el vector de control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> que minimice la integral de criterio:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027" type="#\_x0000\_t75" style='width:78pt;height:36pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image005.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563261">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>El integrando <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b>(<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>, <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b>) es una funci&oacute;n escalar diferenciable del vector de estado y del vector de control.<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>De acuerdo con los argumentos presentados en las secciones anteriores, sea:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:33.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image007.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563262">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>



<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> t corre sobre el intervalo (t<sub>0</sub>, t<sub>f</sub>) y el m&iacute;nimo se toma sobre todo <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m</b> y:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:101.25pt;height:15pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563263">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>Si aplicamos el principio de optimalidad obtenemos de la ecuaci&oacute;n funcional:<o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:180.75pt;height:36.75pt' o:ole="" fillcolor="window">
 <v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif]-->
 <![if !vml]>
 
 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563264">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial; color:blue'>En el l&iacute;mite cuando </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt; font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial; mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;

mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> 0 la ecuaci&oacute;n se reduce a:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:137.25pt;height:30.75pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image013.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563265">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Por c&aacute;lculo elemental se pueden obtener las siguientes ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:74.25pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image015.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244563267">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal><span class=GramE><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:123pt;height:27pt' o:ole="" fillcolor="window">

<v:imagedata src="sismulldimension\_archivos/image017.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

```


<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244563268">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;
color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:blue'>y<span lang=ES style='font-size:
10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> de estas dos ecuaciones se puede obtener la
solución para <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>m.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>

</html>

```

### 3.184 CONTROL OPTIMO. CONTROL DE MINIMA INTEGRAL. LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="ecuahamiltonbellman_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="ecuahamiltonbellman_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="ecuahamiltonbellman_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>José Luis Pérez S.</o:Author>
<o:Template>Normal</o:Template>
<o:LastAuthor>José Luis Pérez Silva</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>202</o:TotalTime>
<o:LastPrinted>2003-04-08T19:41:00Z</o:LastPrinted>
<o:Created>2007-06-22T16:27:00Z</o:Created>

```

```

<o:LastSaved>2007-06-22T16:27:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>498</o:Words>
<o:Characters>2743</o:Characters>
<o:Company>CCADET</o:Company>
<o:Lines>22</o:Lines>
<o:Paragraphs>6</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3235</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
 {mso-style-parent:"";
 margin:0cm;
 margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:12.0pt;
 font-family:"Times New Roman";
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 mso-ansi-language:ES-TRAD;
 mso-fareast-language:ES-MX;}
span.Spelle
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.0pt 792.0pt;
 margin:70.85pt 3.0cm 70.85pt 3.0cm;
 mso-header-margin:35.4pt;
 mso-footer-margin:35.4pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;

```

```

 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:red'>LA ECUACION DE HAMILTON-JACOBI-
BELLMAN<span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;
font-family:Arial;color:red'><o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-
family:Arial'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>La aproximación de la
Programación dinámica nos llevóa una relación de recurrencia
que es ideal para ser operada en computadoras digitales. Ahora veremos una
aproximación alternativa que nos lleva a una ecuación diferencial parcial que se
denomina la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Deseamos controlar un proceso descrito por la
ecuación:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype
id="_x0000_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative=""
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>
</v:formulas>
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>
</v:shapetype><v:shape id="_x0000_i1025" type="#_x0000_t75" style='width:84.75pt;
height:15pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman_archivos/image001.wmz" o:title="">
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

```

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

minimizar la medida de comportamiento dada por:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

donde  $e^x$  y  $\ln x$  son funciones espec&iacute;ficas,  $t_0$  y  $f$  est&aacute;n fijos, y

es una variable de integraci&oacute;n muda. Si empleamos el principio del embebimiento invariante para incluir este problema en una clase de problemas mayor, tenemos:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

<![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017080">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 ,<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> t puede ser cualquier valor  
 menor o igual a <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span> y <b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t) puede ser cualquier valor de estado admisible.  
 Podemos ver que el comportamiento dependerá de los valores numéricos de  
 <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(</span>t), t, y de la historia  
 del control &acute;ptimo en el intervalo [t, <span  
 class=SpellE>t<sub>f</sub></span>].<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si determinamos el control que minimice la  
 ecuación anterior para todos los <span class=GramE><b  
 style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(</span>t) admisibles y para los todos t  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span  
 class=SpellE>t<sub>f</sub></span>. La función de costo mínima  
 será:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:207pt;height:41.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017081">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si dividimos el intervalo de tiempo  
 tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:299.25pt;height:41.25pt'

o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image010.gif" v:shapes="\_x0000\_i1029">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017082">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
, <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>pero</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> el principio de optimalidad  
requiere que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1030" type="#\_x0000\_t75" style='width:255.75pt;height:41.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image012.gif" v:shapes="\_x0000\_i1030">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017083">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
, <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>donde</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>J</b>\*( <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> (t +  
</span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t), t + </span><span  
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t) es el costo m&iacute;nimo del proceso para  
el intervalo de tiempo t + </span><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;  
mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:  
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;



mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>t</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&pound;</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> <span class=SpellE>t<sub>f</sub></span></span> con un estado inicial <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t).<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si asumimos que las segundas derivadas parciales de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>J</b>\* existen y est&aacute;n acotadas, podemos expandir <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>J</b>\*<span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b></span>t + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t), t + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t) en series de Taylor alrededor del punto <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>(t + </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t) para obtener:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1031" type="#\_x0000\_t75" style='width:290.25pt;height:77.25pt'  
o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]>  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>

```

<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1031"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244017084">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Para <span
lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:
Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;
mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:
symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D<span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t
pequeños
tenemos:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1032" type="#_x0000_t75" style='width:246.75pt;height:39pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman_archivos/image015.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1032"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244017085">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde:<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1033" type="#_x0000_t75" style='width:42pt;height:29.25pt' o:ole="">
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman_archivos/image017.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1033"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244017086">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
 <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y <o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape
id="_x0000_i1034" type="#_x0000_t75" style='width:41.25pt;height:29.25pt'
o:ole="">
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman_archivos/image019.wmz" o:title=""/>

```

</v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017087">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como no depende de <span  
 class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b></span>t) se obtiene de la  
 minimizaci&oacute;n lo siguiente:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:314.25pt;height:21.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017088">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Si dividimos entre </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t y tomamos el l&iacute;mite cuando  
 </span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:  
 Arial;color:blue;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span  
 style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>D</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>t </span><span  
 lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:  
 Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-bidi-font-family:Arial;color:blue;  
 mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:  
 symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>&reg;</span></span><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'> 0, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

<sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:273pt;height:21.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017089">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

. <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Para encontrar el valor de frontera para esta

ecuaci&oacute;n diferencial parcial, tomamos  $t =$  <span

class=SpellE><sub><math>f</math></sub></span> de la ecuaci&oacute;n: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:207pt;height:41.25pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017091">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span

lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>

tenemos: <o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD

style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape

id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:15pt' o:ole="">

<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image026.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

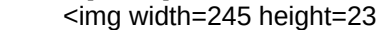
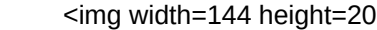
<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017092">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->  
 .<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Definimos la Hamiltoniana H como:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:249.75pt;height:17.25pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image028.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017093">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:231.75pt;height:21.75pt'  
 o:ole="">  
 <v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image030.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017094">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Como el control minimizado depender&aacute; de <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b>, <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>J</b>\*<b style='mso-bidi-font-weight:normal'><sub>x</sub></b></span> y t se obtiene la ecuaci&oacute;n de Hamilton-<span class=SpellE>Jacobi</span>:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape  
 id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:183.75pt;height:17.25pt'

o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image032.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image033.gif" v:shapes="\_x0000\_i1041">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017095">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Esta es la ecuaci&oacute;n continua  
an&aacute;loga a la ecuaci&oacute;n de recurrencia de <span class=Spelle>Bellman</span>  
por lo que se llama la ecuaci&oacute;n de Hamilton-<span class=Spelle>Jacobi</span>-<span  
class=Spelle>Bellman</span>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Haremos algunas observaciones acerca de la  
ecuaci&oacute;n de Hamilton-<span class=Spelle>Jacobi</span>-<span  
class=Spelle>Bellman</span>.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>En la obtenci&oacute;n de la  
ecuaci&oacute;n asumimos que <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span> es fijo, por lo que  
los resultados cambian si <span class=Spelle>t<sub>f</sub></span> es libre. Por ejemplo si S  
representa alguna hipersuperficie en el espacio de estados y <span  
class=Spelle>t<sub>f</sub></span> est&aacute; definido como el primer tiempo en que la  
trayectoria del sistema interfecta a S, la condici&oacute;n de frontera  
es:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape  
id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:108pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image034.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif-->  
<![if !vml]>  

src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image027.gif" v:shapes="\_x0000\_i1042">  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017096">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif-->  
.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Lo anterior es una condici&oacute;n  
necesaria para la optimalidad, esto es, la funci&oacute;n de m&iacute;nimo costo <b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>J</b><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>(<span

class=GramE>x<span style='font-weight:normal'>(</span></span></b>t),t) debe satisfacer la ecuaci&oacute;n de Hamilton-<span class=SpellE>Jacobi</span>-<span class=SpellE>Bellman</span>.</p></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'>Tambi&eacute;n es claro que si existe una funci&oacute;n de costo <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>J</b>'<b style='mso-bidi-font-weight:normal'>(<span class=GramE>x<span style='font-weight:normal'>(</span></span></b>t),t) que satisface la ecuaci&oacute;n de Hamilton-<span class=SpellE>Jacobi</span>-<span class=SpellE>Bellman</span>, luego J' es la funci&oacute;n de m&iacute;nimo costo, por ejemplo:</p></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:111pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="ecuahamiltonbellman\_archivos/image035.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244017097">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

.</p></o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='font-size:10.0pt;font-family:Arial;color:blue'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

</div></td>

</tr>

</table>

</body>

</html>

### 3.185 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. INTRODUCCION.

```
<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="contlinoptretro_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="contlinoptretro_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="contlinoptretro_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:.* {behavior:url(#default#VML);}
o\:.* {behavior:url(#default#VML);}
w\:.* {behavior:url(#default#VML);}
```

```

.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>5</o:Revision>
<o:TotalTime>150</o:TotalTime>
<o:Created>2007-07-01T20:15:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-07-01T20:40:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>545</o:Words>
<o:Characters>3002</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>25</o:Lines>
<o:Paragraphs>7</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>3540</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
span.Spelle
{mso-style-name:"";
mso-spl-e:yes;}
span.GramE
{mso-style-name:"";
mso-gram-e:yes;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;

```



```

 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapedefaults v:ext="edit" spidmax="3074"/>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<o:shapelayout v:ext="edit">
<o:idmap v:ext="edit" data="1"/>
</o:shapelayout></xml><![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<div class=Section1>

<table class=MsoNormalTable border=0 cellspacing=0 cellpadding=0 width=785
style='width:588.75pt;mso-cellspacing:0cm;mso-padding-alt:7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<tr style='mso-yfti-irow:0;mso-yfti-lastrow:yes'>
<td style='padding:7.5pt 7.5pt 7.5pt 7.5pt'>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>CONTROL LINEAL OPTIMO
RETROALIMENTADO<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a estudiar como realizar un control
óptimo para índices cuadráticos de
comportamiento. Con el propósito de demostrar principios básicos sin un
riguroso detalle, empezaremos por tratar un sistema de control lineal de
primer orden, para después generalizar los resultados para sistemas de orden
finito.<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si obtenemos una ley de control para
sistemas retroalimentados cuando no está especificado el lado derecho de la
trayectoria y cuando u²
está involucrada en el índice de comportamiento J sin constricciones u. Como
no se especifica el estado blanco, vamos a emplear las condiciones de transversabilidad para el índice de comportamiento con la

```

ecuación: 
$$\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \dot{u}^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{u}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt$$

$$\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \dot{u}^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{u}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt$$

y un sistema de control de primer orden lineal y estacionario dado por:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 u_d$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural y  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento. El factor de peso  $w$  es mayor o igual a cero y  $T$  es el tiempo final. La magnitud cuadrática de control  $u^2$  involucrada en  $J$  penaliza magnitudes muy grandes de la entrada de control.





src="continoptretro\_archivos/image014.gif" v:shapes="\_x0000\_i1031"><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809653">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032" type="#\_x0000\_t75" style='width:141pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image080.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809654">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:102pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image081.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809655">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:99pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image082.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809656">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:141.75pt;height:29.25pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image083.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809657">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036" type="#\_x0000\_t75" style='width:69pt;height:18.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image084.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809658">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>por lo que tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037" type="#\_x0000\_t75" style='width:84.75pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image085.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809659">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038" type="#\_x0000\_t75" style='width:92.25pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image086.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809660">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039" type="#\_x0000\_t75" style='width:186pt;height:30.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image087.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809661">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040" type="#\_x0000\_t75" style='width:95.25pt;height:17.25pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image088.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809662">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>es</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> una propiedad de la matriz solución.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD

Como no se especificó el estado final  $x(T)$ , tenemos la condición de <span class=SpellE>transversalidad</span>

<span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span></span><span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'>(T) =

0

luego por las ecuaciones:

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:192pt;height:41.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image089.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809664"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</p></span></p>

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:186pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image087.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809665"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></p></span></p>

tenemos:

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:179.25pt;height:15pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image090.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809666"></o:OLEObject></xml><!--[endif]></p></p></span></p>

o

<span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:27pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image091.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809667">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045" type="#\_x0000\_t75" style='width:84pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image092.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809668">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>como el control óptimo es<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046" type="#\_x0000\_t75" style='width:42pt;height:27pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image077.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1046"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809669">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>tenemos que<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1047" type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image093.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1047"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809670">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]><!--><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde la ganancia del control retroalimentado variante en el tiempo  $g(t)$ , está dada por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1048" type="#\_x0000\_t75" style='width:273pt;height:30.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image094.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1048"



DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809671">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>En la figura se muestra un esquema de este control.<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1049" type="#\_x0000\_t75" style='width:419.25pt;height:257.25pt'>  
<v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image045.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El control se aplica sólo durante un tiempo establecido de 0 a T. Para obtener la ganancia variante en el tiempo <span class=GramE>g(</span>t) vamos a obtener una ecuación diferencial para g(t) y h(t). Si sustituimos:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1050" type="#\_x0000\_t75" style='width:48pt;height:27pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image095.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809672">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>en la ecuación diferencial para </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>, <o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1051" type="#\_x0000\_t75" style='width:195.75pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image096.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1051" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809673">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1052" type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:27.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="continoptretro\_archivos/image097.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1052"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809674">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>por lo que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1053"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:114pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image098.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1053"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809675">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>si sustituimos h por:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><span  
 lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-  
 TRAD'>bh</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> =  
 g<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1054"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:101.25pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image099.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1054"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809676">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]></o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La ganancia óptima es constante si T <span  
 class=GramE>= </span></span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;  
 mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:  
 ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>¥</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>.<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Esta solución óptima de control por  
 retroalimentación de un sistema de primer orden se puede generalizar a  
 sistemas de orden n como<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1055"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:65.25pt;height:27.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image100.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]><!--[if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1055"

DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809677">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a redefinir el índice de comportamiento de la forma:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1056" type="#\_x0000\_t75" style='width:102.75pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image101.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1056" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809678">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Para obtener la ley de control escribimos </span><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>(t) como:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1057" type="#\_x0000\_t75" style='width:78.75pt;height:27pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image102.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1057" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809679">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>sin</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que realmente evaluemos la solución a la matriz S(t). Esto se justifica por la relación:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1058" type="#\_x0000\_t75" style='width:209.25pt;height:33pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image103.wmz" o:title="">  
</v:shape><![endif]--><![if !vml]><![endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1058" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809680">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='font-family:Symbol;mso-ascii-font-family:Arial;mso-hansi-font-family:Arial;color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD;mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'><span style='mso-char-type:symbol;mso-symbol-font-family:Symbol'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='color:black;mso-ansi-language:ES-TRAD'>(t) =

0<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>luego<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1059" type="#\_x0000\_t75" style='width:212.25pt;height:27pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image104.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1059" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809681"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La ley óptima de control para este sistema es:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1060" type="#\_x0000\_t75" style='width:77.25pt;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image105.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1060" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809682"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1061" type="#\_x0000\_t75" style='width:1in;height:17.25pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image106.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1061" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244809683"></o:OLEObject></xml><!--[endif]><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y H(t) debe satisfacer la ecuación diferencial:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub><!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1062" type="#\_x0000\_t75" style='width:152.25pt;height:27.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="contlinoptretro\_archivos/image107.wmz" o:title=""/></v:shape><!--[endif]><!--[if !vml]><!--[endif]></sub><!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1062"

```

 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244809684">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif]--><o:p></o:p></p>
</td>
</tr>
</table>

<p class=MsoNormal><span style='font-size:12.0pt;font-family:"Times New Roman";
color:windowtext;mso-ansi-language:ES-MX'><o:p> </o:p></p>

</div>

</body>

</html>

```

### 3.186 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. INTRODUCCION. MARCO 4k

```

<!DOCTYPE HTML PUBLIC "-//W3C//DTD HTML 4.01 Transitional//EN"
"http://www.w3.org/TR/html4/loose.dtd">
<html>
<head>
<title>Untitled Document</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body {
 background-color: #FFFFFF;
 margin-left: 10px;
 margin-top: 0px;
 margin-right: 0px;
 margin-bottom: 0px;
}
.style12 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10px;
}
a:link {
 color: #990033;
 text-decoration: none;
}
a:visited {
 text-decoration: none;
 color: #990033;
}
a:hover {
 text-decoration: none;
 color: #0000FF;
}
a:active {
 text-decoration: none;
 color: #FF0000;
}
.style16 {
 font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 font-weight: bold;
 color: #FFFFFF;
}

```

```

}
.style4 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif;
 font-size: 10pt;
 color: #000000;
 font-weight: bold;
}
.style19 {font-size: 10px}
.style21 {font-family: Arial, Helvetica, sans-serif; font-size: 10pt; color: #990033; font-weight:
bold; }
-->
</style></head>

<body>
<table width="789" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0">
<tr>
<td width="617">P´gina Principal >
Curso de Control > Control Optimo</td>
<td width="172"><a href="../cursocontrol.htm"
target="_parent"><< Regresar a la P´gina Principal </td>
</tr>
</table>
<div align="left">
<table width="789" border="0" cellspacing="0" cellpadding="0">
<tr>
<td width="788" background="../figuras/control2.gif"><div align="center">CONTROL OPTIMO· CONTROL LINEAL OPTIMO
RETROALIMENTADO </div></td>
</tr>
</table>
<table width="789" height="18" border="0" cellpadding="0" cellspacing="0"
bordercolor="#FFD7FF">
<tr bgcolor="#FFE6FF">
<td width="245" height="18" valign="top"><div align="center">Control Optimo Retroalimentado
</div></td>
<td width="256" valign="top"><div align="center">Control Optimo de Tiempo Discreto
</div></td>
<td width="288" valign="top"><div align="center">Control Optimo de Sistemas
Estoc´sticos </div></td>
</tr>
</table>
<p> </p>
<p> </p>
<p> </p>
</div>
<p> </p>
</body>
</html>

```

### 3.187 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. CONTROL OPTIMO DE TIEMPO DISCRETO

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

```

```

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="contopttiempodiscreto_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="contopttiempodiscreto_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="contopttiempodiscreto_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}
o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL OPTIMO DE TIEMPO DISCRETO</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>154</o:TotalTime>
<o:Created>2007-07-01T20:17:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-07-01T20:17:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>434</o:Words>
<o:Characters>2389</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>19</o:Lines>
<o:Paragraphs>5</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>2818</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:SpellingState>Clean</w:SpellingState>
<w:GrammarState>Clean</w:GrammarState>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;

```

```

 font-size:10.0pt;
 font-family:Arial;
 mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
 color:blue;
 mso-ansi-language:ES;}
span.SpellE
 {mso-style-name:"";
 mso-spl-e:yes;}
span.GramE
 {mso-style-name:"";
 mso-gram-e:yes;}
@page Section1
 {size:612.1pt 792.1pt;
 margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
 mso-header-margin:35.45pt;
 mso-footer-margin:35.45pt;
 mso-paper-source:0;}
div.Section1
 {page:Section1;}
-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
 {mso-style-name:"Tabla normal";
 mso-tstyle-rowband-size:0;
 mso-tstyle-colband-size:0;
 mso-style-noshow:yes;
 mso-style-parent:"";
 mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
 mso-para-margin:0cm;
 mso-para-margin-bottom:.0001pt;
 mso-pagination:widow-orphan;
 font-size:10.0pt;
 font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
 <p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>CONTROL OPTIMO DE TIEMPO DISCRETO<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal>El
principio del máximo se puede aplicar a sistemas de tiempo discreto con algunas
modificaciones. Consideremos el sistema de control descrito por la ecuación
diferencial<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b
style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;
mso-ansi-language:ES-TRAD'>X<sub><span lang=ES-TRAD
style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>k+1</sub><span

```



lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f</b></span><span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k</sub></span>, <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U</b><sub>k</sub></span>, k)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Y el &iacute;ndice de comportamiento<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="\_x0000\_t75" coordsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t" path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe" filled="f" stroked="f">

<v:stroke joinstyle="miter"/>

<v:formulas>

<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>

<v:f eqn="sum @0 1 0"/>

<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>

<v:f eqn="prod @2 1 2"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @0 0 1"/>

<v:f eqn="prod @6 1 2"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>

<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>

<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>

<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

</v:formulas>

<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>

<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>

</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt; height:30.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image001.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]>>

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1025" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808226">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]>>

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> N es el n&uacute;mero de periodos del control &oacute;ptimo. No conocemos <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>. Ya que <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>N-1</sub> es el &uacute;ltimo control aplicado y <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>N</sub></span> es el estado final. El incremento de <span class=SpellE>f<sub>n</sub></span> se expresa como una funci&oacute;n de <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k+1</sub></span> y <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span> para el periodo desde <span class=SpellE>kT</span> a (<span class=SpellE>k+1</span><span class=

class=GramE>)T</span>, donde T es el periodo de muestreo. Por lo tanto <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k+1</sub></span> es el estado que alcanza el sistema cuando termina el periodo; luego la condici&ocute;n para la elecci&ocute;n &ocute;ptima de <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span> se basa en<b style='mso-bidi-font-weight:normal'> <span class=Spelle>x<sub><span style='font-weight:normal'>k</span></sub></span></b> en lugar de <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k+1</sub></span>. Es por esto que en f\*<sub>0</sub> debemos reemplazar el lado derecho de la ecuaci&ocute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>X</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>k+1</span></sub></span><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = <span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f</b></span><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k</sub></span>, <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>U</b><sub>k</sub></span>, k)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>por</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>f</span></b><sub><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>0</span></sub><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>\*(<span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k+1</sub></span>, <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>, k) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f</b><sub>0</sub>\*(<span class=GramE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f</b></span><span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k+1</sub></span>, <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>, k), <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>, k) = <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>f</b><sub>0</sub>(<span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k</sub></span>, <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>, k)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Como en la ecuaci&ocute;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026" type="#\_x0000\_t75" style='width:98.25pt;height:30.75pt' o:ole=""><v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image001.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]><![endif]></sub>

<!--[if gte mso 9]><xml><o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808227"></o:OLEObject></xml><![endif]--><o:p></o:p></span></p>

$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$

variable de estado cero se asigna al índice de comportamiento, así que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si combinamos  $\mathbf{x}$  y el vector de estado  $\mathbf{u}$  en el vector  $\mathbf{X}$  se obtiene la ecuación de movimiento del vector de desviación:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

donde

class=GramE><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'>f<sup>k</sup></span></span></span><span lang=ES-TRAD style='color:windowtext;mso-ansi-language:ES-TRAD'> = f(<span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b><sub>k</sub></span>, <span class=Spelle><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b><sub>k</sub></span>, k)<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Vamos a definir el vector <span class=Spelle>coestado</span> por la matriz <span class=Spelle>Jacobiana</span> transpuesta:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1028" type="#\_x0000\_t75" style='width:171pt;height:93pt' o:ole=""><v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image005.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1028" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808229">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Podemos ver que la secuencia de k a <span class=Spelle>k+a</span> es inversa, en lugar de usar la transpuesta negativa de la matriz <span class=Spelle>jacobiana</span>. Si escribimos la matriz <span class=Spelle>jacobiana</span> como <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>M</b> de la ecuaci&ocute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1029" type="#\_x0000\_t75" style='width:180pt;height:93pt' o:ole=""><v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image003.wmz" o:title=""/></v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>

<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1029" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808230">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>obtenemos</span></span></span>

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD':<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1030"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:66.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image007.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1030"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808231">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1031"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:63.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image009.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1031"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808232">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>as&iacut;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> que:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1032"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:243pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image011.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1032"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808233">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>o</span></span><span

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1033" type="#\_x0000\_t75" style='width:63pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image013.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1033" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808234">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si el sistema de control es lineal, pero variante en el tiempo, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1034" type="#\_x0000\_t75" style='width:87.75pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image015.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1034" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808235">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> si el &acute;ndice de comportamiento es cuadr&acute;tico en t&eacute;minos de la simetr&iacute;a de la matriz de pesos <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>x,k</sub></span> y <span class=SpellE><b style='mso-bidi-font-weight:normal'>F</b><sub>u,k</sub></span> para un estado <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>x</b> y un control <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u</b>, tenemos:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1035" type="#\_x0000\_t75" style='width:153pt;height:30.75pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image017.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1035"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808236">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>por</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> lo que las  
 ecuaciones:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1036"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:180pt;height:93pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1036"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808237">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1037"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:236.25pt;height:15pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image019.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1037"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808238">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>toman</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> la siguiente  
 forma<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1038"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:138.75pt;height:30pt" o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1038"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808239">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>y</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1039"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:171.75pt;height:15pt" o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image023.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1039"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808240">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>donde</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1040"  
 type="#\_x0000\_t75" style="width:390pt;height:33pt" o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]>>  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1040"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808241">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]>>  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>La relaci&ocute;n de igualdad para la cantidad escalar  
 es:<o:p></o:p></span></p>



<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1041" type="#\_x0000\_t75" style='width:161.25pt;height:15.75pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image027.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1041" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808242">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>se</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> utiliza en el proceso de reducci&ocirc;n. Determinaremos el t&eacute;rmino gradiente en<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1042" type="#\_x0000\_t75" style='width:138.75pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image021.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1042" DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808243">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>de</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> la

ecuaci&ocirc;n<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1043" type="#\_x0000\_t75" style='width:390pt;height:33pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image025.wmz" o:title="">

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1043"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808244">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>como</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1044"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:393.75pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image029.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1044"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808245">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>as&iacute;</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>que la  
 ecuaci&oacute;n<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1045"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:138.75pt;height:30pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image021.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->  
 <![if !vml]>  
   
 <![endif]>  
 </sub>  
 <!--[if gte mso 9]><xml>  
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1045"  
 DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244808246">  
 </o:OLEObject>  
 </xml><![endif]-->  
 <o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>llega</span></span><span  
 lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>a ser:<o:p></o:p></span></p>  
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
 style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1046"  
 type="#\_x0000\_t75" style='width:141.75pt;height:27pt' o:ole="">  
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image031.wmz" o:title=""/>  
 </v:shape><![endif]-->

```

</v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1046"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244808247">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>De acuerdo con el principio discreto del máximo,
un control óptimo debe satisfacer:<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1047"
type="#_x0000_t75" style='width:39pt;height:30pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto_archivos/image033.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1047"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244808249">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>luego<o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
 <!--[if gte vml 1]><v:shape id="_x0000_i1048"
type="#_x0000_t75" style='width:123.75pt;height:30pt' o:ole="">
 <v:imagedata src="contopttiempodiscreto_archivos/image035.wmz" o:title=""/>
 </v:shape><![endif-->
 <![if !vml]>

 <![endif]>
 </sub>
 <!--[if gte mso 9]><xml>
 <o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1048"
 DrawAspect="Content" ObjectID="_1244808250">
 </o:OLEObject>
 </xml><![endif-->
 <o:p></o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
 <p class=MsoNormal style='text-align:justify'>donde<span

```

lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> el t&eacute;rmino gradiente se calcula de la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1049" type="# \_x0000\_t75" style='width:390pt;height:33pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image025.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID=" \_x0000\_i1049" DrawAspect="Content" ObjectID=" \_1244808251">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span class=GramE><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>como</span></span><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1050" type="# \_x0000\_t75" style='width:461.25pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image037.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

</sub>

<!--[if gte mso 9]><xml>

<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID=" \_x0000\_i1050" DrawAspect="Content" ObjectID=" \_1244808252">

</o:OLEObject>

</xml><![endif]-->

<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Si sustituimos la ecuaci&oacute;n anterior en la ecuaci&oacute;n:<o:p></o:p></span></p>

<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>

<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>

<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" \_x0000\_i1051" type="# \_x0000\_t75" style='width:123.75pt;height:30pt' o:ole="">

<v:imagedata src="contopttiempodiscreto\_archivos/image035.wmz" o:title=""/>

</v:shape><![endif]-->

<![if !vml]>



<![endif]>

```

</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1051"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244808253">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'>y resolvemos para <b style='mso-bidi-font-weight:normal'>u_k,
encontramos el control óptimo<o:p></o:p></p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p> </o:p></p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>
<!--[if gte vml 1]><v:shape id=" _x0000_i1052"
type="# _x0000_t75" style='width:141pt;height:27pt' o:ole="">
<v:imagedata src="contopttiempodiscreto_archivos/image039.wmz" o:title=""/>
</v:shape><![endif]-->
<![if !vml]>

<![endif]>
</sub>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="_x0000_i1052"
DrawAspect="Content" ObjectID="_1244808254">
</o:OLEObject>
</xml><![endif]-->
<o:p></o:p></p>
</div></td>
</tr>
</table>
</body>
</html>

```

### 3.188 CONTROL OPTIMO. CONTROL LINEAL OPTIMO RETROALIMENTADO. CONTROL OPTIMO DE RETROALIMENTACION DE SISTEMAS LINEALES ESTOCASTICOS

```

<html xmlns:v="urn:schemas-microsoft-com:vml"
xmlns:o="urn:schemas-microsoft-com:office:office"
xmlns:w="urn:schemas-microsoft-com:office:word"
xmlns="http://www.w3.org/TR/REC-html40">

<head>
<meta http-equiv=Content-Type content="text/html; charset=windows-1252">
<meta name=ProgId content=Word.Document>
<meta name=Generator content="Microsoft Word 10">
<meta name=Originator content="Microsoft Word 10">
<link rel=File-List href="conoptretroestocas_archivos/filelist.xml">
<link rel=Edit-Time-Data href="conoptretroestocas_archivos/editdata.mso">
<link rel=OLE-Object-Data href="conoptretroestocas_archivos/oledata.mso">
<!--[if !mso]>
<style>
v\:* {behavior:url(#default#VML);}

```

```

o\:* {behavior:url(#default#VML);}
w\:* {behavior:url(#default#VML);}
.shape {behavior:url(#default#VML);}
</style>
<![endif]-->
<title>CONTROL OPTIMO DE RETROALIMENTACION DE SISTEMAS LINEALES
ESTOCASTICOS</title>
<!--[if gte mso 9]><xml>
<o:DocumentProperties>
<o:Author>HHMM</o:Author>
<o:LastAuthor>HHMM</o:LastAuthor>
<o:Revision>2</o:Revision>
<o:TotalTime>123</o:TotalTime>
<o:Created>2007-07-01T20:13:00Z</o:Created>
<o:LastSaved>2007-07-01T20:13:00Z</o:LastSaved>
<o:Pages>1</o:Pages>
<o:Words>265</o:Words>
<o:Characters>1462</o:Characters>
<o:Company>CCADET, UNAM</o:Company>
<o:Lines>12</o:Lines>
<o:Paragraphs>3</o:Paragraphs>
<o:CharactersWithSpaces>1724</o:CharactersWithSpaces>
<o:Version>10.2625</o:Version>
</o:DocumentProperties>
</xml><![endif]--><!--[if gte mso 9]><xml>
<w:WordDocument>
<w:HyphenationZone>21</w:HyphenationZone>
<w:DrawingGridHorizontalSpacing>6 pto</w:DrawingGridHorizontalSpacing>
<w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>2</w:DisplayHorizontalDrawingGridEvery>
<w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>2</w:DisplayVerticalDrawingGridEvery>
<w:Compatibility>
<w:BreakWrappedTables/>
<w:SnapToGridInCell/>
<w:WrapTextWithPunct/>
<w:UseAsianBreakRules/>
</w:Compatibility>
<w:BrowserLevel>MicrosoftInternetExplorer4</w:BrowserLevel>
</w:WordDocument>
</xml><![endif]-->
<style>
<!--
/* Style Definitions */
p.MsoNormal, li.MsoNormal, div.MsoNormal
{mso-style-parent:"";
margin:0cm;
margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:Arial;
mso-fareast-font-family:"Times New Roman";
color:blue;
mso-ansi-language:ES;}
@page Section1
{size:612.1pt 792.1pt;
margin:70.9pt 70.9pt 70.9pt 70.9pt;
mso-header-margin:35.45pt;
mso-footer-margin:35.45pt;
mso-paper-source:0;}
div.Section1
{page:Section1;}

```

```

-->
</style>
<!--[if gte mso 10]>
<style>
/* Style Definitions */
table.MsoNormalTable
{mso-style-name:"Tabla normal";
mso-tstyle-rowband-size:0;
mso-tstyle-colband-size:0;
mso-style-noshow:yes;
mso-style-parent:"";
mso-padding-alt:0cm 5.4pt 0cm 5.4pt;
mso-para-margin:0cm;
mso-para-margin-bottom:.0001pt;
mso-pagination:widow-orphan;
font-size:10.0pt;
font-family:"Times New Roman";}
</style>
<![endif]-->
</head>

<body lang=ES-MX style='tab-interval:35.4pt'>

<table width="785" border="0" cellspacing="0" cellpadding="10">
<tr>
<td><div class=Section1>
<p class=MsoNormal><b style='mso-bidi-font-weight:normal'><span lang=ES-TRAD
style='color:red;mso-ansi-language:ES-TRAD'>CONTROL OPTIMO DE
RETROALIMENTACION DE SISTEMAS LINEALES
ESTOCASTICOS</p>
<p class=MsoNormal><span lang=ES-TRAD style='mso-ansi-language:ES-
TRAD'> </p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>El algoritmo ´ptimo de control de
retroalimentaci´n para sistemas determinísticos en el tiempo, se puede aplicar a
sistemas ´ptimos de control estoc´sticos mediante la inserci´n de un
filtro ´ptimo en la red de retroalimentaci´n, como se muestra en la
figura.</p>
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'> </p>
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>
<!--[if gte vml 1]><v:shapetype id="_x0000_t75"
coorsize="21600,21600" o:spt="75" o:preferrelative="t"
path="m@4@5l@4@11@9@11@9@5xe"
filled="f" stroked="f">
<v:stroke joinstyle="miter"/>
<v:formulas>
<v:f eqn="if lineDrawn pixelLineWidth 0"/>
<v:f eqn="sum @0 1 0"/>
<v:f eqn="sum 0 0 @1"/>
<v:f eqn="prod @2 1 2"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="prod @3 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @0 0 1"/>
<v:f eqn="prod @6 1 2"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelWidth"/>
<v:f eqn="sum @8 21600 0"/>
<v:f eqn="prod @7 21600 pixelHeight"/>
<v:f eqn="sum @10 21600 0"/>

```

</v:formulas>  
<v:path o:extrusionok="f" gradientshapeok="t" o:connecttype="rect"/>  
<o:lock v:ext="edit" aspectratio="t"/>  
</v:shapetype><v:shape id="\_x0000\_i1025" type="#\_x0000\_t75" style='width:261.75pt; height:114.75pt'>  
<v:imagedata src="conoptretroestocas\_archivos/image001.png" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'>Un sistema estoc&aacute;stico de control se considera  
lineal si est&aacute; sujeto a una gaussiana de valor medio cero, con un vector de entrada <b  
style='mso-bidi-font-weight:normal'>w</b><sub>k</sub> con una medida que est&aacute;  
tambi&eacute;n perturbada por una gaussiana de promedio cero, de ruido blanco dada por el  
vector:<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1026"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:135pt;height:15.75pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="conoptretroestocas\_archivos/image003.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1026"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244807975">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal align=center style='text-align:center'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><sub>  
<!--[if gte vml 1]><v:shape id="\_x0000\_i1027"  
type="#\_x0000\_t75" style='width:71.25pt;height:15pt' o:ole="">  
<v:imagedata src="conoptretroestocas\_archivos/image005.wmz" o:title=""/>  
</v:shape><![endif]-->  
<![if !vml]>  
  
<![endif]>  
</sub>  
<!--[if gte mso 9]><xml>  
<o:OLEObject Type="Embed" ProgID="Equation.3" ShapeID="\_x0000\_i1027"  
DrawAspect="Content" ObjectID="\_1244807976">  
</o:OLEObject>  
</xml><![endif]-->  
<o:p></o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD  
style='mso-ansi-language:ES-TRAD'><o:p>&nbsp;</o:p></span></p>  
<p class=MsoNormal style='text-align:justify'><span lang=ES-TRAD





[illegible]



**G** y **K** encontrar un estado estacionario si son estacionarios el sistema de control, el ruido, los pesos y el periodo de optimizaci3n es indefinido.

Los ındices de comportamiento para el caso estacionario se expresan en t3rminos de valores cuadr3ticos medios de variables como:

